Capitolo 3

La dualità nella Programmazione Lineare

3.1 Teoria della dualità

Esercizio 3.1.1 *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{l} \min x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Soluzione.
Riscriviamo innanzitutto il vincolo $x_2 - x_3 \leq 3$ nella forma $-x_2 + x_3 \geq -3$.
Il problema duale è:

$$\begin{array}{l} \max 3u_1 - 3u_2 + 2u_3 \\ 2u_1 + u_3 \leq 1 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 \leq -1 \\ u_2 + u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

$\square$

Esercizio 3.1.2 *Scrivere il problema duale e le condizioni di complementarità del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \end{array}$$

Soluzione.
Il problema duale è

$$\begin{aligned}
&\max 5u_1 + 3u_2 \\
&u_1 + 2u_2 = 3 \\
&u_2 = 2 \\
&-3u_1 - u_2 = 1 \\
&2u_1 = 4 \\
&u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Poiché il duale ha solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a

$$u^T(Ax - b) = 0$$

cioè a:

$$\begin{aligned}
&u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) = 0 \\
&u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) = 0.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 3.1.3 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&2x_1 + 3x_4 = 1 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4
\end{aligned} \qquad (P)$$

Sia $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)^T$ *una soluzione ammissibile per (P) e sia* $\bar{u} = (1, 1/3)^T$ *una soluzione ammissibile per il problema duale associato a (P).*

(i) *Scrivere il problema duale di (P).*

(ii) *Dire se* $\bar{x}$ *è una soluzione ottima di (P) e dimostrare l'affermazione utilizzando le condizioni di complementarità.*

Soluzione.
Il problema duale di (P) è:

$$\begin{aligned}
&\max 2u_1 + u_2 \\
&u_1 + 2u_2 \leq 2 \\
&u_1 \leq 3 \\
&u_1 \leq 1 \\
&3u_2 \leq 1
\end{aligned}$$

Poiché (P) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ cioè:

$$\begin{aligned}
&x_1(2 - u_1 - 2u_2) = 0 \\
&x_2(3 - u_1) = 0 \\
&x_3(1 - u_1) = 0 \\
&x_4(1 - 3u_2) = 0
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili $\bar{x}$, $\bar{u}$ rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione $\bar{x}$ è effettivamente ottima per il primale e $\bar{u}$ è ottima per il duale. □

Esercizio 3.1.4 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\min 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4\\
&x_1 - x_2 + x_3 = 2\\
&x_1 + x_3 + 2x_4 = 5\\
&x_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

decidere se la soluzione $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ *è ottima per il problema duale.*

Soluzione.
Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
&\max\ 2u_1 + 5u_2\\
&u_1 + u_2 \leq 3\\
&-u_1 \leq 4\\
&u_1 + u_2 \leq 1\\
&2u_2 \leq 1
\end{aligned}$$

Le condizioni di complementarità si scrivono:

$$\begin{aligned}
&x_1(3 - u_1 - u_2) = 0\\
&x_2(4 + u_1) = 0\\
&x_3(1 - u_1 - u_2) = 0\\
&x_4(1 - 2u_2) = 0
\end{aligned}$$

Nel punto assegnato u^* le ultime due equazioni sono soddisfatte per qualunque valore di x_3, x_4, mentre le prime due equazioni sono soddisfatte se e solo se $x_1 = 0$ ed $x_2 = 0$. Si tratta di verificare se esiste una soluzione ammissibile del primale con $x_1 = x_2 = 0$. Si pongono a zero le variabili x_1 ed x_2 nel problema primale e si ottiene il problema:

$$\begin{aligned}
&\min x_3 + x_4\\
&x_3 = 2\\
&x_3 + 2x_4 = 5\\
&x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Una soluzione ammissibile per questo problema si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}
x_3 = 2\\
x_3 + 2x_4 = 5\\
x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{cases}$$

che ha per soluzione $x_3 = 2$ e $x_4 = \dfrac{3}{2}$. Il punto $(0,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 3/2)^T$ è una soluzione ammissibile per il problema primale che soddisfa le condizioni di complementarità e quindi $u^* = (1/2,\ 1/2)^T$ è ottima per il duale. □

Esercizio 3.1.5 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\max(-x_1 - x_2)\\
&-x_1 + x_2 \geq 1\\
&2x_1 - x_2 \leq 2\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

scrivere il problema duale. Risolvere il problema primale e il problema duale graficamente e verificare il risultato del Teorema della dualità forte.

Innanzitutto riscriviamo il problema nella forma

$$\begin{aligned}&\max(-x_1 - x_2)\\&x_1 - x_2 \leq -1\\&2x_1 - x_2 \leq 2\\&x_1 \geq 0\\&x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Il problema duale è

$$\begin{aligned}&\min(-u_1 + 2u_2)\\&u_1 + 2u_2 \geq -1\\&-u_1 - u_2 \geq -1\\&u_1 \geq 0\\&u_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Risolvendo graficamente i due problemi si ottiene

$$x^\star = (0,1)^T \qquad \text{e} \qquad u^\star = (-1,0)^T.$$

In corrispondenza di questi punti risulta

$$c^T x^\star = -1 = b^T u^\star$$

e quindi il Teorema della dualità forte è verificato. □

Esercizio 3.1.6 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}&\min 2x_1 + 9x_2 + 3x_2\\&-2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1\\&x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1\\&x_1 \geq 0\\&x_2 \geq 0\\&x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

a) *Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.*

b) *Utilizzando la complementarità determinare la soluzione del problema primale.*

a) Il problema duale del problema dato è

$$\begin{aligned}&\max u_1 + u_2\\&-2u_1 + u_2 \leq 2\\&2u_1 + 4u_2 \leq 9\\&u_1 - u_2 \leq 3\\&u_1 \geq 0\\&u_2 \geq 0\end{aligned}$$

e graficamente si ottiene che il punto di ottimo è $u^\star = (7/2, 1/2)^T$.

b) Poiché $u^\star = (7/2, 1/2)^T$ risulta

$$A^T u^\star = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$c - A^T u^\star = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi le condizioni di complementarità

$$0 = (x^\star)^T (c - A^T u^\star) = x^T \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forniscono $x_1 = 0$. Mentre per le condizioni di complementarità

$$(u^\star)^T (Ax^\star - b)$$

essendo $u^\star > 0$ si deve avere $Ax^\star = b$ cioè, tenendo conto che $x_1 = 0$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene la soluzione ottima del problema primale data da $x^\star = (0, 1/3, 1/3)^T$.

□

Esercizio 3.1.7 *Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -1 \leq x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Supponendo che all'ottimo la prima variabile del problema duale valga 0.5*, qual è il valore all'ottimo della somma delle variabili* x_1 *e* x_2*?*

Soluzione.
Per scrivere il problema duale trasformiamo innanzitutto i vincoli di minore o uguale in vincoli di maggiore o uguale:

$$\begin{array}{l} \min 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -x_1 - x_2 \geq -5 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 \geq -1 \\ -x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ora possiamo scrivere il problema duale:

$$\begin{aligned}
&\max -5u_1 - 2u_2 - u_3 - u_4\\
&-u_1 - 3u_2 + u_3 - u_4 = 3\\
&-u_1 + 2u_2 \le -2\\
&-u_2 = 4\\
&u_1 \ge 0, u_3 \ge 0, u_4 \ge 0
\end{aligned}$$

La condizione di complementarità relativa alla variabile u_1 è:

$$u_1(-x_1 - x_2 + 5) = 0$$

Poiché $u_1^* \neq 0$, deve risultare all'ottimo $-x_1^* - x_2^* + 5 = 0$, quindi la somma delle variabili primali x_1, x_2 all'ottimo è $x_1^* + x_2^* = 5$. □

Esercizio 3.1.8 *Dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = z(x)\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 500\\
&3x_1 + 2x_3 \le 460\\
&x_1 + 4x_2 \le 420\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

utilizzando la teoria della dualità determinare un intervallo in cui è compreso il valore ottimo $z(x^*)$ della funzione obiettivo.

Soluzione.
Osserviamo preliminarmente che, poiché $x \ge 0$ ed i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono positivi, risulta $z(x^*) \ge 0$. Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
&\min 500u_1 + 460u_2 + 420u_3 = g(u)\\
&3u_1 + 3u_2 + u_3 \ge 3\\
&2u_1 + 4u_3 \ge 2\\
&u_1 + 2u_2 \ge 5\\
&u \ge 0
\end{aligned}$$

Osserviamo che il problema primale è di massimizzazione ed il duale è di minimizzazione, quindi, per il teorema della dualità debole, per ogni soluzione ammissibile primale-duale risulta $z(x) \le g(u)$. Individuiamo quindi una soluzione ammissibile del problema duale. Fissiamo ad esempio $u_1 = 0$. Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
u_2 &\ge 5/2\\
u_3 &\ge 1/2\\
3u_2 + u_3 &\ge 3
\end{aligned}$$

Quindi fissando $u_3 = 1/2$ si ha $u_2 \ge \max\{5/2, 5/6\} = 5/2$. Una soluzione amissibile duale è quindi $(0,\ 5/2,\ 1/2)^T$ e la funzione obiettivo duale vale in questo punto $g(u) = 1360$. Quindi, poiché risulta $z(x^*) = g(u^*) \le g(u)$, si ha $z(x^*) \in [0, 1360]$. □