1 Il metodo del simplesso

L'algoritmo del Simplesso è stato introdotto da Dantzig nel 1947 e si basa sull'idea di visitare opportunamente i vertici del poliedro di un problema di PL fino a raggiugnere un vertice ottimo, oppure concludere che il problema non ammette soluzioni.

I passi principali sono:

- si seleziona un vertice,
- si verifica l'ottimalità del vertice corrente,
- si verifica l'illimitatezza del problema,
- si visita un vertice adiacente.

Il metodo, pur basandosi su un approccio geometrico, fa uso dell'algebra lineare. Per tale ragione, si rende necessario scrivere i problemi di PL in una forma comune e dare una caratterizzazione algebrica del concetto di vertice.

1.1 Forma standard dei problemi di PL

Poichè la regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro, cercheremo di caratterizzare le condizioni di ottimalità dei vertici in termini della struttura interna del poliedro. È evidente che per poter procedere alla ricerca del vertice ottimo, è necessario poterlo determinare per via algebrica. Ci proponiamo quindi due obiettivi:

- scrivere i problemi di PL in una forma comune conveniente;
- derivare delle soluzioni che corrispondono ai vertici del poliedro ammissibile.

Diremo che un problema di PL è in **forma standard** se si presenta nella forma:

$$
\begin{array}{l}
\min \left(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\right) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Si pone $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

In forma matriciale si scrive

$$
\begin{array}{l}
\min c^T x \\
Ax = b \\
x \geq 0
\end{array}
$$

dove

- x è un vettore colonna di dimensione n
- c è un vettore colonna di dimensione n
- A è una matrice $m \times n$
- b è un vettore colonna di dimensione m a componenti non negative
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}$ è il poliedro che rapprensenta la regione ammissibile.

I problemi in forma standard sono quindi tutti problemi di minimo, con vincoli di uguaglianza e vincoli di non negatività sulle variabili. I termini noti devono essere non negativi.

Proposizione 1. *Ogni problema di PL si può porre in forma standard.*

- ***Problemi di massimo***. *Ogni problema di massimo si può trasformare in un problema di minimo:*

$$\max c^T x = -\min(-c^T x).$$

- ***Vincoli di minore o uguale*** . *Ogni vincolo di* $\leq$ *si traforma in vincolo di uguaglianza aggiungendo una* ***variabile slack:***

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + x_{n+1} = b_i,\ \text{con } x_{n+1} \geq 0.$$

- ***Vincoli di maggiore o uguale*** . *Ogni vincolo di* $\geq$ *si traforma in vincolo di uguaglianza sottraendo una* ***variabile surplus:***

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - x_{n+1} = b_i, textcon x_{n+1} \geq 0.$$

- ***Variabile non positiva****. Ogni variabile* $x_j \leq 0$*, si trasforma in una* ≥ 0 *con un cambio di variabile.*

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow \bar{x}_j = -x_j \geq 0$$

.

- ***Variabile libera in segno*** *Ogni variabile* x_j *libera si scrive come differenza di due variabili* ≥ 0 *e si effettua un cambio di variabili.*

$$x_j = x'_j - x''_j,\ \text{con } x'_j, x''_j \geq 0.$$

1.2 Basi e soluzioni di base

Consideriamo i vincoli di un problema di PL in forma standard

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \qquad (1)$$

Definizione 1. *Data la matrice* A *di dimensione* $m \times n$ *(rango*$(A) = m$*) dei coefficienti del sistema di vincoli di un problema di PL in forma standard, una sottomatrice* B *di dimensione* $m \times m$ *ottenuta estraendo da* A m *vettori colonna linearmente indipendenti è detta* ***matrice di base*** *e le sue colonne si dicono* ***colonne di base****.*

Sia ora dato un sistema $Ax = b$ e sia B una base. È possibile, eventualmente riordinando le colonne, partizionare la matrice A nella forma $A = (B, N)$ e il vettore x nella forma $x = (x_B, x_N)$, dove

- B è la matrice formata dalle colonne di A che formano la base
- N è la matrice formata dalle colonne fuori base
- x_B di dimensione m è il vettore delle **variabili di base**
- x_N di dimensione $n - m$ è il vettore delle **variabili fuori base**.

Osservazione 1. *Per assicurare l'esistenza delle soluzioni del sistema (1) supponiamo che*

- $m < n$
- *le* m *righe di* A *siano linearmente indipendenti, altrimenti ci sarebbe ridondanza dei vincoli o incompatibilità.*

Il sistema dei vincoli diventa

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

la funzione obiettivo z sarà allora data da

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N.$$

Il problema di PL in funzione della base B diventa

$$\begin{aligned}&\min c_B^T x_B + c_N^T x_N\\&Bx_B + Nx_N = b\\&x_B, x_N \geq 0.\end{aligned}$$

Osservando che B è invertibile, possiamo ricavare x_B moltiplicando per B^{-1},

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Definizione 2. *La soluzione $x^T = (B^{-1}b, 0)$ è detta **soluzione di base**. Se $B^{-1}b \geq 0$ la soluzione di base si dice **ammissibile**. Se $B^{-1}b > 0$ la soluzione si dice **non degenere**, altrimenti si dice soluzione **degenere**.*

In generale ad ogni matrice di base corrisponde una sola soluzione di base, mentre una soluzione di base può essere associata a più matrici di base. Tali soluzioni risultano essere degeneri.

Le soluzioni ammissibili di base sono al più

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

che è il numero di modi possibili in cui si possono estrarre m elementi da un insieme di n elementi. In generale, però non tutte le possibili sottomatrici $m \times m$ sono non singolari, e non tutte le matrici di base danno luogo a soluzioni ammissibili, pertanto le combinazioni utili sono inferiori a $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.

Teorema 1 (Teorema fondamentale della PL)**.** *Sia dato un problema di PL in forma standard*

$$\begin{aligned}&\min c^T x\\&Ax = b\\&x \geq 0\end{aligned} \tag{2}$$

dove A è una matrice $m \times n$ di rango m.

1 Se esiste una soluzione ammissibile, allora esiste una soluzione ammissibile di base.

2 Se esiste una soluzione ammissibile ottima, allora esiste una soluzione ammissibile ottima di base.

L'insieme delle soluzioni ammissibili di base e l'insieme dei vertici del poliedro coincidono.

Teorema 2. *Sia A una matrice $m \times n$ di rango m, $b \in \mathbb{R}^m$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Un vettore x è un vertice di P se e solo se è soluzione ammissibile di base.*

La ricerca di un vertice ottimo si riconduce quindi alla ricerca di una soluzione ammissibile di base.

2 Forma canonica

Definizione 3. *Dicesi **forma canonica** di un problema di PL, il sistema dei vincoli espressi nel seguente modo*

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & +\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ & x_2 & & +\alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ & & \ddots & \\ & & x_m & +\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}$$

dove $x_1, \ldots, x_m$ sono le variabili di base e $x_{m+1}, \ldots, x_n$ sono le variabili fuori base. Ogni variabile di base è scritta in termini delle variabili fuori base. La soluzione di base è

$$x_1 = \beta_1, \ldots, x_m = \beta_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

La forma canonica si ottiene a partire dalla forma standard, scrivendo la variabili di base in funzione delle variabili fuori base. Rprendendo i passaggi svolti precedentemente, si ha che il problema di PL

$$\begin{aligned}&\min c^T x\\ &Ax = b\\ &x \geq 0\end{aligned}$$

si scrive in funzione della base B

$$\begin{aligned}&\min c_B^T x_B + c_N^T x_N\\ &Bx_B + Nx_N = b\\ &x_B, x_N \geq 0.\end{aligned}$$

Poichè B è invertibile, si ha

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Si ottiene così il sistema in forma canonica

$$\begin{aligned}&\min c_B^T x_B + c_N^T x_N\\ &x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b\\ &x_B, x_N \geq 0.\end{aligned}$$

Nella matrice del sistema dei vincoli le colonne associate alle componenti di base formano la matrice identità.

3 Forma tabellare

Per agevolare l'applicazione dell'algoritmo del simplesso si utilizza una forma tabellare del problema di PL.

Sia dato il problema

$$\begin{aligned}&\min c^T x\\ &Ax = b\\ &x \geq 0\end{aligned} \tag{3}$$

Introduciamo la variabile z e poniamo $z = c^T x$, da cui il nuovo vincolo $-z + c^T x = 0$. Il problema diventa

$$\begin{aligned}&\min z\\ &Ax = b\\ &-z + c^T x = 0\\ &x \geq 0\end{aligned} \tag{4}$$

I coefficienti del sistema dei vincoli possono essere organizzati nella tabella seguente:

z	$x_1 \quad \dots \quad x_n$	
0 $\vdots$ 0	A	b
-1	c^T	0

Scegliamo una base B e riscriviamo il problema rispetto alla base B

$$\begin{aligned}&\min z\\ &Bx_B + Nx_N = b\\ &-z + c_B^T x_B + c_N^T x_N = 0\\ &x_B, x_N \geq 0,\end{aligned}$$

la tabella diventa

z	$x_1 \quad \dots \quad x_m$	$x_{m+1} \quad \cdots \quad x_n$	
0			
$\vdots$	B	N	b
0			
-1	c_B^T	c_N^T	0

Poichè B è invertibile, si ha $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ e sostituendo x_B nel problema precedente si ottiene

$$\begin{aligned}
&\min z \\
&x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\
&-z + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = -c_B^T B^{-1}b \\
&x_B \geq 0 \\
&x_N \geq 0.
\end{aligned}$$

Si ottiene così la tabella finale:

z	$x_1 \quad \dots \quad x_m$	$x_{m+1} \quad \cdots \quad x_n$	
0			
$\vdots$	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0			
-1	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}b$

Definizione 4. *I coefficienti di x_N nella funzione obiettivo si dicono* ***costi ridotti***

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N.$$

Si osserva che r_N^T è un vettore con $n - m$ componenti $r_N^T = (r_{m+1}, \dots, r_n)^T$. I costi ridotti sono un indice della variazione del valore della funzione obiettivo quando una variabile fuori base e quindi con valore nullo entra in base e passa ad un valore ≥ 0. Possiamo definire i costi ridotti anche per le componenti di base. Essi sono sempre nulli. Si ha infatti

$$r_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1}B = c_B^T - c_B^T = 0.$$

Trascurando la prima colonna che resta sempre invariata, la tabella completa è:

x_1	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	
1	$\dots$	0	$\alpha_{1,m+1}$	$\dots$	α_{1j}	$\dots$	α_{1n}	β_1
0	$\dots$	0	$\alpha_{2,m+1}$	$\dots$	α_{2j}	$\dots$	α_{2n}	β_2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	$\dots$	1	$\alpha_{m,m+1}$	$\dots$	α_{mj}	$\dots$	α_{mn}	β_m
0	$\dots$	0	r_{m+1}	$\dots$	r_j	$\dots$	r_n	$-z_0$

- L'ultima colonna dà il valore della variabili di base (vertice corrente) e il valore $-z_0 = -c_B^T B^{-1}b$ è l'opposto del valore corrente della funzione obiettivo,
- l'ultima riga è la riga dei costi ridotti,
- le variabili di base corrispondono (opportunamente ordinate) alla matrice di base che è una matrice identità.

Scrivendo il sistema in forma canonica si ha subito a disposizione una soluzione ammissibile di base, ottenuta ponendo uguale a zero le variabili fuori base e le variabili di basi uguali ai termini noti.

Per il Teorema fondamentale della PL se esiste una soluzione ammissibile ottima esisterà anche una soluzione ottima di base, pertanto si può cercare la soluzione ammissibile ottima di base passando da una soluzione di base ad un'altra adiacente, cioè operando un cambiamento di base mediante operazioni sulle matrici.

4 Condizioni di ottimalità e illimitatezza

Teorema 3 (Condizione sufficiente di ottimalità)**.** *La soluzione ammissibile di base* $\bar{x}^T = (B^{-1}b, 0)$ *è ottima per il problema se il vettore dei costi ridotti è non negativo, cioè*

$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

o $c_j - z_j \geq 0 \;\; j = m+1, \ldots, n$

Teorema 4 (Condizione sufficiente di illimitatezza)**.** *Il problema è illimitato inferiormente se esiste* j*,* $m+1 \leq j \leq n$ *tale che* $c_j - z_j < 0$ *e* $\alpha_{ij} \leq 0$*,* $i = 1, \ldots, m$*.*

4.0.1 Criterio di entrata di un vettore nella base

Se data la base B non si può dire che la soluzione di base associata è ottima e non vale neppure la condizione di illimitatezza, allora si procede effettuando un cambiamento di base, in modo da migliorare il valore della funzione obiettivo.

Si sceglie la variabile x_s che localmente fa diminuire più rapidamente la funzione obiettivo, cioè si sceglie l'indice s per cui $c_s - z_s = \min_j(c_j - z_j)$. La variabile che entra in base passa da zero ad un valore positivo che riduce il costo totale.

4.0.2 Criterio di uscita di un vettore dalla base

Una volta scelta la variabile x_s che dovrà entrare in base (tale da far diminuire il valore della funzione obiettivo), la variabile uscente viene individuata in modo da rimanere nella regione ammissibile.

Si sceglie x_r tale che

$$\min_{i:\alpha_{is}>0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{is}} \right\} = \frac{\beta_r}{\alpha_{rs}}. \tag{5}$$

- Se esistono più indici per cui vale la (5), allora la soluzione è degenere ed esce un qualsiasi vettore corrispondente ad una componente di base nulla.
- Se $\alpha_{is} \leq 0$, non si può ottenere una nuova soluzione ammissibile di base. Se nessun α_{is} è positivo, l'insieme delle soluzioni ammissibili non è limitato.

5 Operazione di pivot

L'operazione di pivot serve per passare da una soluzione di base ad un'altra, sostituendo una variabile di base con una non di base.

Definizione 5. *Due soluzioni di base distinte si dicono* ***adiacenti*** *se differiscono per una sola componente.*

Consideriamo il problema in forma standard con i vincoli

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{6}$$

Se le equazioni (6) sono linearmente indipendenti, allora possiamo utilizzare il metodo di Gauss per scrivere il sistema in forma canonica. In altre parole sostituiamo ogni riga con un multiplo di se stessa addizionato ad una combinazione lineare delle altre equazioni. Ad ogni colonna del sistema in forma canonica è associata una variabile decisionale del problema e quest'ultima è di base se la corrispondente colonna ha un solo elemento uguale ad 1 e tutti gli altri nulli.

L'operazione di pivot permette di passare da una soluzione di base ad un'altra ad essa adiacente, sostituendo una variabile di base con una fuori base e generando così una nuova colonna di base. Più esattamente, si voglia passare dalla base $x_B = \{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1} \ldots, x_m\}$ alla base $x'_B = \{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_s, x_{r+1} \ldots, x_m\}$, sostituendo la variabile x_r con la variabile x_s. Il pivot della trasformazione è allora l'elemento α_{rs} della tabella. x'_B è una base se e solo $\alpha_{rs} \neq 0$. La colonna s viene aggiornata in modo che abbia tutti gli elementi nulli tranne l'elemento (r, s), che deve essere uguale ad 1.

Indicando con α'_{ij} i nuovi coefficienti dei vincoli, si ottengono le regole di aggiornamento

$$\begin{aligned} \alpha'_{ij} &= \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\alpha_{is}, \quad i \neq r \\ \alpha'_{rj} &= \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}. \end{aligned}$$

In altre parole, la riga del pivot viene divisa per il pivot, mentre ogni altra riga si ottiene sottraendo dalla riga corrente la riga di pivot aggiornata moltiplicata per l'elemento intersezione tra la riga corrente e la colonna pivot.

5.0.1 I passi dell'algoritmo

1. Si trovi una base B che generi una soluzione ammissibile di base.
2. **Se** $r_j \geq 0, \forall j$ **STOP**: la soluzione ammissibile di base corrente è ottima (verifica di ottimalità).

   Altrimenti si scelga una colonna s, $m + 1 < s < n$, tale che $r_s < 0$ per determinare la variabile x_s da fare entrare in base (scelta della variabile entrante).
3. **Se** $\alpha_{is} \leq 0, i = 1, \ldots, m$ **STOP**: il problema è illimitato e $z_0 = -\infty$ (verifica di illimitatezza).

   Altrimenti si calcolino i rapporti $\frac{\beta_i}{\alpha_{is}}$, con $\alpha_{is} > 0$, $i = 1, \ldots, m$ e si scelga la variabile uscente x_r tale che $\frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} = \min_{i:\alpha_{is}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{is}}$ (scelta della variabile uscente).
4. Si aggiorni la tabella con pivot dato dall'elemento (r, s) e si torni al passo 2.

6 Convergenza del metodo del simplesso e regola di Bland

Teorema 5. *Se ogni soluzione di base ammissible del problema è non degenere, allora il metodo del Simplesso produce una sequenza di basi ammissibili senza ripetizioni e, conseguentemente, in un numero finito di passi converge alla soluzione ottima o indica che il problema non è limitato inferiormente.*

Se il problema ammette basi degeneri, sono possibili ripetizioni nella sequenza delle basi ammissibili generate dal metodo, si genera cioè un ciclo, per evitare che ciò accada si può applicare la regola di Bland.

Teorema 6 (Regola di Bland)**.** *Se si sceglie la colonna da far entrare in base secondo la regola*

$$s = \min\{j : r_j < 0\}$$

e la riga in maniera che

$$r = \min\{i : \alpha_{is} > 0, \frac{\beta_i}{\alpha_{is}} \leq \frac{\beta_k}{\alpha_{ks}}, \forall k : \alpha_{ks} > 0\},$$

allora l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi.

7 Complessità dell'algoritmo del simplesso

Per determinare la complessità dell'algoritmo del Simplesso occorre valutare quante operazioni vengono compiute per risolvere un problema con m vincoli ed n variabili. Le attività più onerose relativamente ad una soluzione ammissibile sono costituite dall'inversione della matrice B, dal calcolo del prodotto matriciale $B^{-1}N$ e dei coefficienti di costo ridotto $r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$. Nel caso peggiore, tali attività possono essere svolte mediante $O(m^2)$, $O(mn)$ e $O(mn)$ operazioni. Poichè $m < n$ per ciascuna iterazione la complessità è $O(mn)$.

Il numero di iterazioni, a sua volta pari al numero di vertici visitati, cresce esponenzialmente con m e n, l'algoritmo quindi ha complessità teorica esponenziale. Tuttavia, studi empirici suggeriscono che il numero di iterazioni cresca linearmente con il numero di vincoli m.

8 Unicità della soluzione

Diamo adesso una condizione sufficiente per l'unicità della soluzione

Teorema 7. *Se*

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N > 0,$$

allora la soluzione di base $x^T = (B^{-1}b, 0)$ *è l'unica soluzione ottima del problema.*