1 Metodo delle due fasi

Se i vincoli del problema si presentano nella forma $Ax \leq b$ con $b \geq 0$, aggiugendo le variabili scarto si ottiene il sistema in forma standard con matrice di base $B = I$ ed è facile individuare la soluzione di base ammissibile $(0, b)$. Non è però sempre immediatamente disponibile una soluzione ammissibile di base, spesso infatti il sistema non è in forma canonica. Dato allora un problema in forma standard

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

vediamo come determinare, se esiste, una soluzione ammissibile di base. Il metodo delle due fasi suggerisce di applicare due volte il metodo del simplesso:

- fase I: si costruisce la forma canonica di un opportuno problema associato al problema iniziale e si determina una soluzione di base ammissibile con il metodo del simplesso;
- fase II: si risolve il problema inziale con il metodo del simplesso a partire dalla soluzione di base ammissibile trovata nella fase I.

Nella **fase I** si introduce un nuovo problema che è in forma canonica e per il quale è subito disponibile una soluzione ammissibile di base. Si aggiungono delle variabili **artificiali** y_i, $i = 1, \ldots, m$, $y_i \geq 0$ a ciascun vincolo e alla funzione obiettivo (con coefficienti nulli). Le variabili artificiali rendono il sistema in forma canonica rispetto ad esse. Si ottiene così il **problema artificiale**

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ &Ax + y = b \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0. \end{aligned}$$

Una soluzione ottima del problema artificiale è della forma:

$$(x^*, y^*)^T = (x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)^T$$

e se $y_i^* = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, allora $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$ è una soluzione di base ammissibile per il problema iniziale. Nella prima fase si risolve il problema artificiale con il metodo del simplesso. La tabella inziale è

	x_1	$\ldots$	$\ldots$	x_n	y_1	$\ldots$	$\ldots$	y_m	
y_1	a_{11}	$\ldots$	$\ldots$	$a_{1,n}$	1	$\ldots$	$\ldots$	0	b_1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	a_{m1}	$\ldots$	$\ldots$	$a_{m,n}$	0	$\ldots$	$\ldots$	1	b_m
	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$\ldots$	$\ldots$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$	0	$\ldots$	$\ldots$	0	$-\sum_{i=1}^{m} b_i$

Al termine della prima fase si possono verificare i seguenti casi:

- $z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \neq 0$.
- $z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$ e tutte le variabili artificiali sono fuori base.
- $z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$ e alcune variabili artificiali sono in base con valore nullo.

Nel primo caso, non esiste una soluzione ammissibile di base per il problema iniziale che è quindi inammissibile. Nel secondo e terzo caso, si passa alla **fase II**.

Nel secondo caso, esiste una soluzione ammissibile di base per il problema iniziale che coincide con la soluzione ottima finale della fase I. Si applica di nuovo il metodo del simplesso a partire dall'ultima tabella della fase I, nella quale si cancellano le colonne relative alle variabili artificiali (che sono tutte fuori dalla base) e si calcolano i costi ridotti ripristinando la funzione obiettivo del problema iniziale.

Nel terzo caso, nella tabella finale della prima fase si cancellano le colonne relative alle variabili artificiali fuori dalla base e si calcolano i costi ridotti ripristinando la funzione dei costi del problema iniziale. Si effettuano poi delle operazioni pivot per far uscire fuori dalla base le variabili artificiali che vi sono, facendo entrare al loro posto solo le variabili iniziali x_j. Se non si riesce a fare uscire dalla base alcune variabili artificiali, allora vi sono vincoli ridondanti che si eliminano.

Esempio 1. *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + x_2)\\
&x_1 + x_2 \geq 1\\
&x_1 - x_2 \leq 2\\
&x_1 + 2x_2 \leq 4\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Risoluzione
Innanzi tutto occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$\begin{aligned}
&\min(-2x_1 - x_2)\\
&x_1 + x_2 - x_3 = 1\\
&x_1 - x_2 + x_4 = 2\\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 4\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}$$

Si applichi la ricerca della base in due fasi per determianare una base ammissibile iniziale. Si risolve pertanto il problema artificiale

$$\begin{aligned}
&\min(y_1)\\
&x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1\\
&x_1 - x_2 + x_4 = 2\\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 4\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5\\
&y_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

La base $B = I$ associata alla variabile artificiale ed alle variabili scarto x_4, x_5 è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b
y_1	$\boxed{1}$	1	−1	0	0	1	1
x_4	1	−1	0	1	0	0	2
x_5	1	2	0	0	1	0	4
	−1	−1	1	0	0	0	−1

Si selezioni come colonna pivot la prima, quella cioè in corrispondenza della quale si trova il primo costo ridotto negativo (Regola di Bland). La riga di pivot è determinata calcolando $\min\{1, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}\}$. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_4, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned}
R_1' &= R_1\\
R_2' &= R_2 - R_1' = R_2 - R_1\\
R_3' &= R_3 - R_1' = R_3 - R_1,
\end{aligned}$$

si ottiene la seconda tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b
x_1	1	1	-1	0	0	1	1
x_4	0	-2	1	1	0	-1	1
x_5	0	1	1	0	1	-1	3
	0	0	0	0	0	1	0

La soluzione ottima della prima fase è quindi $y_1 = 0$ e $z = 0$. Ha così inizio la seconda fase. Si cancelli la colonna relativa alla variabile y_1, si ripristini la funzione obiettivo del problema iniziale e si ricalcolino i costi ridotti, ottenendo la tabella

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	-2	$\boxed{1}$	1	0	1
x_5	0	1	1	0	1	3
	0	1	-2	0	0	2

Si selezioni come colonna pivot la terza. La riga di pivot è determinata calcolando $\min\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\}$. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_3, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 + R_2' = R_1 + R_2 \\ R_2' &= R_2 \\ R_3' &= R_3 - R_2' = R_3 - R_2, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	-1	0	1	0	2
x_3	0	-2	1	1	0	1
x_5	0	$\boxed{3}$	0	-1	1	2
	0	-3	0	2	0	4

Si selezioni come colonna pivot la seconda. La riga di pivot è la terza. L'elemento pivot è quindi 3 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_3, x_2. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 + R_3' \\ R_2' &= R_2 + 2R_3' \\ R_3' &= \frac{R_3}{3}, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	0	0	0	1	1	6

La soluzione ottima è il vettore $x^* = (\frac{8}{3}, \frac{2}{3})^T$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = -6$.