1 Programmazione lineare intera

Un problema di programmazione lineare intera (PLI) consiste nel trovare il minimo o il massimo di una funzione lineare su una regione definita da vincoli lineari e da vincoli di interezza sulle variabili. Si tratta pertanto di problemi del tipo:

$$(PLI) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ \ x \text{ intero.} \end{cases}$$

Se solo alcune variabili sono vincolate ad essere intere, si hanno problemi di programmazione lineare intera mista. Molti problemi di ottimizzazione combinatoria si formulano come problemi di PLI.

Osservazione 1. *La regione ammissibile di un problema di programmazione lineare intera è un insieme discreto di punti. Di conseguenza esiste il punto di minimo. Inoltre la regione ammissibile non è convessa come accade nel caso della programmazione lieneare continua.*

2 Esempi di problemi di PLI

2.1 Il problema dello zaino

Sia dato un insieme $E = \{1, \ldots, n\}$ di elementi, a ciascuno dei quali sia assegnato un peso p_i e un valore v_i, $i = 1 \ldots, n$, interi positivi. Il problema dello zaino consiste nel determinare un sottoinsieme di elementi che abbia valore totale massimo ed il cui peso totale non superi un prefissato intero b. Sia $x_i \in \{0, 1\}$ la variabile che indica la presenza ($x_i = 1$) o l'assenza ($x_i = 0$) nello zaino dell'oggetto i.

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0, 1\}, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

2.2 Problema del commesso viaggiatore (TSP)

Un commesso viaggiatore deve determinare l'itinerario che gli permette di visitare n città una ed una sola volta, in modo da avere un percorso di lunghezza totale minima (di costo totale minimo). Si consideri il grafo $G = (N, A)$, dove N è l'insieme degli n nodi (città) ed A è l'insieme degli archi (strade). Si vuole determinare un circuito hamiltoniano (che tocchi ogni nodo una ed una sola volta) di costo minimo. Sia c_{ij} il costo associato all'arco (i, j) e sia x_{ij} la variabile che vale 1 se l'arco appartiene al circuito hamiltoniano e zero altrimenti.

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{(costo totale del circuito)} \\ \sum_{i:(i,v) \in A} x_{iv} = 1, \quad v \in N \\ \text{(in ogni nodo entra un solo arco)} \\ \sum_{j:(v,j) \in A} x_{vj} = 1, \quad v \in N \\ \text{(da ogni nodo esce uno ed un solo arco)} \\ \sum_{i,j \in S, (i,j) \in A} x_{ij} \leq 1, \quad \forall S : S \subset N, \ 2 \leq |S| \leq n-1 \\ \text{(assenza di sottocircuiti)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, i \in \{1, \ldots, m\}. \end{cases}$$

3 Relazioni tra PLI e PL

Definizione 1. *Dato il problema di PLI*

$$(PLI) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ intero.} \end{cases}$$

*dicesi **rilassamento lineare** o **rilassamento continuo** il problema ottenuto da (PLI) eliminando i vincoli di interezza sulle variabili, si ha quindi il seguente problema di programmazione lineare (continua)*

$$(RL) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Osservazione 2. *La regione ammissibile di un problema di programmazione lineare intera è contenuta nella regione ammissibile del suo rilassamento lineare.*

Siano $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, x \text{ intero}\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Si nota che non si può ottenere la soluzione ottima di un problema di PLI tramite arrotondamento di quella del rilassamento lineare, nè cercando la soluzione intera più prossima in norma alla soluzione ottima del rilassamento lineare. Il rilassamento lineare può comunque dare utili informazioni sul problema intero. Infatti, risulta che

- la regione ammissibile del problema (PLI) è contenuta in quella del problema (RL);
- il valore ottimo della funzione obiettivo del problema (RL) è minore o uguale del valore ottimo della funzione obiettivo del problema (PLI).

Inoltre si dimostra che

Lemma 1. *Sia x^* una soluzione ottima di (RL): se x^* è intero allora x^* è ottima per (PLI).*

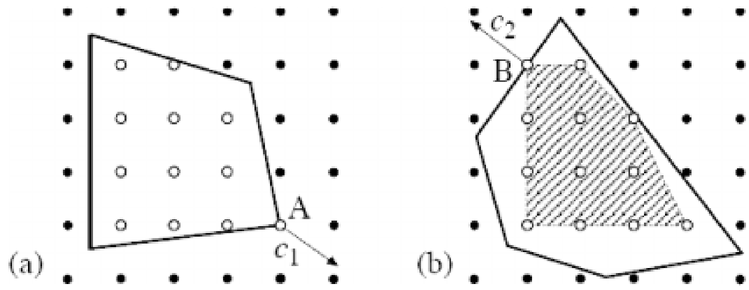
Pertanto, se risolvendo il rilassamento lineare trovassimo un vertice ottimo intero, avremmo anche risolto il problema di programmazione lineare intera. Il rilassamento lineare fornisce quindi un modo per tentare di calcolare una soluzione ottima per (PLI) e, in ogni caso, restituisce una valutazione inferiore del valore ottimo di (PLI).

4 Formulazioni di PL equivalenti per la PLI

Cerchiamo ora di ragione in maniera inversa. Dato l'insieme ammissibile del problema di (PLI), siamo in grado di costruire un poliedro che contiene le soluzioni ammissibili di (PLI) e che abbia vertici interi? Se potessimo disporre di un tale poliedro, potremmo risolvere il problema di (PL) associato e ottenere direttamente una soluzione per il problema iniziale intero.

Come mostra la figura, uno stesso insieme di soluzioni ammissibili intere può essere contenuto in poliedri diversi tra loro. Esistono così formulazioni di PL diverse che contengono la regione ammissibile del problema (PLI). Queste formulazioni rappresentano differenti problemi di PL, ma individuano tutti gli stessi punti discreti di (PLI). Risulta poi evidente come la valutazione inferiore su (PLI) fornita da questi problemi di PL sarà tanto migliore quanto più il poliedro continuo è prossimo all'insieme ammissibile di (PLI). Tra tutti i rilassamenti continui, ne esiste uno più interessante detto **rilassamento convessificato** il cui insieme ammissibile è dato dall'involucro convesso di X, indicato con $conv(X)$ (si tratta dell'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di X). Si dimostra che se $P = conv(X)$ suoi vertici hanno coordinate intere; inoltre, il problema $\min\{c^T x : x \in P\}$ ammette una soluzione ottima intera per qualsiasi scelta del vettore $c \in \mathbb{R}^n$ per cui non è inferiormente illimitato.

Come è noto dalla teoria della PL, esiste una soluzione ottima x^* che giace su un vertice di $conv(X)$: siccome tutti i vertici di $conv(X)$ hanno coordinate intere, x^* è anche una soluzione



ottima di (PLI). Di conseguenza, è possibile risolvere (PLI) risolvendo il rilassamento convessificato. Per un generico problema di PLI, però, la rappresentazione di $conv(X)$ non è nota e si dispone solo della sua rappresentazione approssimata data dal poliedro convesso P. Esistono alcune classi di problemi, come il problema del matching, per cui sono noti i vincoli da aggiungere al rilassamento lineare per ottenere il rilassamento convessificato.

5 Problemi di PLI ideali

Esistono alcuni problemi di PLI nei quali la matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli ha una struttura tale da assicurare che i poliedri dei rilassamenti lineari abbiano vertici interi.

Definizione 2. *Una formulazione di un problema di PLI si dice ideale se* $P = conv(x)$.

Per un problema ideale il rilassamento convessificato coincide con il rilassamento continuo.

Definizione 3. *Una matrice* A *si dice unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata di ordine* m *ha determinante pari a* 0, $+1$ *o* -1.

Teorema 1. *Sia* A *unimodulare e sia* b *intero. Allora il poliedro* $P = \{x \geq 0, Ax \geq b\}$ *ha solo vertici interi.*

Definizione 4. *Una matrice* A *si dice totalmente unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata di ogni ordine ha determinante pari a* 0, $+1$ *o* -1.

Gli elementi di matrici totalmente unimodulari possono assumere solo i valori 0, $+1$ e -1.

Proposizione 1. *Se* A *è una matrice totalmente unimodulare si ha che:*

- A^T *è totalmente unimodulare;*
- $[AI]$, *dove* I *è la matrice identica, è totalmente unimodulare;*
- *una matrice ottenuta duplicando righe e/o colonne di* A *è ancora totalmente unimodulare;*
- *una matrice ottenuta moltiplicando righe e/o colonne di* A *per* -1 *è ancora totalmente unimodulare;*
- *una matrice ottenuta scambiando righe o colonne di* A *tra loro è ancora totalmente unimodulare;*
- *una matrice ottenuta da* A *mediante un'operazione di cardine è ancora totalmente unimodulare.*

Diamo ora due metodi pratici per riconoscere se una matrice è totalmente unimodulare.

Teorema 2. *Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, $+1$ o -1 e lungo ogni colonna non vi siano più di due elementi diversi da 0. Allora A è totalmente unimodulare se e solo se l'insieme delle righe di A può essere suddiviso in una partizione (I_1, I_2) tale che se una colonna contiene due elementi non nulli di segno concorde, allora questi elementi si trovano in partizioni differenti; se hanno segno opposto le righe corrispondenti sono entrambe contenute nello stesso insieme.*

Corollario 1. *Sia A una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0, $+1$ o -1 e lungo ogni colonna non vi siano più di due elementi diversi da 0. Se nelle colonne con due elementi diversi da 0 la somma di tali elementi è uguale a 0, allora A è totalmente unimodulare.*

Teorema 3. *Sia A totalmente unimodulare e sia b intero. Allora il poliedro $P = \{x \geq 0, Ax \geq b\}$ ha solo vertici interi.*

Esempi notevoli di problemi ideali sono il problema del trasporto e il problema dell'assegnamento.