1 Formulazione matematica e risoluzione grafica

Esercizio 1 *Una pasticceria produce due tipi di crémes brûles: ai frutti di bosco ed alla cannella. Per chilo di prodotto sono utilizzate le quantità di ingredienti riportate nella seguente tabella:*

Ingredienti/Prodotti	*crï¿½me brûlï¿½e ai frutti di bosco*	*crï¿½me brûlï¿½e alla cannella*
Latte (litri)	12	23
Panna (litri)	35	20
Uova	40	25
Zucchero (grammi)	230	180

La disponibilità giornaliera degli ingredienti è di 1500 *litri di latte,* 3150 *litri di panna,* 2000 *uova e* 18 *kg di zucchero. I dolci sono venduti rispettivamente ai prezzi di* 20 *euro al chilo e* 12.50 *euro al chilo. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera che massimizzi i profitti. Determinare graficamente la soluzione ottima.*

Risoluzione

Variabili. Le variabili decisionali associate al problema sono le quantità dei due tipi di dolci da produrre giornalmente e sono indicate con x_1, x_2, rispettivamente.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo è data dal profitto totale: $20x_1 + 12.5x_2$.

Vincoli. L'impiego degli ingredienti non può essere superiore alla disponibilità, pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
12x_1 + 23x_2 &\leq 1500\\
35x_1 + 20x_3 &\leq 3150\\
40x_1 + 25x_2 &\leq 2000\\
230x_1 + 180x_2 &\leq 18000.
\end{aligned}$$

Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili x_1, x_2.

La formulazione finale è:

$$\max(20x_1 + 12.5x_2)$$
$$12x_1 + 23x_2 \leq 1500$$
$$35x_1 + 20x_3 \leq 3150$$
$$40x_1 + 25x_2 \leq 2000$$
$$230x_1 + 180x_2 \leq 18000$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

La regione ammissibile del problema è la parte colorata rappresentata in figura 1.

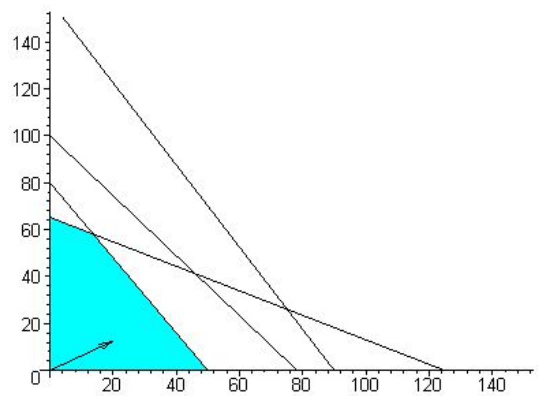

Figura 1: Regione ammissibile e vettore della direzione di crescita

L'andamento della funzione obiettivo viene studiato mediante le curve di livello (isoguadagno). Tali curve sono ortogonali al vettore dei profitti $c^T = (20, 12.5)$. La funzione obiettivo cresce nel verso indicato dal vettore c. Tenendo poi conto del fatto che le curve di livello della funzione obiettivo, $20x_1 + 12.5x_2 = k$ con $k \in \mathbb{R}$, sono parallele al terzo vincolo, si deduce che esistono infinite soluzioni ottime, rappresentate da tutti i punti del segmento di estremi $(\frac{425}{31}, \frac{1800}{31})$ e $(50, 0)$.

Esercizio 2 *Una fabbrica di giocattoli produce due tipi di trenini. Il primo tipo è in legno ed il secondo in plastica. Il processo produttivo si svolge in tre reparti. La fabbrica impiega* 18 *operai nel primo reparto,* 10 *nel secondo e* 8 *nel terzo. Gli operai lavorano* 8 *ore al giorno per* 5 *giorni a settimana. I tempi di lavorazione (in minuti) richiesti ed i relativi profitti sono riportati nella tabella seguente.*

Prodotti	*Reparto* 1	*Reparto* 2	*Reparto* 3	*Profitti (in euro)*
Trenini in legno	$25'$	$40'$	$7'$	45
Trenini in plastica	$50'$	$70'$	$10'$	65

Determinare quanti giocattoli produrre per massimizzare il profitto settimanale.

Risoluzione

Variabili. Le variabili decisionali associate al problema sono le quantità dei due tipi di giocattoli da produrre settimanalmente e sono indicate con x_1, x_2, rispettivamente.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo è data dal profitto totale: $45x_1 + 65x_2$.

Vincoli. Considerato che gli operai lavorano 8 ore al giorno per 5 giorni a settimana, ciò $60 \times 8 \times 5 = 2400$ minuti, i tempi di lavorazione settimanali devono rispettare i seguenti vincoli:

$$25x_1 + 50x_2 \leq 43200$$
$$40x_1 + 70x_2 \leq 24000$$
$$7x_1 + 10x_2 \leq 19200.$$

Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili x_1, x_2.

La formulazione finale è:

$$
\begin{aligned}
&\max(45x_1 + 65x_2)\\
&25x_1 + 50x_2 \leq 43200\\
&40x_1 + 70x_2 \leq 24000\\
&7x_1 + 10x_2 \leq 19200\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile del problema è la parte colorata rappresentata in figura 2.

L'andamento della funzione obiettivo viene studiato mediante le curve di livello (isoguadagno). Tali curve sono ortogonali al vettore dei profitti $c^T = (45, 65)$. La funzione obiettivo cresce nel verso indicato dal vettore c, pertanto la soluzione ottima è data dal punto di coordinate $(600, 0)$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è 27000 euro.

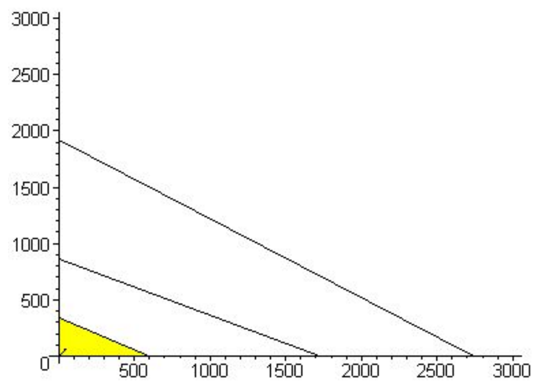

Figura 2: Regione ammissibile e vettore della direzione di crescita

Esercizio 3 *Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione linare:*

$$\min(150x_1 + 300x_2)$$
$$26x_1 \geq 13$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$3x_1 + 10x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Risoluzione

La regione ammissibile del problema è la parte colorata rappresentata in figura 3.

L'andamento della funzione obiettivo viene studiato mediante le curve di livello (isocosto). Tali curve sono ortogonali al vettore dei costi $c^T = (1, 2)$. La funzione obiettivo cresce nel verso indicato dal vettore c, quindi, dovendo determinare il valore minimo della funzione obiettivo nella regione ammissibile, si dovrà considerare la direzione opposta. Pertanto, la soluzione ottima è data dal punto di coordinate $(\frac{28}{17}, \frac{12}{17})$ (intersezione delle rette $2x_1 + x_2 = 4$ e $3x_1 + 10x_2 = 12$) ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $\frac{7800}{17}$.

2 Il metodo del Simplesso primale

Esercizio 4 *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

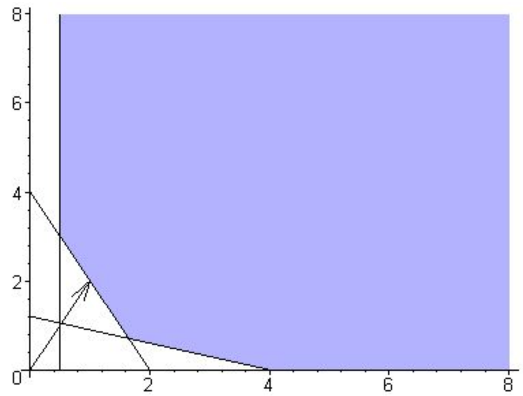

Figura 3: Regione ammissibile e vettore della direzione di crescita

$$\max(2x_1 + 3x_2)$$
$$x_1 \leq \lambda$$
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 \leq 1$$
$$-3x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\lambda \geq -1$$

Risoluzione

Si nota che se $-1 \leq \lambda < 0$, il primo vincolo risulta incompatibile con il vincolo $x_1 \geq 0$. Il problema è quindi inammissibile. Consideriamo il caso $\lambda \geq 0$.

Occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$\min(-2x_1 - 3x_2)$$
$$x_1 + x_3 = \lambda$$
$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + x_4 = 1$$
$$-3x_2 + x_5 = 2$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5$$
$$\lambda \geq -1$$

La base $B = I$ associata alle variabili scarto è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	λ
x_4	λ	$\boxed{\lambda}$	0	1	0	1
x_5	0	-3	0	0	1	2
	-2	-3	0	0	0	0

Si può selezionare come colonna pivot la seconda, quella cioè in corrispondenza della quale si trova il costo ridotto minimo -3. Se $\lambda = 0$, gli elementi della colonna sono tutti non positivi e il problema non è limitato inferiormente. Se $\lambda > 0$, è possibile individuare come riga di pivot la seconda riga. L'elemento pivot è quindi λ e la nuova base è data dalle variabili x_3, x_2, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= \frac{R_2}{\lambda} \\ R_3' &= R_3 + 3R_2' = R_3 + 3\frac{R_2}{\lambda}, \end{aligned}$$

si ottiene la seconda tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	λ
x_2	1	1	0	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1}{\lambda}$
x_5	3	0	0	$\frac{3}{\lambda}$	1	$2 + \frac{3}{\lambda}$
	1	0	0	$\frac{3}{\lambda}$	0	$\frac{3}{\lambda}$

La soluzione ottima è il vettore $x^* = (0, \frac{1}{\lambda})^T$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = -\frac{3}{\lambda}$.

Se si segue le regola di Bland, si individuano i sottocasi $\lambda \leq 1$ e $\lambda > 1$.

Esercizio 5 *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} &\max(2x_1 + x_2) \\ &2x_1 \leq 2 \\ &4x_2 \leq 1 \\ &4x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Risoluzione

Innanzi tutto occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$
\begin{aligned}
&\min(-2x_1 - x_2)\\
&2x_1 + x_3 = 2\\
&4x_2 + x_4 = 1\\
&4x_1 - 3x_2 + x_5 = 4\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

La base $B = I$ associata alle variabili scarto è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	$\boxed{2}$	0	1	0	0	2
x_4	0	4	0	1	0	1
x_5	4	-3	0	0	1	4
	-2	-1	0	0	0	0

Si selezioni come colonna pivot la prima, quella cioè in corrispondenza della quale si trova il primo costo ridotto negativo (Regola di Bland). La riga di pivot è determinata calcolando $\min\{\frac{2}{2}, \frac{4}{4}\}$. L'elemento pivot è quindi 2 (primo indice di riga favorevole) e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_4, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$
\begin{aligned}
R_1' &= \frac{R_1}{2}\\
R_2' &= R_2\\
R_3' &= R_3 - 4R_1' = R_3 - 2R_1,
\end{aligned}
$$

si ottiene la seconda tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_4	0	$\boxed{4}$	0	1	0	1
x_5	0	-3	-2	0	1	0
	0	-1	1	0	0	2

Si selezioni come colonna pivot la seconda e come riga di pivot la seconda. L'elemento pivot è quindi 4 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_2, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$
\begin{aligned}
R_1' &= R_1 \\
R_2' &= \frac{R_2}{4} \\
R_3' &= R_3 + 3R_2' = R_3 + 3\frac{R_2}{4},
\end{aligned}
$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_5	0	0	-2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$

La soluzione ottima è il vettore $x^* = (1, \frac{1}{4})^T$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = -\frac{9}{4}$.

Esercizio 6 *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$
\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 5x_2 - 4x_3) \\
&x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 4 \\
&x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Risoluzione

Innanzi tutto occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$
\begin{aligned}
&\min(-2x_1 - 5x_2 + 4x_3) \\
&x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4 \\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Consideriamo la matrice completa del sistema dei vincoli.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Effettuando la semplice riduzione per righe $R_2' = R_2 - R_1$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui è facile ricavare la base $B = I$ associata alle variabili x_1 e x_5. La prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	4	4	−1	0	4
x_5	0	−3	−5	$\boxed{1}$	1	2
	0	3	12	−2	0	8

Si selezioni come colonna pivot la quarta e come riga di pivot la seconda. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_4. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 + R_2 \\ R_2' &= R_2, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	$\boxed{1}$	−1	0	1	6
x_4	0	−3	−5	1	1	2
	0	−3	2	0	2	12

Si selezioni come colonna pivot la seconda e come riga di pivot la prima. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_2, x_4. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= R_2 + 3R_1, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	1	1	-1	0	1	6
x_4	3	0	-8	1	4	20
	3	0	-1	0	5	30

Il costo ridotto associato alla terza variabile è negativo, inoltre gli elementi della terza colonna sono tutti negativi, quindi il problema non è limitato inferiormente.

3 Il metodo delle due fasi

Esercizio 7 *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + x_2)\\
&x_1 + x_2 \geq 1\\
&x_1 - x_2 \leq 2\\
&x_1 + 2x_2 \leq 4\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Risoluzione

Innanzi tutto occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$\begin{aligned}
&\min(-2x_1 - x_2)\\
&x_1 + x_2 - x_3 = 1\\
&x_1 - x_2 + x_4 = 2\\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 4\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}$$

Si applichi la ricerca della base in due fasi per determianare una base ammissibile iniziale. Si risolve pertanto il problema artificiale

$\min(y_1)$

$x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1$

$x_1 - x_2 + x_4 = 2$

$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$

$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$

$y_1 \geq 0.$

La base $B = I$ associata alla variabile artificiale ed alle variabili scarto x_4, x_5 è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b
y_1	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	1	1
x_4	1	-1	0	1	0	0	2
x_5	1	2	0	0	1	0	4
	-1	-1	1	0	0	0	-1

Si selezioni come colonna pivot la prima, quella cioè in corrispondenza della quale si trova il primo costo ridotto negativo (Regola di Bland). La riga di pivot è determinata calcolando $\min\{1, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}\}$. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_4, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 \\ R_2' &= R_2 - R_1' = R_2 - R_1 \\ R_3' &= R_3 - R_1' = R_3 - R_1, \end{aligned}$$

si ottiene la seconda tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	b
x_1	1	1	-1	0	0	1	1
x_4	0	-2	1	1	0	-1	1
x_5	0	1	1	0	1	-1	3
	0	0	0	0	0	1	0

La soluzione ottima della prima fase è quindi $y_1 = 0$ e $z = 0$. Ha così inizio la seconda fase. Si cancelli la colonna relativa alla variabile y_1, si ripristini la funzione obiettivo del problema iniziale e si ricalcolino i costi ridotti, ottenendo la tabella

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1	-1	0	0	1
x_4	0	-2	$\boxed{1}$	1	0	1
x_5	0	1	1	0	1	3
	0	1	-2	0	0	2

Si selezioni come colonna pivot la terza. La riga di pivot è determinata calcolando $\min\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\}$. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_3, x_5. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 + R_2' = R_1 + R_2 \\ R_2' &= R_2 \\ R_3' &= R_3 - R_2' = R_3 - R_2, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	-1	0	1	0	2
x_3	0	-2	1	1	0	1
x_5	0	$\boxed{3}$	0	-1	1	2
	0	-3	0	2	0	4

Si selezioni come colonna pivot la seconda. La riga di pivot è la terza. L'elemento pivot è quindi 3 e la nuova base è data dalle variabili x_1, x_3, x_2. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 + R_3' \\ R_2' &= R_2 + 2R_3' \\ R_3' &= \frac{R_3}{3}, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	0	0	0	1	1	6

La soluzione ottima è il vettore $x^* = (\frac{8}{3}, \frac{2}{3})^T$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = -6$.

Esercizio 8 *Risolvere applicando il metodo del simplesso primale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned}
&\min(-x_1 + x_2)\\
&x_1 + x_2 \geq 3\\
&x_1 + 2x_2 \leq 2\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Risoluzione

Innanzi tutto occorre ridurre il problema alla forma standard, ottenendo così

$$\begin{aligned}
&\min(-x_1 + x_2)\\
&x_1 + x_2 - x_3 = 3\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 2\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

Si applichi la ricerca della base in due fasi per determianare una base ammissibile iniziale. Si risolve pertanto il problema artificiale

$$\begin{aligned}
&\min(y_1)\\
&x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 3\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 2\\
&x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4\\
&y_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

La base $B = I$ associata alla variabile artificiale ed alla variabile scarto x_4 è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	b
y_1	1	1	-1	0	1	3
x_4	$\boxed{1}$	2	0	1	0	2
	-1	-1	1	0	0	-3

Si selezioni come colonna pivot la prima e come riga di pivot la seconda. L'elemento pivot è quindi 1 e la nuova base è data dalle variabili y_1, x_1. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 - R_2' \\ R_2' &= R_2, \end{aligned}$$

si ottiene la tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	b
y_1	0	-1	-1	-1	1	1
x_4	1	2	0	1	0	2
	0	1	1	1	0	-1

La soluzione ottima della prima fase è quindi $y_1 = 1$ e $z = 1$. Si conclude che il problema iniziale non ammette soluzioni ammissibili.

4 Problemi duali

Esercizio 9 *Scrivere il problema duale del problema*

$$\begin{aligned} &\max(20x_1 + 12.5x_2) \\ &12x_1 + 23x_2 \leq 1500 \\ &35x_1 + 20x_3 \leq 3150 \\ &40x_1 + 25x_2 \leq 2000 \\ &230x_1 + 180x_2 \leq 18000 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Risoluzione

Variabili. Le variabili decisionali associate al problema duale sono in numero pari ai vincoli del problema primale e sono indicate con y_1, y_2, y_3, y_4, rispettivamente.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo da minimizzare è data da: $1500y_1 + 3150y_2 + 2000y_3 + 18000y_4$.

Vincoli. I vincoli associati al problema duale sono in numero pari alle variabili del problema primale, pertanto si ha:

$$12y_1 + 35y_2 + 40y_3 + 230y_4 \geq 20$$
$$23y_1 + 20y_2 + 25y_3 + 180y_4 \geq 12.5.$$

Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili y_i, $i = 1, \dots, 4$.

La formulazione finale è:

$$\begin{aligned}
&\min(1500y_1 + 3150y_2 + 2000y_3 + 18000y_4) \\
&12y_1 + 35y_2 + 40y_3 + 230y_4 \geq 20 \\
&23y_1 + 20y_2 + 25y_3 + 180y_4 \geq 12.5 \\
&y_i \geq 0, i = 1, \dots, 4.
\end{aligned}$$

Esercizio 10 *Scrivere il problema duale del problema*

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 5x_2 - 4x_3) \\
&x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 1 \\
&x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Risoluzione

Si scriva il problema nella forma

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 5x_2 - 4x_3) \\
&-x_1 - 4x_2 - 4x_3 \leq -1 \\
&x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Variabili. Le variabili decisionali associate al problema duale sono in numero pari ai vincoli del problema primale e sono indicate con y_1, y_2, rispettivamente.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo da minimizzare è data da: $-y_1 + 6y_2$.

Vincoli. I vincoli associati al problema duale sono in numero pari alle variabili del problema primale, pertanto si ha:

$$
\begin{aligned}
&-y_1 + y_2 \geq 2\\
&-4y_1 + y_2 \geq 5\\
&-4y_1 - y_2 \geq -4.
\end{aligned}
$$

Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili y_i, $i = 1, 2$.

La formulazione finale è:

$$
\begin{aligned}
&\min(-y_1 + 6y_2)\\
&-y_1 + y_2 \geq 2\\
&-4y_1 + y_2 \geq 5\\
&-4y_1 - y_2 \geq -4.\\
&y_1, y_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Esercizio 11 *Dopo aver scritto il problema duale del problema*

$$
\begin{aligned}
&\min(-2x_1 - x_2)\\
&2x_1 \leq 2\\
&4x_2 \leq 1 \qquad (P)\\
&4x_1 - 3x_2 \leq 4\\
&x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

calcolare la soluzione ottima duale, ricavandola dalla tabella finale del metodo del simplesso applicato al problema primale.

Risoluzione

Variabili. Le variabili decisionali associate al problema duale sono in numero pari ai vincoli del problema primale e sono indicate con y_1, y_2, y_3, rispettivamente.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo da massimizzare è data da: $2y_1 + y_2 + 4y_3$.

Vincoli. I vincoli associati al problema duale sono in numero pari alle variabili del problema primale, pertanto si ha:

$$\begin{aligned} &2y_1 + 4y_3 \leq -2 \\ &4y_2 - 3y_3 \leq -1. \end{aligned}$$

Vale inoltre il vincolo di non positività sulle variabili y_i, $i = 1, 2, 3$.

La formulazione finale è:

$$\begin{aligned} &\max(2y_1 + y_2 + 4y_3) \\ &2y_1 + 4y_3 \leq -2 \\ &4y_2 - 3y_3 \leq -1 \\ &y_i \leq 0, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Per applicare il metodo del simplesso al problema primale (P), occorre ridurlo alla forma standard, ottenendo così:

$$\begin{aligned} &\min(-2x_1 - x_2) \\ &2x_1 + x_3 = 2 \\ &4x_2 + x_4 = 1 \\ &4x_1 - 3x_2 + x_5 = 4 \\ &x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Dalla risoluzione dell'esercizio 5, si ottiene la soluzione ottima primale $x^* = (1, \frac{1}{4})^T$ e la tabella finale

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_5	0	0	-2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$

La soluzione duale si ottiene sottraendo al vettore dei costi associati alle variabili che erano in base nella prima tabella (variabili scarto x_3, x_4, x_5) il vettore dei costi ridotti (nella tabella finale) associati alle variabili scarto, cioè $y^* = (0,0,0)^T - (1, \frac{1}{4}, 0)^T = (-1, -\frac{1}{4}, 0)^T$.

Esercizio 12 *Risolvere applicando il metodo del simplesso duale il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\min(3x_1 + 2x_2)$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4.$$

Risoluzione

La base $B = I$ associata alle variabili x_3, x_4 è ammissibile, pertanto la prima tabella in forma canonica è data da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	$\boxed{-2}$	1	1	0	-1
x_4	1	1	0	1	2
	3	2	0	0	0

Si selezioni come riga pivot la prima, quella cioè in corrispondenza della quale si trova il termine noto negativo -1. La colonna di pivot è la prima e l'elemento pivot è -2. La nuova base è data dalle variabili x_1, x_4. Dopo aver aggiornato le righe della tabella secondo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} R_1' &= -\frac{R_1}{2} \\ R_2' &= R_2 - R_1', \end{aligned}$$

si ottiene la seconda tabella:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_4	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

La soluzione ottima è il vettore $x^* = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ ed il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = \frac{3}{2}$.