

Esercizi di ottimizzazione vincolata

A. Agnetis, P. Detti*

Esercizi svolti

1

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - 4x_2 \geq -3 \\ & -x_1 + x_2^2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

studiare l'esistenza di punti di massimo.

Soluzione. Studiamo il problema nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ g_1(x) = 3 + x_1 - 4x_2 & \geq 0 & (1) \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 & \geq 0 & (2) \\ g_3(x) = x_1 & \geq 0 & (3) \end{aligned}$$

La regione ammissibile del problema è costituita dalla regione al di sotto della retta g_1 ed esterna alla parabola g_2 (Fig.1). Notare che tale regione è illimitata e non convessa. Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie di minimo locale.

I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche - Università di Siena

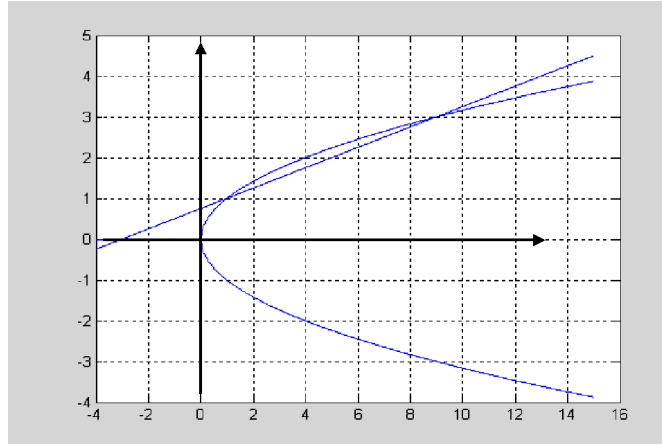


Figura 1: Regione ammissibile dell'esercizio 1.

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = -x_1 - x_2 - \lambda_1(3 + x_1 - 4x_2) - \lambda_2(-x_1 + x_2^2) - x_1\lambda_3$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -1 + 4\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 &= 0 \\ 3 + x_1 - 4x_2 &&\geq 0 \\ -x_1 + x_2^2 &&\geq 0 \\ x_1 &&\geq 0 \\ 3\lambda_1 + x_1\lambda_1 - 4x_2\lambda_1 &= 0 \\ -x_1\lambda_2 + x_2^2\lambda_2 &= 0 \\ x_1\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti casi.

Caso 1

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$). La regione ammissibile è un insieme aperto costituito dai punti del primo e del quarto quadrante al di sotto della retta ed esterni alla parabola. Poiché in questo caso nessun vincolo è attivo, la condizione di qualificazione è banalmente soddisfatta.

La prima condizione delle KKT diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 = 0$$

ed il sistema quindi non ha soluzione.

Caso 2

Il solo vincolo attivo è il vincolo (1) ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$). Poiché $\nabla g_1 \neq 0$, non ci sono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

La prima condizione diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 = 0$$

ed il sistema anche in questo caso non ha soluzione ($\lambda_1 < 0$).

Caso 3

Il solo vincolo attivo è il vincolo (2) ($\lambda_1 = \lambda_3 = 0$). Poiché $\nabla g_2 \neq 0$ anche in questo caso, non ci sono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + \lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - 2x_2\lambda_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

dalle prime due condizioni si ottiene $\lambda_2 = 1$ e $x_2 = -1/2$, e dalla terza $x_1 = 1/4$. Il punto ammissibile trovato è quindi $(1/4, -1/2)$, a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $1/4$.

Caso 4

Il solo vincolo attivo è il vincolo (3) ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Poiché $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$, non esistono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

La prima condizione delle KKT diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_3 = 0$$

ed il sistema quindi non ha soluzione ($\lambda_3 < 0$).

Caso 5

Sono attivi i vincoli (1) e (2) ($\lambda_3 = 0$). La regione in questo caso è costituita dai punti $A = (1, 1)$ e $B = (9, 3)$. Controlliamo la condizione di qualificazione dei vincoli. I gradienti dei vincoli attivi nel punto A

$$\nabla g_1(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(A) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Le condizioni di KKT diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

da cui $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 5/2$. Il punto A è un candidato di minimo locale. In tale punto la funzione obiettivo vale -2 .

Consideriamo il punto B . I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_1(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(B) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Dalle prime due condizioni di KKT calcolate in B si ottiene $\lambda_2 < 0$ e quindi il sistema non ammette soluzione.

Caso 6

Sono attivi i vincoli (1) e (3) ($\lambda_2 = 0$). La regione in questo caso è costituita dal punto $C = (0, 3/4)$. I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Le prime due condizioni diventano

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 1/4$ e $\lambda_3 = -5/4 < 0$. Il sistema non ammette quindi soluzione.

Caso 7

Sono attivi i vincoli (2) e (3) ($\lambda_1 = 0$). La regione in questo caso è costituita dal punto $B = (0, 0)$. I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono ovviamente linearmente *dependenti*, e quindi la condizione di qualificazione dei vincoli attivi non è soddisfatta. Nel punto $(0, 0)$ non possiamo applicare le condizioni di KKT. Non si può quindi escludere che il punto B sia un minimo locale.

Caso 8

Sono attivi tutti i vincoli. La regione ammissibile in questo caso è vuota.

I punti candidati di minimo locale sono quindi $(1/4, -1/2)$ e $A = (1, 1)$, che soddisfano sia le condizioni di KKT sia la condizione di qualificazione, ed il punto $(0, 0)$ che non soddisfa la condizione di qualificazione.

2

Dato l'insieme di punti descritto dalle seguenti disequazioni

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$-x_1 + x_2^2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

verificare che il punto $(1, 1)$ non soddisfa le condizioni di qualificazione.

Soluzione. Consideriamo le disequazioni nella forma:

$$g_1(x) = 1 + x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0$$

La regione ammissibile consiste nella regione del primo e quarto quadrante al di sotto della retta $1 + x_1 - 2x_2$ ed esterna alla parabola $-x_1 + x_2^2$.

Nel punto $A = (1, 1)$ sono attivi i vincoli $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Controlliamo la condizione di

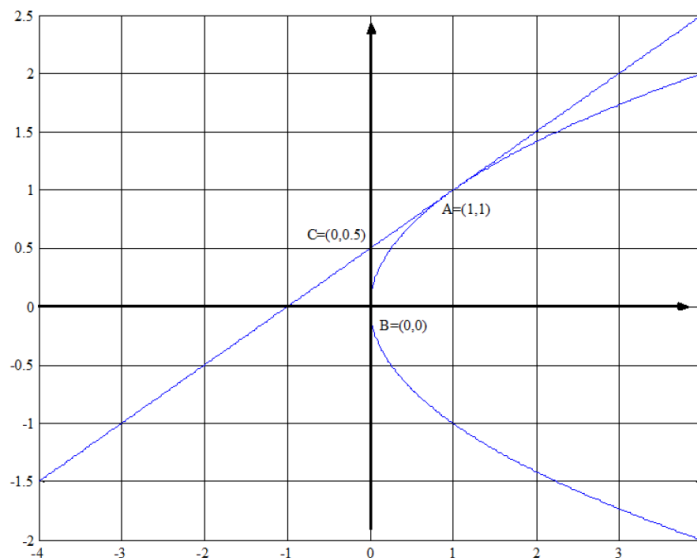


Figura 2: Regione ammissibile dell'esercizio 2.

qualificazione dei vincoli. Si ha

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I due vettori sono linearmente dipendenti e quindi la condizione di qualificazione dei vincoli non è soddisfatta. Notare, infatti, che in A le due curve sono tangenti, e quindi i vettori gradiente relativi ai due vincoli sono paralleli.

3

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 3x_2^2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\geq 1 \\ g_2(x) = x_2^2 &\geq 1/4 \end{aligned} \tag{4}$$

studiare l'esistenza di punti di minimo.

Soluzione. Studiamo il problema nella forma:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 3x_2^2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ g_2(x) = 4x_2^2 - 1 &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_2(4x_2^2 - 1)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - 2x_1\lambda_1 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 6x_2 - 2\lambda_1x_2 - 8\lambda_2x_2 &= 0 \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ g_2(x) &= 4x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) & &= 0 \\ \lambda_2(4x_2^2 - 1) & &= 0 \\ \lambda_1 & &\geq 0 \\ \lambda_2 & &\geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile del problema è costituita dalla intersezione della regione esterna alla circonferenza g_1 con i due semipiani $x_2 \geq 1/2$ e $x_2 \leq -1/2$. L'insieme ammissibile non è convesso e quindi le condizioni di KKT sono condizioni necessarie di ottimo locale per i punti che soddisfano la condizione di qualificazione.

I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

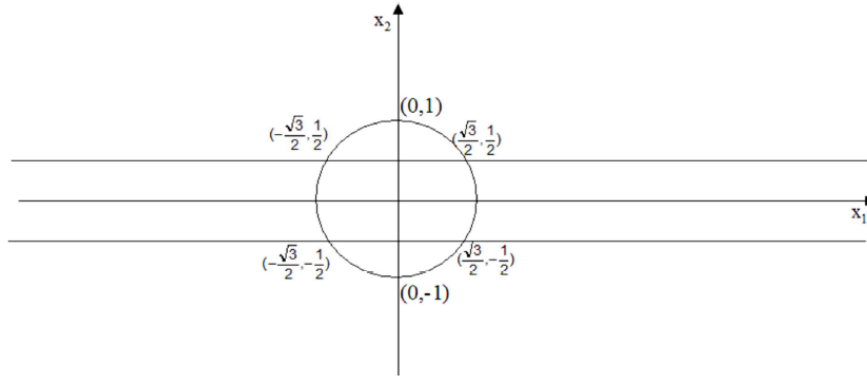


Figura 3: Regione ammissibile dell'esercizio 3.

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo i seguenti casi.

Caso 1

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Dalle prime due condizioni di KKT si ottiene il punto $(0, 0)$ che non appartiene alla regione ammissibile.

Caso 2

È attivo il vincolo $g_1(x)$ ($\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = 0$).

In questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Le prime due condizioni di KKT diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 6x_2 - 2\lambda_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Notare che nell'insieme ammissibile si ha sempre $x_2 \neq 0$. La seconda equazione può essere quindi divisa per x_2 ottenendo $\lambda_1 = 3$.

Consideriamo i due sottocasi: $x_1 = 0$ e $x_1 \neq 0$.

Per $x_1 = 0$, dal primo vincolo si ottiene $x_2 = 1$ e $x_2 = -1$. I punti trovati sono quindi $(0, 1)$, $(0, -1)$. La funzione obiettivo in entrambi i punti assume valore 3.

Per $x_1 \neq 0$, dalle prime due condizioni di KKT si ottiene rispettivamente $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_1 = 3$, e quindi il sistema non ammette soluzione.

Caso 3

È attivo il vincolo $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$).

In questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8x_2 \end{bmatrix}$ si annulla solo nei punti dell'asse delle

ascisse, che non appartengono alla regione ammissibile.

Imponendo le KKT, si ottengono i punti $(0, 1/2)$, $(0, -1/2)$ che non sono ammissibili.

Caso 4

Entrambi i vincoli sono attivi ($\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$). La regione ammissibile è costituita in questo caso dai quattro punti d'intersezione della circonferenza con le due rette $x_2 = 1/2$ e $x_2 = -1/2$: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

È facile verificare che in tutti e quattro i punti la condizione di qualificazione è soddisfatta (∇g_1 e ∇g_2 sono linearmente indipendenti).

In tutti e quattro i punti, dalle prime due condizioni di KKT, si ottengono i moltiplicatori: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1/2$. Controlliamo la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Si ha la matrice

$$\frac{dg}{dx} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

che nei punti trovati ha sempre rango 2. In tutti i punti la funzione obiettivo vale sempre $3/2$.

I punti candidati ad essere dei minimi locali sono quelli trovati nei Casi 2 e 4.

4

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2^2 \\ 2x_1^2 + x_2^2 & \leq 7 \\ x_1^2 + x_2^2 & \geq 2 \end{aligned}$$

- a) Vi sono punti in cui la condizione di qualificazione dei vincoli attivi non è soddisfatta? Motivare la risposta.
- b) Si individuino i punti che soddisfano le condizioni necessarie di ottimo del primo ordine (KKT). Siete in grado di indicare il punto di minimo globale?

Soluzione. Il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2^2 \\ g_1(x) = -2x_1^2 - x_2^2 + 7 & \geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 & \geq 0 \end{aligned}$$

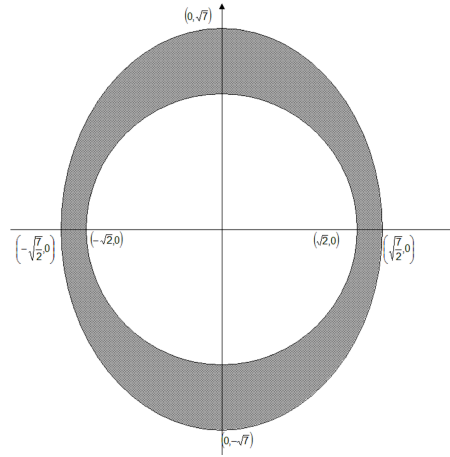


Figura 4: Regione ammissibile dell'esercizio 4.

L'insieme ammissibile del problema è dato dall'intersezione della parte interna all'ellisse, corrispondente al primo vincolo, con quella interna alla circonferenza descritta dal secondo vincolo. Tale insieme non è convesso. Per quanto riguarda la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, si noti che non esistono punti in cui entrambi vincoli sono attivi. I gradienti dei due vincoli, inoltre, si annullano solo nell'origine che non appartiene alla regione ammissibile. La condizione di qualificazione dei vincoli attivi è, quindi, sempre soddisfatta.

Troviamo i punti che soddisfano le condizioni di KKT. La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = -x_1 - x_2^2 - \lambda_1(-2x_1^2 - x_2^2 + 7) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -1 + 4x_1\lambda_1 - 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -2x_2 + 2x_2\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 &= 0 \\ g_1(x) &= -2x_1^2 - x_2^2 + 7 &\geq 0 \\ g_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2 &\geq 0 \\ \lambda_1(-2x_1^2 - x_2^2 + 7) &= 0 \\ \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti quattro casi.

Caso 1

Entrambi i vincoli non sono attivi ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

Dalla prima condizione si ottiene

$$-1 = 0$$

ed è quindi impossibile.

Caso 2

Entrambi i vincoli sono attivi.

In questo caso non esistono punti ammissibili dato che ellisse e circonferenza non hanno punti in comune.

Caso 3

Il solo vincolo attivo è $g_1(x)$ ($\lambda_2 = 0$).

Notare che in questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, si ha $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$ che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Applichiamo le condizioni KKT. Si ha il sistema:

$$\begin{aligned} -1 + 4x_1\lambda_1 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_2\lambda_1 &= 0 \\ -2x_1^2 - x_2^2 + 7 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione derivano i due seguenti sotto casi: *i*) $x_2 = 0$; *ii*) $x_2 \neq 0$.

i)

Dalla terza equazione, si ottengono i punti $A(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0)$ e $B(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0)$, di cui solo A soddisfa la condizione di non negatività su λ_1 .

ii)

Poiché $x_2 \neq 0$ si può dividere la seconda equazione per x_2 ottenendo $\lambda_1 = 1$. Dalla prima equazione si ottiene $x_1 = \frac{1}{4}$ e dalla terza $x_2 = \pm\sqrt{\frac{55}{8}}$. I punti sono quindi $C(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{55}{8}})$ e $D(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{55}{8}})$.

Caso 4

Il solo vincolo attivo è $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0$).

Anche in questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Si ha il sistema:

$$\begin{aligned} -1 - 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_2\lambda_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 &= 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Possiamo considerare i due seguenti sotto casi: *iii*) $x_2 = 0$; *iv*) $x_2 \neq 0$.

iii)

L'unico punto che soddisfa il sistema è $E(-\sqrt{2}, 0)$.

iv)

Dalla prima equazione si ha $\lambda_2 = -1$ che non soddisfa la quarta equazione.

Poiché l'insieme ammissibile è chiuso e limitato esiste almeno un minimo globale. Tra quelli che soddisfano le condizioni necessarie di minimo, i punti che minimizzano la funzione obiettivo sono C e D .

5

Determinare il punto di intersezione dei piani

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9 \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

più vicino al punto di coordinate $(3, -1, 2)$.

Soluzione. Il problema può essere formulato come problema di ottimizzazione vincolata in cui l'obiettivo è quello di minimizzare il quadrato della distanza tra il punto cercato e $(3, -1, 2)$:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 \\ h_1(x) &= 9 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ h_2(x) &= 3 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

Notare che la funzione obiettivo è coerciva, convessa, con derivate parziali continue, e che i vincoli sono lineari. Le condizioni di *Karush Kuhn Tucker* (KKT) sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale anche nei punti che *non* soddisfano la condizione di qualificazione (per la linearità dei vincoli).

Applichiamo le condizioni di KKT per determinare i punti che soddisfano le condizioni di ottimalità del primo ordine. La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 - \lambda_1(9 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3) - \lambda_2(3 - x_1 - 2x_2)$$

I vincoli sono tutti di uguaglianza. Imponendo le condizioni di KKT si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 3) + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 + 1) - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2(x_3 - 2) + 4\lambda_1 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $x_1 = 3 - 2x_2$. La sostituzione di x_1 nella penultima equazione porta a $x_3 = 2x_2$. Il sistema, ridotto alle sole variabili x_2 , λ_1 e λ_2 , diventa:

$$\begin{array}{rcl} 4x_2 - 3\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 2 \\ -4x_2 - 4\lambda_1 & = & -4 \end{array}$$

da cui si ottiene $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, e $x_1 = 3 - 2x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = 2x_2 = \frac{2}{3}$. Il punto che soddisfa le condizioni del primo ordine è $\hat{x} = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. In tale punto la funzione obiettivo vale 4. Il punto \hat{x} è quindi un punto di minimo globale.

6

Determinare il punto della regione definita dai vincoli

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad x_1^2 \leq 4$$

più vicino al punto di coordinate $(2, 3)$.

Soluzione. Il problema può essere formulato come problema di ottimizzazione vincolata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ g_1(x) = 2 - x_1 - x_2 & \geq 0 \\ g_2(x) = 4 - x_1^2 & \geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile è quella compresa tra le due rette $x_1 = 2$, $x_1 = -2$, ed al di sotto della retta $x_1 + x_2 - 2 = 0$.

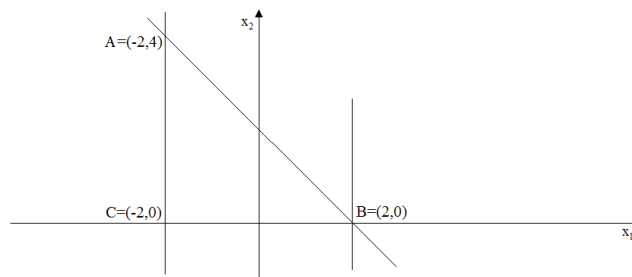


Figura 5: Regione ammissibile dell'esercizio 6.

Notare che la funzione obiettivo è coerciva, convessa con derivate parziali continue, e che la regione ammissibile è convessa. I vincoli hanno inoltre derivate parziali continue

ovunque. Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale per i punti che soddisfano la condizione di qualificazione.

I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - \lambda_1(2 - x_1 - x_2) - \lambda_2(4 - x_1^2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 3) + \lambda_1 &= 0 \\ 2 - x_1 - x_2 &&\geq 0 \\ 4 - x_1^2 &&\geq 0 \\ 2\lambda_1 - x_1\lambda_1 - x_2\lambda_1 &&= 0 \\ 4\lambda_2 - x_1^2\lambda_2 &&= 0 \\ \lambda_1 &&\geq 0 \\ \lambda_2 &&\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti casi.

Caso 1

Entrambi i vincoli sono attivi. L'insieme ammissibile è costituito dai punti $B = (2, 0)$ e $A = (-2, 4)$. In entrambi i punti i gradienti dei due vincoli sono linearmente indipendenti e quindi la condizione di qualificazione è soddisfatta.

Nel punto B il sistema diventa:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 &= 0 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ -6 + \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

che non ammette soluzione ($\lambda_2 = -3/2 < 0$).

Nel punto A il sistema diventa:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 &= 0 \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

dalla seconda equazione si ottiene

$$\lambda_1 = -2 < 0$$

e quindi il sistema non ammette soluzione.

Caso 2

Consideriamo la regione in cui il solo vincolo $g_1(x) \geq 0$ è attivo. Notare che in tale regione la condizione di qualificazione è sempre soddisfatta dato che $\nabla g_1(x)$ è diverso dal vettore nullo.

Per $\lambda_2 = 0$ le condizioni di KKT diventano:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 &= 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 &= 0 \\ 2 - x_1 - x_2 &= 0 \\ 4 - x_1^2 &> 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

eliminando λ_1 dalle prime due equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

da cui $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/2$. Sostituendo x_1 nella prima equazione si ha $\lambda_1 = 3$. Nel punto $(1/2, 3/2)$ la funzione obiettivo vale $9/2$.

Caso 3

Consideriamo la regione in cui il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo. Tale regione è costituita dalle due semirette $x_1 = -2$ e $x_1 = 2$ aventi origine in A ed in B rispettivamente. Notare che A e B non appartengono a tale regione. Anche in questo caso, la condizione di qualificazione è sempre soddisfatta dato che $\nabla g_2(x)$ si annulla solo per $x_1 = 0$.

Dalle condizioni di KKT si ha il sistema:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 2) + 2x_1\lambda_2 &= 0 \\ 2(x_2 - 3) &= 0 \\ 2 - x_1 - x_2 &> 0 \\ 4 - x_1^2 &= 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

che non ha soluzione.

Caso 4

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2 &= 0 \\ x_2 - 3 &= 0 \\ 2 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 4 - x_1^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

che non ha soluzione ammissibile.

L'unico punto che soddisfa le condizioni di ottimalità è il punto $(1/2, 3/2)$ trovato nel Caso 2. L'ottimo globale è quindi $(1/2, 3/2)$.

7

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} \max \quad & \ln(x_1) + 2\ln(x_2) + 3\ln(x_3) \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3000 \\ & x_1 \geq 750 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_3 \geq 1 \end{aligned}$$

studiare l'esistenza di punti di massimo.

Soluzione. Studiamo il problema nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\ln(x_1) - 2\ln(x_2) - 3\ln(x_3) \\ & h_1(x) = 3000 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & g_2(x) = x_1 - 750 \geq 0 \\ & g_3(x) = x_2 - 1 \geq 0 \\ & g_4(x) = x_3 - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Poiché la funzione obiettivo è convessa e continua nell'insieme ammissibile, e i vincoli sono lineari, le condizioni di *Karush Kuhn Tucker* (KKT) sono condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale anche nei punti che non soddisfano la condizione di qualificazione (per la linearità dei vincoli).

La funzione Lagrangiana è:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) = & -\ln(x_1) - 2\ln(x_2) - 3\ln(x_3) - \lambda_1(3000 - x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_2(x_1 - 750) + \\ & -\lambda_3(x_2 - 1) - \lambda_4(x_3 - 1) \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -\frac{3}{x_3} + \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \quad (8)$$

$$3000 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (9)$$

$$x_1 - 750 \geq 0 \quad (10)$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (11)$$

$$x_3 - 1 \geq 0 \quad (12)$$

$$\lambda_2(x_1 - 750) = 0 \quad (13)$$

$$\lambda_3(x_2 - 1) = 0 \quad (14)$$

$$\lambda_4(x_3 - 1) = 0 \quad (15)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad (16)$$

$$\lambda_3 \geq 0 \quad (17)$$

$$\lambda_4 \geq 0 \quad (18)$$

Consideriamo i seguenti casi.

Caso 1

Il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $x_1 = 750$. Dalle (7), (8) e (9) si ottiene:

$$3000 - 750 - \frac{2}{\lambda_1} - \frac{3}{\lambda_1} = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = \frac{1}{2250}$$

mentre x_2 ed x_3 assumono i valori:

$$x_2 = \frac{2}{\lambda_1} = 900 \quad x_3 = \frac{3}{\lambda_1} = 1350$$

Dalla prima equazione si può ricavare λ_2

$$\lambda_2 = -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 = -\frac{1}{750} + \frac{1}{450} = \frac{2}{2250}$$

che è positivo. Il punto trovato è quindi:

$$x_1 = 750 \quad x_2 = 900 \quad x_3 = 1350$$

Caso 2

Il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ e $x_2 = 1$. Dalle (6), (8) e (9) si ottiene:

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1}; \quad x_3 = \frac{3}{\lambda_1}$$

Per sostituzione, dal vincolo di uguaglianza si ottiene:

$$\lambda_1 = \frac{4}{2999}$$

mentre dalla (7) si ricava λ_3 :

$$\lambda_3 = \frac{4}{2999} - 2 < 0$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

Caso 3

Il solo vincolo $g_3(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $x_3 = 1$. Dalle (7), (8) e (9) si ottiene:

$$x_1 = 2999/3 \quad x_2 = 2/3(2999) \quad x_3 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{3}{2999} \quad \lambda_4 = \lambda_1 - 3$$

e quindi il sistema non ha soluzione ($\lambda_4 < 0$).

Caso 4

Sono attivi i vincoli $g_1(x) \geq 0$ e $g_2(x) \geq 0$, dunque $\lambda_4 = 0$ e inoltre $x_1 = 750$ e $x_2 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_3 = 2249$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{750} + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -2 + \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2249} + \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

da cui $\lambda_1 = \frac{3}{2249}$ e di conseguenza $\lambda_3 < 0$.

Caso 5

Sono attivi i vincoli $g_1(x) \geq 0$ e $g_3(x) \geq 0$, dunque $\lambda_3 = 0$ e inoltre $x_1 = 750$ e $x_3 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_2 = 2249$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{750} + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -\frac{2}{2249} + \lambda_1 &= 0 \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

e dunque, come si vede, $\lambda_4 < 0$.

Caso 6

Sono attivi i vincoli $g_2(x) \geq 0$ e $g_3(x) \geq 0$, dunque $\lambda_2 = 0$ e inoltre $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_1 = 2998$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2998} + \lambda_1 &= 0 \\ -2 + \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

che ammette soluzione solo con $\lambda_3 < 0$ e $\lambda_4 < 0$.

Caso 7

Sono attivi tutti i vincoli ($g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$ e $g_3(x) = 0$). L'insieme ammissibile è vuoto.

Caso 8

Nessun vincolo è attivo.

Dalle condizioni di KKT si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 &= 0 \\ -\frac{2}{x_2} + \lambda_1 &= 0 \\ -\frac{3}{x_3} + \lambda_1 &= 0 \\ 3 - x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

che ammette la soluzione:

$$x_1 = 500 \quad x_2 = 1000 \quad x_3 = 1500 \quad \lambda_1 = \frac{1}{500} \quad \lambda_2 = 0$$

che non soddisfa il vincolo $x_1 \geq 750$.

L'unico punto che soddisfa le condizioni di KKT è il punto trovato nel Caso 1, ed è quindi un ottimo globale.

8

Un agente di borsa ha a disposizione 1000 Euro da investire su due titoli finanziari. Siano x_1 ed x_2 le quantità investite sui due titoli rispettivamente. Dallo studio di dati storici, si stima che il guadagno medio atteso e la varianza dell'intero investimento, in funzione delle quantità investite, sono rispettivamente $0,1x_1 + 0,12x_2$ e $0,005x_1^2 - 0,006x_1x_2 + 0,008x_2^2$. Si richiede di massimizzare il guadagno atteso totale con il vincolo che la varianza non sia superiore a 625.

Soluzione. Il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\min -0,1x_1 - 0,12x_2$$

$$g_1(x) = 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 \geq 0 \quad (19)$$

$$g_2(x) = 1000 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (20)$$

Può essere dimostrato che l'insieme ammissibile del problema in esame è convesso (ossia che $-g_1(x)$ è una funzione convessa). Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale nei punti che soddisfano la condizione di qualificazione. I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -0,01x_1 + 0,006x_2 \\ 0,006x_1 - 0,016x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = -0,1x_1 - 0,12x_2 - \lambda_1(625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2) - \\ - \lambda_2(1000 - x_1 - x_2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -0,1 + 0,01x_1\lambda_1 - 0,006x_2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -0,12 + 0,016x_2\lambda_1 - 0,006x_1\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ g_1(x) &= 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) &= 1000 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 625\lambda_2 - 0,005x_1^2\lambda_2 + 0,006x_1x_2\lambda_2 - 0,008x_2^2\lambda_2 &= 0 \\ 1000\lambda_1 - x_1\lambda_1 - x_2\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti quattro casi.

Caso 1

Entrambi i vincoli sono attivi.

Dal sistema

$$\begin{aligned} 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 &= 0 \\ 1000 - x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione

$$0,019x_2^2 - 16x_2 + 4375 = 0$$

che non ha soluzioni reali.

Caso 2

È attivo il solo vincolo $g_1(x)$ ($\lambda_2 = 0$). Controlliamo la condizione di qualificazione, si ha:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -0,01x_1 + 0,006x_2 \\ 0,006x_1 - 0,016x_2 \end{bmatrix}$$

che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione in esame ($g_1(x)$ attivo). Non si hanno quindi punti che non soddisfano la condizione di qualificazione. Dalle KKT, si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -0,1 + 0,01x_1\lambda_1 - 0,006x_2\lambda_1 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -0,12 + 0,016x_2\lambda_1 - 0,006x_1\lambda_1 &= 0 \\ g_1(x) &= 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Esplicitando le prime due equazioni rispetto a λ_1 , ed uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\frac{0,1}{0,01x_1 - 0,006x_2} = \frac{0,12}{0,016x_2 - 0,006x_1}$$

e quindi $x_1 = 1,29x_2$. Sostituendo x_1 nella terza equazione si ottiene la soluzione $x_2 = 269.9$ e $x_1 = 348.1$.

Caso 3

È attivo il solo vincolo $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0$). In questo caso $\nabla g_2(x)$ è costante e la condizione di qualificazione è banalmente soddisfatta. Le prime due condizioni KKT diventano

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -0,1 + \lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -0,12 + \lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

Caso 4

Entrambi i vincoli non sono attivi ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

La prima condizione diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -0,1 = 0$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

Il minimo globale del problema è quindi $x_1 = 348.1$ e $x_2 = 269.9$.

9

Dato il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned}\min \quad & 2x_1^3 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & 2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0\end{aligned}$$

dire cosa succede nei punti $A = (-1, 0)$, $B = (1/\sqrt{2}, 0)$, $C = (0, 1)$.

La regione ammissibile è quella disegnata in Figura 6.

Soluzione. Innanzitutto, riscriviamo il sistema nella forma canonica.

$$\begin{aligned}\min \quad & 2x_1^3 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0 \\ & 2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0\end{aligned}$$

La funzione lagrangiana è

$$L(x, \lambda) = 2x_1^3 + 3x_2 - \lambda_1(-x_1^2 - x_2^2 + 1) - \lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1)$$

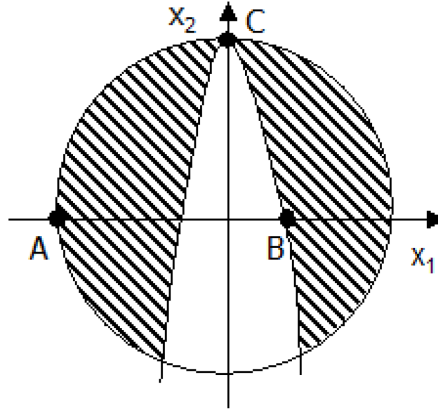


Figura 6: Regione ammissibile dell'esercizio 9.

e le condizioni KKT impongono che in ogni punto di minimo che sia anche regolare, in cui cioè sia soddisfatta la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, si abbia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 6x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2 x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 3 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1^2 - x_2^2 + 1) &= 0 \\ \lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1) &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 &\geq 0 \\ 2x_1^2 + x_2 - 1 &\geq 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Consideriamo il punto A. Il solo vincolo attivo è il primo, il cui gradiente è non nullo in A, e dunque A è un punto di regolarità. Per la condizione di complementarità, deve aversi $\lambda_2 = 0$, per cui la seconda condizione KKT diventa

$$3 = 0$$

Dunque, il punto A non è un punto di minimo. Consideriamo ora il punto B. Il solo vincolo attivo è il secondo, il cui gradiente è non nullo in B, e dunque, B è un punto di regolarità. Per la condizione di complementarità, deve aversi $\lambda_1 = 0$, per cui si ha il sistema

$$\begin{aligned}3 - 2\sqrt{2}\lambda_2 &= 0 \\ 3 - \lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

che non ha soluzione. Dunque, il punto B non è un punto di minimo locale. Consideriamo ora il punto C. In C sono attivi entrambi i vincoli, e i loro gradienti $\nabla g_1(x) = [-2x_1, -2x_2]^T$ e $\nabla g_2(x) = [4x_1, 1]^T$ nel punto C diventano $\nabla g_1(C) = [0, -2]^T$ e $\nabla g_2(C) = [0, 1]^T$, che sono tra loro linearmente dipendenti. Quindi, il punto non è un punto di

regolarità, e come tale, non è tenuto a soddisfare le condizioni KKT. Si conclude allora che anche C può essere un punto di minimo locale.

10

Si risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{ll} \max & x_1^2 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_2 \leq x_1 + 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 \leq 3 \end{array}$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema nella forma canonica.

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1^2 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & -x_1 + 3 \geq 0 \end{array}$$

La regione ammissibile è riportata in Figura 7. Si noti che la regione ammissibile è

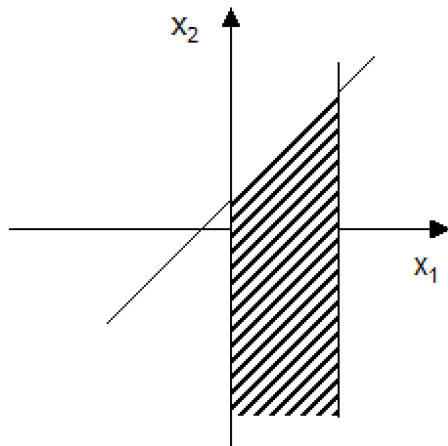


Figura 7: Regione ammissibile dell'esercizio 10.

convessa, i vincoli sono lineari, ma la funzione obiettivo è concava. Poiché i vincoli sono lineari le condizioni KKT sono necessarie di minimo locale anche nei punti che non soddisfano la condizione di qualificazione.

Imponendo ora le condizioni KKT, abbiamo

$$L(x, \lambda) = -x_1^2 - 3x_2 - \lambda_1(x_1 - x_2 + 1) - \lambda_2(x_1) - \lambda_3(-x_1 + 3)$$

e quindi abbiamo il sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -3 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(x_1 - x_2 + 1) &= 0 \\ \lambda_2 x_1 &= 0 \\ \lambda_3(-x_1 + 3) &= 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ -x_1 + 3 &\geq 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Appare evidente dalla seconda equazione che il solo valore $\lambda_1 = 3$ è possibile. Quindi, per la complementarietà, i soli punti che si trovano sulla retta $x_1 - x_2 + 1 = 0$ possono soddisfare le condizioni KKT. Consideriamo allora, tra tutti i diversi casi, quelli in cui il primo vincolo è attivo:

Caso 1: solo il vincolo 1 attivo. In questo caso, si ha $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, per cui il sistema diventa

$$\begin{aligned}-2x_1 - 3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &= 0\end{aligned}$$

che ha come soluzione il punto $A = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Il punto A non appartiene alla regione ammissibile.

Caso 2: vincoli 1 e 2 attivi Abbiamo in questo caso, $\lambda_3 = 0$, per cui il sistema diventa:

$$\begin{aligned}-2x_1 - 3 - \lambda_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &= 0 \\ x_1 &= 0\end{aligned}$$

che ha come soluzione il punto $B=(0, 1)$. Tuttavia, risolvendo il sistema, troviamo $\lambda_2 = -3$. Dunque, il punto B non può essere un punto di minimo.

Caso 3: vincoli 1 e 3 attivi Abbiamo in questo caso, $\lambda_2 = 0$, per cui il sistema diventa:

$$\begin{aligned}-2x_1 - 3 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 x_1 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &= 0 \\ -x_1 + 3 &= 0\end{aligned}$$

da cui otteniamo il punto $C=(3, 4)$ per $\lambda_3 = 9$. Dunque, il punto C è un possibile punto di minimo locale per la funzione.

11

Sia dato il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^3 - 2x_1^2x_2 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{array}$$

Dire se nei punti $A=(0,0)$ e $B=(1,0)$ la direzione $d = (-1, -1)^T$ è una direzione di discesa ammissibile.

Soluzione. Riscriviamo il problema nella forma:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^3 - 2x_1^2x_2 + x_2 \\ \text{s.t.} & 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \end{array}$$

Perché $d = (-1, -1)^T$ sia direzione di discesa, occorre che $\nabla f^T d < 0$, cioè

$$(3x_1^2 - 4x_1x_2, -2x_1^2 + 1)^T(-1, -1) < 0$$

Nel punto A abbiamo

$$(0, 1)^T(-1, -1) = -1 < 0$$

e nel punto B abbiamo

$$(3, -1)^T(-1, -1) = -2 < 0$$

Verifichiamo ora l'ammissibilità della direzione d a partire dai punti A e B . In A il vincolo non è attivo e quindi ogni direzione è ammissibile. In B il vincolo è attivo. Quindi, perché d sia ammissibile si deve avere $\nabla g(B)^T d \geq 0$. Numericamente, troviamo

$$\nabla g(B)^T d = (-2, 0)^T(-1, -1) = 2 > 0$$

dunque nel punto B la direzione d risulta essere una direzione di discesa ammissibile.

12

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1^3 - x_2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 & \leq 4 \\ g_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 & \geq 4 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 & \leq 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (-2, 0)$, $B = (\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ e $C = (0, 1)$ possono essere punti di minimo locale?

Soluzione. Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2 . Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Le due righe sono linearmente dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B sono attivi i vincoli g_2 e g_3 , quindi $\lambda_1 = 0$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate, infatti le colonne dello Jacobiano sono Linearmente Indipendenti $J(B) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{16}{5}\sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Risolvendo le condizioni di KKT si ottiene $\lambda_2 = -\frac{17}{25\sqrt{5}}$ ($\lambda_3 = \frac{147}{125}$), quindi le condizioni di KKT non sono verificate. Il punto B si può escludere che sia un punto di minimo. Nel punto C risulta attivo solo il vincolo g_2 , e le condizioni di qualificazione sono rispettate. In C vale $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ le condizioni di KKT portano a $\lambda_2 = -\frac{1}{8}$ e quindi non sono rispettate. Il punto C si può escludere che sia un punto di minimo.

13

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 2x_2^3 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 & \leq 1 \\ g_2(x) = x_1 + x_2^2 & \geq 1 \\ g_3(x) = -x_1 + x_2^2 & \leq 1 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ possono essere punti di minimo locale?

Soluzione. Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2 . Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B risultano attivi tutti e tre i vincoli, e quindi le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Il punto C è fuori dalla regione ammissibile (violato il vincolo g_2) e sicuramente non può essere punto di minimo.

14

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min & -x_1^2 + x_2 \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 & \geq 0 \\ g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $A = [1 \ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_2(A)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

Soluzione. Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2 . Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Indipendenti, e le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate. Le condizioni di KKT calcolate in A portano a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ e sono rispettate. Il punto A rispetta le condizioni necessarie di ottimalità. La sensibilità della funzione obiettivo alla variazione del vincolo g_2 di ϵ è pari a $\frac{df}{d\epsilon} = -\|\nabla g_2(A)\|\lambda_2 = -2\frac{3}{2} = -3$.

15

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min & 4x_1^3 + x_2^2 + 3 \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min & 4x_1^3 + x_2^2 + 3 \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 & \geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1 \ 5]^T$ e la direzione $d = [-1 \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x , la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

Soluzione. La direzione d nel problema P1 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12 - 30 \leq 0$) ma non una direzione ammissibile (essendo il vincolo di uguaglianza una direzione ammissibile deve essere ortogonale al gradiente del vincolo nel punto). Infatti $\nabla g(x)^T d = 4 - 3 \neq 0$. La direzione d nel problema P2 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12 - 30 \leq 0$) e ammissibile ($\nabla g(x)^T d = 4 - 3 \geq 0$).

Esercizi proposti

16

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 \\ g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\ g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Si considerino i punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Partendo dal punto $D = (1, 1)$, la direzione $d = [-1 \ 1]^T$ è una direzione di discesa? È una direzione ammissibile?

17

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ \min x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1 \ 0]^T$ e la direzione $d = [-1 \ -1]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, determinare se d è una direzione di discesa ammissibile.

18

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 + 3x_2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione ottima è $x^* = (1, -1)$. Supponiamo ora che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$x_1 + x_2 \geq -\epsilon \|\nabla g_2(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ , ossia quanto vale $\frac{df}{d\epsilon}$ nell'intorno di x^* ?

19

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 \\ -x_1^2 - x_2^2 &\geq -4 \\ -x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_1^2 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, 0)$, $D = (\sqrt{3}, 1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

Soluzione. Nel punto A nessun vincolo risulta attivo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto B sono attivi tutti i vincoli e le condizioni di KKT sono rispettate. Nel punto C risultano attivi i primi due vincoli ma le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto D risulta attivo il terzo vincolo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate in tutti i punti ad eccezione del punto B. Non si può quindi escludere che il punto B sia un punto di minimo.

20

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + 2x_2^2 &\leq 16 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 2\sqrt{2})$, $D = (0, 1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

21

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min 4x_1^3 - 3x_2 \\
x_1 - x_2^2 &\geq 0 \\
2 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

22

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min x_1^3 + x_2 \\
x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + x_2^2 &\leq 4 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (-2, 0)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

23

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min x_2 \\
1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - x_1^2 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

24

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2 \\ 1 - x_1^2 - (1/4)x_2^2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ x_2 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 2)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

25

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 &\geq 0 \\ 1 + x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ 2 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (1, 2)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-5, 2)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

26

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min -x_1 - x_2$$

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$1 - x_1^2 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 + 1 \geq 0$$

Si considerino i punti $A = (0; 1)$, $B = (1; 1)$, $C = (0; -1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

27

Si consideri il problema

$$\min x_2$$

$$1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$1 - x_1^2 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 1 \geq 0$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (0, -1)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_1(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

28

Si consideri il problema

$$\min -x_1$$

$$x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 \geq 0$$

$$1 - x_1 + x_2^2 \geq 0$$

$$-x_2 \geq 0$$

$$x_2 + 2 \geq 0$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (5, -2)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.

- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$1 - x_1 + x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_2(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

29

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2 \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 & \geq 0 \\ x_1 - x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_1(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

30

Dato il problema

$$\begin{aligned} \min & x_1 \\ g_1(x) = -x_1 x_2 & \geq 0 \\ g_2(x) = x_2 - x_1^2 - 2 & \geq 0 \end{aligned}$$

si considerino il punto $x = (-1, 3)$ e la direzione $d = [1 \ 2]^T$. Partendo dal punto x , la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

31

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 2 + x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ 2 + x_1 + 2x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (-2, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (0, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

32

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_2^4 \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 1 \\ \sqrt{2} - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $C = (1, 0)$, $D = (\sqrt{2}, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

33

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_2^4 \\ g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = 2 + x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (-2, 0)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale? Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_1(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

34

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_2^3 \\ h(x) = 2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (\sqrt{2/3}, 0)$ e $B = (0, 1)$ e la direzione $d = [0 \ -1]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B , la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

35

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 \\ g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2 \geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2 \geq 0 \\ g_3(x) = x_1 + 2 \geq 0 \\ g_4(x) = 2 - x_2 \geq 0 \\ g_5(x) = x_1x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Si considerino i punti $A = (4, 2)$, $B = (-1, -2)$ e $C = (-2, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Considerando il punto $x^* = (0, 1)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione $\epsilon \|\nabla g_5(x^*)\|$ del vincolo g_5 .
- Partendo dal punto $E = (-4, -2)$, la direzione $d = [1 \ -1]^T$ è una direzione di discesa ammissibile?

36

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 \geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (-1, 0)$, $B = (0, -1)$, $C = (3, 0)$, $D = (1, 2)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

37

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (1, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $D = (0, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

38

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (0, \sqrt{3})$. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_1(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

39

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_1^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (3, 1)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \geq -\epsilon \|\nabla g_1(x^*)\|$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ ?

40

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$ e la direzione $d = (-1, 1)$. Per ciascuno dei due punti A e B , la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

41

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ 2x_1^2 + x_2 - 5 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (1, 3)$ e $B = (0, -2)$ e la direzione $d = [1 \ -5]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B , dire se la direzione d è una direzione ammissibile di discesa o meno (e perché).

42

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min 4x_1^2 + x_1x_2 \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 10 \geq 0 \\ g_2(x) = -x_1^2 - x_2 + 100 \geq 0 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (10, 0)$, $B = (6, 5)$, $C = (5, 5)$, $D = (1, 1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

Soluzione. Nel punto $A = (10, 0)$ sono attivi i vincoli g_1 e g_2 , le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi sono rispettate, e $\lambda_1 = \frac{120}{19}$, $\lambda_2 = -\frac{70}{19}$, $\lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Il punto $B = (6, 5)$ si trova all'interno della regione ammissibile (nessun vincolo attivo) e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Nel

punto $C = (5, 5)$ sono attivi i vincoli g_1 e g_3 . Il punto rispetta le condizioni KKT (con $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 20$), e quindi può essere un minimo locale. Il punto $D = (1, 1)$, violando il vincolo g_1 , si trova fuori dalla regione ammissibile.

43

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 \\ g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\ g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Si considerino i punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$, $D = (1, 1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Nel punto $E = (0, 0)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione ϵ del vincolo g_2 .
- Partendo dal punto $F = (0, 1)$, la direzione $d = [-1 \ 1]^T$ è una direzione di discesa o salita? È una direzione ammissibile o no?