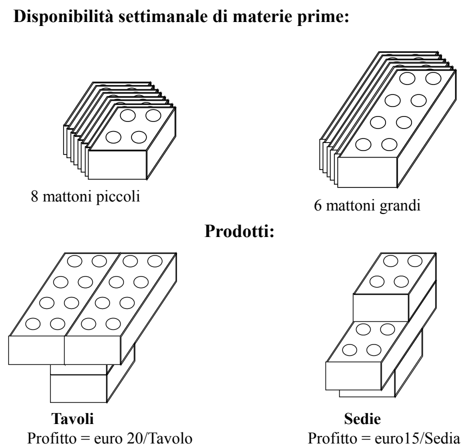
Esempio 1 *Esempio dei mattoni Lego*

Si vuole massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tavoli e sedie.



Risoluzione

Variabili. *Le variabili decisionali associate al problema sono le quantità dei due tipi di prodotti da realizzare e sono indicate con* $x_1 =$ *numero di sedie e* $x_2 =$*numero di tavoli.*

Funzione obiettivo. *La funzione obiettivo è data dal profitto totale:* $15x_1 + 20x_2$.

Vincoli. *L'impiego delle materie prime non può essere superiore alla disponibilità, pertanto si ha:*

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

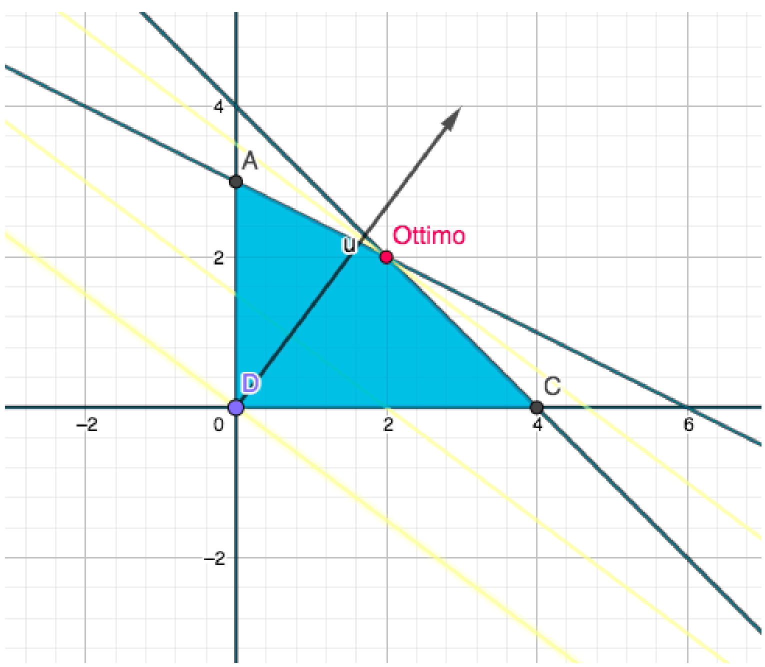
Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili x_1, x_2. *Trascuriamo il vincolo di interezza.*

La formulazione finale è:

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La regione ammissibile del problema è la parte colorata rappresentata in figura.

L'andamento della funzione obiettivo viene studiato mediante le curve di livello (isoguadagno). Tali curve sono in effetti rette di un fascio, parallele tra loro e ortogonali al vettore dei pro fitti $u^T = (15, 20)$ *(in figura è disegnato il vettore ridotto* $u^T = (3, 4)$ *). La funzione obiettivo cresce nel verso indicato dal vettore u. Si considera quindi la retta di valore minimo* $15x_1 + 20x_2 = 0$ *e si trasla nel verso indicato da u (rette gialle in figura). L'ultimo punto comune tra la regione ammissibile e il fascio di rette è la soluzione ottima. Si trova il punto* $(2, 2)$ *con valore ottimo della funzione obiettivo pari a* $15 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 70$.



Esempio 2 *Esempio della dieta ottimale*

Uno studente deve decidere su una dieta di costo minimo che dia sufficienti proteine con due scelte:

- *bistecca: 2 unità di proteine (per 100 g) con costo di 3 euro (per 100 g)*
- *lenticchie: 1 unità di proteine (per 100 g) con costo di 2 euro (per 100 g)*

La dieta è bilanciata con almeno 4 unità di proteine al giorno. Si vuole minimizzare la spesa.
Risoluzione

Variabili. *Le variabili decisionali associate al problema sono le quantità dei due tipi di prodotti da inserire nella dieta e sono indicate con* x_1 *=quantità di lenticchie* $x_2 =$ *quantità di bistecca.*

Funzione obiettivo. *La funzione obiettivo è data dalla spesa totale:* $2x_1 + 3x_2$.

Vincoli. *Vincoli sulle proteine*

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

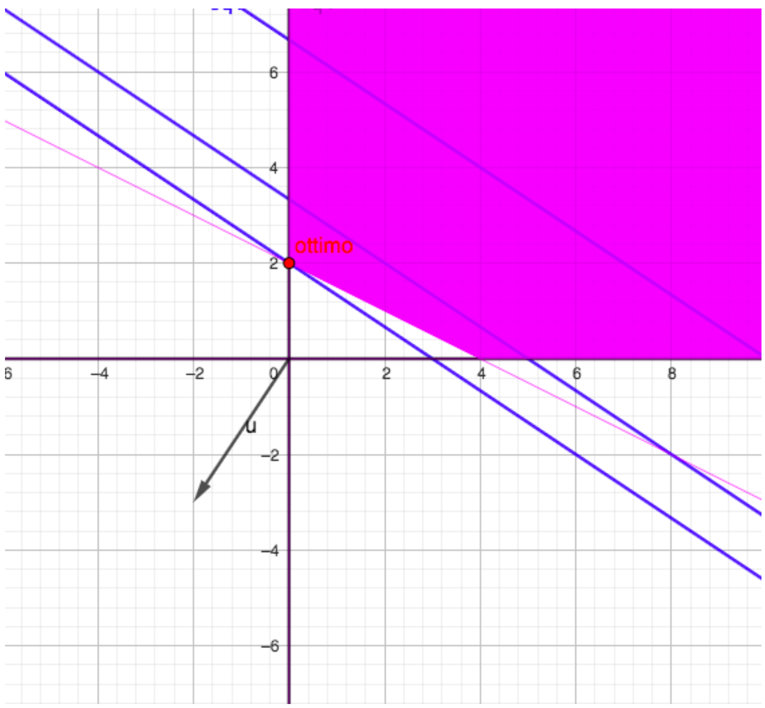
Vale inoltre il vincolo di non negatività sulle variabili x_1, x_2.

La formulazione finale è:

$$\begin{aligned} \max(2x_1 + 3x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile del problema è la parte colorata rappresentata in figura.

L'andamento della funzione obiettivo viene studiato mediante le curve di livello. T La funzione obiettivo cresce nel verso indicato dal vettore $(2, 3)$, *quindi, dovendo determinare il valore minimo della funzione obiettivo nella regione ammissibile, si dovr à considerare la direzione opposta* $u^T = (-2, -3)$ *(vettore in figura). Si conisdera quindi la retta di valore abbastanza grande* $2x_1 + 3x_2 = k$ *e si trasla nel verso indicato da u. L'ultimo punto comune tra la regione ammissibile e il fascio di rette è la soluzione ottima. Si trova il punto* $(0, 2)$ *con valore ottimo della funzione obiettivo pari a* 6.


ottimo
u