# 1 Ottimizzazione Matematica

L'ottimizzazione matematica si occupa di studiare problemi (detti **problemi di ottimizzazione**) della forma:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &x \in S, \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Quindi un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione $f$ tra i punti dell'insieme $S$. I problemi di ottimizzazione sono spesso denominati, con terminologia equivalente, problemi di Programmazione Matematica.

L'ottimizzazione matematica è una branca della Ricerca Operativa, la disciplina che si occupa della formulazione e risoluzione di modelli matematici associati a processi decisionali complessi che si presentano in diversi settori della vita reale. La Ricerca Operativa applica metodi analitici avanzati per prendere decisioni migliori ed efficaci. In tal senso, la Ricerca Operativa è detta anche la scienza delle decisioni.

# 2 Approccio modellistico

1. **Formulazione del problema (analisi):** individuazione degli obiettivi, determinazione delle restrizioni e raccolta dei dati.
2. **Costruzione del modello:** compromesso tra precisione e trattabilità matematica, individuazione delle variabili, funzione obiettivo, vincoli.
3. **Procedura risolutiva:** individuazione dei metodi numerici e costruzione dell'algoritmo.
4. **Calcolo della soluzione:** esecuzione dell'algoritmo.
5. **Verifica della soluzione:** collaudo e miglioramento (validazione) del modello.

# 3 Problemi di ottimizzazione

Un problema di Ottimizzazione può presentarsi nella forma

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &x \in X, \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$

- $f$ **funzione obiettivo**
- $S$ **regione ammissibile**
- $x \in X$ **punto ammissibile**

Osserviamo subito che un problema di massimo può sempre essere ricondotto ad un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, i punti di massimo del problema $\max_{x \in X} f(x)$ coincidono con i punti di minimo del problema $\min_{x \in X} -f(x)$. Risulta quindi:

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X}(-f(x)).$$

Per tale osservazione nel seguito ci riferiremo soltanto a problemi di minimizzazione.

**Definizione 1.** *Un problema di ottimizzazione si dice **inammissibile** se $X = \emptyset$.*

**Definizione 2.** *Un problema di ottimizzazione si dice **illimitato** se comunque si sceglie $k > 0$ esiste un punto $x \in X$ tale che $f(x) < -k$.*

**Definizione 3.** *Un punto $x^* \in X$ si dice di **ottimo globale** se risulta $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.*

**Definizione 4.** *Un punto $x^* \in X$ si dice di* ***ottimo locale*** *se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x : |x - x^*| < \varepsilon$.*

Si osserva che, assegnati $X$ e $f : S \to \mathbb{R}$ potrebbero anche non esistere soluzioni ottime. Una prima possibilità è che l'insieme ammissibile $X$ sia vuoto; in tal caso non esistono punti ammissibili e di conseguenza non esistono soluzioni ottime. Se $X$ è non vuoto, possono verificarsi, nel caso generale, le situazioni seguenti:

- la funzione obiettivo non è limitata inferiormente e dunque non esiste un valore minimo;
- la funzione obiettivo è limitata inferiormente, ma non esistono punti di minimo globale;
- esistono punti di minimo globale di $f$ su $X$ e la funzione è, ovviamente, limitata inferiormente.

Risolvere un problema di ottimizzazione significa, in pratica:

- stabilire se l'insieme ammissibile è non vuoto, oppure concludere che non esistono soluzioni ammissibili;
- stabilire se esistono soluzioni ottime, oppure dimostrare che il problema non ammette soluzioni ottime;
- determinare (eventualmente in modo approssimato) una soluzione ottima.

## 3.1 Classificazione dei problemi di ottimizzazione

Se l'insieme ammissibile $X$ coincide con $\mathbb{R}^n$, il problema diventa:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

In questo caso si dice che il problema è non vincolato.

Se l'insieme ammissibile è descritto da vincoli di disuguaglianza e/o vincoli di uguaglianza sulle variabili di decisione:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p\},$$

il problema diventa

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ & g(x) \leq 0, \\ & h(x) = 0, \end{aligned}$$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. In questo caso il problema si dice vincolato.

**Definizione 5.** *Dato un vincolo $g(x) \geq b$, esso si dice* ***violato*** *nel punto $\bar{x}$ se $g(\bar{x}) < b$; si dice* ***attivo*** *se $g(\bar{x}) = b$. Un vincolo si dice infine* ***ridondante*** *se può essere eliminato senza alterare l'insieme ammissibile.*

Nell'ambito della Programmazione Matematica, si distinguono:

- Problemi di Programmazione Lineare (PL): la funzione obiettivo e le funzioni dei vincoli sono lineari, sono cioè del tipo: $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.
- Problema di Programmazione non Lineare: almeno una delle funzioni $f$, $g_i$, $i = 1, \ldots, m$, $h_j$, $j = 1, \ldots, p$ non à lineare.

# 4 Problemi di programmazione lineare (PL)

Un problema generale di PL si presenta nella forma:

$$\begin{array}{l} \min\Big(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\Big) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- $x_j$ **variabili decisionali**
- $c_j$ **coefficienti di costo (o di profitto)**
- $b_i$ **termini noti**
- $a_{ij}$ **coefficienti del sistema dei vincoli**

## 4.1 Modelli di produzione

Supponiamo che si debbano realizzare $n$ diversi prodotti $P_1, \ldots, P_n$ a partire da $m$ materie prime $R_1, \ldots, R_m$ diverse tra loro. Il problema dell'allocazione ottima delle risorse consiste nel determinare le quantità da produrre di ciascun prodotto $P_1, \ldots, P_n$ in modo da massimizzare il profitto rispettando i vincoli sulle risorse disponibili.

Sia $a_{ij}$ la quantità di risorsa $i$ necessaria a fabbricare una unità del prodotto $P_j$. Supponiamo che ciascuna risorsa $R_i$ non possa superare un valore fissato $b_i$ e che $c_j$ sia il profitto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto $P_j$.

Si introducano le variabili decisionali $x_1, \ldots, x_n$ che rappresentano le quantità di ciascun prodotto $P_1, \ldots, P_n$. Tali variabili sono i cosiddetti livelli di attività.

Il problema si può formulare come segue:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

**Esempio 1.** *Un azienda tessile produce due tipi di tessuto:* ***A*** *e* ***B****. Nella tabella sono riportate le quantità di lana e cotone impiegate e i profitti netti in euro:*

| | ***A*** | ***B*** |
|---|---|---|
| *Lana* | 30 *q* | 11 *q* |
| *Cotone* | 7 *q* | 20 *q* |
| *Profitti* | 300 | 160 |

*Supponiamo che occorrano* 5 *ore di lavoro per ogni unità di prodotto. Supponiamo inoltre che ogni settimana siano disponbili* 170 *q di lana e* 60 *q di cotone e si abbiano a diposizione* 40 *ore di lavoro. Si vogliono massimizzare i profitti, rispettando i vincoli di disponibilità delle risorse.*

*La formulazione matematica è:*

$$\begin{cases} \max(300x_1 + 160x_2) \\ 30x_1 + 11x_2 \leq 170 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 60 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

## 4.2 Modelli di miscelazione

Supponiamo di avere a disposizione $n$ sostanze diverse $S_1, \ldots, S_n$, ciasuna delle quali contenga una certa quantità di ciasuno degli $m$ componenti $C_1, \ldots, C_m$. Supponendo che ogni sostanza $S_j$ abbia costo unitario $c_j$, $j = 1, \ldots, n$, si vuole ottenere la miscela (delle sostanze) più economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a $b_i$ di ciascun componente $C_i$, $i = 1, \ldots, m$. Sia $a_{ij}$ la quantità di componente $C_i$ presente nella sostanza $S_j$.

Introducendo le variabili $x_1, \ldots, x_n$, che rappresentano la quantità di ciascuna sostanza $S_1, \ldots, S_n$ da utilizzare nella miscela, il problema può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

**Esempio 2.** *Un industria conserviera produce marmellata utilizzando frutta e dolcificante in modo che vengano soddisfatti certi requisiti circa il contenuto di vitamina C, sali minerali e zucchero. La frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo di 0.5 euro e 0.4 euro ogni etto. Inoltre, 100 g di frutta contengono 120 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali, 20 g di zucchero, 100 g di dolcificante contegono 10 mg di sali minerali e 50 g di zucchero. Il prodotto finale deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 g di zucchero. Determinare le quantità di frutta e dolcificante da utilizzare, in modo da minimizzare il costo dell'acquisto della frutta e del dolcificante.*

*La formulazione matematica è:*

$$\begin{cases} \min(0.5x_1 + 0.4x_2) \\ 120x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 20x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### 4.2.1 Assegnazione di personale a turni

Supponiamo che:

- $i$ generico giorno $i \in 1, \ldots, m$;
- $j$ generico turno lavorativo $j \in 1, \ldots, n$;
- $a_{ij}$ rappresenti il numero di ore che una persona assegnata al turno $j$ lavorerà il giorno $i$;
- $c_j$ sia il salario di una persona assegnata al turno $j$;
- $x_j$ sia il numero di persone assegnate al turno $j$;
- $b_i$ sia il numero minimo di ore lavorative prestate da coloro che lavorano nel giorno $i$.

Si vuole minimizzare il costo della retribuzione in modo che siano soddisfatte le richieste giornaliere.

Il problema può essere scritto nella forma:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

**Esempio 3.** *Un ristorante deve organizzare i turni dei camerieri con programmazione settimanale. Siano* $30, 35, 40, 42, 50, 60, 74$ *i numeri minimi di camerieri necessari, rispettivamente, nel giorno* $i = 1, \ldots, 7$ *della settimana. Supponiamo inoltre che ogni cameriere lavori cinque giorni consecutivi ed abbia poi due giorni consecutivi liberi. Il salario settimanale di un cameriere è pari a 300 euro se include la domenica e 250 euro in caso contrario.*

*In questo caso $b_i$ è il numero minimo di camerieri richiesti nel giorno i, mentre $a_{ij}$ vale* 1 *se nel turno $j$ il giorno i-simo è lavorativo e* 0 *altrimenti.*

*La formulazione matematica è:*

$$\begin{cases} \min(250x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 300x_4 + 300x_5 + 300x_6 + 300x_7) \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 42 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 50 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 60 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 74 \\ x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

### 4.2.2 Dieta ottimale

Supponiamo di avere a disposizione $n$ alimenti $A_1, \dots, A_n$ ed $m$ principi nutritivi essenziali (proteine, vitamine, ecc.) $P_1, \dots, P_m$. Siano:

- $a_{ij}$ la quantità del principio nutritivo $P_i$ contenuta nell'alimento $A_j$;
- $c_j$ il costo unitario dell'alimento $A_j$;
- $b_i$ il fabbisogno minimo giornaliero del principio nutritivo $P_i$.

Si vuole determinare una dieta gionaliera che minimizzi il costo totale e che rispetti il fabbisogno minimo giornaliero. Sia $x_j$, $j = 1, \dots, n$ la quantità di alimento $A_j$ da introdurre nella dieta, allora il problema si può formulare come segue:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Esempio 4.** *Una fattoria acquista due tipi di alimenti per i suoi ovini. Il bestiame richiede ogni giorno almeno 60, 125 e 76 unità di ciascuno degli elementi nutrizionali A, B, C. Nella tabella sono riportati gli elementi nutrizionali (unità al chilo) e il costo (euro al chilo).*

| | *Alimento 1* | *Alimento 2* |
|---|---|---|
| *A* | *5* | *9* |
| *B* | *3* | *4* |
| *C* | *6* | *7* |
| *Costi* | *0.2* | *0.6* |

*La formulazione matematica è:*

$$\begin{cases} \min(0.2x_1 + 0.6x_2) \\ 5x_1 + 9x_2 \geq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 125 \\ 6x_1 + 7x_2 \geq 76 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

## 4.3 Modelli di trasporto

Supponiamo che siano definite $m$ località di produzione (generica località di produzione indicata con $i$) ed $n$ località di distribuzione (generica località di distribuzione indicata con $j$). Siano definite le seguenti quantità:

- $p_i$ la capacità produttiva;
- $q_j$ la domanda;
- $c_{ij}$ il costo del trasporto dalla località $i$ alla destinazione $j$.

Si vogliono pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto.

Sia $x_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, la quantità di merce spedita dal luogo $i$ al luogo $j$, allora il problema si può formulare come segue

$$\begin{cases} \min \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \le p_i \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \ge q_j \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Se $\sum_{j=1}^n q_j > \sum_{i=1}^m p_i$, il sistema non ammette soluzioni ammissibili. Se $\sum_{j=1}^n q_j < \sum_{i=1}^m p_i$, si aggiunge un luogo fittizio di raccolta, collegato con costo nullo con tutti i luoghi di produzione, che raccoglie l'eccesso di offerta. In tal caso il problema diventa

$$\begin{cases} \min \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = p_i \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = q_j \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

**Esempio 5.** *Sono disponibili 3 cinquecento a Torino e 9 a Vicenza. Vengono richieste 2 automobili a Perugia, 5 a Milano e 5 a Roma. I costi di trasporto sono riportati nella tabella*

| *da/per* | *Perugia* | *Milano* | *Roma* |
|---|---|---|---|
| *Torino* | *600* | *400* | *740* |
| *Vicenza* | *980* | *430* | *860* |

*Determinare lo schema del trasporto in modo da minimizzare il costo.*

*Indichiamo con $x_1, x_2, x_3$ rispettivamente le auto da trasportare da Torino a Perugia. Milano e Roma e con $x_4, x_5, x_6$ rispettivamente le auto da trasportare da Vicenza a Perugia. Milano e Roma.*

*La formulazione matematica è:*

$$\begin{cases} \min(600x_1 + 400x_2 + 740x_3 + 980x_4 + 430x_5 + 860x_6) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 9 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ x_3 + x_6 = 5 \\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$