1 Risoluzione grafica dei problemi di PL

1.1 Rappresentazione dei vincoli lineari

Sul piano cartesiano Ox_1x_2 l'equazione

$$ax_1 + bx_2 = c$$

rappresenta una retta che divide il piano in due semipiani. Ciascun semipiano è caratterizzato dai punti che soddisfano la disequazione $ax_1 + bx_2 \geq c$ oppure la disequazione $ax_1 + bx_2 \leq c$.

Lemma 1. *Si consideri una famiglia di rette parallele*

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c$$

con $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ e con $c \in \mathbb{R}$. Il vettore $a^T = (a_1, b_1)$ individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia ed è orientato verso il semipiano in cui risulta $ax_1 + bx_2 \geq c$.

Il vettore c rappresenta quindi la direzione di crescita. Il vettore c è il gradiente della funzione obiettivo.

1.2 Rappresentazione di funzioni obiettivo lineari

La funzione obiettivo di un problema di PL è un'espressione del tipo $c_1x_1 + c_2x_2$ da massimizzare o da minimizzare. Per rappresentare questa funzione obiettivo su un piano cartesiano Ox_1x_2 si consideri la famiglia di rette parallele

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k$$

ottenuta al variare di k (curve di livello della funzione $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$). Se il problema è di minimizzazione, si cercherà di ottenere un valore più basso possibile per k in corrispondenza di valori ammissibili per x_1 e x_2; se il problema è di massimizzazione, si cercherà di ottenere un valore più alto possibile per k.

Valori superiori della k si determinano traslando le rette nel verso individuato dal vettore $(c_1, c_2)^T$, che è una direzione di crescita per la funzione $c_1x_1 + c_2x_2$. Ovviamente, la direzione opposta sarà una direzione di decrescita. Quindi, geometricamente, un problema di massimizzazione consisterà nel considerare la traslazione nel verso della direzione di crescita della funzione obiettivo, mentre in un problema di minimizzazione si considera la traslazione nel verso opposto.

Si procede pertanto secondo la seguente procedura.

1. Sul piano cartesiano Ox_1x_2 ciascun vincolo individua un semipiano. L'insieme ammissibile del problema di PL è dato dall'intersezione di tali semipiani.

2. Per rappresentare la funzione obiettivo, tracciamo le curve di livello, ossia il fascio di rette $c^Tx = k$ al variare di k. Le linee di livello sono tutte parallele tra loro e ortogonali al vettore c. Il parametro k rappresenta il valore della funzione obiettivo. Se il problema è di minimizzazione, si è interessati al valore di k minimo in corrispondenza di una coppia di punti ammissibili. Se il problema è di massimizzazione, si è interessati al valore di k massimo in corrispondenza di una coppia di punti ammissibili. Il valore di k cresce nel verso indicato da c.

3. Tra tutte le linee di livello che intersecano l'insieme ammissibile si cerca quella che ha il valore di k minimo (massimo). Una soluzione ottima è data dall'intersezione di tale linea di livello con l'insieme ammissibile.

Un problema di PL può

- ammettere soluzione ottima (non necessariamente unica) in un vertice della regione ammissibile (poligono);

- non ammettere soluzione ottima. In questo caso può accadere che

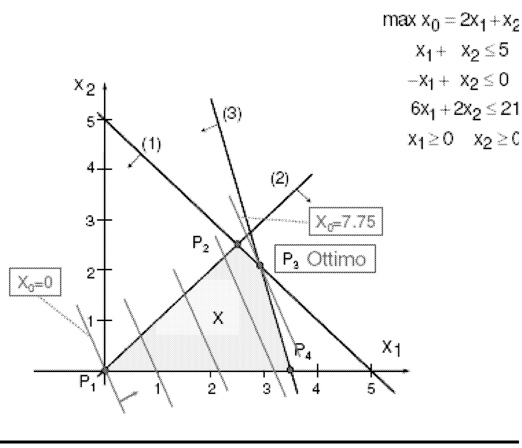

Figura 1: Esempio di risoluzione grafica

- la regione ammissibile è vuota
- la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se il problema è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se il problema è di minimizzazione).

Inoltre

- Se $c \neq 0$, allora ogni soluzione ottima non è interna alla regione ammissibile.
- Gli ottimi locali sono anche ottimi globali.