RO_intro_22

RO_intro_22

RO_intro_2
2


Università di Catania
L.M. in Informatica
Ottimizzazione
Laura Scrimali
DMI - Studio 349, piano II blocco I
Tel. 095 7383059 - E-mail: laura.scrimali@unict.it

Informazioni generali

Materiale didattico Programma, lucidi delle lezioni e materiale didattico scaricabili dalle piattaforme didattiche.

Ricevimento giovedì dalle ore 8,30 alle ore 10,00 e su appuntamento.

Prova d'esame L'esame finale consiste in una prova orale con esercizi.

Il corso permette di acquisire

conoscenza dei problemi classici di programmazione lineare;

conoscenza degli algoritmi e implementazioni di risolutori commerciali disponibili;

capacità di analizzare e risolvere problemi reali.

Alla fine del corso sarete in grado di:

- riconoscere le situazioni che possono essere modellate come problemi di ottimizzazione;
- formulare correttamente i problemi di ottimizzazione;
- risolvere i problemi con gli algoritmi appropriati.

Di cosa ci occuperemo?

PROGRAMMAZIONE LINEARE Si tratta della tecnica di ottimizzazione vincolata maggiormente utilizzata. La PL quindi si occupa di pianificazione usando modelli lineari. Problemi di produzione sono problemi lineari. Molti problemi reali di ottimizzazione sono risolti mediante PL. Ad esempio, il problema della programmazione dei voli aerei è un problema di PL e può avere centinaia di migliaia di vincoli e milioni di variabili. Algoritmi proposti: Algoritmo del Simplesso Primale. Algoritmo del Simplesso Duale.

PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA Un larghissimo numero di problemi reali può essere rappresentato da modelli di programmazione lineare intera. Si tratta di applicazioni caratterizzate dall'indivisibilità delle risorse e dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative: la distribuzione di beni, il sequenziamento delle attività produttive, la gestione ottima del portafoglio titoli, la localizzazione degli impianti e la progettazione di sistemi automatici di produzione (robotica). Le reti modellano molte situazioni reali e numerosi problemi su grafi possono essere risolti come problemi di PLI (Ottimizzazione Combinatoria). Algoritmi proposti: Algoritmo del Branch and Bound. Metodo dei tagli.

PROGRAMMAZIONE NON LINEARE Problemi di ottimizzazione in cui le relazioni possono essere non lineari. Ciò rende i problemi molto più difficili da risolvere. Metodi per l'ottimizzazione vincolata e non vincolata.

Risolutori GeoGebra, Excel, Mathematica.

Nulla accade in natura che non possa essere ricondotto ad un problema di massimizzazione o minimizzazione.

Eulero (1707 -1783)

Tutti i giorni . . .

. . . accade di dover risolvere problemi di ottimizzazione. Si pensi al percorso migliore per recarsi al lavoro, fare la spesa senza spendere troppo o gestire attività senza spreco di tempo. Se è vero che si possono risolvere semplici problemi quotidiani senza ricorrere a strumenti matematici, è altrettanto vero che, nei casi più complessi, si rende necessario un approccio decisionale più sofisticato, quale quello offerto dall'Ottimizzazione Matematica.

Cos'è l'Ottimizzazione

La **Programmazione o Ottimizzazione Matematica** si occupa di problemi decisionali

- con un solo decisore,
- con un solo obiettivo che rappresenta il criterio di scelta tra le diverse alternative
- deterministici, ovvero i dati si considerano certi, senza probabilità.

Il termine *programmazione* deve essere inteso come pianificazione e non nel senso di costruzione di programmi per il calcolatore, anche se il calcolatore elettronico è uno strumento indispensabile per risolvere problemi di Programmazione Matematica.

Altre classi di problemi:

- i problemi con più decisori (in competizione) che sono oggetto di studio nella Teoria dei Giochi;
- i problemi con un solo decisore e più obiettivi (in conflitto) che rientrano nell'Ottimizzazione a molti obiettivi;
- i problemi di ottimo in cui i dati sono soggetti ad incertezze caratterizzabili in modo probabilistico che rientrano nell'Ottimizzazione Stocastica.

I problemi di ottimizzazione

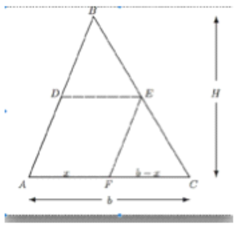
I problemi hanno tutti una struttura comune: hanno tutti un **obiettivo** e delle **restrizioni** (vincoli).
L'obiettivo rappresenta il criterio di scelta individuato e le restrizioni rappresentano le limitazioni alle scelte. Ottimizzare l'obiettivo vuol dire individuare la scelta che consente di ottenere il miglior valore dell'obiettivo.

Un po' di storia

Il prima problema di massimo della storia si deve ad una leggenda narrata anche nel I Libro dell'Eneide. Didone, dopo l'uccisione del marito, fugge da Tiro con alcuni sudditi e approda sulle coste africane. Lì chiede al re della Libia un pezzo di terra su cui fondare una città. Il re non vuole dare asilo ai fuggiaschi, a meno che lei non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta le nozze e così ottiene dal re tanta terra quanta una pelle di bue ne potesse circondare. Didone riesce ad occupare la terra necessaria per fondare Cartagine: taglia in strisce sottilissime la pelle e recinta un bel pezzo di terreno a forma di semicerchio. Il problema di Didone è noto come problema isoperimetrico: fra tutte le curve piane di uguale perimetro, determinare quella di area massima.

Il libro *Elementi* di Euclide (IV a.C.) è stato il primo libro di testo di matematica della storia, e contiene un problema di ottimizzazione.

In un dato triangolo ABC inscrivere un parallelogramma ADEF tale che EF//AB e DE//AC e tale che la sua area è massima.



Il problema può essere formulato come un problema non vincolato che si risolve ponendo uguale a zero la derivata della funzione obiettivo e risolvendo l'equazione corrispondente (Fermat,1601-1665). Lagrange ha poi esteso la tecnica al caso di problemi con vincoli di uguaglianza.
Isaac Newton combinando il metodo di Fermat e il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ha introdotto il primo algoritmo di ottimizzazione.
Nel XIX secolo Karl Weierstrass (1815 -1897) ha dimostrato il famoso risultato che fornisce, sotto opportune ipotesi, una condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione ottima.

Esempio di Dantzig

Un'azienda deve decidere come assegnare i suoi 70 dipendenti a 70 differenti mansioni da svolgere. Ovviamente, ciascun dipendente deve essere assegnato ad un solo lavoro; ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da un dipendente Non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento, perchè ciascun dipendente ha preferenze diverse rispetto alle mansioni, oppure capacità diverse (alcuni lavori/mansioni riescono meglio ad alcuni piuttosto che ad altri). Un problema di questo tipo non può essere risolto calcolando tutte le 70! possibilità. Fino al giugno 2014 il più potente supercomputer era Tianhe-2. Per enumerare tutte le possibilità Tianhe-2 avrebbe dovuto lavorare circa 10^{76} anni. Considerato che l'età dell'universo è di circa $13 \cdot 10^9$ di anni, nemmeno se fosse al lavoro dai tempi del Big Bang potrebbe esaminare tutte le combinazioni!

Dal problema al modello

Per studiare i problemi di ottimizzazione, bisogna costruire i modelli matematici

- per capire meglio i processi e i meccanismi nascosti,
- per scoprire nuove caratteristiche,
- per controllare un sistema di parti che interagiscono tra loro,
- per pianificare e fare progetti per il futuro.

Approccio modellistico

1. **Formulazione del problema (analisi):** individuazione degli obiettivi, determinazione dei vincoli e raccolta dei dati.
2. **Costruzione del modello:** compromesso tra precisione e trattabilità matematica, individuazione delle variabili, funzione obiettivo, vincoli.
3. **Analisi del modello:** deduzione di proprietà (esistenza e unicità della soluzione, condizioni di ottimalità, stabilità delle soluzioni).
4. **Soluzione numerica:** costruzione dell'algoritmo e calcolo della soluzione.
5. **Validazione del modello:** collaudo e miglioramento del modello.

Problemi di ottimizzazione

Alcuni problemi che possono essere affrontati come problemi di ottimizzazione sono:

- Problemi di natura industriale: *pianificazione della produzione*; *gestione ottima delle scorte*; *localizzazione e dimensionamento di impianti*.
- Problemi di progettazione ottima: *progettazione di reti e loro gestione*; *progettazione strutturale*; *progettazione di sistemi ottici*; *allocazione ottima di componenti elettronici*.
- Problemi di economia e finanza: *scelta di investimenti*; *composizione di un portafoglio*.
- Problemi di organizzazione: *determinazione dei turni del personale*; *manutenzione di beni*; *project planning*.

- Problemi scientifici: *studi sulla struttura del DNA*; *ricostruzione di immagini*.
- Problemi di diagnostica medica: *interpretazione e analisi dei dati ottenibili da strumenti di analisi clinica*.
- Problemi di controllo ottimo: *controllo di servomeccanismi e di sistemi di guida*; *controllo di traiettorie*.

Lezione del 4 ottobre 2022

mercoledì 5 ottobre 2022 08:44

ott1

OTTIMIZZAZIONE

Ci occupiamo di:

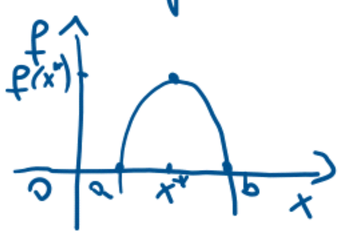
max oppure min una certa funzione sotto certi vincoli

$$\max/\min \ f(x)$$
$$x \in X$$

forma generale di un problema di ottimizzazione

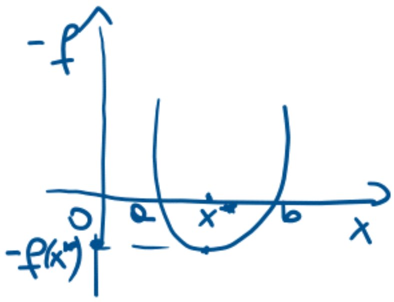
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione obiettivo $\qquad f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad X$ regione ammissibile
- $x \in X$ $\qquad$ punto ammissibile

Per convenzione ci riferiamo a problemi di minimizzazione. Osserviamo che ogni problema di max si può scrivere come problema di min.



$$\max f(x) = f(x^*)$$

Consideriamo ora la funzione opposta $-f(x)$



$$\min(-f(x)) = -f(x^*)$$
$$\Downarrow$$
$$-\min(-f(x)) = f(x^*)$$

In conclusione,

$$\max f(x) = f(x^*) = -\min(-f(x))$$

Programmazione lineare

I problemi di programmazione lineare hanno funzione obiettivo e vincoli che sono funzioni lineari in n variabili e sono del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

(Non ci sono x_1^2, $x_1 \cdot x_2^3$, $\log x_n$ - - -)

Esempio (pianificazione aziendale)

Un'azienda produce due tipi di torte al cioccolato A e B.
Entrambe richiedono latte e cioccolato secondo la seguente tabella

	A	B
latte	2	2
cioccolato	1	2

per produrre A occorrono 2 unità di latte e 1 di cioccolato

per B occorrono 2 unità di latte e 2 di cioccolato

Ci sono al massimo 8 unità di latte e 6 di cioccolato

I dolci vengono venduti al prezzo di 15€ per A e 20 € per B.

Vogliamo sapere quanti dolci di tipo A e B produrre per max il profitto rispettando i vincoli sulle materie prime.

Per costruire un modello matematico si deve
- individuare le variabili
- costruire la funzione obiettivo
- determinare i vincoli.

Variabili : quantità da produrre

x_A = quantità di prodotto A

x_B = quantità di prodotto B

Funzione obiettivo:
max profitto

15 € profitto per la vendita di un dolce A
20 € " " " di un dolce B

il profitto totale per la vendita dei dolci A è
$15 \cdot x_A$

il profitto totale per la vendita dei dolci B è
$20 \cdot x_B$

il profitto totale = funzione obiettivo $= 15x_A + 20x_B$

Vincoli:
disponibilità di materie prime

1. non possiamo usare più di 8 unità di latte
2. non possiamo usare più di 6 " di cioccolato

occorrono 2 unità di latte per una torta A
" 2 unità di latte per una torta B

Per tutta la produzione di dolci A occorrerà
$2 \cdot x_A$

Per tutta la produzione di dolci B occorrerà
$2 \cdot x_B$

Tutto il latte usato nella produzione è

$2x_A + 2x_B$

e non può superare 8

vincolo 1 : $\underbrace{2x_A + 2x_B}_{\text{utilizzo totale di latte}} \leq 8 \leftarrow$ quantità disponibile di latte

Analogamente si ha:

vincolo 2 : $\underbrace{1 \cdot x_A + 2 \cdot x_B}_{\text{utilizzo totale di cioccolato}} \leq 6 \leftarrow$ quantità disponibile di cioccolato

Aggiungiamo i vincoli

$x_A \geqslant 0$ e $x_B \geqslant 0$

(si tratta di quantità, al peggio non si produce ma non possono essere negative)

Il problema è

$$\max\ (15x_A + 20x_B)$$

$$2x_A + 2x_B \leq 8$$

$$x_A + 2x_B \leq 6$$

$$x_A, x_B \geqslant 0$$

F generale di un problema di produzione

sono $P_1, P_2, \dots P_n$ prodotti da realizzare

o ni unità di prodotto P_j viene venduta

o prezzo c_j

S no utilizzate le materie prime

$_1, R_2, \dots, R_m$. In tabella indichiamo

q nte risorse occorrono per ogni unità di lotto

	P_1	P_2	$\dots$	P_n
R_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\vdots$	$-$	$-$	$-$	$-$
R	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

a_{1n} è la quantità di risorsa R_1 impiegata nella produzione di 1 unità di prodotto P_n

p ftti $c_1 \quad c_2 \quad . \quad c_n$

le sorse sono limitate nelle quantità

$R_1 \leq b_1 \quad R_2 \leq b_2, \dots, R_m \leq b_m$

Le variabili sono $x_1, \dots, x_n$ dove x_j è la quantità di prodotto P_j

funzione obiettivo è il profitto totale

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

vincoli sulle risorse

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Il problema finale è

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad , i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad , j = 1, \dots, n$$

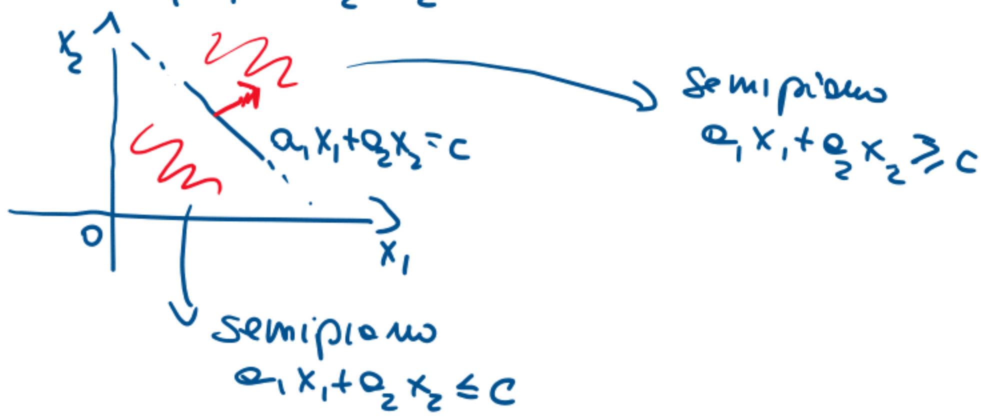
Memo: tutti i problemi di produzione si strutturano allo stesso modo.
I dati si organizzano in una tabella con i prodotti in colonna e le risorse per riga.

Metodo grafico

Richiami rette sul piano

Una retta ha un'equazione del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$$



Il vettore (a_1, a_2) è sempre ortogonale alla retta $a_1x_1+a_2x_2=c$ e punta sempre verso il semipiano $a_1x_1+a_2x_2 \geq c$

Se abbiamo problemi lineari in 2 variabili allora i vincoli possono essere rappresentati sul piano cartesiano come semipiani.

Riprendiamo il problema

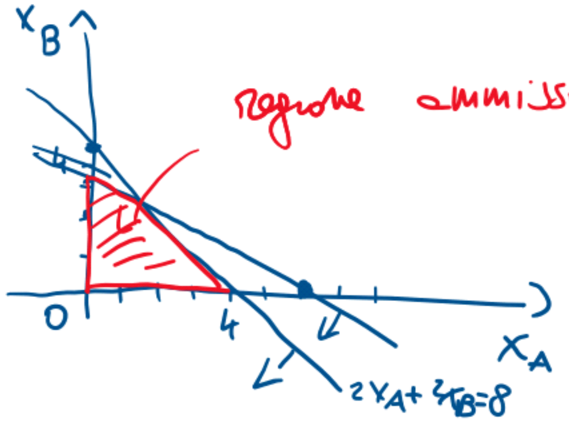
$$\max\ (15x_A + 20x_B)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_A + 2x_B \leq 8 \\ x_A + 2x_B \leq 6 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{array}\right\} \text{regione ammissibile}$$

Rappresentiamo geometricamente i vincoli

$2x_A + 2x_B \leq 8$ è un semipiano

Disegniamo la retta $2x_A + 2x_B = 8$



$2x_A + 2x_B = 8$ passa per i punti $(4,0)$ $(0,4)$

per individuare il semipiano $2x_A + 2x_B \leq 8$ utilizziamo il punto $(0,0)$ come Test.

Sostituendolo si ha $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 8$ vero allora si prende il semipiano che contiene $(0,0)$

Prendiamo ora la retta

$x_A + 2x_B = 6$ $\quad (6,0)$ $(0,3)$

Prendiamo il semipiano $x_A + 2x_B \leq 6$ che contiene $(0,0)$

P. La soluzione di un problema di programmazione lineare si trova sempre sui vertici.
Calcoliamo quindi la funzione obiettivo nei vertici

$15x_A + 20x_B$

vertici	f.o
(0,0)	0
(4,0)	60
$\boxed{(2,2)}$	$\boxed{70}$
(0,3)	60

Codice team MS TEMAS ak1m3t3

Metodo grafico

Vogliamo risolvere

$$\max \left(15 x_A + 20 x_B\right)$$
$$2x_A + 2x_B \le 8$$
$$x_A + 2x_B \le 6$$
$$x_A, x_B \ge 0$$

Occorre

1. rappresentare geometricamente la regione ammissibile
   I vincoli sono semipiani ⇒ la regione ammissibile è un'intersezione di semipiani.
2. studiare il comportamento della f.o. nella regione ammissibile.

Vogliamo $\max(15x_A + 20x_B)$ e per farlo consideriamo il fascio di rette $15x_A + 20x_B = K$. Trovare $\max(15x_A + 20x_B)$ vuol dire trovare il valore di K massimo rispetto ai punti ammissibili.
Ricordiamo che la direzione $(15, 20)^T$ è ortogonale a tutte le rette $15x_A + 20x_B = K$ e punta verso i valori crescenti di K.
Nello studio delle rette del fascio, partiamo dal valore minimo, cioè dalla retta $15x_A + 20x_B = 0$ (oss. $x, y \ge 0 \Rightarrow$ il valore minimo di $15x_A + 20x_B$ è zero). Trasliamo la retta lungo la direzione $(15, 20)^T$ fino a trovare l'ultimo punto comune con la regione ammissibile.

OSS. Se vogliamo massimizzare ci muoviamo verso la direzione di crescita, se vogliamo minimizzare ci muoviamo nella direzione opposta.

Esempio dieta ottimale

Si deve decidere su una dieta di costo minimo che dia sufficienti proteine con due scelte.

bistecca dà 2 unità di proteine (per porzione) con costo 3 € a porzione
lenticchie danno 1 unità " " " " 2 € "

la dieta è bilanciata con almeno 4 unità di proteine al giorno.

	bistecca	lenticchie
proteine	2	1

Costruiamo il modello

Variabili x_1 = quantità di bistecca

x_2 = quantità di lenticchie

funzione obiettivo: costo totale acquisto alimenti $= \underbrace{3 \cdot x_1}_{\text{costo tutte le bistecche}} + \underbrace{2 x_2}_{\text{costo di tutte le lenticchie}}$

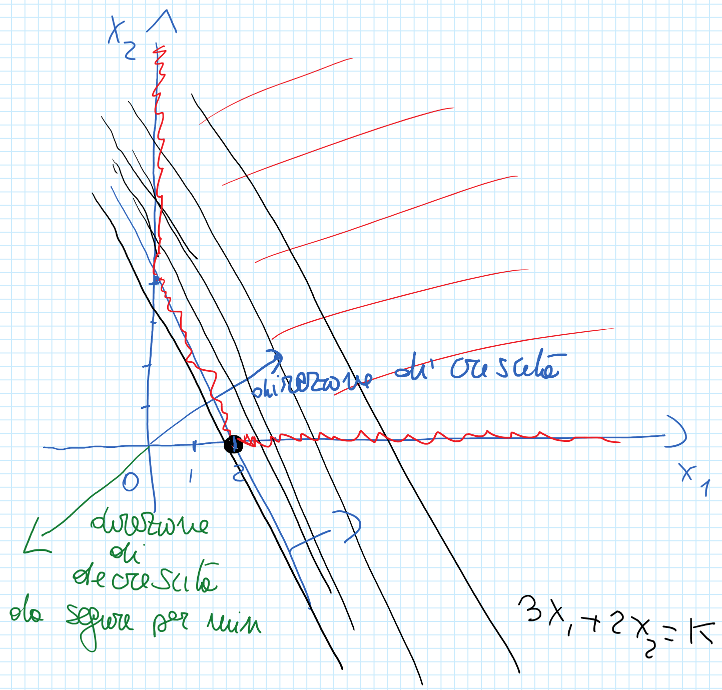
vincoli $2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ (perché sono quantità)

$$\min \ (3x_1 + 2x_2)$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

retta: $2x_1 + x_2 = 4$

x_1	x_2	Punti
0	4	$\rightarrow (0,4)$
2	0	$\rightarrow (2,0)$



Per la scelta del semipiano $2x_1 + x_2 \geq 4$ scegliamo come punto test l'origine (0,0). Sostituiamo $0 \geq 4$ che è falso. Ciò vuol dire che il semipiano $2x_1 + x_2 \geq 4$ <u>non</u> contiene l'origine. Quindi prendiamo l'altro semipiano.

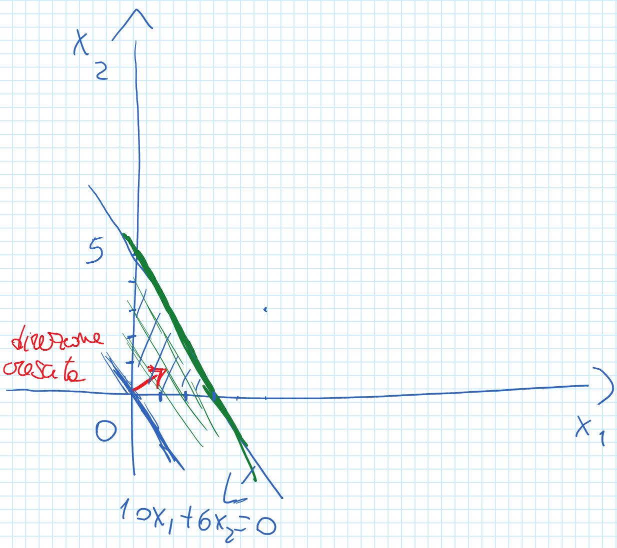
Fascio di rette $3x_1 + 2x_2 = K$ direzione di crescita è $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ci muoviamo ~~lungo~~ lungo la direzione di decrescita $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

perché vogliamo minimizzare.

Consideriamo un valore K arbitrario grande e scorrendo lungo la direzione $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ cerchiamo il minimo. L'ultimo punto comune tra il fascio e la regione ammissibile è il punto (2,0) che è la soluzione ottima.

Esempio



$\max\ (10x_1 + 6x_2)$

$5x_1 + 3x_2 \le 15$

$x_1, x_2 \ge 0$

$5x_1 + 3x_2 = 15$

(0,5) (3,0)

f.o. $10x_1 + 6x_2$ $\rightarrow$ fascio $10x_1 + 6x_2 = K$

$\rightarrow$ direzione di crescita $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, consideriamo $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Consideriamo $10x_1 + 6x_2 = 0$ che è la retta $\perp$ al vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e passante per (0,0)

Traslando la retta nella direzione $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, la retta si sovrappone alla retta del vincolo. Ci sono quindi ∞ soluzioni ottime che coincidono con i punti del segmento di estremi (3,0) e (0,5)

N.B. Un problema di PL può avere

- regione ammissibile chiusa e limitata, può avere 1 sola soluzione o ∞
- regione ammissibile non limitata, può avere 1 sola soluzione, ∞ o nessuna

Problema di miscelazione

Una industria alimentare leader nella produzione di cibo per gatti ha deciso di lanciare sul mercato un nuovo prodotto in confezioni da gr. 500. Il controllo di qualità sul prodotto ha imposto che in ogni confezione devono essere contenuti almeno gr. 120 di proteine, gr. 115 di carboidrati e gr. 210 di grassi. Per questo nuovo prodotto l'industria intende utilizzare tre composti di base che verrebbero opportunamente miscelati.

Prezzo e contenuto di gr. 100 di composto sono riassunti nella seguente tabella:

Composto	P	C	G	A	Prezzo
1	14	25	57	4	0,80
2	15	37	40	8	0,55
3	40	20	25	15	0,40

Contenuto (gr.) e prezzo (€) di gr. 100 di composto
(P = proteine; C = carboidrati; G = grassi; A = altro)

L'obiettivo dell'industria è determinare il mix di composti in modo tale da soddisfare i vincoli sulla qualità del prodotto e minimizzare i costi.

Variabili sono le percentuali di composti da inserire x_1, x_2, x_3

Funzione obiettivo: $5(0.80x_1 + 0.55x_2 + 0.40x_3)$

vincoli: requisiti di qualità su proteine, carboidrati e grassi

in 100 gr di prodotto miscelando i 3 composti il quantitativo di proteine è $14x_1 + 15x_2 + 40x_3 \geq 24 = \frac{120}{5}$

dovrà essere almeno $\frac{120}{5}$ (tutto è riferito a 100 gr)

Allo stesso modo per i carboidrati

$$25x_1 + 37x_2 + 20x_3 \geq 23 = \frac{115}{5}$$

per i grassi $57x_1 + 40x_2 + 25x_3 \geq 42 = \frac{210}{5}$

vincoli percentuali

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad , x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema è

$$\min\ 5(0.80x_1 + 0.55x_2 + 0.40x_3)$$
$$14x_1 + 15x_2 + 40x_3 \geq 24$$
$$25x_1 + 37x_2 + 20x_3 \geq 23$$
$$57x_1 + 40x_2 + 25x_3 \geq 42$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad x_i \geq 0$$

Problema di schedulazione

Il responsabile della gestione del personale di un'azienda manifatturiera ha il compito di organizzare i turni di lavoro per una catena di montaggio a ciclo continuo. Sono previste sei fasce orarie per ognuna delle quali è richiesto un numero minimo di unità lavorative, come riassunto dalla seguente tabella:

Fascia oraria	Minimo numero di lavoratori
00.00 - 04.00	6
04.00 - 08.00	9
08.00 - 12.00	14
12.00 - 16.00	9
16.00 - 20.00	11
20.00 - 24.00	8

A seguito di accordi sindacali sono stati individuati sei turni di lavoro ciascuno dei quali di 8 ore lavorative:

Turno	Orario di lavoro per turno
1	20.00 - 04.00
2	00.00 - 08.00
3	04.00 - 12.00
4	08.00 - 16.00
5	12.00 – 20.00
6	16.00 – 24.00

Si vuole determinare il numero di unità lavorative da assegnare a ogni turno in modo tale da impiegare la minor forza lavoro complessiva.

Variabili $x_1, \dots, x_6$ con x_i = numero di persone assegnate al turno i

Nella fascia oraria 00.00 - 04.00, ci sono i lavoratori assegnati ai turni 1 e 2. Il vincolo sulla richiesta di almeno 6 persone, si scrive

$x_1 + x_2 \geq 6$

Fascia 04.00 - 08.00 $\rightarrow$ $x_2 + x_3 \geq 9$

Fascia 08.00 - 12.00 $\rightarrow$ $x_3 + x_4 \geq 14$

Fascia 12.00 - 16.00 $\rightarrow$ $x_4 + x_5 \geq 9$

Fascia 16.00 - 20.00 $\rightarrow$ $x_5 + x_6 \geq 11$

Fascia 20.00 - 24.00 $\rightarrow$ $x_6 + x_1 \geq 8$

Modello

$\min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$

$x_1 + x_2 \geq 6$

$x_3 + x_4$

$\vdots$

$x_6 + x_1 \geq 8$

$x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, 6$

Problema di trasporto

Un'azienda possiede due centri di distribuzione e tre punti vendita dislocati sul territorio. Di un prodotto sono disponibili al più 250 unità presso il primo centro di distribuzione e al più 400 presso il secondo. Alla direzione centrale risulta una richiesta di rifornimento dai tre punti vendita pari ad almeno 120, 270, 130 unità rispettivamente. Presso i punti vendita ciascuna unità di prodotto viene venduta a € 14, 17 e 16. I costi unitari di trasporto (in €), legati alla distanza tra i centri di distribuzione e i punti vendita, sono così riassumibili:

	Punto vendita 1	Costo punto vendita 2	punto vendita 3
centro 1	2	4	1
centro 2	3	6	5

Presso i punti vendita è possibile vendere qualsiasi quantità di prodotto disponibile.

Occorre determinare la quantità di prodotto da trasportare dai centri di distribuzione ai punti vendita,

2) con l'obiettivo di massimizzare il profitto.

1) minimizzare i costi

Per costruire il modello matematico occorre:

1. determinare le variabili
2. individuare la funzione obiettivo
3. scrivere i vincoli

Variabili : quantità di prodotto da trasportare dai centri ai punti vendita

x_{ij} = quantità di prodotto da trasportare dal centro di distribuzione $i = 1,2$ punto vendita $j = 1,2,3$

funzione obiettivo costo minimo

$$2x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23}$$

oss. In tutti i problemi di trasporto ci sono vincoli di disponibilità di prodotto sui magazzini e vincoli di richiesta dei punti vendita

vincoli sui centri di distribuzione (vincoli di offerta)

- tutto ciò che parte dal centro 1 deve essere $\leq 250 \Leftrightarrow x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 250$
- tutto ciò che parte dal centro 2 deve essere $\leq 400 \Leftrightarrow x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 400$

vincoli sui punti vendita (vincoli di domanda)

- tutto ciò che arriva al punto vendita 1 deve essere $\geq 120 \Leftrightarrow x_{11} + x_{21} \geq 120$
- " " punto vendita 2 " " $\geq 270 \Leftrightarrow x_{12} + x_{22} \geq 270$
- " " punto vendita 3 " " $\geq 130 \Leftrightarrow x_{13} + x_{23} \geq 130$

$$\min(2x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23})$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 250 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 400 \end{array}\right] \text{vincoli di offerta}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} \geq 120 \\ x_{12} + x_{22} \geq 270 \\ x_{13} + x_{23} \geq 130 \end{array}\right] \text{vincoli di domanda}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$$

per max profitto occorre calcolare i profitti unitari

se il punto vendita 1 vende una unità a 14 € ha un costo di 2 € se proviene dal centro 1 $\Rightarrow$ avremo nella funz. obiettivo

$(14-2)x_{11}$

In generale la funz. obiettivo è

$(14-2)x_{11} + (17-4)x_{12} + (16-1)x_{13} + \dots +$

Problema di assegnamento

In vista delle prossime elezioni, la Regione Calabria deve assegnare 5 località (L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5) a 4 circoscrizioni elettorali (C_1, C_2, C_3 e C_4). In base alle posizioni geografiche delle 5 località e a fattori di tipo organizzativo, la Regione ha stimato i seguenti costi di assegnamento (in migliaia di euro):

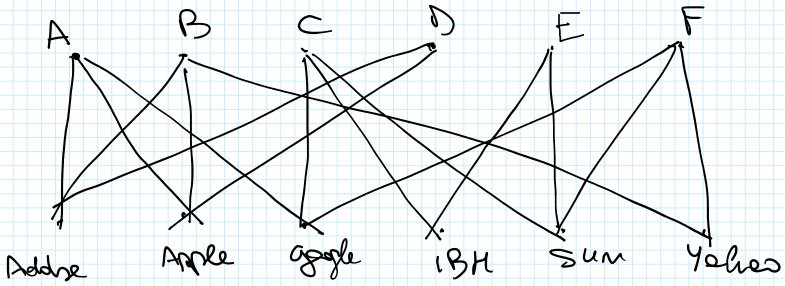
	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1	7,2	5,0	3,1	8,3
L_2	4,0	7,1	5,1	6,4
L_3	8,1	9,1	9,0	7,2
L_4	8,9	5,3	3,3	4,8
L_5	9,0	5,5	10,0	5,2

Ogni località deve essere assegnata esattamente a una circoscrizione. Inoltre, alla circoscrizione C_2 si devono assegnare esattamente due località.

Occorre decidere come assegnare le 5 località alle 4 circoscrizioni con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi.

Sono aperte 5 posizioni per data scientist presso Adobe, Apple, Google, IBM, Sun, Yahoo.
Ada, Boris, Carla, Davide, Elisa e Francesco fanno domanda per alcune di esse..

Ada → A Boris → B Carla → C ecc.



Come scegliere quali colloqui sostenere affinché i giovani non si facciano concorrenza tra loro?

Avete deciso di organizzare una cena a casa vostra. , avete pensato bene di far cucinare i vostri amici, che d'altra parte sono ben lieti di aiutarvi. Dopo aver lungamente meditato sulle capacità culinarie dei vostri amici, siete giunti a stilare la seguente tabella, dove la cifra indica il vostro giudizio sulla corrispondente pietanza preparata dal vostro amico/a.

amico/a	Antipasti	Primi	Secondi	Contorni	Dolci
Andrea	7	6	5	7	8
Barbara	6	8	7	6	5
Ciccio	6	5	4	4	8
Doriana	7	8	6	6	6
Everardo	5	6	7	5	0
Florinda	7	8	8	8	6
Gimmi	7	7	5	5	6

Il problema è quello di decidere *se* e cosa far preparare a ognuno, considerando che la vostra cena consisterà di una pietanza di ciascun tipo (ossia un antipasto, un primo, un secondo etc.) e che per discrezione non intendete chiedere a nessuno di preparare più di una pietanza.

1) Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di massimizzare la qualità della vostra cena

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?

GIU

Pubblicità Nonlineare

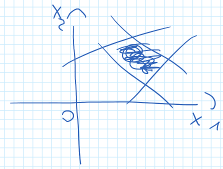
Un'agenzia di pubblicità deve realizzare una campagna promozionale avendo a disposizione due mezzi: gli annunci radiofonici e quelli su carta stampata. Sono ammessi annunci radiofonici con durata di frazioni di minuto e annunci sui giornali di frazioni di pagina. Le stazioi radiofoniche private praticano sconti in base alla quantità di minuti richiesti: il costo al minuto è di 100 € meno 2 € per ogni minuto utilizzato (per esempio, il costo al minuto, qualora se ne richiedano 3, è di 94 €). Inoltre, le emittenti possono fornire al massimo 30 minuti di annunci in totale. I giornali, invece, richiedono un prezzo standard di 200 € per pagina. Per vincoli contrattuali, almeno 1/3 della spesa deve consistere in annunci sui giornali. In base a risultati statistici, si stima che tramite un minuto di annunci radiofonici si raggiungano 100.000 persone e tramite un annuncio su una pagina di giornale 15.000 persone. L'agenzia deve raggiungere almeno 3 milioni di persone minimizzando i costi della campagna.

Un *personal trainer* deve preparare un piano di allenamento settimanale di 8 ore combinando diverse attività fisiche. Nella tabella seguente sono riportate le attività possibili, le calorie consumate in un'ora di attività e il numero massimo di ore dedicabili ad ogni attività:

Attività	Camminare	Jogging	Nuoto	Ginnastica	Bicicletta
Calorie consumate	100	300	200	250	150
Max numero ore	6	3	4	3	5

Il piano di allenamento richiede almeno due ore di sport all'aperto (camminare, jogging, bicicletta), che le calorie consumate con gli sport all'aperto non superino il 50% delle calorie totali consumate e che le ore di nuoto non siano più del 10% del totale. Qual è il piano di allenamento che massimizza le calorie consumate?

Geometria della PL (programmazione lineare)



Dagli esempi visti possiamo avere le seguenti situazioni

1. la regione ammissibile può essere chiusa, limitata e non vuota

2. la regione ammissibile può essere aperta e non vuota
3. la regione ammissibile può essere vuota (vincoli incompatibili)

Nel caso ① ci può essere una sola soluzione o infinite non limitate (tutti i punti di un segmento possono essere soluzioni ottime)

Nel caso ② possiamo avere
- una sola soluzione ottima
- un insieme ∞ e limitato di soluzioni ottime (ad esempio un segmento)
- un insieme ∞ e non limitato di soluzione ottime (ad esempio, tutti i punti di una semiretta o retta contenuta nella regione ammissibile
- non ci sono soluzioni.

Tutto dipende dalla funzione obiettivo.

OSS. In tutti i problemi di PL, le variabili godono di tre proprietà
1. PROPORZIONALITÀ: ogni variabile contribuisce sia nei vincoli che nella funz. obiettivo in modo proporzionale a se stessa.
2. ADDITIVITÀ: si sommano i contributi di tutte le variabili. Le variabili non si influenzano a vicenda.
3. CONTINUITÀ: ogni variabile è reale, $x_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$

Generalizziamo i concetti di rette e semipiani

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^n$
retta	iperpiano
semipiani	semispazi

Def L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare in n variabili si chiama iperpiano. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ e sia $b \in \mathbb{R}$.
Un iperpiano è dato dall'equazione: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

Def L'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in n variabili si chiama semispazio. Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, $b \in \mathbb{R}$
un semispazio è dato da una disequazione $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \lesseqgtr b$

Un generico problema di PL

$$\min c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}_{11} x_1 + \dots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1 \\ \dots \\ \bar{a}_{k1} x_1 + \dots + \bar{a}_{kn} x_n = \bar{b}_k \end{array}\right\}$$

La regione ammissibile è un sistema di disequazioni e di equazioni

Regione ammissibile — algebricamente è sistema di equazioni e disequazioni | geometricamente è intersezione di iperpiani e semispazi chiusi (i vincoli sono $\leq$ o $\geq$)

Def L'intersezione di un insieme finito di iperpiani e semispazi chiusi si chiama poliedro.

CONSEGUENZA: La regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro.

Cerchiamo di capire quali proprietà hanno i poliedri.

Combinazioni lineari e convesse

Def Dati m vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ e m coefficienti $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ il vettore $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$ si dice combinazione lineare dei vettori.

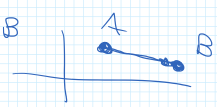
Def Se i coefficienti a_i sono non negativi ($a_1, \dots, a_m \geq 0$) e la loro somma è 1 ($\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$) il vettore v si dice combinazione convessa dei vettori.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \quad \text{con} \quad a_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$$

Caso $m = 2$

Dati due vettori v_1 e v_2, l'insieme di tutte le loro combinazioni convesse dà il segmento di estremi v_1 e v_2

OSS. Se prendiamo due punti sul piano A e B la combinazione convessa di A e B dà il segmento AB



Per due vettori le combinazioni convesse

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 \qquad a_1, a_2 \geq 0 \qquad a_1 + a_2 = 1$$

Poniamo $a_2 = 1 - a_1$, $a_1 = a$, $a \in [0,1]$

la combinazione convessa diventa

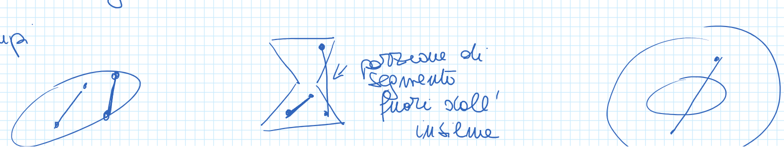
$a v_1 + (1-a) v_2$, $a \in [0,1]$
- $a = 0$ ritroviamo v_2
- $a = 1$ ritroviamo v_1
- $a = \frac{1}{2}$ otteniamo il punto medio

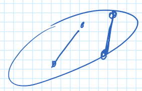
Nel caso di due vettori la combinazione convessa si dice stretta se $a \in]0,1[$, cioè $a v_1 + (1-a) v_2$, $a \in]0,1[$.

Il concetto di segmento serve per dare la nozione di insieme convesso

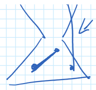
Def $K \subseteq \mathbb{R}^n$ K si dice convesso se $\forall x, y \in K$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$ $\forall \lambda \in [0,1]$, cioè per ogni coppia di punti x ed y, il segmento di estremi x ed y è contenuto in K

Esempi

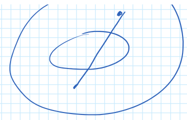




convesso



non convesso

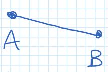


non convesso

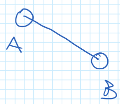
OSS. I poliedri sono insiemi convessi, perché lo sono gli iperpiani e i semispazi (intersezione di convessi è convessa)

Def. Dato un poliedro P, un vertice è un punto che non può essere ottenuto come combinazione convessa propria di altri punti di P.

EX. Dati



comb convessa di A e B



Se escludiamo gli estremi è la comb. convessa stretta

I vertici sono punti di grande importanza. Se esiste la sol di un problema di PL, esiste almeno un vertice ottimo

Teorema fondamentale della PL

Sia dato il problema

$c \in \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}$, A matrice $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min\ & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ & \dots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

con poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b,\ x \geq 0\}$

Se esiste una soluzione ottima del problema, allora esiste un vertice ottimo.

Conseguenze ① per cercare l'ottimo di un problema di PL si indaga solo sui vertici

② un vertice è considerato ottimo se non esistono vertici adiacenti migliori (proprietà greedy)

Prossimo obiettivo: capire come determinare i vertici a partire ~~dalle~~ dal sistema di equazioni e disequazioni del poliedro.

Il modo più utile è trovare una forma "buona" in cui scrivere il problema di PL. Tale forma si chiama forma standard

FORMA STANDARD DEI PROBLEMI DI PL

Un problema di PL in forma standard è della forma

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\dots,m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,\dots,n \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min\ & (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) \\ & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & \dots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A matrice $m \times n$

con $b_1, \dots, b_m \geq 0$.

Nella forma standard troviamo

① problema di MINIMIZZAZIONE

② vincoli di UGUAGLIANZA

③ variabili ≥ 0

④ Termini noti ≥ 0

Tutti i problemi di PL si possono scrivere in forma standard (FS)

- Un problema di massimo si trasforma in problema di minimo

$$\max (c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = -\min(-c_1x_1 - \dots - c_nx_n)$$ si minimizza la funzione opposta

ad esempio

$$\max(2x_1 + 7x_2) \xrightarrow{F.S.} \min(-2x_1 - 7x_2)$$

- Supponiamo di avere un vincolo di $\leq$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \xrightarrow{FS} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

si aggiunge una nuova variabile $s_i \geq 0$ in modo da avere l'uguaglianza. s_i è detta variabile SLACK oppure SCARTO

ad esempio: $2x_1 + 3x_2 \leq 5$. per portarlo in FS aggiungiamo una variabile scarto

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 \longrightarrow 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 5 \ , \ s_1 \geq 0$$

- Supponiamo di avere un vincolo di $\geq$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \xrightarrow{FS} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i$$

si sottrae una variabile $s_i \geq 0$ detta di SURPLUS

Esempio: $4x_1 + 7x_2 \geq 8$

sottraiamo una variabile surplus

$$4x_1 + 7x_2 \geq 8 \longrightarrow 4x_1 + 7x_2 - s_1 = 8 \ , \ s_1 \geq 0$$

- Se una variabile è negativa, cioè se $x_j \leq 0$ allora poniamo $-x_j \geq 0$. Introduciamo la variabile $\bar{x}_j = -x_j \geq 0$

- Se una variabile x_j è libera in segno (cioè non ci sono vincoli di segno), si introducono due nuove variabili non negative x'_j e x''_j e si pone

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{con } x'_j, x''_j \geq 0$$

Esempio 1

$$\max(3x_1 + 2x_2)$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Trasformazione in Forma Standard

$$\max(3x_1 + 2x_2) \longrightarrow \min(-3x_1 - 2x_2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 3 \longrightarrow 2x_1 + 5x_2 + \underset{\text{var scarto}}{s_1} = 3 \ , \ s_1 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + s_2 = 6 \ , \ s_2 \geq 0$$

FS

$$\min(-3x_1 - 2x_2)$$
$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Esempio 2 Forma finale standard

$\max(x_1 - x_2 + 3x_3)$

$2x_1 + x_3 \leq 1$

$3x_1 - x_2 + x_3 \geq -3$

$2x_2 + x_3 = 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

FS

$\min(-x_1 + x_2 - 3x_3)$

$2x_1 + x_3 + s_1 = 1$

$-3x_1 + x_2 - x_3 + s_2 = 3$

$2x_2 + x_3 = 1$

$x_3 = x'_3 - x''_3$

$x_1, x_2, x'_3, x''_3, s_1, s_2 \geq 0$

$\min(-x_1 + x_2 - 3(x'_3 - x''_3))$

$2x_1 + (x'_3 - x''_3) + s_1 = 1$

$-3x_1 + x_2 - (x'_3 - x''_3) + s_2 = 3$

$2x_2 + (x'_3 - x''_3) = 1$

$x_1, x_2, x'_3, x''_3, s_1, s_2 \geq 0$

vincolo $3x_1 - x_2 + x_3 \geq -3$

① moltiplichiamo per -1 per avere il termine noto positivo

$-3x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$

② aggiungiamo una variabile scarto

$-3x_1 + x_2 - x_3 + s_2 = 3$

la variabile x_3 non ha segno $\Rightarrow$ sostituzione $x_3 = x'_3 - x''_3$

con x'_3 e $x''_3 \geq 0$

Esempio

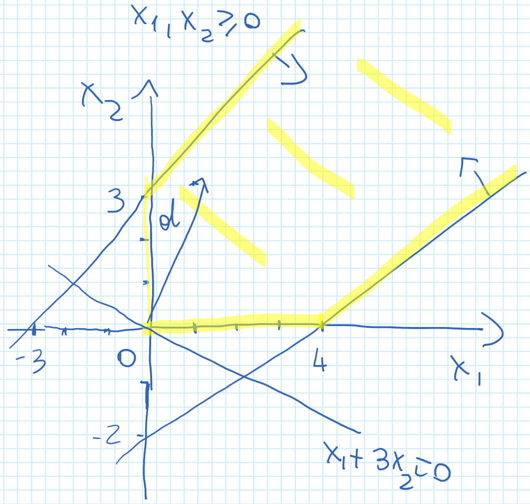
$\max (x_1 + 3x_2)$

$x_1 - x_2 \geq -3$

$-x_1 + 2x_2 \geq -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Risoluzione grafica
- disegniamo la regione ammissibile
studiamo il comportamento della funz. obiettivo



vincolo 1: $x_1 - x_2 \geq -3$

retta $x_1 - x_2 = -3$

$(0, 3)$ $(-3, 0)$

vincolo 2: $-x_1 + x_2 \geq -4$

retta $-x_1 + 2x_2 = -4$

$(0, -2)$ $(4, 0)$

Per max ci muoviamo lungo la direzione di crescita $d^T = \underbrace{(1, 3)}_{\text{coeff. funz. obiettivo}}$

Consideriamo la retta $x_1 + 3x_2 = 0$ che è ortogonale a d e passa per l'origine.

Spostandoci lungo d possiamo aumentare sempre il valore della funz. obiettivo

Il problema non ha soluzione, perché la funz. obiettivo non è limitata superiormente.

OSS. Un problema può avere funzione obiettivo non limitata e quindi non avere una soluzione ottima. In questo caso, la regione ammissibile è aperta e non limitata.

Se la regione ammissibile è vuota, il problema si dice inammissibile

Se la regione ammissibile è vuota, non ci sono punti tra cui cercare l'ottimo.

OSS. Se si applica il metodo grafico NON si usa la forma standard.

Esempio (problema inammissibile)

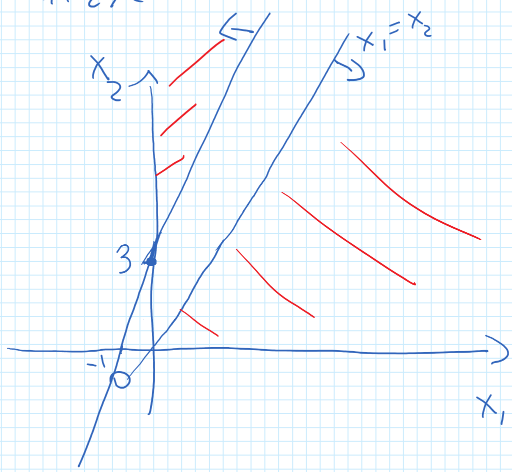
$\max (x_1 + x_2)$

vincolo 1: $x_1 - x_2 \geq 0$

$x_1 - x_2 \geq 0$

$-3x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



retta $x_1 = x_2$ (bisettrice)
punto test per il semipiano (1, 0)

vincolo 2: $-3x_1 + x_2 \geq 3$

retta $-3x_1 + x_2 = 3$

(0, 3) (−1, 0)

Vincoli incompatibili
Regione ammissibile vuota
Problema inammissibile

Esempio (forma standard)

$\min (2x_1 - x_2 + 4x_3)$

$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 7$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 \geq 0$

Forma standard

prob. min — $\min c^T x$

vincoli uguaglianza — $Ax = b$

variabili ≥ 0 — $x \geq 0$

(termini noti ≥ 0)

Funzione obiettivo OK $\min (2x_1 - x_2 + 4x_3)$

x_2 libera in segno poniamo $x_2 = x_2' - x_2''$ con x_2' e $x_2'' \geq 0$

x_3 libera in segno poniamo $x_3 = x_3' - x_3''$ con x_3' e $x_3'' \geq 0$

Sostituiamo x_2 e x_3

$$\begin{array}{l} \min (2x_1 - x_2 + 4x_3) \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{FS} \begin{array}{l} \min \left(2x_1 - (x_2' - x_2'') + 4(x_3' - x_3'')\right) \\ 5x_1 + 2(x_2' - x_2'') - 3(x_3' - x_3'') - S_1 = 7 \\ 2x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') + S_2 = 8 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2' \geq 0 \quad x_2'' \geq 0 \quad x_3' \geq 0 \quad x_3'' \geq 0 \\ S_1 \geq 0 \quad S_2 \geq 0 \end{array}$$

Memo: tutte le variabili che aggiungiamo devono essere ≥ 0

Problema del trasporto (Vedere pagina Esercizi) [illegible] ≥ 0

Problema del trasporto (Vedere pagina Esempi)

Risoluzione con Excel

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Esempio (Turnazione del personale - problema di mi scelazione)

Una software house vuole organizzare i turni del personale in modo da minimizzare le persone presenti. Occorre garantire ogni giorno la presenza di un numero minimo di persone.

LUN	MAR	MER	GIOV	VEN	SAB	DOM
21	16	18	25	17	12	10

I turni consistono in 5 giorni lavorativi consecutivi seguiti da 2 giorni di riposo.

OBIETTIVO: minimizzare il numero totale di persone assegnate ai vari turni

Variabili: numero di persone assegnate ad ogni turno

Ci sono 7 turni

1 se lavora
0 se riposa

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
LUN	1	0	0	1	1	1	1
MAR	1	1	0	0	1	1	1
MER	1	1	1	0	0	1	1
GIOV	1	1	1	1	0	0	1
VEN	1	1	1	1	1	0	0
SAB	0	1	1	1	1	1	0
DOM	0	0	1	1	1	1	1

Variabili $x_j \quad j = 1, \dots, 7$

Vincoli

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 21$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 18$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 25$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 17$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 12$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 10$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+ \qquad j = 1, \dots, 7$$

Lezione del 18 ottobre 2022

martedì 18 ottobre 2022 11:06

Riepilogo sulla geometria della PL

La regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro (= intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi chiusi)

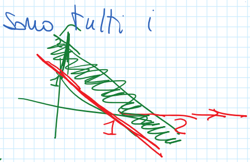
Il poliedro è un insieme convesso.
I problemi di PL sono problemi di ottimizzazione convessa.
Se il poliedro è $\neq \emptyset$ e limitato, allora esiste una soluzione ottima che è un vertice.
In generale, se esiste l'ottimo esiste un vertice ottimo.
Un poliedro ha vertici $\Leftrightarrow$ non contiene rette.

Esempio di poliedro senza vertici ma con soluzioni ottime

$\min (x_1 + x_2)$

$1 \le x_1 + x_2 \le 2$

Ci sono infinite soluzioni ottime che sono tutti i punti della retta $x_1 + x_2 = 1$



Prossimo obiettivo: capire come trattare algebricamente i vertici

: forma standard.

Esempio (per collegare la forma standard con i vertici)

Consideriamo il poliedro:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad \text{in forma standard} \longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{cases}$$

Per determinare i vertici dobbiamo intersecare i vincoli.
Osserviamo anche che è un sistema di 3 equazioni in 5 incognite con ∞^2 soluzioni. Intersechiamo i primi due vincoli, cioè poniamo $s_1 = s_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 \\ 4 + 2x_2 + x_2 = 4 \\ 6 + 3x_2 + 2x_2 + s_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 \\ x_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

Troviamo la soluzione $(2, 0, 0, 0, 0)$

Un altro vertice si può ottenere ponendo $x_1 = x_2 = 0$ e si trova $(0, 0, 2, 4, 6)$ [Sul piano $x_1 x_2$ si individua il vertice $(0, 0)$]

Se poniamo $x_1 = s_1 = 0$ si trova

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = -2 \quad \text{Non è ammissibile}$$

Ponendo a zero di volta in volta 2 variabili ~~trovo~~ se troviamo ~~una~~ soluzioni $\ge 0 \Rightarrow$ abbiamo trovato un vertice.

Generalizzazione

Consideriamo $\min c^T x$
$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right] \text{ poliedro in forma standard}$$

A matrice $m \times n$ $\quad$ rango$(A) = m$ $\quad$ $m < n$

per determinare i vertici

① annulliamo $n-m$ variabili

② ricaviamo le rimanenti variabili

③ se le variabili trovate sono tutte ≥ 0 (sono ammissibili) abbiamo trovato un vertice.

Def. Dato il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ con A matrice $m \times n$ con rango$(A) = m$. Si dice base B una sottomatrice quadrata $m \times m$ invertibile che può essere estratta da A.

Se rango$(A) = m$, allora esistono sicuramente basi.

Sia data

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

(le prime m colonne formano B, le restanti $n-m$ formano N)

supponiamo che la base B sia data dalle prime m colonne.

La matrice A si partiziona in

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & N \end{array}\right]$$

B matrice di base $\qquad$ N matrice non di base

B matrice $m \times m$

N matrice $m \times (n-m)$

Si partiziona anche il vettore $x = (\underbrace{x_1, .. x_m}_{x_B}, \underbrace{x_{m+1}, ..., x_n}_{x_N})$

dove

$x_B = m$ componenti di base, cioè le componenti associate alle colonne della matrice B

$x_N = n-m$ componenti non di base, cioè le componenti associate alle colonne della matrice N.

Esempio

$$\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 \leq 2 & \qquad \text{F.S.} \qquad & x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 & & 2x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 & & -3x_1 + 2x_2 + s_3 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \end{array}$$

Matrice sistema forma standard

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Una base può essere data dalle colonne associate a s_1, s_2 e s_3

$$\left.\begin{matrix} -3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix} \Big)$$

$\underbrace{\qquad}_{N}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{B}$

Anche il vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo si scrive come $c = (c_B^T \; c_N^T)$

Il ~~nostro~~ problema di PL diventa

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \min \left(c_B^T x_B + c_N^T x_N \right) \\ Ax = b & \Longrightarrow & B x_B + N x_N = b \\ x \geq 0 & & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Risolviamo il sistema rispetto a x_B. Ricaviamo x_B in funzione di x_N

$B x_B + N x_N = b$ moltiplicando a sx per B^{-1} (B è invertibile)

$$B^{-1} B x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N}$$

esempio

$$\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 \leq 2 & & x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 & \text{F.S.} & 2x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 & & -3x_1 + 2x_2 + s_3 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \qquad N \qquad\quad B \\ A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Per noi le variabili di base sono s_1, s_2, s_3
$x_B = (s_1, s_2, s_3)$
le variabili fuori base sono ~~[illegible]~~ x_1 e x_2
$x_N = (x_1, x_2)$

$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \iff$ ricavare s_1, s_2 e s_3 in funzione di x_1 e x_2

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 - x_1 + x_2 \\ s_2 &= 4 - 2x_1 - x_2 \\ s_3 &= 6 + 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

La soluzione più semplice si ha ponendo $x_1 = x_2 = 0$

Def Dicesi soluzione di base la soluzione del sistema
$B x_B + N x_N = b$ dove $x_B = B^{-1} b$ $\quad x_N = 0$

Una sol. di base è un vettore $(B^{-1} b, 0)$

$$c^T x = c_B^T \underbrace{x_B}_{B^{-1}} + c_N^T \underbrace{x_N}_{0} = c_B^T B^{-1} b$$ ← valore funzione obiettivo nella sol. di base.

$$c^T x = \underset{\overset{\shortparallel}{B^{-1}b}}{c_B^T x_B} + c_N^T \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_N} = c_B^T B^{-1} b$$ ← valore funzione obiettivo nella sol. di base.

Def
Una sol di base si dice ammissibile se le componenti x_B sono ≥ 0
(B può non essere la matrice identità)

Def Una sol di base si dice degenere se ha componenti di base nulle.
Sol non degenere se $x_B > 0$

Def Un problema di PL in forma standard si dice in forma canonica rispetto ad una base B se tutte le variabili di base e la funzione obiettivo sono espresse in funzione delle variabili fuori base

$$\left.\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$ Forma standard

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ sostituendo

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N \\ &= \underbrace{c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N}_{\text{f.o in funzione di } x_N} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \min \left(c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N\right) \\ x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ x_B \geq 0 \end{array}\right\}$$ Forma canonica (si ricavano le variabili x_B in funzione di x_N e si sostituisce dovunque)

Teorema Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$
$x \in P$ vertice $\iff$ è una soluzione ammissibile di base.

Teorema Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ se P è $\neq \emptyset$ e limitato, esiste una soluzione ottima che è una sol. ammissibile di base ($\iff$ vertice)

Memo se $\exists$ sol ottima $\Rightarrow \exists$ vertice ottimo
Vertice $\iff$ sol ammissibile di base (SAB)
Per trovare la sol ottima si cerca tra le SAB.

Quante SAB ci sono?
Possiamo calcolare il numero massimo di basi, cioè il numero di sottomatrici $m \times m$ estraibile dalla matrice A $m \times n$.
Le basi sono al più $\binom{n}{m}$. Tra queste ci sono sottomatrici $m \times m$ non invertibili e ci sono sottomatrici invertibili che danno SAB non ammissibili.

~~11~~ Metodo del simplesso

Elaborato da Dantzig nel 1947

I passi principali sono

1. Si individua una base
2. si costruisce la SAB
3. Test di ottimalità
4. se SAB non è ottima si esamina un vertice adiacente

Si continua fino a trovare il vertice ottimo o dedurre che il ~~p~~ prob non è limitato.

Non peggiora mai il valore della f.o.

Non si salta mai da un vertice ad un altro: si procede sempre per vertici adiacenti.

Quando una SAB è ottima?

Il test di ottimalità si basa sui costi ridotti

Def. Sia dato un problema di PL in forma canonica rispetto ad una base B, i coefficienti delle variabili fuori base nella funzione obiettivo.

In forma vettoriale i costi ridotti associati alle variabili fuori base sono: $c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

$\boxed{\text{Test di ottimalità}}$

Se i costi ridotti sono tutti $\geq 0 \Rightarrow$ SAB ottima

Sia $x^* = (\underbrace{B^{-1}b}_{x_B^*}, \underbrace{0}_{x_N^*})$ la SAB associata alla base B.

Sia x un generico punto $x \in P$ scriviamo la f.o. in x

$$\underline{c^T x} = c^T_B x_B + c^T_N x_N = \boxed{c^T_B (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c^T_N x_N}$$ f.o. forma canonica

$$= c^T_B B^{-1} b + \boxed{(\underbrace{c^T_N - c^T_B B^{-1}N}_{\text{costi ridotti } \geq 0}) \underbrace{x_N}_{\geq 0}}_{\geq 0} \;\underline{\geq}\; \underbrace{c^T_B \underbrace{B^{-1}b}_{=x_B^*}}_{} = c^T_B x^*_B + c^T_N x^*_N$$

= f.o. calcolata in x^* = SAB

$$= \underline{c^T x^*}$$

In conclusione $c^T x \geq c^T x^*$ cioè x^* minimizza la f.o.

x^* è ottimo

La dimostrazione mostra che la f.o. calcolata in un qualsiasi punto del poliedro ~~c^T~~ x è sempre peggiore (non migliore) del valore che la f.o. assume nella SAB x^*.

Resta provato che se i costi ridotti sono ≥ 0, allora

$c^T x \geq c^T x^*$, $\forall x \in P$, cioè
x^* è la SAB ottima

Algoritmo del simplesso

Cosa accade quando non è verificato il Test di ottimalità.

Test di ottimalità = i costi ridotti associati alle variabili fuori base sono ≥ 0

Se il test non è valido allora esiste almeno un costo ridotto < 0 che viene sfruttato per visitare un nuovo vertice.

Vogliamo cercare un'altra SAB, cioè un vertice adiacente. Dobbiamo quindi

1) cercare una nuova base B' (che differisce da B per una colonna)
2) cercare di migliorare il valore della f.o.
3) generare una nuova SAB.

Partiamo dalla f.o.

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

= valore della f.o. calcolato nella SAB corrente

+ costi ridotti × variabili fuori base

Sia $\bar{c}_h$ il costo ridotto < 0. Il valore della f.o. migliora se entra in base la variabile x_h. Se entra in base x_h passa dal valore zero (perché fuori base) a un valore positivo (se entra in base)

Quindi la f.o. si scrive come

$$c^T x = c^T x^{SAB} + \underset{<0}{\bar{c}_h} \underset{>0}{x_h}$$

Nota

$x_N = (x_{m+1}, \dots, x_h, \dots x_n)$
variabili fuori base

$x_N = (0, \dots, x_h, 0, \dots 0)$

cioè la f.o. diminuisce del valore $\bar{c}_h \cdot x_h$

CRITERIO DI ENTRATA : entra in base la variabile con costo ridotto negativo

Più x_h cresce più diminuisce la f.o.. La f.o. non può diminuire all'infinito perché altrimenti il problema sarebbe illimitato inferiormente e non avremmo ottimo. Bisogna che ci sia un limite alla crescita di x_h. Il limite è dato dal sistema dei vincoli.

In forma canonica si ha

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N \underset{\underset{(0, \dots, x_h, \dots 0)}{\shortparallel}}{x_N} \iff$$

$x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h} x_h \geq 0$
$x_2 = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2h} x_h \geq 0$
$\dots$
$x_m = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh} x_h \geq 0$

indichiamo con $\bar{b}_i$ gli elementi di $B^{-1} b$
e con $\bar{a}_{ij}$ gli elementi di $B^{-1} N$

x_h può aumentare sapendo che devono valere le condizioni

$\bar{b}_1 - \bar{a}_{1h} x_h \geq 0 \iff x_h \leq \dfrac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{1h}}$

$\bar{b}_2 - \bar{a}_{2h} x_h \geq 0 \iff x_h \leq \dfrac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2h}}$ per $\bar{a}_{ih} > 0$

$\dots$

$\bar{b}_m - \bar{a}_{mh} x_h \geq 0 \iff x_h \leq \bar{b}_m$

$\bar b_2 - \bar a_{2h} x_h \geq 0 \iff x_h \leq \dfrac{\bar b_2}{\bar a_{2h}}$

$$\bar b_m - \bar a_{mh} x_h \geq 0 \iff x_h \leq \frac{\bar b_m}{\bar a_{mh}}$$

Sia $\vartheta = \min \left\{ \dfrac{\bar b_i}{\bar a_{ih}} : \bar a_{ih} > 0 \ \ i = 1 \dots m \right\} = \dfrac{\bar b_k}{\bar a_{kh}}$

raggiunto per $i = k$.

CRITERIO DI USCITA: esce dalla base la variabile x_k con

CRITERIO DI ILLIMITATEZZA: Se $\bar a_{ih} \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$

allora le relazioni

$$\bar b_1 - \bar a_{1h} x_h \geq 0$$
$$\vdots$$
$$\bar b_m - \bar a_{mh} x_h \geq 0$$

coefficienti della colonna h associata al costo ridotto negativo

sarebbero vere, cioè avremmo sempre punti ammissibili.
Inoltre potremmo aumentare x_h all'infinito e fare diminuire quanto vogliamo la f.o. Quindi il problema è non limitato inferiormente e non ha minimo.

CAMBIO variabile $\quad x_k$ esce, x_h entra

CAMBIO base $\quad$ si passa da B alla base B'
con la colonna A_h al posto della colonna A_k

La f.o. diminuisce del valore $|\bar c_h| \cdot \vartheta$ (decremento f.o.)

PASSI DELL'ALGORITMO

1. Si sceglie la matrice B e si calcola la SAB x_B
2. se $\bar x$ soddisfa il test di ottimalità (costi ridotti ≥ 0) $\Rightarrow$ STOP
3. Esiste $\bar c_h < 0$, Si controllano i coefficienti della colonna h

   Se $\bar a_{ih} \leq 0 \Rightarrow$ STOP (vale test di illimitatezza)

   altrimenti calcoliamo

$$\vartheta = \min \left\{ \frac{\bar b_i}{\bar a_{ih}} : \bar a_{ih} > 0, \ i = 1, \dots m \right\}$$

   ϑ raggiunto per $i = k$

4. Si aggiorna la base $B = B \cup \{A_h\} \setminus \{A_k\}$

TABELLA DEL SIMPLESSO

	$\overbrace{x_1 \ \ x_2 \ \ x_k \ \ x_m}^{\text{var. base}}$	x_{m+1}	$\dots$	x_h	$\dots$	x_n	b
X	1 0 0 0	$\bar a_{1m+1}$		$\bar a_{1h}$		$\bar a_{1n}$	$\bar b$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_h & \cdots & x_n & b \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1m+1} & \cdots & \bar{a}_{1h} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\
x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{2m+1} & \cdots & \bar{a}_{2h} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\
\leftarrow x_k & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{km+1} & \cdots & \bar{a}_{kh} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \bar{b}_k \\
x_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{mm+1} & \cdots & \bar{a}_{mh} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \\
\hline
 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_h < 0 & \cdots & \bar{c}_n & \boxed{}
\end{array}
$$

costi ridotti

opposto valore f.o. nella SAB corrente

$\Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$

Test ottimalità: se $\bar{c}_{m+1} \ldots \bar{c}_n \geq 0 \Rightarrow$ SAB corrente ottima

la soluzione è $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m, 0, \ldots, 0)$

Supp che $\bar{c}_h < 0$

leggiamo i valori della colonna h. se sono tutti ≤ 0 allora la f.o. non è limitata (test di illimitatezza)

Se ci sono elementi della colonna h che sono > 0, si ~~applica~~ cerca il rapporto minimo e si determina la var. entrante x_k

L'elemento $\bar{a}_{kh}$ si chiama PIVOT della trasformazione della base

La colonna $\begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{kh} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix}$ deve diventare come la colonna k $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Si effettuano quindi delle riduzioni sulle righe della matrice.

ESEMPIO

$\max (5x_1 + 3x_2)$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Portiamo il problema in forma standard

$\min (-5x_1 - 3x_2)$

$x_1 - x_2 + S_1 = 2$

$2x_1 + x_2 + S_2 = 4$

$-3x_1 + 2x_2 + S_3 = 6$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Pivot

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & b \\
\hline
\leftarrow S_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
S_2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
S_3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

La matrice di base è quella associata alle variabile scarto. Ogni volta che abbiamo vincoli di $\leq$, la base è la matrice identità

Costi ridotti:

- sono sempre nulli i costi ridotti delle variabili di base

vettore costi ridotti variabile fuori base

$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

SAB corrente $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) = (0, 0, 2, 4, 6)$

-5 -3 0 0 0 0

SAB corrente $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3) = (0, 0, 2, 4, 6)$
$\parallel$
$(\bar{B}^{-1}b, 0)$ N.B. le comp. sono i termini noti

Valore corrente f.o. $= -5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$
(calcolato nella SAB con $x_1 = x_2 = 0$)

costi ridotti:
- sono sempre nulli i costi ridotti delle variabili di base
- costi ridotti delle var. fuori base alla 1ª iterazione coincidono con i coeff. della f.o.

vettore costi ridotti variabili fuori base
$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$
vettore costi ridotti variabili di base
$c_B^T - c_B^T B^{-1} B = c_B^T - c_B^T = 0$

Non è vero che i costi ridotti sono ≥ 0. Non è vero che nelle colonne con costi ridotti negativi tutti gli elementi sono ≤ 0. Non valgono i criteri di terminazione.
Scegliamo la variabile entrante x_1 che corrisponde al 1° costo ridotto negativo. Per scegliere la var. uscente calcoliamo il minimo tra

$\min\left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2} \right\}$ (si prendono SOLO i denominatori > 0)

Scegliamo l'indice minimo quindi esce S_1
Per trasformare la colonna di x_1 $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ nella colonna di S_1 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
facciamo queste trasformazioni

$R_1 = R_1$
$R_2 = R_2 - 2R_1$
$R_3 = R_3 + 3R_1$

METODO: Regola generale
1) la riga del perno si divide per il valore del perno
2) ad ogni altra riga si aggiunge un multiplo della riga del perno

2ª ITERAZIONE

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & S_3 & b \\
x_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\leftarrow S_2 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
S_3 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
 & 0 & -8 & 5 & 0 & 0 & 10
\end{array}$$

comp. di base della SAB corrente

opposto valore f.o.

$R_2 = R_2 - 2R_1$

```
   2  1  0  1  0  4
-2( 1 -1  1  0  0  2)
---------------------
   0  3 -2  1  0  0
```

$R_3 = R_3 + 3R_1$

```
  -3  2  0  0  1  6
+3( 1 -1  1  0  0  2)
---------------------
   0 -1  3  0  1 12
```

Anche la riga dei costi ridotti va aggiornata

$R_4 = R_4 + 5R_1$

```
  -5 -3  0  0  0  0
+5( 1 -1  1  0  0  2)
---------------------
   0 -8  5  0  0 10
```

SAB $= (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3)$ dove
x_1 è in base e vale 2
x_2 è fuori base $x_2 = 0$
S_1 è fuori base $S_1 = 0$
S_2 è in base $S_2 = 0$
S_3 è in base $S_3 = 12$

Valore corrente f.o. $= -10$

Il costo ridotto associato a x_2 è negativo, quindi entra x_2
c'è un solo elemento positivo nella colonna 2, quindi esce S_2

Trasformazioni

$R_2' = \frac{1}{3} R_2$

$R_1' = R_1 + R_2'$

$R_3' = R_3 + R_2'$

$R_4' = R_4 + 8R_2'$

Esempio

$\max (5x_1 + 3x_2)$ FS.

$x_1 - x_2 \le 2 \rightarrow x_1 - x_2 + S_1 = 2$

$2x_1 + x_2 \le 4$

$-3x_1 + 2x_2 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

Iterazione 1

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
$\leftarrow S_1$	1	-1	1	0	0	2
S_2	2	1	0	1	0	4
S_3	-3	2	0	0	1	6
	-5	-3	0	0	0	$\boxed{0}$

SAB 1 : $(0, 0, 2, 4, 6)$
→ variabile base $S_1\ S_2\ S_3$
variabili fuori base x_1, x_2
→ Valore f.o = 0

Iterazione 2

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
x_1	1	-1	1	0	0	2
$\leftarrow S_2$	0	3	-2	1	0	0
S_3	0	-1	3	0	1	12
	0	-8	5	0	0	10

SAB 2 : $(2, 0, 0, 0, 12)$
→ variabili base x_1, S_2, S_3
variabili fuori base x_2, S_1,
Valore f.o. = -10

Trasformazioni : $R'_2 = \frac{R_2}{3}$

$R'_1 = R_1 + R'_2$

$R'_3 = R_3 + R'_2$

$R'_4 = R_4 + 8R'_2$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\leftarrow S_3$	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	12
	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	10

SAB 3 $(2, 0, 0, 0, 12)$
Variabile base x_1, x_2, S_3
Var. fuori base S_1, S_2
Valore f.o. $= -10$

Criterio rapporto

$\min\left\{ \frac{2}{\frac{1}{3}}, \frac{12}{\frac{7}{3}} \right\} = \min\left\{6, \frac{36}{7}\right\} = \frac{36}{7}$

Si nota che nell'iterazione 2 e nell'iterazione 3 si trovano SAB degeneri, cioè con una componente di base nulla (SAB 2 $S_2 = 0$, SAB 3 $x_2 = 0$). Il valore della f.o. non cambia. Siamo fermi sullo stesso vertice.

OSS. Una SAB degenere può anche essere ottima. Può però accadere che rispetto ad una base B i costi ridotti siano negativi, mentre rispetto ad un'altra siano tutti positivi e quindi risulta ottimo.

OSS. Una SAB degenere può provenire da più basi. Una SAB non degenere proviene da una sola base.

Trasformazioni

$R'_3 = \frac{3}{7} R_3 \; ; \; R'_1 = R_1 - \frac{1}{3} R'_3 \; ; \; R'_2 = R_2 + \frac{2}{3} R'_3 \; ; \; R'_4 = R_4 + \frac{1}{3} R'_3$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
x_1	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_2	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{24}{7}$
S_1	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{36}{7}$
	0	0	0	$\frac{19}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{82}{7}$
				>0	>0	>0

Sol ottima $\left(\underbrace{\frac{2}{7}, \frac{24}{7}, \frac{36}{7}}_{\text{comp. base}}, \underbrace{0, 0}_{\text{comp. fuori base}}\right)$

Valore ottimo $f.o = -\frac{82}{7}$

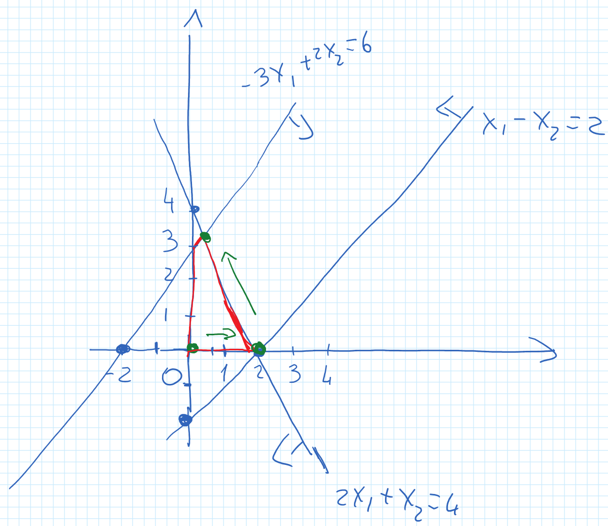
Regione ammissibile

$x_1 - x_2 \leq 2$

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



ITER 1 vertice (0,0)
SAB 1 (0,0,2,4,6)

ITER 2 vertice (2,0)
SAB 2 (2,0,0,0,12)

ITER 3 vertice (2,0)
SAB 3 (2,0,0,0,12)

ITER 4 vertice $\left(\frac{2}{7}, \frac{24}{7}\right)$
SAB 4 $\left(\frac{2}{7}, \frac{24}{7}, \frac{36}{7}, 0, 0\right)$

OSS vertice (2,0) si trova all'intersezione di più vincoli

SAB 2 : variabili base x_1, S_2, S_3

Var. fuori base x_2, S_1 ⟺ $x_2 = 0$, $S_1 = 0$

Dal 1° vincolo standardizzato $x_1 - x_2 + S_1 = 2$ dove $S_1 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2$

Il vertice deriva dall'intersezione dei vincoli $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

Il vertice deriva dall'intersezione dei vincoli $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

SAB 3 Variabili base x_1, x_2, s_3

Variabili fuori base s_1, s_2 — $s_1 = s_2 = 0 \Rightarrow$ intersechiamo i primi 2 vincoli.

Il vertice $(2,0)$ deriva ora dall'intersezione dei vincoli

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Esempio (∞ soluzioni ottime)

$\max (3x_1 + 2x_2)$

$x_2 \le 7$

$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 10$

$\frac{3}{2}x_1 + x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

F.S. $\min(-3x_1 - 2x_2)$

$x_2 + s_1 = 7$

$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + s_2 = 10$

$\frac{3}{2}x_1 + x_2 + s_3 = 10$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	1	1	0	0	7
$\leftarrow s_2$	2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	10
s_3	$\frac{3}{2}$	1	0	0	1	10
	-3	-2	0	0	0	0

$\min\left\{\frac{10}{2}, \frac{10}{\frac{3}{2}}\right\} = \min\left\{5, \frac{20}{3}\right\} = 5$

$R_2' = \frac{R_2}{2}$

$R_3' = R_3 - \frac{3}{2}R_2'$

$R_4' = R_4 + 3R_2'$

ITER 1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	1	1	0	0	7
x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5
$\leftarrow s_3$	0	$\frac{5}{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{2}$
	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	0	15

SAB 1 $\left(5, 0, 7, 0, \frac{5}{2}\right)$

var. base

Valore f.o. $= -15$

$R_4 + \frac{5}{4}R_3'$

0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	0	15
0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	5
0	0	0	0	2	20

$\min\left\{\frac{7}{1}, \frac{5}{\frac{1}{4}}, \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{8}}\right\} = \min\{7, 20, 4\} = 4$

$R_3' = \frac{8}{5}R_3$; $R_1' = R_1 - R_3'$; $R_2' = R_2 - \frac{1}{4}R_3'$; $R_4' = R_4 + \frac{5}{4}R_3'$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	3

Sol ottima

$x_1 = 4$

$\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$\leftarrow s_1$	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	3
x_1	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	4
x_2	0	1	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	4
	0	0	0	0	2	20

Sol ottima

$(4, 4, 3, 0, 0)$

valore corrente

$f_0 = -20$

$x_1 = 4$
$x_2 = 4$
$s_1 = 3$
$s_2 = s_3 = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4}$

$\frac{8}{5} - \frac{5}{4}$

Troviamo un costo ridotto fuori base che è nullo. Se i costi ridotti delle variabili fuori base sono tutti strettamente positivi (> 0) la soluzione è unica. Se c'è un costo ridotto di una variabile fuori base $= 0$ possono esserci più soluzioni.

Forziamo la continuazione del metodo e facciamo entrare in base s_2.

Rapporti $\min\left\{ \frac{3}{\frac{6}{5}}, \frac{4}{\frac{4}{5}} \right\} = \min\left\{ \frac{5}{2}, 5 \right\} = \frac{5}{2}$

$R'_1 = \frac{5}{6} R_1 \qquad R'_2 = R_2 - \frac{4}{5} R'_1 \qquad R'_3 = R_3 + \frac{6}{5} R'_1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_2	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	2
x_2	0	1	1	0	0	7
	0	0	0	0	2	20

Sol ottima $x_1 = 2$ $x_2 = 7$

$(2, 7, 0, \frac{5}{2}, 0)$

comp di base

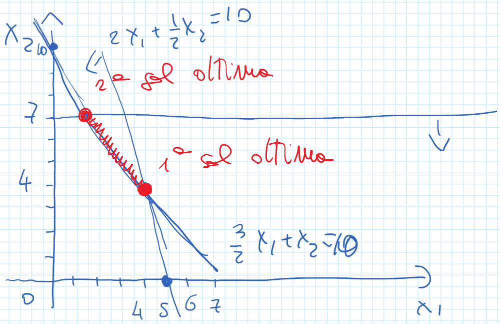
Regione ammissibile

$x_2 \leq 7$

$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 10$

$\frac{3}{2}x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$



Se ci sono 2 sol. ottime $\Rightarrow$ ci sono ∞ sol. ottime: sono tutti i punti del segmento di estremi i due ottimi.

Unicità della soluzione

Se nella tabella finale del simplesso i costi ridotti associati alle variabili fuori base sono tutti >0 (strettamente positivi) allora la soluzione è unica.

Se ci sono costi ridotti delle variabili fuori base pari a zero, si può provare a vedere se ci sono altre soluzioni, forzando il metodo e facendo un'altra iterazione. Si fa entrare in base la variabile che ha costo ridotto nullo.

RISULTATO NOTEVOLE: Se si trova una seconda soluzione ottima, essendo un vertice adiacente al precedente, saranno soluzioni anche tutti i punti del segmento di estremi i due ottimi.

Dimostrazione

Siano x_1^* e x_2^* due sol ottime $\quad c^T x_1^* = c^T x_2^*$ (valore f.o.)

Sia $\bar{x}$ un punto del segmento di estremi x_1^* e x_2^*, allora $\bar{x}$ si scrive come combinazione convessa di x_1^* e x_2^*

$$\bar{x} = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \quad , \lambda \in [0,1]$$

Calcoliamo $c^T \bar{x}$

$$c^T\bar{x} = c^T(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) = \lambda c^T x_1^* + (1-\lambda)\underbrace{c^T x_2^*}_{= c^T x_1^*}$$

$$= \lambda c^T x_1^* + (1-\lambda) c^T x_1^* = c^T x_1^*$$

Conclusione anche $\bar{x}$ è ottimo e lo sono tutti i punti del segmento.

Convergenza del metodo

Se ad ogni iterazione si trovano SAB non degeneri (tutte le comp. di base sono >0), miglioro sempre la f.o.. Ad ogni cambio di base la f.o. diminuisce del valore costo ridotto negativo $\times$ valore del rapporto minimo $(\bar{c}_h \vartheta)$. Se ci sono solo SAB non degeneri, poiché al più ci sono $\binom{M}{m}$ SAB, l'algoritmo converge in un numero finito di iterazioni al più $\binom{M}{m}$

Se il metodo genera SAB degeneri, si rischia di rimanere bloccati

in un vertice e di ripetere la sequenza di basi degeneri visitate.
Per evitarlo si adotta la regola anti-ciclo di Bland

Regola di BLAND: ogni volta che c'è indecisione sulla variabile entrante (più costi ridotti < 0) o uscente (ci sono più rapporti minimi uguali) si sceglie quella con indice minore.

Con la regola di Bland, il metodo converge in al più $\binom{n}{m}$ iterazioni.

Complessità

La complessità è $O(m \cdot n)$ (m = numero vincoli, n = numero variabili), il caso medio è lineare in m o n.
Il numero di iterazioni è circa $\frac{3}{2}m$ (oppure $m+n$).
Il caso peggiore richiede 2^n iterazioni con visita di tutti i vertici di un ipercubo di dimensione n (esempio KLEE-MINTY).

Metodo delle due fasi

Se non è disponibile la forma canonica si può

1. fare operazioni sulle righe della matrice dei coefficienti per ottenere la matrice di base identità
2. si può ottenere la forma canonica, scegliendo una matrice invertibile B ($B \neq I$), calcolando B^{-1} e risolvendo il sistema
   $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ (scrivere le var. di base in funzioni di quelle non di base). In tal caso potremmo trovare componenti di base negative.
3. metodo delle due fasi

$$(-2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$$
$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

FS

$$\min(-2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$$
$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 - S_1 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + S_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il metodo delle due fasi propone di risolvere 2 diversi problemi lineari

FASE I: si risolve un problema modificato per ottenere una SAB

FASE II: si risolve il problema iniziale avviando il simplesso con la SAB trovata nella fase I.

FASE I: Portiamo il problema in forma standard

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Regione ammissibile

$Ax = b$ $\xrightarrow{\text{IDEA!!}}$ $Ax + y = b$

$x \geq 0$ $\qquad$ $x \geq 0$

$y \geq 0$

Si altera il sistema dei vincoli aggiungendo una variabile ARTIFICIALE per ogni vincolo e si perviene al problema ARTIFICIALE

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$
$$x_1, \dots, x_m, \; y_1, \dots, y_m \geq 0$$

y_1

y_m

Memo

Si altera il sistema ma alla fine si vuole che la SAB risolva il sistema $Ax = b$ e non $Ax + y = b$, quindi si usa la f.o. $\min \sum y_i$, sperando che $\min \sum y_i^{OTT} = 0$ che le $y_i = 0 \; \forall i$ e che quindi la SAB del prob. artificiale sia ammissibile per il prob. iniziale

Sia (x^*, y^*) la sol del problema artificiale e sia $z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^*$

ci sono due casi

CASO I $\quad z^* > 0$. Vuol dire che il sistema $Ax + y = b$ non è equivalente al sistema $Ax = b$, il problema iniziale non ha soluzioni ammissibili la regione ammissibile è vuota. (il prob. è inammissibile)

CASO II $\quad z^* = 0 \quad$ Vuol dire che

$$z^* = 0 = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \; , \text{ perché } y_i^* \geq 0 \quad \text{allora}$$

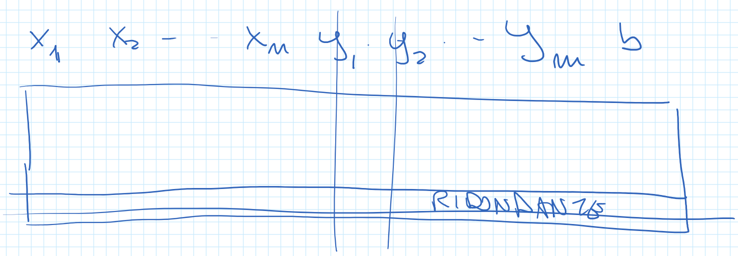
tutte le componenti y^*_i devono essere nulle $y_i^* = 0$

La soluzione è $(x^*, y^*) = (x^*, 0)$ ed è la SAB da usare nella II fase.

Ci sono due sottocasi

① nella SAB $(x^*, 0)$ le variabili artificiali sono tutte fuori base
Si passa alla FASE II cancellando le colonne associate alle variabili artificiali dalla tabella finale della fase I.
Si usa la stessa tabella finale della fase I senza le colonne delle y_i... Si riprende la f.o. del problema iniziale e si ricalcolano i costi ridotti.

② nella SAB $(x^*, 0)$ alcune variabili artificiali sono in base.
Si passa alla fase II, cancellando le colonne delle variabili y_i fuori base e si mantengono le colonne delle y_i in base. Si ripristina la f.o. del problema iniziale e si ricalcolano i costi ridotti.
Si cerca di fare uscire dalla base le variabili artificiali che ci sono.
Se non si riesce, vuol dire che la riga associata alla variabile di base artificiale è un vincolo ridondante che si può eliminare.



ESEMPIO

$$\min(4x_1 + x_2 + x_3)$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

F.S. (si agisce solo sull'ultimo vincolo)

$$\min(4x_1 + x_2 + x_3)$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

FASE I problema artificiale

$$\boxed{\min(y_1 + y_2 + y_3)}$$

NUOVA FUNZ. OBIETTIVO

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
	0	0	0	1	1	1	
y_1 1	2	1	2	1	0	0	4

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + y_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
y_1 \; 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
y_2 \; 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
y_3 \; 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

OSS.

$\min c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$

$\Updownarrow$

$\min z$
$z = c^T x \;\rightarrow\; -z + c^T x = 0$
$Ax = b$
$x \geq 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
z & x & \dots & x_n & b \\
\hline
 & & A & & \\
\hline
-1 & & c^T & & 0
\end{array}$$

$$\bar{c}_1 = 0 - (1,1,1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = -6$$

In questo caso si dovrebbero ottenere i costi ridotti come segue

$$-z + y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

si dovrebbero ricavare le y_i dai vincoli e si dovrebbero sostituire.

Usiamo invece la formula per il calcolo dei costi ridotti

Per calcolare i costi ridotti si ~~possono~~ usa la seguente formula

$$\bar{c}_i = \text{coeff della variab } x_i \text{ nella f.o} - (\text{vettore coeff. delle var. di base nella f.o.}) \begin{pmatrix}\text{vettore}\\ \text{colonna}\\ \text{corrente}\end{pmatrix}$$

coeff delle variabile nella f.o. che è $y_1+y_2+y_3$ $\rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
y_1 \; 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
y_2 \; 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
y_3 \; 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
 & -6 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & -12
\end{array}$$

$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{1}\right\}$

$$\bar{c}_1 = 0 - (1,1,1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = -6$$

$$\bar{c}_2 = 0 - (1,1,1)\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = -3$$

$$\bar{c}_3 = 0 - (1,1,1)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = -6$$

$$\bar{c}_4 = 1 - (1,1,1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

— — — —

$$-\text{valore ott. f.o} = -(1,1,1)\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} = -12$$

OSS. Se si inseriscono variabili artificiali in tutti i vincoli, i costi ridotti delle var. fuori base della 1ª tabella sono l'opposto della somma degli elementi di colonna.

Dopo due iterazioni si ottiene la tabella

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
\hline
x_3 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\
x_1 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible]
\end{array}$$

Fine FASE I

x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_3	0	0	0	-2	1	1	0
	0	0	0	3	0	0	$\boxed{0}$

Fine FASE I

$z^* = 0$

$SAB^{OTT} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$

Si passa alla FASE II

FASE II: le variabili y_1 e y_2 sono fuori base e si cancellano le colonne. La tabella FASE II è:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_3	0	0	0	-2	1	1	0
	0	0	0	3	0	0	$\boxed{0}$

$\longrightarrow$

coeff delle variab. nella f.o. iniziale $4x_1 + x_2 + x_3$

		x_1	x_2	x_3	y_3	b
		4	1	1	0	
1	x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$
4	x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	y_3	0	0	0	1	0

$\longrightarrow y_3 = 0$

riprendiamo la f.o. iniziale, quindi dobbiamo ricalcolare i costi ridotti

Possiamo eliminare il vincolo $y_3 = 0$ e la colonna di y_3

		x_1	x_2	x_3	b
		4	1	1	
1	x_3	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
4	x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
		0	$\frac{13}{4}$	0	-8

$\bar{c}_2 = 1 - (1, 4)\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \frac{13}{4}$

$-\text{valore f.o.} = -(1, 4)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -8$

La sol ottima è $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ f.o ottimo è 8

comp di base

Esempio

$\min(-3x_1 + 4x_2)$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$2x_1 + 3x_2 \geq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

FS. $\min(-3x_1 + 4x_2)$

$x_1 + x_2 + s_1 = 4$

$2x_1 + 3x_2 - s_2 = 18$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2, S_1 S_2 \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 3 & \boxed{0} & -1 \end{pmatrix}$$

FASE I prob art.

aggiungiamo la var artif. solo al 2° vincolo perché c'è già la colonna $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$\min y$

$x_1 + x_2 + S_1 = 4$

$2x_1 + 3x_2 - S_2 + y = 18$

$x_1, x_2, S_1, S_2, y \geq 0$

	x_1	x_2	S_1	S_2	y
S_1	1	1	1	0	0
y	2	3	0	-1	1

in base c'è S_1 quindi non vale la regola dell'opposto della somma per i costi ridotti

Dobbiamo usare la formula per calcolare i costi ridotti.

Esempio

$\min(-x_1 + x_2)$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

F.S. $\min(-x_1 + x_2)$

$x_1 + x_2 - s_1 = 3$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 2$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è in forma canonica!

Applichiamo la regola della base in due fasi

FASE I prob. artificiale

$\min y$

$x_1 + x_2 - s_1 + y = 3$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 2$

$x_1, x_2, s_1, s_2, y \geq 0$

N.B. si aggiunge la var. artificiale solo al 1° vincolo perché c'è già la colonna $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$

Si aggiungono le var. artificiali solo dove serve

		x_1	x_2	s_1	s_2	y	b
		0	0	0	0	1	
1	y	1	1	-1	0	1	3
$\leftarrow$ 0	s_2	1	2	0	1	0	2
		-1	-1	1	0	0	-3

$\bar{c}_i$ = coeff f.o. − (vett. coeff. delle var. base nella f.o.) × (colonna corrente i)

$\bar{c}_1 = 0 - (1,0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -1$

$\bar{c}_2 = 0 - (1,0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -1$

$\bar{c}_3 = 0 - (1,0)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 1$

$\bar{c}_4 = 0 - (1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$

$\bar{c}_5 = 1 - (1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$

$-\bar{z} = -(1,0)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = -3$

Regola di Bland: entra x_1

$\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 2$ esce s_2

$R_2' = R_2$; $R_1' = R_1 - R_2$

$R_3' = R_3 + R_2$

	x_1	x_2	s_1	s_2	y	b
y	0	-1	-1	-1	1	1
x_1	1	2	0	1	0	2
	0	1	1	1	0	$\boxed{-1}$

Finisce la fase I

$-z = 1 \neq 0$

Il problema iniziale non è ammissibile. La regione ammissibile è vuoto, ci sono dei vincoli incompatibili

Esempio

$$\max(x_1+2x_2+x_3)$$
$$x_1+2x_2-x_3=4$$
$$-x_1+x_2+x_3=8$$
$$x_1+5x_2-x_3=16$$
$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$

F.S. $\min(-x_1-2x_2-x_3)$
$$x_1+2x_2-x_3=4$$
$$-x_1+x_2+x_3=8$$
$$x_1+5x_2-x_3=16$$
$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$

Metodo delle due fasi

FASE I:

$$\min(y_1+y_2+y_3)$$
$$x_1+2x_2-x_3+y_1=4$$
$$-x_1+x_2+x_3+y_2=8$$
$$x_1+5x_2-x_3+y_3=16$$
$$x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 \geq 0$$

Termini negativi non sono usati nel criterio del rapporto

$$\begin{array}{cc|ccccccc|}
 & & \downarrow x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
\hline
\leftarrow 1 & y_1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
1 & y_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
1 & y_3 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 16 \\
\hline
 & & -1 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & -28
\end{array}$$

opposto della somma degli elementi di colonna

$$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{16}{1}\right\} = 4$$
$$R'_2 = R_2 + R_1$$
$$R'_3 = R_3 - R_1$$
$$R'_4 = R_4 + R_1$$

Calcoliamo alcuni costi ridotti

$$\bar{c}_1 = 0-(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -(1-1+1) = -1$$

$$\bar{c}_4 = 1-(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1-1=0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & \downarrow x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
\hline
x_1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
y_2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 12 \\
y_3 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12 \\
\hline
 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & -24
\end{array}$$

$$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{12}{3}, \frac{12}{3}\right\} = 2$$
$$R'_1 = \frac{R_1}{2}$$
$$R'_2 = R_2 - 3R'_1$$
$$R'_3 = R_3 - 3R'_1$$
$$R'_4 = R_4 + 6R'_1$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & \downarrow x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
\hline
x_2 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\
\leftarrow y_2 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 6 \\
y_3 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 6
\end{array}$$

$$\min\left\{6\cdot\frac{2}{3}, 6\cdot\frac{2}{3}\right\}$$
$$R'_2 = \frac{2}{3}R_2 \qquad R'_4 = R_4 + 3R'_2$$
$$R'_1 = R_1 + \frac{1}{2}R'_2$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
y_3 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 6 \\
\hline
 & 3 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & -12
\end{array}$$

$R'_1 = R_1 + \frac{1}{2} R'_2$

$R'_3 = R_3 - \frac{3}{2} R'_2$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & b \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\
x_3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\
y_3 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0
\end{array}$$

$\bar{z} = 0$ si può passare alla FASE II

Cancelliamo le colonne di y_1 e y_2 che non sono in base

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \cancel{y_1} & \cancel{y_2} & \cancel{y_3} & b \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{0} & 4 \\
x_3 & -1 & 0 & 1 & \cancel{-\frac{1}{3}} & \cancel{\frac{2}{3}} & \cancel{0} & 4 \\
\cancel{y_3} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{0} & 0
\end{array}
\longrightarrow y_3 = 0$$

possiamo cancellare sia la colonna che la riga di y_3

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \overset{-1}{x_1} & \overset{-2}{x_2} & \overset{-1}{x_3} & b \\
-2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
 & -2 & 0 & 0 & 12
\end{array}$$

Si riprende la f.o.

$\min(-x_1 - 2x_2 - x_3)$

quindi si devono ricalcolare i costi ridotti

$$\bar{c}_1 = -1 - (-2, -1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$-\bar{z} = -(-2, -1)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$$

c'è un costo ridotto negativo, gli elementi della colonna sono ≤ 0 $\Rightarrow$ il problema non è limitato inferiormente.

Esempio con parametro

$\max(2x_1 + 3x_2)$

$x_1 \leq \lambda$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 \leq 1$ $\qquad \lambda \geq -1$

$-3x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Si distinguono alcuni casi su λ

① caso $\lambda \in [-1, 0[$

$-3x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

① caso $\lambda \in [-1, 0[$

② caso $\lambda = 0$

caso $\lambda > 0$ con due sottocasi

③ caso $\lambda \in]0, 1]$

④ caso $\lambda > 1$

① caso $\lambda \in [-1, 0[$ F.S.

$\min(-2x_1 - 3x_2)$

$-x_1 - S_1 = -\lambda$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + S_2 = 1$

$-3x_2 + S_3 = 2$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo delle due fasi

FASE I

$\min y$

$-x_1 - S_1 + y = -\lambda$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + S_2 = 1$

$-3x_2 + S_3 = 2$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, y \geq 0$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	y	b
y	-1	0	-1	0	0	1	$-\lambda$
S_2	λ	λ	0	1	0	0	1
S_3	0	-3	0	0	1	0	2
	1	0	0	0	0	0	λ

$\bar{c}_1 = 0 - (1, 0, 0)\begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\bar{c}_2 = 0 - (1, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$\bar{c}_3 = 0 - (1, 0, 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$-\bar{z} = 0 - (1, 0, 0)\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda$

$\bar{z} = \lambda < 0$

Problema inammissibile

regione ammissibile vuota

② ~~caso $\lambda \in]0, 1[$~~ $= 0$

$\max(2x_1 + 3x_2)$

$x_1 \leq 0$ | $x_1 = 0$ | R'_2 = problema non limitato.

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
$-3x_2$	λ	0	1	0	0	λ
S_2	λ	λ	0	1	0	1
S_3	0	-3	0	0	1	2

$x_2 \geq -\frac{2}{3}$ $R'_4 = R_4 + 2R_1$

Possiamo ~~quindi~~ ~~scrivere~~ la 1ª tabella del simplesso

F.S.

$\min(-2x_1 - 3x_2)$ $x_1\ x_2\ S_1\ S_2\ S_3$ b

	x_1	$\boxed{x_2}$	S_1	S_2	b
R'_1					

F.S. $\min(-2x_1 - 3x_2)$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	0	1	0	0	λ
λ	λ	0	1	0	$1-\lambda^2$
0	-3	0	0	1	2
0	-3	2	0	0	2λ

$x_1 + s_1 = \lambda$

$-3x_2 + s_3 = 2$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1 R_1	1	$\boxed{2}$	1	0	0
s_2 R_2'	3	R_3	3	R_2'	2
R_4'	-2	R_4 3	3	R_2 0	0

problema non limitato

caso $x_1, x_2 > s_1, s_2, s_3$ b

-2 x_1	1	0	1	0	λ
-3 x_2	0	1	$-\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$
0 s_3	0	0			$2+3(1-\lambda^2)$

F.S. $\min(-2x_1 - 3x_2)$

$-x_1 + x_1 = 1$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + s_2 = 1$

$\bar{c}_3 = 0 - (-2, -3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

ora continuare

OSS. Avremmo potuto distinguere i casi su λ come segue

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

CASO I $\lambda \geq 0$ F.S. $\min(-2x_1 - 3x_2)$

$x_1 + s_1 = \lambda$

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + s_2 = 1$

$-3x_2 + s_3 = 2$

N.B. in base ci sono solo var. scarto, i costi ridotti $\equiv$ coeff. f.o

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	0	1	0	0	λ
s_2	λ	λ	0	1	0	1
s_3	0	-3	0	0	1	2
	-2	-3	0	0	0	0

F.S. $\min(-2x_1 - 3x_2)$

$-\bar{x}_1 + s_1 - z = -(0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = -2$

entra x_1.

$\min\left\{\frac{\lambda}{1}, \frac{1}{\lambda}\right\} =$ λ $\lambda \in]0,1]$ esce s_1

$-3x_2 + s_3 = 2$

$\frac{1}{\lambda}$ $\lambda \geq 1$ esce s_2

Al variare del parametro λ si presentano 2 casi. Risolvendo separatamente i due casi, ritroveremmo i casi svolti in precedenza.

Esempio 3 caso $\lambda \in]0,1]$ (già visto)

entra x_1, esco s_1

$R_2' = R_2 - \lambda R_1$

$R_4' = R_4 + 2R_1$

Variabili sono ore dedicate alle varie attività: sottoscrizione, direttore, segretario

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	0	1	0	0	λ
s_3	0	-3				

x_{d1}, x_{s2} ← ore attività di direttore (supervisione del personale)

x_1 x_2 x_3 ← ore attività tecniche

$s_3 \,|\, 0 \quad -3$ rel. ore profilo

$x_{t_3} \quad x_{t_4} \quad x_{t_5}$ ← ore attività tecnici (grafica, sistema)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	1	0	1	0	0	1
s_2	0	λ	-1	1	0	$1-\lambda^2$
s_3	0	-3	0	0	1	2

x_{s_2}, x_{s_4}, x_{s_5} ← ore attività segretario; rel. sistemi; sistemi grafici

obiettivo = max ore programmazione

$$R'_2 = \frac{R_2}{\lambda}$$

$$R'_3 = R_3 + 3R'_2$$

$$R'_4 = R_4 + 3R'_2$$

$\max\left(x_{t_5} + \frac{1}{2} x_{s_5}\right)$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	1	0	1	0	0	λ
x_2	0	1	-1	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$
s_3	0	0	-3	$\frac{3}{\lambda}$	1	$2+\frac{3(1-\lambda^2)}{\lambda}$
	0	0	-3	$\frac{3}{\lambda}$	0	$2\lambda+\frac{3(1-\lambda^2)}{\lambda}$

vincolo supervisione

$x_{t_4} \geq 20 + 0.1\left(x_{t_3} + \frac{x_{s_5}}{2}\right)$

vincolo rel.

$x_{d_2} + x_{s_3} \geq 25$

$$= \frac{3-\lambda^2}{\lambda}$$

vincolo grafica

$$\frac{x_{d_3}}{2} + x_{t_3} \geq 5 + 0.1\left(x_{t_5} + \frac{x_{s_5}}{2}\right)$$

$$R'_2 = R_2 + R_1$$

$$R'_3 = R_3 + 3R_1$$

$$R'_4 = R_4 + R_1$$

vincoli sistema

$x_{t_4} + \frac{x_{s_4}}{2} \geq 40$

vincolo progr.

$x_{t_5} + \frac{x_{s_5}}{3} \geq 10$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	0	0	0	0	λ
x_2	1	1	0	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\lambda + \frac{1-\lambda^2}{\lambda}$
s_3	3	0	0	$\frac{3}{\lambda}$	1	$2+\frac{3(1-\lambda^2)}{\lambda}+3\lambda$
	1	0	0	$\frac{3}{\lambda}$	0	$\frac{3-\lambda^2}{\lambda}+\lambda$

ore settimanali ≤ 40

$x_{d_1} + x_{d_2} + x_{d_3} \leq 40$

$x_{t_3} + x_{t_4} + x_{t_5} \leq 30$

$$= \frac{3+2\lambda}{\lambda}$$

$x_{s_2} + x_{s_4} + x_{s_5} \leq 40$

$$\text{Sol}: \left(0, \frac{1}{\lambda}, \lambda, 0, \frac{3+2\lambda}{\lambda}\right)$$

$$-\bar{z} = \frac{3}{\lambda}$$

Verifica ≥ 0

$$\frac{3-\lambda}{\lambda} + \lambda = \frac{3}{\lambda}$$

④ caso $\lambda > 1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	0	1	0	0	λ
$\leftarrow s_2$	λ	λ	0	1	0	1
s_3	0	-3	0	0	1	2
	-2	-3	0	0	0	0

$R_2' = \frac{R_2}{\lambda}$ $\quad R_1' = R_1 - R_2'$ $\quad R_4' = R_4 + 2R_2'$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	-1	1	$-\frac{1}{\lambda}$	0	$\lambda - \frac{1}{\lambda}$
x_1	1	1	0	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1}{\lambda}$
s_3	0	-3	0	0	1	2
	0	-1	0	$\frac{2}{\lambda}$	0	$\frac{2}{\lambda}$

$R_1' = R_1 + R_2$

$R_3' = R_3 + 3R_2$

$R_4' = R_4 + R_2$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	1	0	1	0	0	λ
x_1	1	1	0	$\frac{1}{\lambda}$	0	$\frac{1}{\lambda}$
s_3	3	0	0	$\frac{3}{\lambda}$	1	$\frac{3+2\lambda}{\lambda}$

sol. $\left(\frac{1}{\lambda}, 0, \lambda, 0, \frac{3+2\lambda}{\lambda}\right)$

$-\bar{z} = \frac{3}{\lambda}$

È stato commissionato alla vostra piccola software house il progetto di sviluppo di un sito web. Il progetto consiste nello sviluppare un'applicazione che si interfacci anche con un database, per cui richiede lo sviluppo di un programma. Visto che avete intenzione di accettare altre commesse simili avete deciso di dedicare il maggior tempo possibile allo sviluppo del programma, in modo da guadagnare esperienza nel campo e nella speranza di riuscire a sviluppare il più rapidamente progetti simili. Lo scopo è quello di riuscire a massimizzare le ore spese nella programmazione.

Sono stati individuati i seguenti compiti da svolgere:

1. Supervisione: questo compito richiede almeno 20 ore a cui vanno aggiunti almeno il 10% delle ore spese nella programmazione.
2. Relazioni esterne: richiede almeno 25 ore
3. Grafica: lo sviluppo del layout grafico del sito richiede almeno 5 ore a cui vanno aggiunte il 10% delle ore spese nella programmazione
4. Per amministrare i sistemi sono necessari almeno 40 ore
5. Lo sviluppo dei programmi richiede almeno 10 ore

Il personale che si ha a disposizione per svolgere questo progetto consiste in tre persone: un direttore un tecnico e un segretario. Il personale è disponibile per lo sviluppo del progetto per una settimana ovvero per 40 ore di lavoro. Il direttore è in grado di svolgere i compiti di supervisione e di relazioni esterne; inoltre è in grado di usare un programma di grafica, per cui può svolgere il compito di grafica. Va specificato che il direttore non è molto esperto nell'uso di questo programma per cui ogni sua ora spese in questo compito equivale ad un avanzamento di mezz'ora. Il tecnico è in grado di programmare sviluppare grafica e amministrare il sistema. Il segretario sa occuparsi di relazioni esterne; inoltre è in grado di programmare e svolgere i compiti da sistemista, ma in entrambi questi compiti ogni ora a spese equivale ad un avanzamento di mezz'ora.

Dualità della PL

La dualità permette di ~~p~~ associare ad un dato problema di PL un altro problema che può essere più facile da risolvere o può permettere di dedurre proprietà ulteriori del problema iniziale.

Sia dato il generico problema di PL

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

che è detto problema PRIMALE.

Ad esso associamo il problema detto DUALE

$$\max y^T b$$
$$y^T A \leq c^T$$
$$y \geq 0$$

Relazioni tra i problemi primale e duale

(P)
$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

trasposta

(D)
$$\max y^T b$$
$$y^T A \leq c^T$$
$$y \geq 0$$

Tabella delle trasformazioni

	Primale	Duale	
	min	max	
	num. variabili	num vincoli	
	num vincoli	num. variabili	
	coeff. f.o.	termini noti	
	termini noti	coeff. f.o.	
vincolo i-esimo	$a_i^T x \leq b_i$	$y_i \leq 0$	segno variabile i-esima
	$a_i^T x \geq b_i$	$y_i \geq 0$	
	$a_i^T x = b_i$	y_i libera	
segni variabile j-esima	$x_j \geq 0$	$y^T A_j \leq c_j$	vincolo j-esimo
	$x_j \leq 0$	$y^T A_j \geq c_j$	
	x_j libera		

Tabella delle trasformazioni

	Primale	Duale	
	max	min	
	num. variabili	num vincoli	
	num vincoli	num. variabili	
	coeff. f.o.	termini noti	
	termini noti	coeff. f.o.	
vincolo i-esimo	$a_i^T x \leq b_i$	$y_i \geq 0$	segno variabile i-esima
	$a_i^T x \geq b_i$	$y_i \leq 0$	
	$a_i^T x = b_i$	y_i libera	
segni variabile j-esima	$x_j \geq 0$	$y^T A_j \geq c_j$	vincolo
	$x_j \leq 0$	$y^T A_j \leq c_j$	
	x_j libera		

segno j-esimo $x_j \le 0$ | $y^T A_j \ge c_j$ vincolo j-esimo
x_j libera | $y^T A_j = c_j$

segni variabile esimo $x_j \le 0$ | $y^T A_j \ge c_j$, $y^T A_j \le c_j$ vincolo j-esimo
x_j libera | $y^T A_j = c_j$

La tabella si legge a partire da un problema di max o di minimo

Esempio (costruzione problema duale)

Primale:

$\min(3x_1 + 5x_2)$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$

$m = 2$
$n = 3$ ⟶ $m = 2$ variabile
$n = 3$ vincoli

Duale

$\max(2y_1 + 3y_2)$

$y_1 + y_2 \le 3$
$2y_1 + 4y_2 \le 5$
$2y_1 + 2y_2 \le 0$
$y_1, y_2 \le 0$

Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$(y_1, y_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ — $y_1 + y_2$, $2y_1 + 4y_2$, $2y_1 + 2y_2$

vincoli duali

Esempio

Primale

$\max\ x_2 + x_3$

$-x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1$
$-2x_1 + x_2 \le 2$
$2x_2 \ge -3$
$2x_1 = 2$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

4 var. duali

3 vincoli duali

Duale

$\min(y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 2y_4)$

$-y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0$
$-y_1 + y_2 + 3 \ge 1$
$2y_1 + y_1 \ge 1$

$y_1, y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4$ libera

$$\text{Matrice } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{coeff. sistema duale}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & - & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

f.o. primale $x_2 + x_3 \to c^T = (0, 1, 1) \longrightarrow$ termini noti duali

Def. La coppia di problemi:

Def. La coppia di problemi:

$$\min c^T x \qquad\qquad \max y^T b$$
$$Ax \geq b \quad (P) \qquad\qquad y^T A \leq c^T \quad (D)$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

si dice coppia di problemi SIMMETRICI

Si hanno problemi ASIMMETRICI se il primale di minimo è in forma standard

Primale

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Duale

$$\max y^T b$$
$$y^T A \leq c^T$$

Esempio

$$\min (2x_1 + 3x_2 + x_3)$$
$$2x_1 + x_2 \geq 1$$
$$3x_2 + 2x_3 \geq -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{Duale simmetrico}}$

$$\max (y_1 - y_2)$$
$$2y_1 \leq 2$$
$$y_1 + 3y_2 \leq 3$$
$$2y_2 \leq 1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio (primale in F.S.)

$$\min (2x_1 + 3x_2 + x_3)$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_2 + 2x_3 = -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{Duale asimmetrico}}$

$$\max (y_1 - y_2)$$
$$2y_1 \leq 2$$
$$y_1 + 3y_2 \leq 3$$
$$2y_2 \leq 1$$
$$y_1, y_2 \; ?$$

OSS. Il duale del duale coincide con il primale

$$\begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{duale}} \begin{array}{c} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{duale}} \begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Relazioni tra i problemi duali. Teoremi di dualità

Teorema della dualità debole

Sia data una coppia di problemi primale e duale

$$(P) \quad \min c^T x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0 \qquad\qquad (D) \quad \max y^T b \quad y^T A \leq c^T \quad y \geq 0$$

Sia $\bar{x}$ una sol ammissibile per (P) e $\bar{y}$ ammissibile per (D)

Allora $\bar{y}^T b \leq c^T \bar{x}$

Dim. se $\bar{x}$ è amm. $\Rightarrow A\bar{x} \geq b$

$\bar{y}$ è amm $\Rightarrow \bar{y}^T A \leq c^T$

$$\bar{y}^T \underbrace{b}_{\leq A\bar{x}} \leq \bar{y}^T (A\bar{x}) = \underbrace{(\bar{y}^T A)}_{\leq c^T} \bar{x} \leq c^T \bar{x}$$

Conseguenza del teorema

La f.o. del primale in una qualunque sol ammissibile è un upper bound per il valore ottimo duale $\quad y^{*T} b \leq c^T \bar{x}$

La f.o. del duale in una qualunque sol. amm. è un lower bound per il valore ottimo primale $\quad \bar{y}^T b \leq c^T x^{*}$

Concludiamo che sono finiti gli ottimi del primale e del duale.

<u>1° Corollario del teorema della dualità debole</u>

Siano dati due problemi primale e duale. Sia $\bar{x}$ amm. per (P) e $\bar{y}$ ammissibile per (D).

Se $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \Rightarrow$ $\bar{x}$ è ottimo per (P)
$\bar{y}$ è sol ottima per (D)

2° Corollario del teorema della dualità debole

Se il primale (o il duale) non è limitato $\Rightarrow$ il duale (primale) è inammissibile.

Riassumiamo in una tabella tutte le possibilità

Primale \ Duale	ottimo finito	non limitato	inammissibile
ottimo finito	Sì	NO	NO
non limitato	NO	NO	Sì
inammissibile	NO	Sì	Sì

[illegible]	NO	NO	SI
inammissibile	NO	Sì	Sì

Teorema della dualità forte

Se uno dei due problemi, primale o duale ha ottimo finito, anche l'altro ha ottimo finito e i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono. Se uno dei due non è limitato, l'altro è inammissibile.

Conseguenze: ~~se~~ Risolto un problema applicando la dualità forte si ottengono informazioni anche sull'altro problema.

Teorema degli SCARTI COMPLEMENTARI

(P) $\min c^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$ (D) $\max y^T b$, $y^T A \leq c^T$, $y \geq 0$

$\bar{x}$ ammissibile per (P) e $\bar{y}$ ammissibile per (D)

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi $\Longleftrightarrow$ $\bar{y}^T(A\bar{x}-b)=0$, $(\bar{y}^T A - c^T)\bar{x}=0$

Condizioni di ottimalità:

Dati $\bar{x}$ ammissibile per (P) e $\bar{y}$ ammissibile per (D)

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottimi $\Longleftrightarrow$

1. $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$

oppure

2. $\bar{y}^T(A\bar{x}-b)=0$
   $(\bar{y}^T A - c^T)\bar{x}=0$

Esercizio 1 (P)

$\max(4x_1+3x_2+2x_3)$

$x_1+2x_2+3x_3 \leq 8$

$2x_1-x_3 \leq 7$

$3x_1+4x_2-x_3 \leq 5$

$x_2+x_3 \leq 6$

$x_2 \geq 0$

3 var
4 vincoli

3 vincoli 4 variabili

Duale (D)

$\min(8y_1+7y_2+5y_3+6y_4)$

$y_1+2y_2+3y_3+0\cdot y_4=4$

$2y_1+0\cdot y_2+4\cdot y_3+y_4 \geq 3$

$3y_1 - y_2-y_3+y_4=2$

$y_i \geq 0 \quad i=1,\dots,4$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&-1\\3&4&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&0&4&1\\3&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Esempio:

P

(P)

$\min(4x_1+3x_2+2x_3)$

$x_1+2x_2+3x_3 \leq 8$

$2x_1-x_3 \leq 7$

$3x_1+4x_2-x_3 \leq 5$

$x_2+x_3 \leq 6$

$x_2 \geq 0$

3 var
4 vincoli

D

$\max(8y_1+7y_2+5y_3+6y_4)$

$y_1+2y_2+3y_3=4$

$2y_1+4y_3+y_4 \leq 3$

$3y_1-y_2-y_3+y_4=2$

$y_i \leq 0$

Forma standard

- vincoli $\leq$ $\longrightarrow$ si aggiungono 4 variabili scarto s_i

$x_1 \rightarrow x_1'-x_1''$
$x_2 \rightarrow x_2'-x_2''$
> si aggiungono 4 variabili ≥ 0 x_1', x_1'', x_2', x_2''

Esempi (scarti complementari o condizioni complementarietà)

$\min(2x_1-x_2)$

$x_1+2x_2 \geq 7$

$2x_1-x_2 \geq -6$

$-3x_1+2x_2 \geq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

Applicare gli scarti complementari per verificare se $x^*=(0,6)$ è ottimo

Per prima cosa verifichiamo se $(0,6)$ è ammissibile

$x_1+2x_2=12 \geq 7$ ✓

$2x_1 - x_2 = -6 \geq -6$ ✓ il punto è amm.

$-3x_1 + 2x_2 = 12 \geq 8$ ✓

Scriviamo il problema duale

$$\min (2x_1 - x_2) \quad \xrightarrow{\text{duale simmetrico}} \quad \max(7y_1 - 6y_2 + 8y_3)$$

(P)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 2x_1 - x_2 \geq -6 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leq 2 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema degli S.C.

$y_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \longrightarrow y_1(12 - 7) = 0 \Rightarrow$ rel. verificata e in più $y_1 = 0$

$y_2(2x_1 - x_2 + 6) = 0 \longrightarrow y_2(\underbrace{2 \cdot 0 - 6 + 6}_{=0}) = 0$ ok. non abbiamo info su y_2

$y_3(-3x_1 + 2x_2 - 8) = 0 \longrightarrow y_3(12 - 8) = 0$ ok e $y_3 = 0$

$(y_1 + 2y_2 - 3y_3 - 2)x_1 = 0 \longrightarrow$ ok perché $x_1 = 0$ non abbiamo info su y_2

$(2y_1 - y_2 + 2y_3 + 1)x_2 = 0 \longrightarrow$ ~~[illegible]~~ $x_2 \neq 0 \Rightarrow 2y_1 - y_2 + 2y_3 + 1 = 0$, con $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ $\Downarrow$

Concludiamo che la sol $(0, 6)$ è ottima per (P) e la soluzione duale è $(0, 1, 0)$ $\qquad y_2 = 1$

f.o di (P) $2x_1 - x_2$ il valore ottimo -6 $(x_1 = 0 \ x_2 = 6)$

f.o. di (D) $7y_1 - 6y_2 + 8y_3$, il valore ottimo -6 $(y_1 = y_3 = 0 \ y_2 = 1)$

per la dualità forte i valori ottimi coincidono

Esempio interpretazione dualità - problema di produzione

$$\max (20x_1 + 15x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

sol ottima $x^* = (2, 2)$ $\quad f^* = 70$ (valore ottimo)

Costruiamo il duale simmetrico

$$\min (6y_1 + 8y_2)$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 20 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 15 \end{cases}$$

$y_1, y_2 \geq 0$

Il problema duale ha anch'esso un significato economico.
Si considera un mercato fittizio detto ombra nel quale si vendono le materie prime e non i prodotti finiti.
Le variabili duali sono i prezzi di vendita delle materie prime.
Si minimizza per rendere concorrenziale l'operazione.
Il vincolo $y_1 + 2y_2 \geq 20$ indica che i prezzi delle risorse necessarie a produrre una unità di prodotto P_1 devono essere $\geq$ profitto derivante dalla vendita del prodotto finito P_1.
Analogamente per il vincolo 2.
Le variabili duali sono dette prezzi ombra e indicano di quanto aumenta il profitto se si aumenta di 1 unità il termine noto (risorse) del problema primale.

OSS. Se all'ottimo un vincolo vale come disuguaglianza $\Rightarrow$ la variabile duale è nulla. Di conseguenza.
Se c'è una parte di risorsa che all'ottimo non è utilizzata anche se si incrementa, il profitto non aumenta.

Esempio
problema della dieta. Si vuole determinare la dieta di costo minimo con i seguenti dati

	Alimento 1	Alimento 2
proteine	1	2
fabbisogno almeno		4
costi	2	3

$$\min (2x_1 + 3x_2)$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

prob. duale:

$$\max 4y$$
$$y \leq 2$$
$$2y \leq 3$$
$$y \geq 0$$

Il significato del problema duale suggerisce che si possano vendere dei forma sostitutivi degli alimenti, si vuole max il profitto, per essere competitivo il prezzo y deve essere inferiore al prezzo di vendita degli alimenti.
All'ottimo la competizione tra i mercati finisce in parità.

Calcolo soluzione duale dalla risoluzione del problema primale

(1) All'ottimo i valori ottimi della f.o. primale e duale coincidono

$$c^T x^* = y^{*T} b$$

x^* sappiamo che è SAB

$$x^* = (\underbrace{B^{-1} b}_{x^*_B}, \underbrace{0}_{x^*_N})$$

$$y^{*T} b = c^T x^* = c^T_B x^*_B + c^T_N x^*_N$$
$$= c^T_B B^{-1} b + c^T_N \cdot 0$$
$$= c^T_B B^{-1} b$$

$$y^{*T} = c^T_B B^{-1}$$

c^T_B = coeff della f.o. delle variabili di base

B^{-1} = colonne delle variabili di base nella tabella finale.

(2) Nel caso di prob di minimo con vincoli di $\leq$ le variabili duali = coeff f.o. delle variabili di base alla 1° iterazione − costi ridotti della tabella finale delle variabili in base alla 1° iterazione.

Esempio

$\min (-2x_1 - x_2)$

$2x_1 \leq 2$

$x_2 \leq 1$

$x_1 - 3x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

F.S. $\min (-2x_1 - x_2)$

$2x_1 + s_1 = 2$

$x_2 + s_2 = 1$

$x_1 - 3x_2 + s_3 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
← s_1	2	0	1	0	0	2
s_2	0	1	0	1	0	1
s_3	1	−3	0	0	1	1
	−2	−1	0	0	0	0

$\min \{ \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \}$

$R_1' = \frac{R_1}{2}$

$R_3' = R_3 - R_1'$

$R_4' = R_4 + 2R_1'$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
← s_2	0	1	0	1	0	1
s_3	0	−3	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
	0	−1	1	0	0	2

$R_3' = R_3 + 3R_2$

$R_4' = R_4 + R_2$

$$0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2$$

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
s_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & 1 & 3 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3
\end{array}$$

sol ottima primale

$x^* = (1, 1)$

Valore ottimo $= -3$

$\min (-2x_1 - x_2)$

$2x_1 \leq 2$

$x_2 \leq 1$

$x_1 - 3x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

Duale $\max (2y_1 + y_2 + y_3)$

$2y_1 + y_3 \leq -2$

$y_2 - 3y_3 \leq -1$

$y_1, y_2, y_3 \leq 0$

Variabili duale ottime $y^* =$ coeff della f.o di s_1, s_2 e s_3 (in base alla 1ª iter) - costi ridotti della tabella finale di s_1, s_2 e s_3

$$y^{*T} = (0, 0, 0) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 0)$$

Valore ottimo $= -3$

In alternativa avremmo potuto scrivere

$$y^{*T} = c_B^T B^{-1} = (-2, -1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

coeff f.o. delle variabili base finali x_1, x_2, s_3

colonne variabili in base alla 1ª iterazione.

Simplesso duale

Consideriamo una coppia di problemi primale-duale

$$(P)\quad \min c^T x \qquad Ax \geq b \qquad x \geq 0$$

$$(D)\quad \max y^T b \qquad y^T A \leq c^T \qquad y \geq 0$$

È possibile ricavare la soluzione ottima duale y^* dalla soluzione ottima primale x^*.

Sia $x^* = (x^*_B, x^*_N) = (B^{-1}b, 0)$

Per la dualità forte se il problema (P) ha soluzione x^*, allora deve esistere anche la sol. y^* e $c^T x^* = y^{*T} b$

$$\underline{y^{*T} b} = c^T x^* = c^T_B x^*_B + c^T_N x^*_N = c^T_B B^{-1} b + c^T_N \cdot 0 = \underline{c^T_B B^{-1} b}$$

Troviamo $y^{*T} = c^T_B B^{-1}$

Considerazioni sull'ammissibilità duale.

Una soluzione duale y si dice ammissibile se soddisfa i vincoli del problema duale, cioè

$$y^T A \leq c^T$$
$$y \geq 0$$

La relazione $y^T A \leq c^T$ partizionando A in (B, N) diventa

$$y^T A \leq c^T \begin{cases} y^T B \leq c^T_B \\ y^T N \leq c^T_N \end{cases}$$

Posto $y^T = c^T_B B^{-1}$, sostituendo

$$y^T A \leq c^T \begin{cases} y^T B \leq c^T_B \iff c^T_B B^{-1} b \leq c^T_B \iff c^T_B \leq c^T_B \\ y^T N \leq c^T_N \iff c^T_B B^{-1} N \leq c^T_N \iff \underbrace{c^T_N - c^T_B B^{-1} N \geq 0}_{\text{costi ridotti primale} \geq 0} \end{cases}$$

costi ridotti primale ≥ 0

In conclusione, la condizione di ammissibilità duale coincide con la condizione di ottimalità primale.

Questa considerazione è alla base del metodo del simplesso duale.

Anche questo metodo si applica al problema primale in forma standard.

È valido quando è verificata l'ammissibilità duale (costi ridotti ≥ 0) ma non è verificata l'ammissibilità primale (almeno un termine noto < 0)

Dal punto di vista geometrico, il metodo parte dalla valutazione di un punto fuori dalla regione ammissibile (non c'è l'ammissibilità primale) e si cerca di avvicinarsi al poliedro fino a trovare il vertice ottimo.

Ad ogni iterazione si mantengono ≥ 0 i costi ridotti.
Si mantiene l'ammissibilità duale e si cerca l'ammissibilità primale.

Il metodo si applica ad una tabella del tipo

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\hline
 & & & & & & & & \beta_1 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
x_r & \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rm} & \alpha_{r\,m+1} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r < 0 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & \beta_m \\
\hline
 & 0 & & & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_n & -z^* \\
 & & & & & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 &
\end{array}
$$

non c'è l'ammissibilità primale

ammissibilità duale / ottimalità primale

Test di ottimalità: $\beta_r \geq 0$ tutti i termini noti devono essere ≥ 0

Se c'è un $\beta_r < 0$, resta individuata la riga r
Si controllano gli elementi della riga r.

Se $\alpha_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n \Rightarrow \underbrace{\alpha_{r1} x_1 + \cdots + \alpha_{rm} x_m + \alpha_{r\,m+1} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{rn} x_n}_{\geq 0} = \underbrace{\beta_r}_{< 0}$

il problema primale è inammissibile, allora il problema duale ~~ad~~ può essere inammissibile o

il problema primale è inammissibile, ≥ 0 ≤ 0
allora il problema duale ~~per~~ può essere inammissibile o non limitato. Poiché vale la condizione di ammissibilità duale (costi ridotti ≥ 0), allora esistono sol ammissibili duali. Pertanto si conclude che il problema duale è non limitato.

Se esistono $\alpha_{rj} < 0$, $j = 1, \dots, n$ si effettua il cambio di base, esce la variabile x_r che corrisponde al termine noto negativo.
La variabile entrante si determina scegliendo il ~~rapporto~~ rapporto minimo

$$\frac{\bar{c}_s}{|\alpha_{rs}|} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{|\alpha_{rj}|} : \alpha_{rj} < 0 \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

Si trova così il pivot della trasformazione che è all'incrocio della riga r della variabile uscente e la colonna s della variabile entrante.

In caso di indecisione, si sceglie il primo indice utile (Regola di Bland).

Esempio (simplesso duale)

$$\min (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Scriviamo il problema in forma standard

$$\min (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - s_2 = 5$$
$$x_i \geq 0 \quad s_j \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2$$

$$\min (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$
$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 = -6$$
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -5$$
$$x, s \geq 0$$

N.B. Se la f.o. è di min con coeff ≥ 0 e ci sono vincoli $\geq$ possiamo sempre applicare il simplesso duale

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b	
	3	4	5				
①	-2	-2	-1	1	0	-6	< 0

$R_1' = -\frac{1}{2} R_1$ i coeff f.o. ≥ 0 alla 4ª iterazione
$R_2' = R_2 + R_1'$ sono i costi ridotti ≥ 0

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & \overset{x_1}{3} & \overset{x_2}{4} & \overset{x_3}{5} & s_1 & s_2 & b & \\
\hline
\leftarrow 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & -6 & <0 \\
0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -5 & <0 \\
\hline
 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \geq 0 & >0 & >0 & & & &
\end{array}
$$

$R_1 = -\frac{1}{2}R_1$

$R_2' = R_2 + R_1'$

$R_3' = R_3 - 3R_1'$

i coeff f.o. della 1ª iterazione sono i costi ridotti ≥ 0 i vincoli di $\geq$ portano all'inserimento delle variabili surplus e moltiplicando poi per -1 si ritrovano i termini noti negativi

$$\bar{c}_1 = 3 - (0,0)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

esce s_1 (1ª riga con $b<0$)

entra la variabile con rapporto minimo fra

$$\min\left\{\frac{3}{|-2|}, \frac{4}{|-2|}, \frac{5}{|-1|}\right\} = \frac{3}{2}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & \overset{\downarrow}{x_2} & x_3 & s_1 & s_2 & b \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\
\leftarrow s_2 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\
\hline
 & 0 & \underbrace{1 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{3}{2}}_{>0} & & & 0 & -9
\end{array}
$$

$$\min\left\{\frac{1}{|-1|}, \frac{\frac{7}{2}}{|-\frac{5}{2}|}, \frac{\frac{3}{2}}{|-\frac{1}{2}|}\right\}$$

$$= \min\left\{1, \frac{7}{5}, 3\right\} = 1$$

$R_2^* = -R_2$; $R_1' = R_1 - R_2'$ $\quad R_3' = R_3 - R_2'$

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & b & \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & >0 \\
x_2 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & >0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -11 &
\end{array}
$$

La sol ottima

$(1, 2, 0)$

valore ottimo 11

Esempio

$\min (3x_1 + 2x_2)$

$-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$

$x_1 + x_2 + x_4 = 2$

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & \overset{\downarrow}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\
\hline
\leftarrow x_3 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & <0 \\
x_4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & >0 & >0 & & & &
\end{array}
$$

$$\bar{c}_1 = 3 - (0,0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_2 = 2 - (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

c'è un solo elemento <0 nella 1ª riga $\Rightarrow$ è il pivot.

$R'_1 = -\frac{1}{2} R_1$

$R'_2 = R_2 - R'_1$

$R_3 = R_3 - 3R'_1$

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\
\hline
x_1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
x_4 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\
\hline
 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2}
\end{array}$$

Sol ottima primale
$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$
valore ottimo f.o $\frac{3}{2}$

Analisi di sensibilità (variazione del termine noto)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

sia $x^* = (B^{-1}b, 0)$ la sol ottima

Supponiamo di perturbare uno dei termini noti, ad esempio passiamo da b_r a $b_r + \Delta b_r$, quindi il vettore dei termini noti diventa $\bar{b} = (b_1, \dots b_{r-1}, b_r + \Delta b_r, \dots b_m)$

ci domandiamo se $(B^{-1}\bar{b}, 0)$ è soluzione ottima.

Se $B^{-1}\bar{b}$ ha qualche componente negativa, allora $(B^{-1}\bar{b}, 0)$ non è più una sol. ammissibile. I costi ridotti hanno espressione $c^T_N - c^T_B B^{-1} N$ che non dipende né da b né da $\bar{b}$.

Poiché x^* è la sol ottima e B è la base ottima
$$c^T_N - c^T_B B^{-1} N \geq 0$$

I costi ridotti non dipendono dalla perturbazione, quindi restano ≥ 0 anche dopo che b_r passa a $b_r + \Delta b_r$.

Abbiamo costi ridotti ≥ 0, ~~[illegible]~~ ci sono termini noti negativi $\Rightarrow$ possiamo applicare il simplesso duale per determinare la nuova soluzione ottima primale.

Se invece $B^{-1}\bar{b}$ ha tutte le componenti ≥ 0, allora la soluzione è ancora ammissibile. Dato che i costi ridotti sono ancora ≥ 0, allora è ~~[illegible]~~ soluzione ottima.
La soluzione ottima duale $y^T = c^T_B B^{-1}$ non cambia.

Valutazione della f.o.

Sia $x^* = (B^{-1}b, 0)$ $\quad \bar{x} = (B^{-1}\bar{b}, 0)$

$$c^T\bar{x} - c^T x^* = c^T_B \bar{x}_B + c^T_N \underbrace{\bar{x}_N}_{=0} - c^T_B x^*_B - c^T_N \underbrace{x^*_N}_{=0}$$

$$= c^T_B B^{-1}\bar{b} - c^T_B B^{-1} b$$

$$= \underbrace{c^T_B B^{-1}}_{= y^T \text{ sol duale}} (\bar{b} - b) = \underbrace{y_r \Delta b_r}_{\text{misura della variazione della f.o.}}$$

Esempio

$\max (3x_1 + 2x_2)$

(P)
$x_1 + x_2 \leq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 5$
$\cancel{-x_1 + 4x_2 \geq 2}$
$x_1 - 4x_2 \leq -2$
$x_1, x_2 \geq 0$

moltiplichiamo per -1 per avere il duale simmetrico

sol $x^* = (1, 3)$
valore ottimo 9

(D) simmetrico

$\min (4y_1 + 5y_2 - 2y_3)$
$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$
$y_1 + y_2 - 4y_3 \geq 2$
$y_1, y_2 \geq 0$

sol $y^* = (1, 1, 0)$
valore ottimo 9

supponiamo di incrementare il termine noto $4 \to 4,5$

la variazione della f.o. $= \underbrace{y^*_1}_{=1} (4,5 - 4) = 0,5$

la f.o. aumenta di $\frac{1}{2}$ punto

il valore ottimo è 9,5

Esempio

$\min (x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4)$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 4$

N.B. Non usiamo la forma canonica
la base non è la matrice identità

Le variabili di base sono $\{x_3, x_4\}$
Le variabili fuori base sono $\{x_1, x_2\}$
La base è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad c^T_B = (-2, -3) \qquad c^T_N = (1, 1) \qquad b^T = (1, 1)$$

Costruiamo la sol. ottima

$$x^* = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (x^*_3, x^*_4)$$

$$x^*_1 = x^*_2 = 0$$

$$y^{*T} = c^T_B B^{-1} = (-2, -3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$$

valore ottimo $-\frac{5}{2}$

Perturbiamo il termine noto b_2 che diventa $\frac{1}{4}$

$$b_2 \longrightarrow \frac{1}{4}$$

Sia $\bar{b} = \left(1, \frac{1}{4}\right)$

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

La soluzione trovata non è ammissibile perché ha la 2ª componente negativa.
La soluzione duale non cambia.

Programmazione lineare intera

Il generico problema di programmazione lineare intera (PLI)

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \\ &x \text{ intere} \end{aligned}$$

Se non c'è il vincolo di interezza si ricade nei problemi di programmazione lineare.

Se solo alcune variabili devono essere intere si hanno i problemi lineari interi misti

Esempio

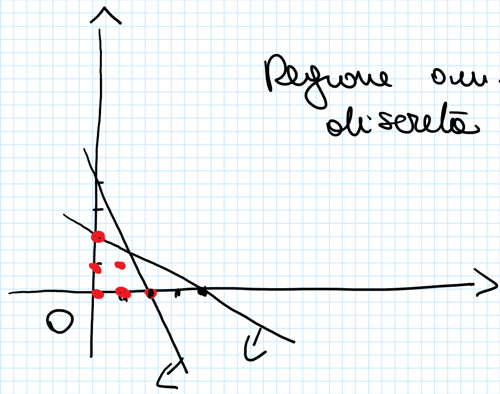
$\max\ (x_1 + x_2)$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 interi



OSS. La regione ammissibile di un problema di PLI non è convessa.

OSS. Per risolvere un problema di PLI non è possibile eliminare il vincolo di interezza, risolvere il problema continuo e approssimare poi la soluzione all'intero più vicino.

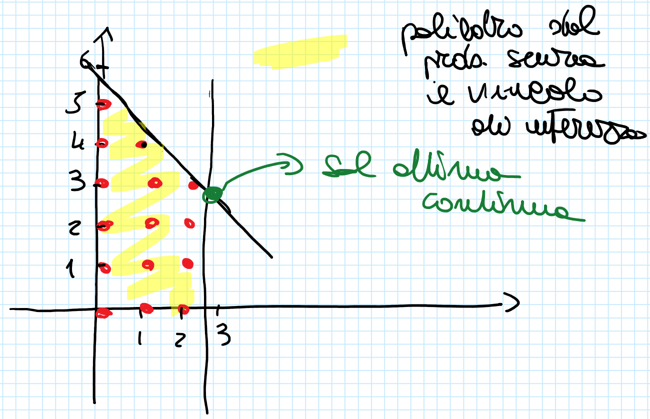
Ex

$\max\ (2x_1 + x_2)$

$5.5x_1 + 4.5x_2 \leq 24.75$

$x_1 \leq 2.7$

$x_1, x_2 \geq 0$



La sol. senza vincoli di interezza $x^*_{PL} = (2.7,\ 2.2)$ $fo = 7.6$

La sol. del problema intero $x^*_{PLI} = (2, 3)$ $fo = 7$

Se arrotondiamo la sol. x^*_{PL} per difetto $\bar{x}^* = (2, 2)$ $fo = 6$

Lezione del 17 novembre 2022

mercoledì 16 novembre 2022 10:18

Scelta di progetti

Consideriamo un'azienda operante nel settore dei videogames che sta valutando 5 possibili progetti, ciascuno corrispondente al lancio di un nuovo prodotto. Ciascun progetto richiede l'impegno a tempo pieno di un certo numero di programmatori. L'azienda dispone di un budget complessivo pari a 8 milioni di euro e 50 unità di personale. Per ciascun progetto l'azienda ha valutato il rendimento atteso del capitale investito (milioni di euro). I dati sono raccolti nella tabella seguente.

progetto	capitale	personale	rendimenti
1	1.1	9	2.4
2	4.3	10	6.2
3	3.7	12	5.6
4	2.6	18	3.8
5	1.8	15	2.7

Variabili x_i sono binarie indicano se il progetto i viene scelto o meno

Obiettivo: max il rendimento atteso= $\max(2.4 x_1+6.2 x_2+5.6 x_3+3.8 x_4+2.7 x_5)$

Vincolo 1 di budget= $1.1 x_1+4.3 x_2+\ldots+1.8 x_5<=8$
Vincolo 2 sul personale= $9 x_1+10 x_2+\ldots+15 x_5<=50$
Vincoli binari x appartiene a $\{0,1\}$

Distribuzione di lavori

Un'azienda ha 4 macchine per eseguire 7 lavori. Ogni lavoro deve essere eseguito da una sola macchina e t_{ij} è il tempo necessario alla macchina j per eseguire il lavoro i. Determinare come assegnare i lavori alle macchine in modo da effettuare tutti i lavori nel minor tempo possibile. I tempi di lavorazione sono indicati nella tabella seguente.

	macchina 1	macchina 2	macchina 3	macchina 4
lavoro 1	6		6	4
lavoro 2	4	7	5	2
lavoro 3		5	7	
lavoro 4		8	8	7
lavoro 5	5	4	3	5
lavoro 6	8	2	4	8
lavoro 7	9	6	9	6

Variabili: x_{ij} dove $x_{ij}=1$ se il lavoro i è assegnato alla macchina j e 0 altrimenti

Variabile t che indica il tempo di esecuzione di tutti i lavori

Obiettivo: min t

Vincolo 1 tempo di lavoro della macchina 1: $6 x_{11}+4x_{21}+5x_{51}+8 x_{61}+9 x_{71}<=t$
Vincolo 2 tempo di lavoro della macchina 2:

analogamente
Vincolo 7 tempo di lavoro della macchina 7:

Vincolo lavoro 1 (il lavoro 1 è eseguito solo da una macchina)= x_11+x_13+x_14=1

Analogamente tutti gli altri

Problema del trasporto

Una ditta di trasporto deve trasferire container vuoti dai propri magazzini, situati a Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia, ai principali porti nazionali, a Genova, Venezia, Ancona, Napoli, Bari.

Le disponibilità di container vuoti nei magazzini e le domande di container nei porti sono le seguenti:

	Disponibilità
Verona	10
Perugia	12
Roma	20
Pescara	24
Taranto	18
Lamezia	40

	Domanda
Genova	20
Venezia	15
Ancona	25
Napoli	33
Bari	21

Il trasporto di ciascun container ha un costo in Euro corrispoendente alla distanza percorsa dal veicolo su cui è caricato. Le distanze chilometriche fra magazzini e porti sono riportate nella seguente tabella:

	Genova	Venezia	Ancona	Napoli	Bari
Verona	290	115	355	715	810
Perugia	380	340	165	380	610
Roma	505	530	285	220	450
Pescara	655	450	155	240	315
Taranto	1010	840	550	305	95
Lamezia	1072	1097	747	372	333

Formulare in termini di programmazione lineare il problema di determinare una politica di trasporto di costo complessivo minimo.

Un ospedale vuole espandere alcuni servizi di diagnostica medica per una certa popolazione che vuole migliorare la propria QALY (quality adjusted life index). Sono al vaglio cinque programmi di intervento. Il budget a disposizione è di 300.000 euro e si prevedono al massimo 40.000 pazienti. Nella tabella sono indicati i costi di realizzazione e il numero di visite di ciascun programma. Si vuole determinare la porzione di ciascun programma da realizzare per massimizzare la QALY totale sotto le restrizioni sul budget e sul numero di visite mediche.

Programmi	QALY	Costi (euro)	Visite
1	10	100.000	40.000
2	15	60.000	60.000
3	15	50.000	50.000
4	12	40.000	15.000
5	8	150.000	40.000

Formulare il problema come un problema di programmazione lineare.

Suggerimento: le variabili sono comprese tra zero e uno.

Esempio

L'amministratore sanitario di una città con m quartieri, ciascuno abitato da p_i persone, vuole organizzare n presidi sanitari ed assegnare gli m quartieri. Si vuole che il rapporto tra il minimo ed il massimo numero di abitanti assegnati ad un presidio sia almeno $\frac{1}{2}$.

È noto il costo c_{ij} dovuto all'assegnamento del quartiere i al presidio j. Decidere come assegnare i quartieri ai presidi in modo da minimizzare i costi.

Programmazione lineare intera

$$(PLI) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ intero} \end{array}$$

Def. Il problema che si ottiene dal problema (PLI) eliminando il vincolo di interezza è detto RILASSAMENTO LINEARE o CONTINUO. È quindi il problema

$$(RL) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Osserviamo che dati

$$(PLI) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ intero} \end{array}\right] X \end{array} \qquad (RL) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right] P \end{array}$$

Risulta $\quad X \subseteq P$

$$\min \{ c^T x \, , x \in P \} \leq \min \{ c^T x : x \in X \}$$

$$z^*_{RL} \leq z^*_{PLI}$$

valore ottimo del problema (RL) $\leq$ valore ottimo problema (PLI)

Il valore ottimo del (RL) dà un lower bound per il valore ottimo del problema intero.

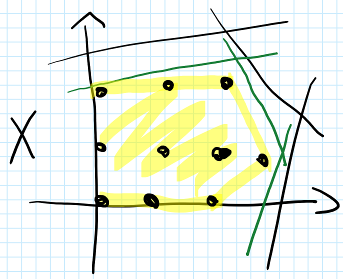
Se il problema (RL) ha una soluzione intera, allora questa è anche soluzione del problema (PLI).

In conclusione, si può risolvere il (RL) e

- se si ottiene una sol. intera $\Rightarrow$ soluzione anche di (PLI)
- se si ottiene una soluzione non intera $\Rightarrow$ possiamo calcolare un lower bound per il valore ottimo di (PLI)

$$z^*_{RL} \le z^*_{PLI}$$

Rilassamento convessificato



Data una regione ammissibile discreta X esistono diversi poliedri che contengono X. Il poliedro più interessante che contiene X è l'involucro convesso di X

def L'involucro convesso di un insieme X è il più piccolo insieme convesso che contiene X e si indica con conv(X).

L'involucro convesso di X ha <u>solo</u> vertici interi, quindi si potrebbe risolvere il problema di PL

$$\min c^T x$$
$$(*) \qquad x \in conv(X)$$

certi di trovare una soluzione intera (perché conv(X) ha tutti i vertici interi). Il problema (*) è detto rilassamento convessificato.

Non è facile costruire il rilassamento convessificato, se non per alcune classi di problemi.

Esistono comunque problemi di PLI con una struttura particolare per cui è possibile risolvere il RL e ottenere la sol. intera cercata.

Matrici unimodulari e matrici totalmente unimodulari

Def. Data una matrice A $m \times n$, si dice unimodulare se tutte le sottomatrici di ordine $m \times m$ hanno determinante pari a $-1, 0$ oppure 1

Prop. Se A è unimodulare e b ha componenti intere, allora il problema $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ ha soluzioni intere.

Quindi se dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \\ &x \text{ intero} \end{aligned}$$

con A unimodulare e b intero

possiamo risolvere il rilassamento lineare

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Def. Una matrice A $m \times n$ si dice totalmente unimodulare se ogni sottomatrice quadrata $p \times p$ (con $p = 1, \ldots, m$) ha determinante che vale $-1, 0$ oppure 1

PROP. Se A è tot. unimodulare e b è intero allora il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \; x \geq 0\}$ ha solo vertici interi.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 3 - 2 = 1 \quad$ A è unimodulare ma non tot. unimodulare

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è tot unimodulare

~~to~~ tutte le sottomatrici 1×1 valgono 0 oppure 1
e tutte le sottomatrici 2×2 hanno det $\in\{-1,0,1\}$

Proprietà delle matrici TU (tot. unimodulari)

- se A è TU $\Rightarrow$ A^T TU
- se A è TU $\Rightarrow$ (A, I) è TU

A è TU anche se
- si scambiano due righe o colonne
- se si moltiplica per -1 una riga o una colonna
- se si effettua un'operazione pivotale

Gli elementi di una matrice TU sono solo -1, 0 oppure 1

Riconoscere una matrice TU

① Una matrice A che ha solo elementi $-1, 0, 1$ è TU se
- in ogni colonna non ci sono più di 2 elementi $\neq 0$
- è possibile dividere le righe in 2 partizioni I_1 e I_2 in modo che se ci sono due elementi $\neq 0$ di segno concorde in una colonna essi appartengono a righe che stanno in due partizioni diverse; se gli elementi sono opposti appartengono entrambi a righe di I_1 o entrambi a righe di I_2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_1 \\ \\ I_2 \\ \end{matrix}$$

② Sia data A con elementi $-1, 0, 1$ con non più di due elementi $\neq 0$ in ogni colonna; se la somma degli elementi $\neq 0$

nelle colonne con 2 elementi non nulli è zero $\Rightarrow$ A è TU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def I problemi di PLI che possono essere risolti come PL sono detti problemi ideali.

Esempi di problemi con matrici del sistema di vincoli TU.

1) Problema del flusso massimo

Consideriamo un grafo orientato $G = (V, A)$ attraverso cui viaggia un flusso (prodotti, acqua, informazioni)

Si individua un nodo sorgente s da cui parte il flusso e un nodo destinazione a cui arriva il flusso.

Gli altri nodi della rete sono detti di transito.

La quantità di flusso che entra in un nodo deve essere pari alla quantità che esce (vincoli di bilancio);

è data una capacità sugli archi che è la quantità max di flusso che può attraversare gli archi.

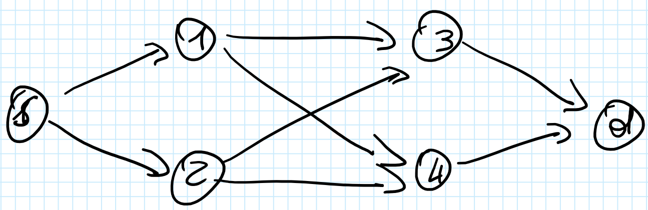
i flussi sono ≥ 0

Vogliamo determinare la quantità max di flusso che parte da s sotto i vincoli di bilancio dei nodi e di capacità degli archi.

Nei casi reali ci sono più sorgenti e destinazioni. ci si riconduce al caso di 1 sorgente e 1 destinazione aggiungendo 1 sorgente fittizia collegata con capacità ∞ a tutte le sorgenti reali e lo stesso per le destinazioni.

Esempio

Archi Capacità



Archi	Capacità
(s,1)	3
(s,2)	2
(1,3)	1
(1,4)	4
(2,3)	1
(2,4)	1
(3,d)	1
(4,d)	7

Vogliamo costruire il problema PLI per risolvere il problema del flusso max sulla rete.

Variabili: x_{ij} = flusso sull'arco (i,j)

obiettivo: max flusso che esce da s (oppure che entra in d)

$$\max\ x_{s1} + x_{s2}$$

Vincoli bilancio: per ogni nodo

flusso uscente - flusso entrante = 0

nodo 1: $x_{13} + x_{14} - x_{s1} = 0$

nodo 2: $x_{23} + x_{24} - x_{s2} = 0$

nodo 3: $x_{3d} - x_{13} - x_{23} = 0$

nodo 4: $x_{4d} - x_{14} - x_{24} = 0$

$$\max\ x_{s1} + x_{s2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{13} + x_{14} - x_{s1} = 0 \\ x_{23} + x_{24} - x_{s2} = 0 \\ x_{3d} - x_{13} - x_{23} = 0 \end{array}\right\} \text{Vincoli di bilancio}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{3d} - x_{13} - x_{23} = 0 \\ x_{4d} - x_{14} - x_{24} = 0 \end{array}\right\}$$ bilancio

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le x_{S1} \le 3 & 0 \le x_{S2} \le 2 \\ 0 \le x_{13} \le 1 & 0 \le x_{14} \le 4 \\ 0 \le x_{23} \le 1 & 0 \le x_{24} \le 1 \\ 0 \le x_{3d} \le 1 & 0 \le x_{4d} \le 7 \end{array}\right]$$ vincoli di ≥ 0 e capacità.

$x_{S1}, x_{S2}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{3d}, x_{4d}$ interi

matrice sistema vincoli di bilancio

$$\begin{array}{cccccccc} x_{S1} & x_{S2} & x_{13} & x_{14} & x_{23} & x_{24} & x_{3d} & x_{4d} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è TU ed è anche la matrice di incidenza nodi - archi del nostro grafo (con 1 flusso uscente e -1 per il flusso entrante)

Ogni matrice di incidenza nodi-archi è TU.

Se le capacità sugli archi sono intere, allora possiamo eliminare il vincolo di interezza sulle variabili e risolvere il RL.

② Flusso di costo minimo

Si consideri un grafo connesso e orientato $G = (V, A)$
ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij}
ad ogni nodo i è associato un peso b_i

Se $b_i > 0$ ⟹ nodo i è un nodo sorgente
Se $b_i < 0$ ⟹ nodo i è un nodo destinazione
Se $b_i = 0$ ⟹ nodo i è un nodo di trasferimento.

Se $b_i < 0 \Rightarrow$ nodo i è un nodo destinazione

Se $b_i = 0 \Rightarrow$ nodo i è un nodo di Transito.

con $\sum b_i = 0$

Vogliamo fare viaggiare il flusso a costo minimo rispettando i vincoli di bilancio sui nodi che richiedono che per ogni nodo il flusso uscente - flusso entrante $= b_i$

Esempio

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,5), (2,3)\ (3,4)\ (4,2), (4,5)\ (5,3)\}$

capacità	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,3)	(3,4)	(4,2)	(4,5)	(5,3)
	5	-2	2	-4	0	6	3	4

bilanci sui nodi	1	2	3	4	5
	2	5	1	-4	-4

Variabili : x_{ij} = flusso arco (i,j)

obiettivo : min costo

$$\min(5x_{12} - 2x_{13} + 2x_{15} - 4x_{23} + 6x_{42} + 3x_{45} + 4x_{53})$$

Vincoli:

flusso uscente da i - flusso entrante $= b_i$

$i = 1 \quad x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$

$i = 2 \quad x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5$

$i = 3 \quad x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1$

$i = 4 \quad x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4$

$i = 5 \quad x_{53} - x_{15} - x_{45} = -4$

$$\min(5x_{12} - 2x_{13} + 2x_{15} - 4x_{23} + 6x_{42} + 3x_{45} + 4x_{53})$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$

$$x_{23} - x_{12} - x_{42} = 5$$

$$x_{34} - x_{13} - x_{23} - x_{53} = 1$$

$$x_{42} + x_{45} - x_{34} = -4$$

$$x_{53} - x_{15} - x_{45} = -4$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{15}, x_{23}, x_{34}, x_{42}, x_{45}, x_{53} \geq 0 \quad \text{intere}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A è TU ed è la matrice di incidenza nodi-archi

Il problema può essere risolto eliminando il vincolo di interezza se i bilanci b_i sono interi.

Metodo dei tagli

Consideriamo

$$(PLI) \quad \min c^T x \quad \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ intero} \end{array}\right\} X$$

e il suo rilassamento lineare

$$(RL) \quad \min c^T x \quad \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} P \leftarrow \text{poliedro}$$

Osserviamo che $X = P \cap \mathbb{Z}^n$.

Sia x^* la soluzione non intera del problema (RL)

Def Dicesi taglio un vincolo che è soddisfatto da tutti i punti di X (tutti i punti ammissibili di PLI) ma non è soddisfatto da x^*

Un taglio è una relazione del tipo $\underbrace{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq \alpha_0}_{\text{disequazione lineare in } n \text{ variabili}}$

per cui risulta

① $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq \alpha_0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in X$ è valida per i punti di X

② $a_1 x_1^* + \dots + a_n x_n^* > \alpha_0$ non è valida per x^* (sol di RL)

L'idea del metodo dei piani di taglio è quella di risolvere una successione di problemi di PL ottenuti a partire dal rilassamento lineare del problema di PLI iniziale, aggiungendo ogni volta un taglio, fino ad ottenere una soluzione intera.

I passi principali sono

① Si risolve il rilassamento lineare

② Se x^*_0, (sol ottima del RL) è intera, STOP

(x^*_{RL} è soluzione del problema intero)

③ Altrimenti si costruisce un taglio

④ Si risolve un nuovo problema di programmazione lineare aggiungendo il taglio al RL corrente.

Aggiungendo i tagli, si cerca di avvicinarsi al rilassamento convessificato. Infatti, la soluzione ottima intera si troverà in un vertice intero del poliedro modificato con i tagli.

A seconda della scelta del taglio si possono ottenere diversi metodi dei piani di taglio

Metodo dei tagli di GOMORY

Il metodo prevede di risolvere il rilassamento lineare con il metodo del simplesso (primale) e di sfruttare le informazioni nella tabella finale del simplesso per determinare il taglio.
Se la soluzione del RL non è intera avrà qualche componente frazionaria. Si seleziona la riga della tabella del simplesso che corrisponde al termine noto frazionario. Se ci fossero più righe con termine noto frazionario, si sceglie quella con indice minore o quella con termine noto che ha parte frazionaria maggiore.

TAGLIO INTERO

Sia la tabella finale del simplesso come segue

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c|}
 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & & b \\
\hline
x_1 & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
x_r & & 1 & & \alpha_{r\,m+1} & \cdots & \alpha_{rn} & & \beta_r \\
 & & & \ddots & & & & & \\
x_m & 0 & & 1 & & & & & \\
\hline
 & 0 & & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_n & & -z^* \\
\end{array}
$$

β_r è frazionario

$$x_r + \alpha_{r,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{rn} x_n = \beta_r$$

$$x_r + \lfloor \alpha_{r,m+1} \rfloor x_{m+1} + \dots + \lfloor \alpha_{rn} \rfloor x_n \le \beta_r$$

Risulta

$$\boxed{x_r + \lfloor \alpha_{r,m+1} \rfloor x_{m+1} + \dots + \lfloor \alpha_{rn} \rfloor x_n \le \lfloor \beta_r \rfloor}$$

taglio di Gomory in forma intera.

Il taglio viene aggiunto al RL che viene quindi risolto nuovamente. Il taglio dovrà essere reso standard con l'aggiunta di una variabile scarto.

La convergenza è lenta e risultano più efficaci i primi tagli.
È vantaggioso aggiungere più tagli contemporaneamente

Esempio

$$\min(x_1 - 2x_2)$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$-4x_1 + 4x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ interi}$$

I passi sono
1. Rilassamento lineare
2. forma standard
3. simplesso

(RL1)
$$\min(x_1 - 2x_2)$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$-4x_1 + 4x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

F.S.
$$\min(x_1 - 2x_2)$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 5$$
$$-4x_1 + 4x_2 + s_2 = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	2	1	1	0	5
s_2	-4	4	0	1	5
	1	-2	0	0	0

$$\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$$

$$R_2' = \frac{R_2}{4}$$
$$R_1' = R_1 - R_2'$$
$$R_3' = R_3 + 2R_2'$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	3	0	1	-1	15

$$R_1' = \frac{R_1}{3}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	3	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
x_2	-1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

$$R'_1 = \frac{R_1}{3}$$
$$R'_2 = R_2 + R'_1$$
$$R'_3 = R_3 + R'_1$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{4}$

Sol RL

$\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$

$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$

parti frazionarie da confrontare

Per costruire il taglio scegliamo la 2ª riga che corrisponde al valore con parte frazionaria maggiore

$$x_2 + \frac{1}{3} s_1 + \frac{1}{6} s_2 = \frac{5}{2}$$

$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$$

$\boxed{x_2 \leq 2}$ 1° taglio

Scriviamo il taglio in forma standard

$$x_2 + s_3 = 2$$

e lo aggiungiamo alla forma standard di (RL)

$$(RL_2)\quad \begin{aligned} &\min\,(x_1 - 2x_2) \\ &2x_1 + x_2 + s_1 = 5 \\ &-4x_1 + 4x_2 + s_2 = 5 \\ &x_2 + s_3 = 2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
s_1	2	1	1	0	0	5
s_2	-4	4	0	1	0	5
s_3	0	1	0	0	1	2
	1	-2	0	0	0	0

Dopo 1 iterazione si ottiene la tabella

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & b \\
\hline
s_1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{13}{4}
\end{array}
$$

Sol. RL

$\left(\frac{3}{4}, 2\right)$

Costruiamo il 2° Taglio

$$x_1 - \frac{1}{4} s_2 + s_3 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor s_2 + s_3 \leq \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor$$

$$\boxed{x_1 - s_2 + s_3 \leq 0} \quad \text{2° Taglio}$$

É possibile scrivere il taglio in funzione solo di x_1 e x_2 sostituendo s_2 e s_3.

Dai vincoli standard:

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + s_2 = 5 \\ x_2 + s_3 = 2 \end{cases}$$ ricaviamo s_2 e s_3 rispettivamente

$$\begin{cases} s_2 = 5 + 4x_1 - 4x_2 \\ s_3 = 2 - x_2 \end{cases}$$ sostituendo nel 2° taglio

$x_1 - s_2 + s_3 \leq 0$ si ottiene $\boxed{-x_1 + x_2 - 1 \leq 0}$ 2° taglio

É utile scrivere il taglio in funzione delle variabili iniziali per mantenere la forma canonica della forma standard.

Si aggiunge ~~così~~ una variabile scarto s_4 e $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ formeranno la nuova base.

Si risolve il nuovo problema PL

$$\min\,(x_1 - 2x_2)$$

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 5$$

$$-4x_1 + 4x_2 + s_2 = 5$$

$$(RL_3)\quad \begin{aligned} x_2 + s_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + s_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

La tabella finale è

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_1	0	0	1	0	-3	2	1
s_2	0	0	0	1	0	-4	1
x_1	1	0	0	0	1	-1	1
x_2	0	1	0	0	0	1	2
	0	0	0	0	1	0	3

Sol ottima di (RL_3) $(1,2)$ è anche sol di (PLI)

valore ottimo $= -3$

TAGLIO FRAZIONARIO

Dalla tabella

	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	b
x_1	1		0				
$\vdots$							
x_r		1		$\alpha_{r\,m+1}$		α_{rn}	β_r
$\vdots$							
x_m	0		1				
	0		0	$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_n$	$-z^{ott}$

β_r frazionario

$$x_r + \alpha_{r\,m+1} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{rn} x_n = \beta_r \qquad (1)$$

$$x_r + \lfloor \alpha_{r\,m+1} \rfloor x_{m+1} + \cdots + \lfloor \alpha_{rn} \rfloor x_n \leq \lfloor \beta_r \rfloor \qquad (2)$$

Costruiamo il taglio frazionario, facendo (1) - (2)

$$\left(\alpha_{r\,m+1} - \lfloor \alpha_{r\,m+1} \rfloor\right) x_{m+1} + \cdots + \left(\alpha_{rn} - \lfloor \alpha_{rn} \rfloor\right) x_n \geq \beta_r - \lfloor \beta_r \rfloor$$

Questo è il taglio da aggiungere al rilassamento lineare. Per standardizzarlo, inseriamo una variabile surplus

$$\left(\alpha_{r\,m+1} - \lfloor \alpha_{r\,m+1} \rfloor\right) x_{m+1} + \cdots + \left(\alpha_{rn} - \lfloor \alpha_{rn} \rfloor\right) x_n - s_1 = \beta_r - \lfloor \beta_r \rfloor$$

Per mantenere la forma canonica, moltiplichiamo per -1

$$\left(\lfloor \alpha_{r,m+1} \rfloor - \alpha_{r,m+1}\right) x_{m+1} + \dots + \left(\lfloor \alpha_{rn} \rfloor - \alpha_{rn}\right) x_n + s_1 = \underbrace{\lfloor \beta_r \rfloor - \beta_r}_{<0}$$

L'inserimento del taglio genera un termine noto negativo.
Si risolve il nuovo RL adottando il metodo del simplesso duale.

Esempio

$$\min(x_1 - 2x_2)$$
$$(PLI)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -4x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ interi} \end{aligned}$$

$$(RL_1)\quad \begin{aligned} &\min(x_1 - 2x_2) \\ &2x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-4x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

FS. $\min(x_1 - 2x_2)$

$$(RL_1)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 5 \\ -4x_1 + 4x_2 + s_2 &= 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabella finale del (RL_1) è

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{4}$

$$x^*_{RL_1} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$$

Costruiamo il taglio frazionario

(1) $\quad x_2 + \frac{1}{3} s_1 + \frac{1}{6} s_2 = \frac{5}{2}$

(2) $\quad x_2 + \lfloor \frac{1}{3} \rfloor s_1 + \lfloor \frac{1}{6} \rfloor s_2 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor$

(1) $-$ (2)

$$\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right) s_1 + \left(\frac{1}{6} - \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor\right) s_2 \geq \frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$$

$$\boxed{\frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{6}S_2 \geq \frac{1}{2}}$$ 1° Taglio

Sostituendo S_1 e S_2 si può scrivere il taglio in funzione di x_1 e x_2

$S_1 = 5 - 2x_1 - x_2$

$S_2 = 5 + 4x_1 + 4x_2$

Rendiamo standard il taglio, ottenendo

$$\frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{6}S_2 \geq \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{6}S_2 - S_3 = \frac{1}{2} \longrightarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{3}S_1 - \frac{1}{6}S_2 + S_3 = -\frac{1}{2}}$$ riga da aggiungere alla tabella finale di (RL_1)

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{4}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{2}$
S_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{15}{4}$

stessi coefficienti della tabella finale di (RL_1)

questa è la tabella di (RL_2)

stessi costi ridotti e stesso valore f.o. della tabella finale di (RL_1)

Si procede con il metodo del simplesso duale

esce dalla base S_3 perché corrisponde a $-\frac{1}{2}$

entra in base: $\min\left\{ \frac{\frac{1}{3}}{\left|-\frac{1}{3}\right|}, \frac{\frac{5}{12}}{\left|-\frac{1}{6}\right|} \right\} = \min\left\{1, \frac{5}{12}\cdot 6\right\} = 1$

$R'_3 = -3R_3$

$R'_1 = R_1 - \frac{1}{3}R'_3$

$R'_2 = R_2 - \frac{1}{3}R'_3$

$R'_4 = R_4 - \frac{1}{3}R'_3$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
x_2	0	1	0	0	1	2
S_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$

Sol di (RL_2)

$\left(\frac{3}{4}, 2\right)$

x_2				0	1	2	
s_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{13}{4}$	

$\left(\frac{7}{4}, 2\right)$

Costruiamo il 2° taglio

$$x_1 - \frac{1}{4} s_2 + s_3 = \frac{3}{4}$$

$$-\left(x_1 + \underbrace{\left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor}_{=-1} s_2 + s_3 \le \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor \right)$$

$$\left(-\frac{1}{4} + 1\right) s_2 \ge \frac{3}{4} \qquad \boxed{\frac{3}{4} s_2 \ge \frac{3}{4}} \quad 2° \text{ taglio}$$

In forma standard

$$\boxed{-\frac{3}{4} s_2 + s_4 = -\frac{3}{4}}$$

riga da aggiungere alla tabella finale di (RL_2)

Scriviamo la tabella di (RL_3)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$
x_2	0	1	0	0	1	0	2
s_1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-3	0	$\frac{3}{2}$
$\leftarrow s_4$	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{13}{4}$

Si procede con il simplesso duale

Si ottiene la tabella finale

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
x_1	1	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	0	1	0	0	1	0	2
s_1	0	0	1	0	-3	$\frac{2}{3}$	1
s_2	0	0	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	1

Sol (RL_3)

$(1, 2)$

Valore ottimo f.o. -3

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & & & & & & 3 & \\
S_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3
\end{array}
$$

Valore ottimo f.o.: 3

Lezione del 1 dicembre 2022

giovedì 1 dicembre 2022 13:01

autovalutazione_11_2022

ANNO ACCADEMICO 2022-2023

Prova di autovalutazione del corso di

Ottimizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Informatica

01-12-2022

Esercizio 1

Indicare quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- ☐ *a)* Un poliedro è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari.
- ☐ *b)* Esistono poliedri che hanno infiniti vertici.
- ☐ *c)* Dato un poliedro $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, una soluzione di base ha la forma $(B^{-1}b, 0)$.
- ☐ *d)* Il poliedro $P = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ è in forma standard.
- *e)* Se si commette un errore nello scegliere la riga pivot, la soluzione nella tabella successiva ☐ sarà non di base ☐ peggiorerà il valore della funzione obiettivo ☐ sarà non ammissibile ☐ sarà degenere
- *f)* Se si commette un errore nello scegliere la colonna pivot, la soluzione nella tabella successiva ☐ sarà non di base ☐ peggiorerà il valore della funzione obiettivo ☐ sarà non ammissibile ☐ sarà degenere
- ☐ *g)* Il costo ridotto fornisce una stima della variazione del valore della funzione obiettivo quando si cambia il termine noto del vincolo.
- ☐ *h)* Se si incrementa il termine noto di un vincolo di tipo $\geq$ in un problema di minimizzazione, il valore ottimo della funzione obiettivo aumenta o rimane lo stesso.
- ☐ *i)* Alla fine della I fase del metodo del simplesso in due fasi, la funzione obiettivo della I fase deve essere zero se il problema è ammissibile.

Esercizio 2

Sia data la tabella del simplesso relativa ad un problema di programmazione lineare di minimizzazione:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	-1	1	0	0	a_1	0	1
x_4	-1	0	0	1	-2	1	2
x_3	a_2	0	1	0	1	1	d
	r_1	0	0	0	r_5	r_6	10

Dire sotto quali condizioni su $a_1, a_2, d, r_1, r_5, r_6$ sono vere le seguenti affermazioni:

(1) la soluzione corrente è ottima,
(2) la soluzione corrente ottima è unica,
(3) la soluzione di base corrente non è ammissibile,
(4) la soluzione di base corrente è degenere,

(5) la soluzione di base corrente è ammissibile ed il problema non è limitato.

Esercizio 3

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
&\max(5x_1 + 12x_2 + 4x_3)\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10\\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8\\
&x_i \geq 0, i = 1, \dots, 3.
\end{aligned}$$

Calcolare la soluzione ottima del problema proposto e del suo duale, utilizzando la teoria della dualità e sapendo che x_1 e x_2 sono positive in una soluzione ottima.

Esercizio 4

Si consideri il problema

$$\begin{aligned}
&\max(4x_1 + x_2)\\
&3x_1 + 2x_3 \leq 6\\
&6x_1 + 3x_2 \leq 3\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

e l'ultima riga della tabella finale del simplesso

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	2	0	1	20/3

nella quale x_3 e x_4 sono le variabili scarto introdotte per rendere standard il problema. Usando la dualità provare che il risultato è sbagliato!

Esercizio 5

La Energy realizza un nuovo tipo di integratore alimentare, attraverso la miscelazione di quattro componenti di base. La composizione e il costo dei quattro componenti sono riportati nella tabella di seguito. Il nuovo integratore richiede che: per ogni 100 g di prodotto siano presenti almeno 20 g di carboidrati, 12 di magnesio e 5 di grassi. La percentuale di utilizzo di ogni componente deve essere non inferiore al 65%. Formulare il corrispondente problema di programmazione lineare.

Sostanze	Carboidrati (g)	Magnesio(g)	Grassi(g)	Costo (euro)
A	17	12	3	0.10
B	15	10	2	0.08
C	15	11	2.5	0.07
D	14	8	6	0.05

$x_1 \geq 0.65$ del totale

$= 0.65\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4\}$

Esercizio 6

Risolvere il problema di programmazione lineare applicando il metodo del simplesso duale:

$$\min(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4)$$
$$x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4.$$

Esercizio 7

Sia dato un problema di programmazione lineare la cui regione ammissibile è non vuota e non contiene rette. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- ☐ *a)* Se il problema non ha soluzione ottima, allora la regione ammissibile è sicuramente illimitata.
- ☐ *b)* Se la regione ammissibile è illimitata il problema sicuramente non ha soluzione.
- ☐ *c)* Se il problema non ha soluzione ottima, allora la regione ammissibile necessariamente non ha vertici.
- ☐ *d)* La regione ammissibile del problema ha sicuramente vertici.

Esercizio 8

Sia dato un poliedro P in forma standard, definito cioè dal sistema $Ax = b, x \geq 0$ e dove il numero delle equazioni è m e il numero delle variabili è n. Si supponga che il rango della matrice A sia m e sia B una matrice di base di A. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- ☐ *a)* B è una matrice di base ammissibile se B ha tutti gli elementi positivi.
- ☐ *b)* Una soluzione di base è ammissibile se $B^{-1}b \geq 0$.
- ☐ *c)* Il vettore costituito dai sottovettori $x_B = B^T b$ e $x_N = 0$ è un vertice di P.
- ☐ *d)* Il vettore costituito dai sottovettori $x_B = B^{-1}b$ e $x_N = 0$ è sicuramente un vertice di P.

Metodo del Branch and Bound

Si tratta di uno dei più noti metodi per risolvere problemi di PLI. Si basa sull'idea di partizionare la regione ammissibile del problema rilassato (problema in cui sono stati eliminati i vincoli che rendono difficile la risoluzione del problema).

Consideriamo

$$(PLI) \quad \min c^T x \quad \left.\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ x \text{ intero} \end{array}\right\} X \text{ regione ammissibile}$$

Partizioniamo $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$

Si risolve il problema sui sottoinsiemi

$$(PLI_j) \quad \begin{array}{l} \min c^T x \\ x \in X_j \end{array} \qquad \forall j$$

Il valore ottimo della f.o. di (PLI) sarà

$z^{ott} = \min_j z_j^{ott}$, dove z_j^{ott} è il valore ottimo della f.o. dei problemi (PLI_j)

Si precisa che si tratta di un partizionamento ricorsivo: ogni insieme X_j si suddivide in altri sottoinsiemi.
e si risolve il $\min c^T x$ su ogni sottoinsieme.

Il metodo in realtà è di enumerazione implicita nel senso che individua i sottoinsiemi della partizione nei quali non si trovano soluzioni intere.
Non andranno quindi risolti i problemi su questi

sottoinsiemi.

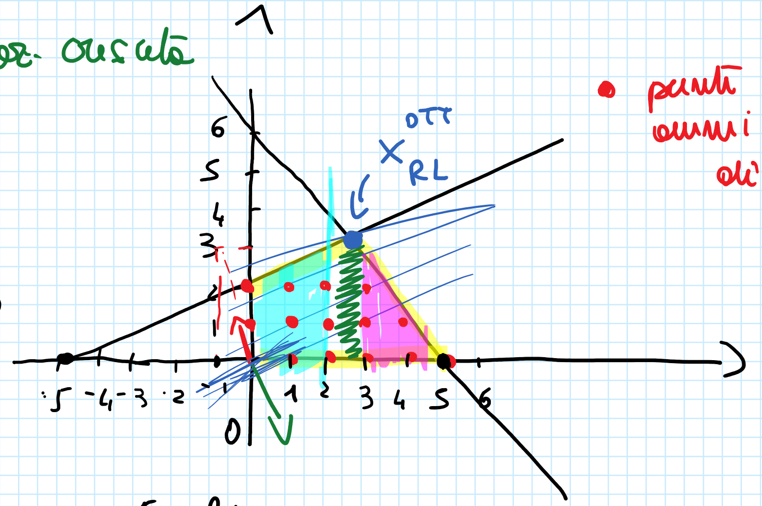
Esempio $(1,-3)$ direz. crescita

$$\min(x_1 - 3x_2)$$

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

(PLI) $$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere}$$



• punti ammissibili di PLI

Consideriamo il rilassamento lineare e risolviamo

$$\min(x_1 - 3x_2)$$

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

(RL) $$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

↘ direzione di crescita

↖ direzione di min

$$x_{RL}^{OTT} = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

La componente frazionaria $\frac{5}{2}$ è compresa tra 2 e 3.
La regione ammissibile del problema (RL) viene divisa in 3 parti. In 2 troviamo punti intero e ~~si~~ si risolve il problema $\min(x_1 - 3x_2)$ su questi sottoinsiemi. Nella ~~reg~~ striscia con $2 < x < 3$ non ci sono punti interi, quindi non si indaga su questo sottoinsieme.

Il metodo si basa su due procedure

- bounding: fornisce mediante la risoluzione del problema rilassato un lower bound (se il prob è di minimo) per il valore ottimo intero
- branching: data la soluzione del rilassamento determina la partizione della regione ammissibile.

Consideriamo

(PLI)
$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A x \geq b \\ & x \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

Risolviamo il rilassamento lineare

(RL)
$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A x \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Se troviamo una sol intera, essa è anche sol. di (PLI)

Diversamente avrà almeno una componente frazionaria

Sia x^0_h la componente frazionaria della sol x^0 di (RL)

usiamo x^0_h per determinare il branching e costruiamo due problemi

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A x \geq b \\ & x_h \leq \lfloor x^0_h \rfloor \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & A x \geq b \\ & x_h \geq \lceil x^0_h \rceil \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

La componente x^0_h è detta variabile di branch.

Nel caso di più componenti frazionarie si può scegliere

① la componente con parte frazionaria maggiore

② la componente con coeff. maggiore nella f.o.; in tal modo è più probabile non trovare sol. nel sottoproblema con $x_h \geq \lceil x^0_h \rceil$, mentre una buona sol. intera si trova nel sottoproblema con $x_h \leq \lfloor x^0_h \rfloor$

Si tiene traccia dei problemi risolti tramite un albero che parte dal problema rilassato. Ogni nodo detto padre genera dei figli

Se risolviamo probl. di min. il padre dà un lower bound migliore dei suoi figli.

Il branching è binario (si generano 2 sottoproblemi) se usiamo il rilassamento lineare.

Ci sono problemi per i quali non si adotta il rilassamento lineare e il branching può risultare ennario (si generano n sottoproblemi)

L'efficienza del metodo risiede nella possibilità di non risolvere tutti i sottoproblemi. Esistono tre criteri di chiusura dei nodi (non si fa branching su quel nodo, si arresta la ricerca) oltre anche criteri di potatura

① chiusura per inammissibilità: il vincolo di branch è incompatibile con gli altri vincoli

② chiusura per soluzione intera: se si trova una soluzione intera il nodo si chiude

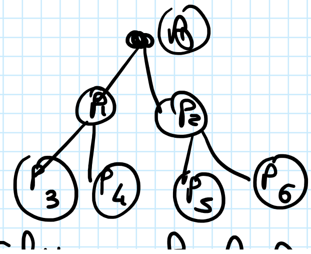
③ chiusura per bounding si risolve il rilassamento lineare di un sottoproblema se la soluzione ottima dà un valore della f.o. z^{OTT}_{RL} peggiore del valore ottimo corrente $z^{OTT}_{RL} \geq z^{OTT}_{corrente}$, il nodo si può chiudere.

<u>Strategie di visita dei nodi</u>

① visita in profondità

Si risolve sempre il primo dei figli. quando si raggiunge la chiusura di un nodo si risale sull'albero e si risolve il nodo aperto.

Vantaggi: minimizziamo il numero dei nodi aperti e i requisiti di memoria.



Se si arresta prima il metodo

Se si arresta prima il metodo si trova una buona sol. intera

risolviamo P_0, P_1, P_3
P_4, P_2, P_5, P_6

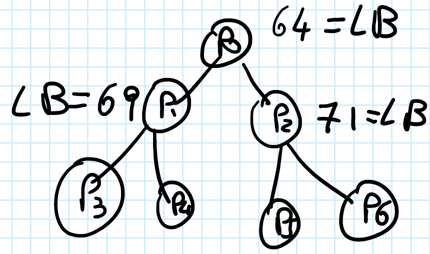
svantaggi: si risolvono molti problemi

② visita per bound migliore: ogni volta si esplora il problema con valore ottimo minore.

vantaggi: si esplorano meno nodi (si ~~...~~ risolvono meno problemi,

svantaggi: ~~...~~ molti nodi aperti contemporaneamente. elevati requisiti di memoria, se si arresta prima il metodo può accadere che non si sia trovata ancora la sol intera.

È possibile adottare una strategia di visita combinazione di entrambe. Si fissa il numero max di nodi aperti contemporaneamente. Entro questo limite si usa il bound migliore, dopo si procede con la visita in profondità.



OSS. I rilassamenti danno lower bound al valore ottimo di (PLI).
La f.o. calcolata in una sol. intera dà invece un upper bound al valore ottimo

Si risolve P_0 con RL si risolvono sia P_1 che P_2, si confronta il valore ottimo di P_1 con quello di P_2.
Si fa branching sul nodo P_1 che ~~...~~ dà valore ottimo $69 < 71$

Esempio (best first)

$\min (x_1 - 3x_2)$

$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$

(RL)

$\min (x_1 - 3x_2)$

$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$

(PLI) $6x_1 + 5x_2 \leq 30$

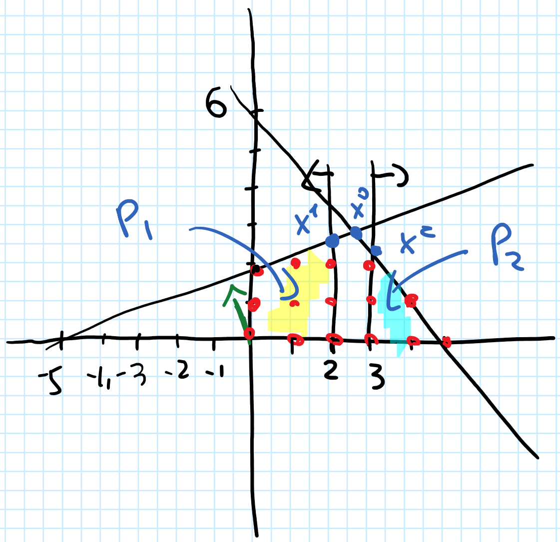
$x_1, x_2 \geq 0$

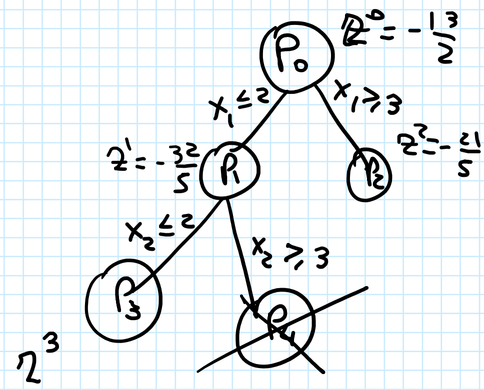
inter

'' (P_0) $6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x^0 = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ $z^0 = -\frac{13}{2}$





Da $x^0 = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ nascono due sottoproblemi

P_1

$\min (x_1 - 3x_2)$

$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

P_2

$\min (x_1 - 3x_2)$

$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x^1 = \left(2, \frac{14}{5}\right)$ $z^1 = -\frac{32}{5}$

$x^2 = \left(3, \frac{12}{5}\right)$

$z^2 = -\frac{21}{5}$

$z^1 < z^2 \Rightarrow$ branch su P_1. P_2 resta aperto

Da P_1 generiamo P_3 e P_4

P_3

$\min (x_1 - 3x_2)$

$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 \leq 2$

$x_2 \leq \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

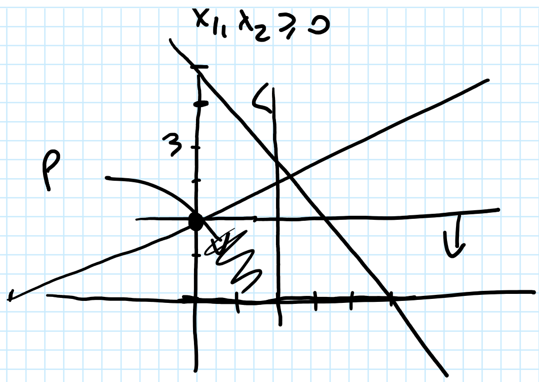
P_4

$\min (x_1 - 3x_2)$

$x_1 \leq 2$

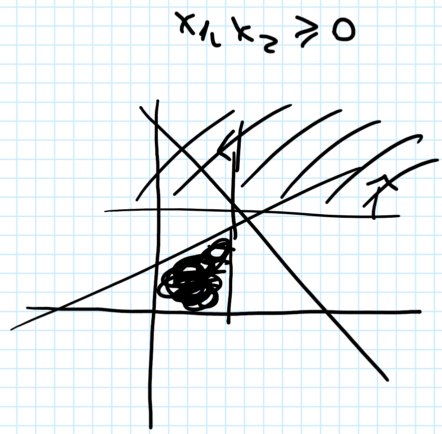
$x_2 \geq \left\lceil \frac{14}{5} \right\rceil = 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x^3 = (0,2)$ $\quad z^3 = -6 = LB = UB$

$z^2 > z^3 \Rightarrow P_2$ si chiude per il 2° criterio di potatura



+ il nodo P_L si chiude per 1° criterio di potatura

Ancora sul Branch and Bound

Ogni volta che si vuole applicare il metodo occorre specificare

B&B
- come calcolare il lower bound
- come calcolare l'upper bound
- come fare branching
- come visitare l'albero

Nel caso di un problema del tipo

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \text{ intero}$$

in cui si elimina il vincolo di interezza

B&B
- lower bound: si ottiene con i rilassamenti continui
- upper bound si ottiene calcolando la f.o. nella 1ª sol. intera disponibile
- branch binario ($x_h \leq \lfloor x_h^0 \rfloor$; $x_h \geq \lceil x_h^0 \rceil$)

Problemi di max

Consideriamo

$$\max c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \text{ intero}$$

Upper bound: i rilassamenti (continui) lineari danno upper bound per il valore ottimo della f.o.

lower bound: si ottiene calcolando la f.o. in una sol intera

Per quanto riguarda la chiusura per bounding il criterio diventa: se la soluzione del rilassamento lineare dà un upper bound < del valore ottimo corrente (che è il lower bound), il nodo si chiude

Se visitiamo l'albero con il best first, risolveremo prima il problema con upper bound maggiore.

Forme di rilassamento

Per determinare i lower bound e gli upper bound, si ricorre ai rilassamenti del problema PLI.

Esistono alcune forme di rilassamento:

1. eliminazione dei vincoli
2. funzione obiettivo modificata
3. rilassamento lagrangiano

Rilassamento per eliminazione dei vincoli

$$(P_1)\quad \min f(x) \qquad x \in X$$

Sia $Y \supseteq X$ un insieme ottenuto eliminando uno o più vincoli di X. Supponiamo che sia più facile risolvere

$$(P_2)\quad \min f(x) \qquad x \in Y$$

Allora $\min_{x \in Y} f(x) \leq \min_{x \in X} f(x)$, cioè P_2 dà un lower bound al valore ottimo di (P_1). Il più conosciuto rilassamento di questo tipo è il rilassamento lineare, che elimina i vincoli di interezza

2) Funzione obiettivo modificata

$$\min f(x) \qquad x \in X$$

e sia nota una funzione $\varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in X$

Se si risolve $\min_{x \in X} \varphi(x)$ si ottiene un lower bound

3) Rilassamento lagrangiano.

È un misto di eliminazioni dei vincoli e modifica della f.o.

Consideriamo

$$\min_{x \in X} f(x) \qquad \text{dove } X = \{ x \in Y : g_i(x) \leq 0 \ \ i=1,..,m \}$$

con Y insieme dei vincoli facili
e $g_i(x) \leq 0 \ \forall i$ sono i vincoli difficili

Si costruisce la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \qquad , \lambda \geq 0$$

$\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_m)$ ha una componente per ogni vincolo g_i
λ_i = moltiplicatore di Lagrange.

Si risolve il problema:

$$\min_{x \in Y} \mathcal{L}(x, \lambda) \qquad \text{con } \lambda \geq 0 \text{ parametro}$$

Al variare di λ si ottengono dei lower bound
perché $\mathcal{L}(x, \lambda) \leq f(x) \quad \forall x \in Y$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{g_i(x)}_{\leq 0} \leq f(x)$$

Il rilassamento lagrangiano riprende il rilassamento con f.o. modificata. Inoltre elimina i vincoli $g_i(x)$.

Per determinare il miglior lower bound si risolve il problema

$$\max_{\lambda \geq 0} \left(\min_{x \in Y} \mathcal{L}(x, \lambda) \right)$$

Esempio (B & B, in profondità)

$$\max \ (-1.7 x_1 + 0.6 x_2)$$

$$(PLI) \quad \begin{aligned} -5x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\ -5x_1 + 6x_2 &\leq 30 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ interi} \end{aligned}$$

Adottiamo il rilassamento lineare e risolviamo graficamente i vari sottoproblemi

$\max(-1.7\, x_1 + 0.6\, x_2)$

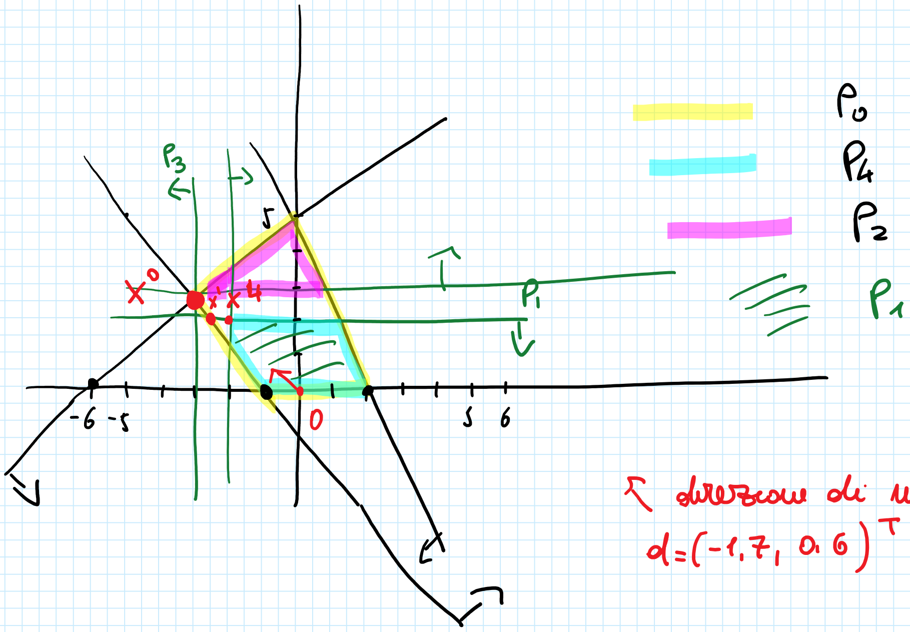
(P_0)

$-5x_1 - 4x_2 \le 5 \longrightarrow (-1,0) \quad (-5,5)$

$-5x_1 + 6x_2 \le 30 \longrightarrow (-6,0) \quad (0,5)$

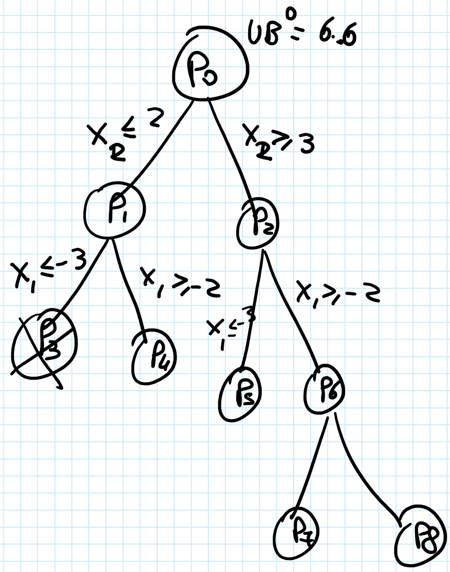
$5x_1 + 2x_2 \le 10 \longrightarrow (2,0) \quad (0,5)$

$x_2 \geq 0$



↖ direzione di max

$d = (-1{,}7,\ 0.6)^T$



$x^0 = \left(-3, \frac{5}{2}\right) \qquad UB^0 = z^0 = 6.6$

Procedendo in profondità risolviamo P_1

(P_1) $\max(1.7\, x_1 + 0.6\, x_2)$

$-5x_1 - 4x_2 \le 5$

$-5x_1 + 6x_2 \le 30$

$5x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_2 \geq 0$

$x_2 \le 2$

$x^1 = \left(-\frac{13}{5}, 2\right) \quad UB^1 = 5{,}62$

P_3 $\max(\qquad)$

$x_1 \le -3$

vincolo di branch incompatibile con gli altri P_3 è inammissibile e si chiude

Si risolve P_4

max

$x_1 \geq -2$

$x^4 = (-2, 2)$ $UB^4 = LB^4 = 4.6$

Risolviamo ora P_2

P_2 max ( )

$x_2 \geq 3$

$x^2 = \left(-\frac{12}{5}, 3\right)$ $UB^2 = 5,88$

$UB^2 >$ ottimo corrente $\Rightarrow$ si fa branching su P_2

Poi si risolve il primo dei suoi figli P_5, poi P_6
Branch su P_6, nascono P_7 e P_8.
Sol ottima in P_7 $x^7 = (-2, 3)$ $UB^7 = 5.20$.

Problema dello zaino

Sia $E = \{1, 2, .., n\}$ un insieme di oggetti, dei quali è noto il profitto p_i $\forall i \in E$ e il peso w_i, $\forall i \in E$. (p_i e w_i interi positivi). È poi nota la capacità c dello zaino (c intero positivo). Si vogliono selezionare gli oggetti da inserire nello zaino in modo da max il profitto, rispettando la capacità dello zaino.

Formulazione matematica

Variabile $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ è inserito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1..n$$

Il problema può essere esteso al caso di più contenitori, di capacità differenti.

Risoluzione del problema dello zaino
Algoritmo euristico (Dantzig)

Si costruisce la sol. inserendo per primi nello zaino gli oggetti più promettenti, secondo un criterio euristico.

Si possono utilizzare 3 criteri

1. profitto decrescente (oggetti di maggior valore)
2. peso crescente (molti oggetti)
3. rapporto $\frac{\text{valore}}{\text{peso}}$ decrescente (oggetti di maggior valore e minor peso)

3 è più efficiente.

Inizialmente l'insieme degli oggetti nello zaino è vuoto. Si selezionano gli oggetti secondo l'ordine euristico e vengono inseriti se la capacità lo consente, diversamente l'oggetto si scarta e si esamina il successivo. La ricerca termina quando tutti gli oggetti vengono esaminati o la capacità è nulla.

Esempio

$$\max(6x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 7$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$$

	1	2	3
profitti	6	5	4
pesi	4	3	2
$\frac{\text{profitti}}{\text{pesi}}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{2}$

l'ordine di inserimento suggerito dal criterio è: $\frac{4}{2} > \frac{5}{3} > \frac{6}{4}$

oggetto 3, oggetto 2, oggetto 1

inseriamo l'oggetto 3 $\longrightarrow$ $x_3 = 1$ $\quad k_3 = 2$

inseriamo l'oggetto 2 $\longrightarrow$ $x_2 = 1$ $\quad k_2 = 3$

non possiamo inserire l'oggetto 1 $\longrightarrow$ $x_1 = 0$

non possiamo inserire
l'oggetto 1 $\rightarrow$ $x_1 = 0$

La soluzione $(0,1,1)$ con profitto $= p_2 + p_3 = 9$

Metodo esatto : Branch and Bound

Occorre definire :
① come calcolare l'UB
② come calcolare LB
③ come fare branching

Per l'UB utilizziamo il rilassamento lineare

$$\max \sum_i p_i x_i$$
$$\sum_i w_i x_i \le c$$
$$x_i \in [0,1]$$

Non conviene risolvere i rilassamenti con il simplesso.
Si utilizza invece l'idea dell'algoritmo euristico.
Ordiniamo gli oggetti secondo il rapporto valore/peso decrescente e introduciamo gli oggetti secondo questo ordine.
Supponiamo di poter inserire gli oggetti $1, 2, .., h$ e sia $h+1$ l'oggetto che eccede la capacità.
Inseriamo la porzione di $h+1$ che satura la capacità dello zaino.
La soluzione è:

$$\underbrace{x_1 = x_2 = \cdots = x_h = 1}_{\text{inseriamo per intero } h \text{ oggetti}} \qquad \underbrace{x_{h+1} = \frac{c - \sum_{i=1}^{h} w_i}{w_{h+1}}}_{\text{parte di } h+1 \text{ che può essere inserita.}} \in [0,1]$$

Valore ottimo : $p_1 + p_2 + \cdots + p_h + p_{h+1} \dfrac{c - \sum_{i=1}^{h} w_i}{w_{h+1}} = UB$

x_{h+1} è detta variabile critica e sarà la variabile di branch.

Vincoli di branch sono

$$x_{h+1} \le \underbrace{\left\lfloor \frac{c - \sum_{i=1}^{h} w_i}{w_{h+1}} \right\rfloor}_{= 0} \qquad x_{h+1} \ge \underbrace{\left\lceil \frac{c - \sum_{i=1}^{h} w_i}{w_{h+1}} \right\rceil}_{= 1}$$

branch $\begin{cases} x_{h+1} \le 0 \\ x_{h+1} \ge 1 \end{cases}$ relax $\begin{cases} x_{h+1} \ge 0 \\ x_{h+1} \le 1 \end{cases}$ $\quad x_{h+1} = 0 \quad x_{h+1} = 1$

In conclusione, i vincoli di branch sono

$$x_{h+1} = 0 \,, \quad x_{h+1} = 1$$

Un LB si ottiene calcolando la f.o. nella sol. ammissibile intera

$$x_1 = \dots = x_h = 1 \qquad x_{h+1} = \dots = x_n = 0$$

Tipicamente si usa il best first.

Esempio

$$\max \,(10x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5)$$
$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 \le 15$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

Rapporti $\frac{\text{valore}}{\text{peso}}$ $\quad \frac{10}{7} \quad \frac{14}{6} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{6}{2}$

Risulta $\quad \frac{6}{2} > \frac{14}{6} > \frac{5}{3} > \frac{8}{5} > \frac{10}{7}$

Scambiamo e rinominiamo x_5 con x_1

Risolviamo

$$\max \,(6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \le 15$$
$$(P_0) \qquad \cancel{x_i \in \{0,1\}}$$

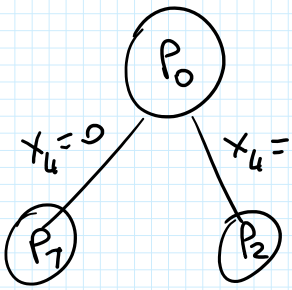
(P_0) $\quad \cancel{x_i \in \{0,1\}}$

$x_i \in [0,1]$

$x^0 = \left(1, 1, 1, \frac{15-11}{5}, 0\right) \qquad UB^0 \cong 31.4$

$\tilde{x} = (1,1,1,0,0)$ sol ammissibile intera

LB^0 = calcolo la f.o. in $\tilde{x}$ = 29



Esempio (Zaino)

$$\max (10x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5)$$

(PLI) $7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 \le 15$

$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 5$

Ordiniamo gli oggetti secondo il rapporto $\frac{\text{valore}}{\text{peso}}$ decrescente e rinominiamo le variabili

(PLI) $\max (6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \le 15$

$x_i \in \{0,1\}$

Si passa al rilassamento lineare

$\max (6x_1 + 14x_2 + \dots + 10x_5)$

(P_0) $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \le 15$

$x_i \in [0,1]$

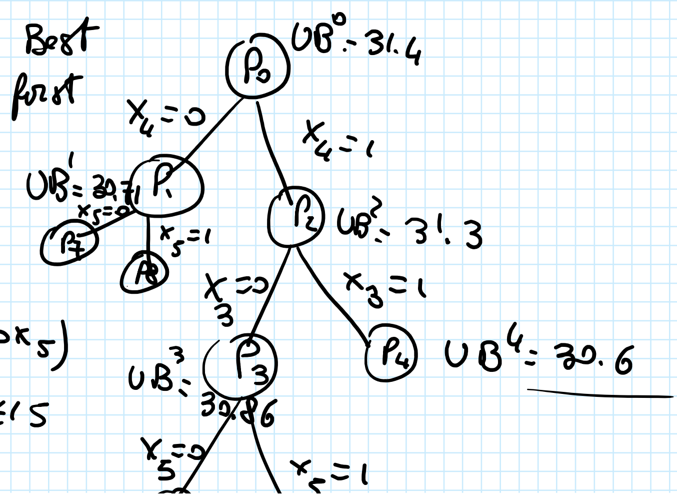
Inseriamo gli oggetti secondo l'ordine dell'indice

$x^0 = (1, 1, 1, \frac{15-11}{5}, 0) \qquad UB^0 \simeq 31.4$

Sol ammissibile intera $\bar{x} = (1,1,1,0,0) \quad LB = 25$

$x^0 = (1,1,1,\frac{4}{5},0)$

x_4 variabile di branch



(P_1) $\max (6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$

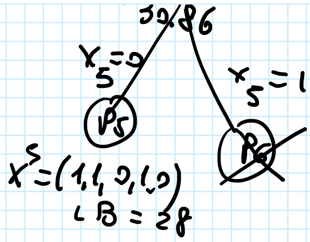
$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \le 15$

$x_4 = 0$

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$

$x_4 = 0$

$x_i \in [0,1]$



$$x^1 = \left(1,1,1,0,\frac{15-11}{7}\right) = \left(1,1,1,0,\frac{4}{7}\right)$$

$$UB^1 \simeq 30.71 = 6\cdot 1 + 14\cdot 1 + 5\cdot 1 + 8\cdot 0 + 10\cdot \frac{4}{7}$$

(P_2) $\max(6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$

$x_4 = 1$ ⟵ si inserisce per primo l'oggetto 4, poi si ricomincia dall'1

$x_i \in [0,1]$

$$x^2 = \left(1,1,\frac{15-13}{3},1,0\right) = \left(1,1,\frac{2}{3},1,0\right)$$

$$UB^2 = 6 + 14 + 5\cdot\frac{2}{3} + 8 = 31.3$$

$UB^1 < UB^2 \Rightarrow$ branch su P_2

(P_3) $\max(6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$

$x_4 = 1$ ← vincolo del padre P_2

$x_3 = 0$ ← vincolo di P_3

$x_i \in [0,1]$

$$x^3 = \left(1,1,0,1,\frac{15-13}{7}\right) = \left(1,1,0,1,\frac{2}{7}\right)$$

$$UB^3 = 6 + 14 + 8 + 10\cdot\frac{2}{7} = 30.86$$

(P_4) $\max(\qquad)$

≤ 15

$$\leq 15$$
$$x_4 = 1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_i \in [0,1]$$

$$x^4 = \left(1, \frac{15-10}{6}, 1, 1, 0\right) = \left(1, \frac{5}{6}, 1, 1, 0\right)$$

$$UB^4 = 30.\bar{6}$$

$UB^3 > UB^1$; $UB^3 > UB^4$.

Restano aperte P_1 e P_4. Ramifichiamo P_3

$$\max(6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$$

(P_5)

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$$

$x_4 = 1$ ← vincolo del padre P_2

$x_3 = 0$ ← vincolo di P_3

$x_5 = 0$ ← vincolo P_5

$$x_i \in [0,1]$$

$x^5 = (1, 1, 0, 1, 0)$ $\quad UB^5 = LB^5 = 6 + 14 + 8 = 28$

(UB^5:) valore trovato con rilassamento lineare

(LB^5:) valore trovato con una sol. intera

(P_6)

$$\max(6x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 10x_5)$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$$

$x_4 = 1$ ← vincolo del padre P_2

$x_3 = 0$ ← vincolo di P_3

$x_5 = 1$ ← vincolo P_6

$x_i \in [0,1]$

$x^6 = (1, \frac{15-14}{6}, 0, 1, 1)$ $UB^6 = 26.3 < 28 =$ ottimo corrente

P_6 si chiude per bounding.

$UB^1 > UB^4$ Si ramifica P^1

P_7 max ( )

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$

$x_4 = 0$ ← vincolo del padre P_1

$x_5 = 0$ ← vincolo P_7

$x_i \in [0,1]$

$x^7 = (1, 1, 1, 0, 0)$ $UB^7 = 6 + 14 + 5 = 25$

Nuova sol. intera che è peggiore di quella corrente

P_8 max ( )

$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 \leq 15$

$x_4 = 0$ ← vincolo di P_1

$x_5 = 1$ ← vincolo di P_8

$x_i \in [0,1]$

$x^8 = (1, 1, 0, 0, 1)$ $UB^8 = LB^8 = 30 > 28 =$ ottimo corrente

Il nuovo ottimo corrente è x^8 con valore 30

Resta ancora il problema P_4 con $UB^4 = 30.6$.

A scendere da P_4, avendo la f.o. coefficienti interi,

si potrebbe ottenere una sol intera con valore del f.o. pari a 30. Avendo già trovato la sol. intera x^8 con valore ottimo 30, non vale la pena indagare sui figli di P_4. Il nodo P_4 si chiude e la sol. ottima è $x^8 = (1,1,0,0,1)$ con valore ottimo 30.

Problema dell'assegnamento

Si tratta di un problema di PLI 0-1. Sono dati due insiemi disgiunti A e B con la stessa cardinalità ($A \cap B \neq \emptyset$, $|A| = |B|$)
Sono dati dei costi agli abbinamenti tra ogni elemento di A e ogni elemento di B. Il problema dell'assegnamento consiste nel assegnare ad ogni elemento di A un elemento di B, in modo che non ci siano elementi non accoppiati, e minimizzare il costo

IPOTESI
- gli insiemi A e B hanno lo stesso numero di elementi
- ad ogni elemento di A è assegnato un solo elemento di B
- ad ogni elemento di B è assegnato un solo elemento di A

OBIETTIVO: determinare l'assegnamento di costo minimo.

Se gli insiemi hanno cardinalità diversa, si introducono dei nodi fittizi con costo nullo per gli abbinamenti con elementi fittizi.

Formulazione matematica
$|A| = |B| = n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'elemento } i \text{ è assegnato all'elemento } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano c_{ij} il costo dell'assegnamento degli elementi i e j

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i$$ ad ogni elemento del primo insieme è associato un solo elemento del secondo insieme

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \forall j$$ ad ogni elemento del secondo insieme è associato un solo elemento del primo insieme

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, \forall j$$

È un caso speciale del problema del Trasporto con domanda = offerta = 1

La matrice dei coeff. del sistema dei vincoli è TU, i termini noti sono interi ⇒ il rilassamento lineare dà una soluzione intera. Si può quindi risolvere il problema

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} \in [0,1] \longrightarrow \text{dai vincoli segue che } x_{ij} \text{ sono } \leq 1$$

quindi al posto di $x_{ij} \in [0,1]$ scriviamo solo $x_{ij} \geq 0$

Se ci sono poche variabili si può adottare il simplesso.
Per problemi di grandi dimensioni si preferisce un algoritmo specifico.

ALGORITMO UNGHERESE

L'algoritmo opera sulla matrice dei costi c_{ij}. Trasforma la matrice iniziale in una serie di matrici equivalenti, fino a quando non si individua un assegnamento di costo nullo. La matrice finale ha solo elementi positivi o nulli, pertanto l'assegnamento ottimo avrà costo nullo.

① Riduzione per righe.

Per ogni riga si calcola l'elemento minimo e si sottrae a tutti gli elementi della riga

si ottiene $c_{ij} = c_{ij} - \min_j c_{ij} \quad \forall i$

Si genera uno zero in ogni riga

② Riduzione per colonna

Per ogni colonna si cerca l'elemento minimo e si sottrae a tutti gli elementi della colonna

$$c_{ij} = c_{ij} - \min_i c_{ij} \quad \forall j$$

Si avrà uno zero in ogni colonna

③ Si cerca quindi un assegnamento completo. Si determina cercando il numero minimo di linee (righe e colonne) che ricoprono tutti gli zeri. Se le linee che ricoprono gli zeri sono pari al numero delle righe della matrice ⇒ assegnamento ottimo.
Se non è così si riduce la matrice ancora una volta

④ Si barrano le righe e le colonne che ricoprono gli zeri.
- si determina l'elemento minimo δ degli elementi non barrati
- si sottrae δ agli elementi non barrati e si aggiunge agli elementi incrocio di una riga e una colonna (barrati due volte)

Si ripetono i passi ③ e ④ fino a quando non si trova l'assegnamento ottimo.
L'assegnamento si trova nelle posizioni che hanno zeri.
Si inizia dalle righe o colonne che hanno un solo zero per costruire l'assegnamento.

ESEMPIO

Una compagnia gestisce i collegamenti navali con alcune isole. L'azienda deve assegnare 5 equipaggi a 5 servizi di linea. Ad ogni assegnamento equipaggio - servizio è associato un costo.

	Servizi				
Equipaggio	1	2	3	4	5
1	10	5	4	3	8
2	6	3	7	4	6
3	4	11	7	4	8
4	8	3	6	7	10
5	9	10	3	4	1

$$\min \left(10x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 8x_{15} + 6x_{21} + 3x_{21} + \dots + 6x_{25} + \dots + x_{55}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1..5$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1..5$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$$

Algoritmo ungherese

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 11 & 7 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riduzioni per riga}} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 7 & 4 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & 7 & 10 \\ 9 & 10 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

riduzioni per colonne

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. Per trovare il ricoprimento minimo si procede come segue

1. Si individua l'assegnamento: 1-3, 2-2, 3-1, 5-5
2. Si etichettano le righe escluse dall'assegnamento, nell'esempio è la riga 4
3. Si etichettano le colonne che hanno degli zeri in corrispondenza delle righe etichettate
4. Si etichettano le righe che sono accoppiate con le colonne etichettate
5. Si barrano le righe non etichettate e le colonne etichettate

aggiungiamo δ   sottraiamo δ

Barriamo righe e colonne per ricoprire gli zeri (ricoprimento minimo)

$$\begin{array}{c|c} & \quad * \\ & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbiamo barrato con 4 linee e la dimensione della matrice è 5. Non abbiamo l'assegnamento completo

δ = 1 = minimo tra gli elementi evidenziati

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 7 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 8 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

1 ⟶ 3
2 ⟶ 4
3 ⟶ 1
4 ⟶ 2
5 ⟶ 5

Assegnamento ottimo

Costo = 4 + 4 + 4 + 3 + 1 = 16

Problema del commesso viaggiatore (TSP - Travelling salesman problem)

Si tratta di un problema di ottimizzazione su grafo.

Si applica a grafi orientati o non orientati.

Sono assegnati dei costi agli archi (o spigoli)

Il problema del TSP consiste nel determinare un ciclo hamiltoniano di costo minimo, si vogliono cioè visitare tutti i nodi del grafo dato, toccandoli una e una sola volta, e minimizzare il costo.

Si lavora su grafi completi, laddove mancassero archi/spigoli si aggiungono con costo $+\infty$.

Si parla di TSP asimmetrico su grafi orientati e simmetrico su grafi non orientati.

TSP asimmetrico

Consideriamo un grafo orientato $G = (N, A)$, ed ogni arco (i,j) associamo un costo c_{ij}.

Variabile $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è nel ciclo hamiltoniano} \\ 0 & \text{diversamente.} \end{cases}$

Formulazione matematica

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i:(i,v)\in A} x_{iv} = 1 \quad \forall v \in N$$ in ogni nodo entra un solo arco

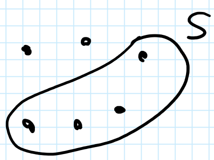
$$\sum_{j:(v,j)\in A} x_{vj} = 1 \quad \forall v \in N$$ da ogni nodo esce un solo arco

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S|-1, \quad \forall S \subseteq N, \ 2 \leq |S| \leq |N|-1$$ vincoli assenza sottocicli

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A$$

Il vincolo sui sottocicli esprime il fatto che per ogni sottoinsieme proprio di N, non è possibile selezionare un numero di archi maggiore della cardinalità di S.

Ex



il numero di archi tra nodi di S deve essere minore di $|S|-1 = 3$

I vincoli sui sottocicli possono anche essere scritti in forma esplicita come:

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \leq |C|-1 \quad \forall \text{ sottociclo } C$$

Questi vincoli risultano più numerosi.

I vincoli sui sottocicli rendono difficile la risoluzione del problema.

Si osserva che se si eliminano i vincoli sui sottocicli, il problema che si ottiene è il problema dell'assegnamento

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i:(i,v)\in A} x_{iv} = 1 \quad \forall v$$

$$\sum_{j:(v,j)\in A} x_{vj} = 1 \quad \forall v$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \longleftarrow \text{ che si sostituisce con } x_{ij} \geq 0$$

Possiamo quindi risolvere questo rilassamento del TSP e ottenere che

- se la soluzione dell'assegnamento è anche un ciclo hamiltoniano allora è soluzione anche del TSP
- se la soluzione dell'assegnamento contiene sottocicli non è ammissibile per il TSP ma fornisce un lower bound.

Supponiamo di risolvere l'assegnamento e trovare un sottociclo $\bar{C}$
Per trovare la sol del TSP, dovremmo allora aggiungere il vincolo per eliminare $\bar{C}$:

$$\sum_{(i,j)\in\bar{C}} x_{ij} \leq |\bar{C}|-1$$

Se ~~si~~ fosse $\bar{C} = 1 \to 2 \to 3 \to 1$

si dovrebbe aggiungere il vincolo $x_{12}+x_{23}+x_{31} \leq 3-1$

L'aggiunta di questo vincolo fa perdere la totale unimodularità della matrice, ciò vuol dire che si dovrà risolvere un ~~[illegible]~~ problema di PLI e non più un problema di PL

Presentiamo ora il Branch and Bound per il TSP

Branch and Bound per il TSP

Occorre individuare
- come determinare un LB (lower bound)
- come determinare un UB (upper bound)
- come fare branching

Possiamo trovare un lower bound risolvendo il rilassamento per eliminazione del vincolo sui sottocicli, cioè risolvendo l'assegnamento.

Se la sol. non ha sottocicli $\Rightarrow$ sol ottima per il TSP

Se la soluzione ha sottocicli, si utilizzano gli archi dei sottocicli per l'operazione di branching.

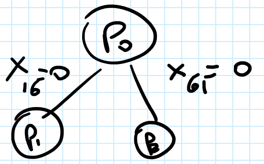
In realtà si opera su un sottociclo per volta.

Si cerca il sottociclo di lunghezza minima nella sol. dell'assegnamento. Quindi dal problema padre, nascono i problemi figli con vincolo $x_{ij}=0$ con (i,j) appartenente al sottociclo

Esempio Supponiamo che l'assegnamento abbia dato la sol.

$1 \to 6 \to 1 \qquad 2 \to 4 \to 2 \qquad 3 \to 5 \to 3$

Selezioniamo ad esempio il 1° sottociclo.



La dimensione del branching dipende dalla cardinalità del sottociclo.

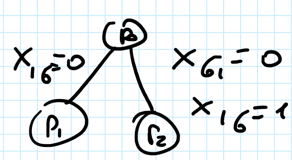
Gli insiemi delle soluzioni dei nodi figli non sono disgiunti per limitare le sovrapposizioni si adotta questo criterio.

Dato una soluzione dell'assegnamento con sottociclo $\bar{C}$ di lunghezza minima. Si sceglie un arco $(i,j) \in \bar{C}$ e si generano figli in numero pari a $|C|$

e in un figlio si pone $x_{ij}=0$ e per gli altri archi $(u,v) \in C$ $((u,v) \neq (i,j))$ si pone $x_{uv}=0$ e $x_{ij}=1$

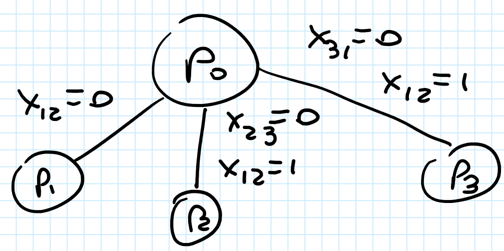
EX

$1 \to 6 \to 1$



$1 \to 2 \to 3 \to 1$

si sceglie l'arco $(1,2)$



- Calcolo dell'upper bound (Algoritmo del nodo più vicino - Nearest neighbour)

Si può adottare l'algoritmo del nodo più vicino) che, ~~seleziona per ogni~~ a partire dal primo nodo, seleziona ogni volta l'arco di costo minimo. Si ottiene una buona soluzione ~~~~ per il TSP che può non essere ottima.

Esempio

	1	2	3	4	5
1	∞	5	8	3	5
2	5	∞	4	6	2
3	8	4	∞	10	3
4	3	6	10	∞	1
5	5	2	3	1	∞

Si parte dal nodo 1.
Si collega 1 a costo minimo con 4. Si guarda la 4ª riga e si cerca il ~~~~ collegamento a costo minimo e si procede così

Algoritmo nodo più vicino

$1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1$

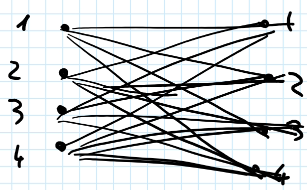
ciclo hamiltoniano

costo $3+1+2+4+8 = 18$

Esempio risoluzione TSP

	1	2	3	4
1	∞	1	6	7
2	1	∞	3	6
3	2	4	∞	5
4	5	3	6	∞

$\to$ Assegnamento su grafo bipartito con duplicazione dei nodi del grafo iniziale



Algoritmo del nodo più vicino per upper bound iniziale

UB: $1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{5} 1$

UB: $1+3+5+5 = 14$

Per il lower bound si ottiene risolvendo l'assegnamento con l'algoritmo ungherese

(B)

$$\begin{pmatrix} \infty & 1 & 6 & 7 \\ 1 & \infty & 3 & 6 \\ 2 & 4 & \infty & 5 \\ 5 & 3 & 6 & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 0 & \infty & 2 & 5 \\ 0 & 2 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \infty & 5 \\ 5 & 3 & 6 & \infty \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 3 & \infty \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{\infty} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\delta = 1 \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \begin{pmatrix} \infty & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

$1 \to 2$
$2 \to 1$
$3 \to 4$
$4 \to 3$

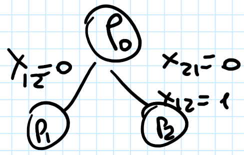
Sol assegnamento

Costo $LB^0 = 1+1+5+6 = 13$

La sol dell'assegnamento contiene i sottocicli:

$1 \to 2 \to 1 \quad$ e $\quad 3 \to 4 \to 3$

Selezioniamo il primo sottociclo per il branching



Risolviamo P_1 imponendo $x_{12}=0$, cioè nella matrice dei costi poniamo $c_{12}=\infty$ e lavoriamo sulla matrice così modificata.

$$(P_1) \quad \begin{pmatrix} \infty & \infty & 6 & 7 \\ 1 & \infty & 3 & 6 \\ 2 & 4 & \infty & 5 \\ 5 & 3 & 6 & \infty \end{pmatrix}$$

Per facilitare la risoluzione di P_1 si può usare la matrice modificata di P_0 con l'ulteriore modifica di $c_{12}=\infty$

Risolviamo l'assegnamento su P'_1

$$P_1 \quad \begin{pmatrix} \infty & \infty & 2 & 2 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{per riga}]{\text{si riduce}} \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

$1 \xrightarrow[2]{7} 4 \xrightarrow[0]{3} 2 \xrightarrow[0]{3} 3 \xrightarrow[0]{2} 1$ Sol assegnamento e sol del TSP

LB di P_1 = LB di P_0 + costo assegnamento di P_1

$= 13 + 2 = 15$

È lo stesso se sommare i costi effettivi nella matrice iniziale

P_1 si chiude con sol. $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$ e costo 15

Nodo P_2 $\quad x_{21}=0 \quad$ e $\quad x_{12}=1$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$c_{21}=\infty \qquad$ semplifichiamo la matrice

eliminando la 1ª riga e la 2ª colonna
Nella sol si cercherà poi aggiungere
l'arco (1,2)

Per P_2 lavoriamo sull'ultima matrice di P_0 con $c_{21} = \infty$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 2 & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & \infty & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & \infty \end{array}$$

lavoriamo su

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & \infty & 0 & 2 \\ 3 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 1 & 0 & \infty \end{array}$$

$\delta = 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & \infty & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty \end{array}$$

Sol assegnamento

$2 \to 3 \quad 4 \to 1 \quad 3 \to 4$

aggiungiamo anche $1 \to 2$
$(x_{12} = 1)$

la soluzione è

$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{5} 1$ sol del TSP

costo = 14

Nodo P_2 si chiude si aggiorna l'ottimo.

La sol. del TSP si ha nel nodo P_2 ed è

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ con costo 14

Lezione del 10 gennaio 2023

martedì 10 gennaio 2023 11:08

RO_OttNonLin

Pubblicità Nonlineare

Un'agenzia di pubblicità deve realizzare una campagna promozionale avendo a disposizione due mezzi: gli annunci radiofonici e quelli su carta stampata. Sono ammessi annunci radiofonici con durata di frazioni di minuto e annunci sui giornali di frazioni di pagina. Le stazioi radiofoniche private praticano sconti in base alla quantità di minuti richiesti: il costo al minuto è di 100 € meno 2 € per ogni minuto utilizzato (per esempio, il costo al minuto, qualora se ne richiedano 3, è di 94 €). Inoltre, le emittenti possono fornire al massimo 30 minuti di annunci in totale. I giornali, invece, richiedono un prezzo standard di 200 € per pagina. Per cincoli contrattuali, almeno 1/3 della spesa deve consistere in annunci sui giornali. In base a risultati statistici, si stima che tramite un minuto di annunci radiofonici si raggiungano 100.000 persone e tramite un annuncio su una pagina di giornale 15.000 persone. L'agenzia deve raggiungere almeno 3 milioni di persone minimizzando i costi della campagna.

Variabili : numero di minuti in radio $\to x_1$

numero di pagine sui giornali $\to x_2$

f. obiettivo = costi radio + costi giornali

$= (100-2x_1)x_1 + 200x_2$

vincoli $x_1 \leq 30$ al max 30 minuti in radio

$x_2 \geq \frac{1}{3}\left((100-2x_1)x_1 + 200x_2\right)$ almeno $\frac{1}{3}$ della spesa deve essere per annunci sui giornali

$100\,000\, x_1 + 15\,\cancel{000}\, x_2 \geq 3\,000.000$ vincolo sulle persone raggiunte

$\min \left((100-2x_1)x_1 + 200x_2\right)$

$$\min \left((100 - 2x_1)\, x_1 + 200\, x_2 \right)$$

$$x_1 \leq 30$$

$$x_2 \geq \frac{1}{3} \left((100 - 2x_1)\, x_1 + 200\, x_2 \right)$$

$$100.000\, x_1 + 15.000\, x_2 \geq 3000.000$$

Esempio di problema non lineare che si trasforma in lineare

Consideriamo il problema

$$\min \sum_j c_j |x_j| + \sum_k d_k y_k$$

$(x, y) \in C$, dove C è un poliedro (vincoli lineari)

È possibile eliminare il valore assoluto, ~~per~~ considerando

$$|x_j| = \max\{x_j, -x_j\}$$

Introduciamo le variabile $z_j = \max\{x_j, -x_j\}$

e aggiungiamo i vincoli $\quad -z_j \leq x_j \leq z_j$

Il problema si può scrivere come

$$\min \sum_j c_j z_j + \sum_k d_k y_k$$

$$-z_j \leq x_j \leq z_j \qquad \forall j$$

$$(x, y) \in C$$

con $z_j = \max\{x_j, -x_j\}$

Condizioni di ottimalità

Si ricorre alle cond. di ottimalità per identificare i punti di ottimo.

Le condizioni necessarie sono del tipo:

se x^* è un minimo, allora soddisfa una certa proprietà

Servono a trovare punti candidati ad essere di ottimo.

Servono a trovare punti candidati ad essere di ottimo.
NON c'è la certezza che lo siano. Può accadere che il punto trovato con ~~la~~ una cond. necessaria sia di max e noi cerchiamo un minimo.

Le condizioni sufficienti sono del tipo:

Se il punto x^* soddisfa una certa proprietà, allora è di minimo.

Indaghiamo quali punti ottenuti con la condizione necessaria sono soluzioni del problema.

Problemi convessi e concavi (in generale)

Problemi convessi

$$\min_{x \in X} f(x) \qquad \text{con } f \text{ convessa}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ insieme convesso}$$

$$\max_{x \in X} f(x) \qquad \text{con } f \text{ concava}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ insieme convesso}$$

Minimi locali $\equiv$ minimi globali

Per i problemi convessi si ha

~~CNO~~ Cond. ottimalità del primo ordine necessaria e sufficiente

$$x^* \text{ è minimo globale} \iff \nabla f(x^*) = 0$$

Problemi concavi

$$\min_{x \in X} f(x) \qquad f \text{ concava}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ convesso}$$

$$\max_{x \in X} f(x) \qquad f \text{ convessa}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ convesso}$$

Minimi locali $\neq$ minimi globali

Condizione necessaria del II ordine

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad , f \text{ differenziabile 2 volte}$$

Se x^* è un minimo locale allora

① $\nabla f(x^*) = 0$

② la matrice hessiana H di $f(x)$ calcolata in x^* è semidefinita positiva ($\forall d \in \mathbb{R}^n \quad d^T H d \geq 0$)

Esempio matrice ~~semidef~~definita positiva

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

per verificare se è definita positiva occorre vedere se $\forall d \in \mathbb{R}^2$

$$d^T A d > 0 \quad \text{con } d \neq (0,0)$$

$$(d_1, d_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 2d_1^2 + 3d_2^2 > 0$$ tranne quando $d_1 = d_2 = 0$ il che significa che A è definita positiva.

Esempio condizioni di ottimalità

$$\min (x_1^4 + x_2^4 - 3x_1x_2)$$

Cond. Necessarie 1° ordine : $\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$

Scriviamo il gradiente della funz. obiettivo

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{con } f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 3x_1x_2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 3x_2 \\ 4x_2^3 - 3x_1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i punti stazionari (cioè risolviamo il sistema $\nabla f(x) = 0$)

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 3x_2 = 0 \\ 4x_2^3 - 3x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Soluzioni}$$

$A = (0, 0)$

$B = (\sqrt{3} , \sqrt{3})$

$A = (0,0)$

$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Applichiamo la cond. sufficiente del 2° ordine per vedere quale tra i punti è l'ottimo

Condizione sufficiente del 2° ordine: matrice hessiana di f definita positiva

$$H(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

derivata rispetto alla variabile di $4x_1^3 - 3x_2$

derivata di $4x_2^3 - 3x_1$

$$H(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -3 \\ -3 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1^3 - 3x_2)$

$\frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1^3 - 3x_2)$

~~Valutiamo~~ Valutiamo $H(x_1 x_2)$ in A, B e C

$$H(A) = H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$H(0,0)$ è indefinita (gli autovalori sono -3 e 3)

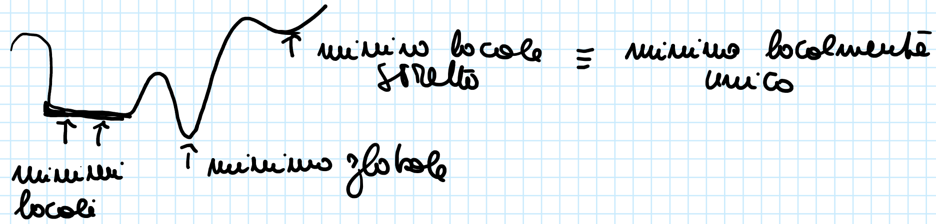
A non verifica la cond. sufficiente

$$H(B) = H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = H(C) = 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono 2 e 4 $\Rightarrow$ H è definita positiva.

B e C sono minimo locali stretti

N.B.



La funzione f è convessa $\Rightarrow$ B e C sono minimi globali.

globali.

Problemi con vincoli di uguaglianza

$$\min f(x)$$
$$h_1(x)=0$$
$$\vdots$$
$$h_p(x)=0$$

Condizione Necessaria del 1° ordine:

se x^* pt minimo locale e regolare allora esistono $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_p \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1(x^*)=0 \\ \vdots \\ h_p(x^*)=0 \end{array}\right] \text{ cond. di ammissibilità}$$

Esempio

$$\min \left(4x_1(x_1+x_3+5) + 3x_2x_3\right)$$
$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$x_3=1$$

$h_1(x) = x_1+x_2+x_3-1$

$h_2(x) = x_3-1$

Scriviamo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$$

$$= 4x_1(x_1+x_3+5) + 3x_2x_3 + \lambda_1(x_1+x_2+x_3-1) + \lambda_2(x_3-1)$$

Verifichiamo ora la regolarità dei vincoli, cioè che se $\nabla h_1(x)$ e $\nabla h_2(x)$ sono lin. indipendenti

$$h_1(x) = x_1+x_2+x_3-1 \quad \Rightarrow \quad \nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_2(x) = x_3-1 \quad \Rightarrow \quad \nabla h_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \nabla h_1(x) + \alpha_2 \nabla h_2(x) = 0 \quad \text{solo se} \quad \alpha_1=\alpha_2=0$$

I gradienti sono effettivamente lin. indip.

Scriviamo le cond. del 1° ordine

Scriviamo le cond. del 1° ordine

$\bar{\nabla}_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \nabla f(x) + \lambda \bar{\nabla} h(x) = 0$

$\bar{\nabla}_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) = h(x) = 0$

$$\bar{\nabla} f(x) + \lambda \bar{\nabla} h(x) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x)$$

$$= \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_3 + 20 \\ 3x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_3 + 20 + \lambda_1 = 0 \\ 3x_3 + \lambda_1 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sol.

$x_1 = -\frac{21}{8}$ $\quad \lambda_1 = -3$

$x_2 = \frac{21}{8}$ $\quad \lambda_2 = -\frac{17}{4}$

$x_3 = 1$

Bisognerebbe poi verificare se il punto è di minimo utilizzando le condizioni del 2° ordine

Esempio

$$\min \left(x_3^2 + x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 5x_1 x_3 \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Osserviamo che essendovi un solo vincolo, non occorre verificare l'indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli. Un solo vettore è sempre lin. indip.

$f(x) = x_3^2 + x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 5x_1 x_3$

$h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4$

Cond. di stazionarietà

Cond. di stazionarietà

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = 0$$
$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) = 0$$

dove $\mathcal{L}(x,\lambda) = \underbrace{x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 + 5x_1x_3}_{f(x)} + \lambda \underbrace{(x_1+x_2+x_3-4)}_{h(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 + 5x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 + 2x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_2 + 5x_1 + \lambda = 0 \end{array}\right] = \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \Big] = \nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) = 0$$

Sol.

$x_1 = \frac{29}{15}$ $\quad x_3 = -\frac{1}{15}$

$\lambda = -\frac{9}{5}$

Problemi con vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

Regolarità dei vincoli

$$\min x_1^3(x_2+3)$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$P = (0,1)$

Consideriamo il punto $(0,1)$ e verifichiamo che è regolare

Def. Sia $\min f(x)$ e sia $\bar{x}$ un punto ammissibile.

$g_1(x) \leq 0$

$\vdots$

$g_m(x) \leq 0$

Se per qualche $i = 1..m$ $g_i(\bar{x}) = 0$ $\bar{x}$ si dice attivo nel vincolo g_i.

Un punto attivo in un vincolo di $\leq$ è un punto che soddisfa il vincolo come vincolo di uguaglianza.

Vediamo in quali vincoli $P = (0,1)$ è attivo

- $x_1 \geq 0$ sostituendo P si trova $0 = 0 \Rightarrow$ P è attivo in $g_1(x) = -x_1$ $\rightarrow$ $x_1 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{-x_1}_{= g_1(x)} \leq 0$

- $x_2 \geq 0$ sostituendo P si trova $1 \geq 0$

- $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ sostituendo P si trova $1 = 1$

P è attivo in $g_3 = x_1^2 + x_2^2 - 1$

La regolarità per P vuol dire vedere se $\nabla g_1(0,1)$ e $\nabla g_3(0,1)$ sono lin. indip.

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I gradienti sono lin. indip.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Esempio

$$\min \; x_1^3 (x_2 + 3)$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Cerchiamo i punti intersezione dei vincoli

Intersechiamo i vincoli a coppie

$x_1 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = (0, 1)$

$x_2 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = (1, 0)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = (0, 0)$

Non ci sono punti che intersecano i tre vincoli

Non ci sono punti che intersecano i tre vincoli

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \quad \nexists \text{ soluzioni}$$

$g_1(x) = -x_1 \qquad g_2(x) = -x_2 \qquad g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$A = (0,1)$ sono attivi g_1 e g_3

$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\nabla g_3(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

sono lin indip

$B = (1,0)$ sono attivi g_2 e g_3

$\nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

sono lin indip.

$C = (0,0)$ g_1 e g_2 sono attivi

$\nabla g_1(C) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\nabla g_2(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin indip.

Scriviamo le condizioni KKT

$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = f(x) + \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) + \mu_3 g_3(x)$

KKT:
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \\ \mu_1 g_1(x) = 0 \\ \mu_2 g_2(x) = 0 \\ \mu_3 g_3(x) = 0 \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ g_3(x) \leq 0 \end{cases} \qquad \text{con } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \underbrace{x_1^3(x_2+3)}_{f(x)} - \mu_1 \underbrace{x_1}_{g_1(x)} - \mu_2 \underbrace{x_2}_{g_2(x)} + \mu_3 \underbrace{(x_1^2+x_2^2-1)}_{g_3(x)}$$

$$\begin{cases} 3x_1^2(x_2+3) - \mu_1 + 2\mu_3 x_1 = 0 \\ x_1^3 - \mu_2 + 2\mu_3 x_2 = 0 \\ \mu_1 x_1 = 0 \\ \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_3(x_1^2+x_2^2-1) = 0 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ x_1^2+x_2^2-1 \le 0 \end{cases}$$

Algoritmi di ottimizzazione

Si tratta di metodi che individuano punti che appartengono al cosiddetto insieme bersaglio, cioè che soddisfano la condizione necessaria di ottimalità.

Ci occupiamo di algoritmi che cercano punti di minimo locale per questo detti algoritmi locali.

Ottimizzazione non vincolata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f \in C^1$$

La cond necessaria di ottimalità richiede che $\nabla f(x) = 0$

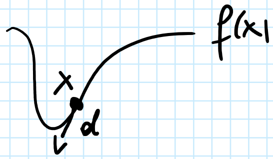
Gli algoritmi cercano punti nell'insieme bersaglio Ω

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0 \}$$

Si basano sul concetto di direzione di discesa

Def. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^n$ d è una direzione di discesa per f in un punto x se $\exists\ \bar{\alpha} > 0$:

$$f(x + \alpha d) < f(x) \qquad \forall\ \alpha \in (0, \bar{\alpha})$$



d è una direzione di discesa se spostandoci lungo d di un passo $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ il valore della funzione obiettivo diminuisce.

Vale il risultato

PROP. Sia $d \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0 \Rightarrow d$ è una direzione di discesa.

Schema generale

- $x^0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad k=0$
- se $\nabla f(x^0)=0$ STOP
- Si sceglie una direzione di discesa d^k
- Si sceglie il passo α^k

$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

$k+1 = k$ e si ricomincia

Si seguono direzioni di discesa

$$f(\underbrace{x^k + \alpha^k d^k}_{= x^{k+1}}) < f(x^k)$$

Scelta del punto iniziale

Non c'è un vero criterio per la scelta del punto iniziale.
È possibile sceglier un punto stazionario di una funzione obiettivo semplificata rispetto a quella del problema.
Diversamente, si può avviare l'algoritmo da punti iniziali diversi e sceglier il punto stazionario migliore.

Criterio di arresto

Si potrebbe pensare ad una condizione del tipo

$\|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon_1$

Si possono considerare anche

$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon_2 \qquad |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_3$

Più comunemente, si limita il numero massimo di iterazioni.

Scelta della direzione

La scelta della direzione determina il metodo.
Ci occupiamo del metodo del gradiente (fa uso della

Ci occupiamo del metodo del gradiente (fa uso delle derivate prime) e il metodo di Newton (con derivate seconde)

Scelta del passo

Il passo può essere scelto in maniera esatta o inesatta

Scelta esatta

Si pone $\varphi(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k)$ e si cerca il passo ottimo, cioè il valore di α che minimizza $\varphi(\alpha)$.

Si risolve $\min_{\alpha} \varphi(\alpha)$

φ è derivabile $\varphi'(\alpha) = \nabla f(x^k + \alpha d^k)^T d^k$

α è ottimo se $\varphi'(\alpha) = 0$ cioè se $\nabla f(x^k + \alpha d^k)^T d^k = 0$

(∇f deve essere ortogonale a d)

Se la $f(x)$ è una forma quadratica, esistono delle formule per calcolare il passo esatto.

In genere si adotta la ricerca inesatta.

Si sceglie il passo che verifica una condizione di sufficiente miglioramento di f (condizione di ARMIJO).

Metodo del gradiente

È anche detto metodo della discesa più ripida perché come direzione di discesa impiega l'antigradiente.

$$d^k = -\nabla f(x^k)$$

La generica iterazione è $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$
si procede poi alla scelta del passo α^k

Converge lentamente ed ha un andamento a zig-zag.

È globalmente convergente.

<u>Esempio</u>

$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$, $x^0 = (2,0)$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad d^0 = -\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x^0 + \alpha d^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerchiamo il passo ottimo α

$\varphi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = f(2-4\alpha, 0) = (2-4\alpha)^2$

$\varphi'(\alpha) = 2(2-4\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$x^1 = x^0 + \frac{1}{2} d^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{pmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0$ $\quad x^1$ punto stazionario

Metodo di Newton

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad f \in C^2$

Il metodo usa un'approssimazione quadratica della funzione per determinare la direzione di Newton

Poniamo $s = \alpha^k d^k$

consideriamo la funzione $g(s) = f(x^k + s)$

Facciamo lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo ordine di g.

$g(s) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T s + \frac{1}{2} s^T \underbrace{H(x^k)}_{\text{matrice hessiana}} s +$ termini di ordine superiore

Scegliamo s in modo da minimizzare g.

$$g'(s) = \nabla f(x^k) + s^T H(x^k) = 0$$

$$s = -\nabla f(x^k) \underbrace{\left[H(x^k)\right]^{-1}}$$

→ matrice inversa della matrice hessiana

La generica iterazione è

$$x^{k+1} = x^k + s^k = x^k - \nabla f(x^k)\left[H(x^k)\right]^{-1}$$

Il metodo converge localmente.
È oneroso il calcolo dell'inversa della matrice hessiana, per questo motivo sono stati introdotti i metodi quasi-newtoniani che usano matrici che approssimano H^{-1}

Esempio

$$f(x) = 3x_1^3 x_2 + x_2^2 , \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 9x_1^2 x_2 \\ 3x_1^3 + 2x_2 \end{pmatrix} \qquad H(x) = \begin{pmatrix} 18x_1x_2 & 9x_1^2 \\ 9x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad H(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}(x^0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{9}{81} \\ \frac{9}{81} & -\frac{0}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

Direzione di Newton

$$d^0 = -\nabla f(x^0) H^{-1}(x^0) = -(0,3) \begin{pmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x^1 = x^0 + d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmi per l'ottimizzazione vincolata

Vogliamo determinare punti che
- migliorano il valore della funzione obiettivo
- siano ammissibili (rispettino i vincoli del problema)

I metodi possono
- trasformare il problema in una successione di problemi non vincolati
- trasformare il problema in un problema vincolato più semplice.

Metodi di penalità.

Questi metodi trasformano il problema vincolato in un problema non vincolato introducendo un termine di penalità che ha la funzione di penalizzare la violazione dei vincoli.

Consideriamo il problema

$$\min f(x) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\left.\begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{array}\right] \mathcal{F} \qquad \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \end{array}$$

Introduciamo quindi la funzione di penalità

$$\underbrace{P(x,\mu)}_{\text{funzione di penalità}} = \underbrace{f(x)}_{\text{funz. obiettivo del problema vincolato}} + \underbrace{\mu}_{\text{parametro di penalità}} \underbrace{\varphi(x)}_{\text{termine di penalità}}$$

$\varphi(x)$ misura la violazione dei vincoli

<u>Funzioni di penalità sequenziali</u>

$\varphi(x)$ è differenziabile con continuità

$\varphi(x) = 0$ se x è ammissibile, $x \in \mathcal{F}$

$\varphi(x) > 0 \quad$ se $x \notin \mathcal{F}$

Tipicamente si sceglie $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{j=1}^{p} (h_j(x))^2$

Si risolve al posto del problema vincolato, il problema non vincolato

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x, \mu)$$

Non ci sono però valori specifici di μ per cui la soluzione del problema non vincolato sia soluzione del problema vincolato. Accade invece che al limite per $\mu \to +\infty$, $\varphi(x) \to 0$ e la soluzione del problema non vincolato tende alla soluzione del problema iniziale.

Funzioni di penalità esatte

$$P(x, \mu) = f(x) + \mu \varphi(x)$$

con φ non differenziabile

$\varphi(x) > 0 \quad$ se $x \notin \mathcal{F}$

$\varphi(x) = 0 \quad$ se $x \in \mathcal{F}$

In genere si pone $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^{p} |h_j(x)|$

In questo caso P è esatta nel senso che per valori molto grandi di μ ogni minimo del problema $\min_x P(x, \mu)$ è soluzione del problema vincolato iniziale.

Esempio

$\min x^2 \quad\quad$ sol. $x = 1$

$1 - x \leq 0$

Costruiamo la funzione di penalità sequenziale

$$P(x, \mu) = x^2 + \mu \left[\max\{0, 1-x\}\right]^2$$

Risolviamo

$$\min_{x \in \mathbb{R}} P(x,\mu) = \min_{x \in \mathbb{R}} \left(x^2 + \mu \left[\max\{0, 1-x\} \right]^2 \right)$$

$$\max\{0,1-x\} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-x \leq 0 \quad (x \geq 1) \\ 1-x & \text{se } 1-x \geq 0 \quad (x \leq 1) \end{cases}$$

Se $x \geq 1$ $\quad P(x,\mu) = x^2 \quad$ non è di interesse

Se $x \leq 1$ $\quad P(x,\mu) = x^2 + \mu (1-x)^2$

$$P'(x,\mu) = 2x - 2\mu(1-x) = 0 \qquad x = \frac{\mu}{1+\mu} \xrightarrow[\mu \to +\infty]{} 1$$

la soluzione $\frac{\mu}{1+\mu}$ tende alla soluzione del problema vincolato

Esercitazione

① $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1$

Verifichiamo che f è convessa, vedendo se la matrice hessiana è semidefinita positiva

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - 1 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix} \qquad H(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \Rightarrow H \text{ è definita positiva}$$

Pertanto f è strettamente convessa

Eseguiamo una iterazione del metodo del gradiente con $x^0 = (1, 1)$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d^0 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^0 + \alpha d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Determiniamo il valore ottimo di α

$$\varphi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = -1 + 2(1-2\alpha)^2 - (1-2\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + 2\alpha$$

Risolviamo $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \varphi(\alpha)$

$$\varphi'(\alpha) = 3 - 8(1 - 2\alpha) - 2\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{5}{14}$$

Costruiamo $x^1 = x^0 + \frac{5}{14} d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - 1 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{\substack{x_1 = \frac{2}{7} \\ x_2 = \frac{9}{14}}} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x^1 non è stazionario.

Eseguiamo adesso una iterazione del metodo di Newton

$$H(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Direzione di Newton

$$d^0 = -\nabla f(x^0) H^{-1}(x) = (-2, -1) \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

$$x^1 = x^0 + d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - 1 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{\substack{x_1 = \frac{2}{7} \\ x_2 = \frac{1}{7}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x^1 è stazionario

② $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_2 x_3 - 5x_1 - 9x_2 + x_3$

studiare i punti di minimo.

Utilizziamo la condizione necessaria di ottimalità ($\nabla f(x) = 0$)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - x_2 - 5 \\ 4x_2 - x_1 + x_3 - 9 \\ 2x_3 + x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ 4x_2 - x_1 + x_3 - 9 = 0 \\ 2x_3 + x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Applichiamo la condizione sufficiente del secondo ordine. Studiamo la matrice hessiana

$$H(x) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} > 0 \qquad |H(x)| = 54 > 0$$

H è definita positiva $\Rightarrow$ $(1, 3, -2)$ punto di minimo locale stretto.

H è definita positiva $\Rightarrow$ f è strettamente convessa

Quindi $(1, 3, -2)$ è un minimo globale stretto.

OSS. La condizione sufficiente di ottimalità nel punto $\bar{x}$ richiede che $H(\bar{x})$ sia definita positiva (H deve essere definita positiva quando è calcolata nel punto stazionario)

Invece se la matrice hessiana è definita positiva in tutti i punti dello spazio, allora la funzione obiettivo è strettamente convessa.

È quindi possibile che la matrice hessiana sia def. pos. in un punto stazionario, ma non è def pos in altri punti e di conseguenza la funzione obiettivo non è strettamente convessa

③ Scrivere le condizioni KKT (cond. necessarie di ottimalità per problemi vincolati con vincoli ≤ 0)

$$\min \left[x_1^3 (x_2 + 3) \right] \qquad \longrightarrow \qquad \min \left[\overbrace{(x_1^3 (x_2 + 3))}^{= f(x)} \right]$$

$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad g_1(x) := -x_1 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0 \qquad\qquad g_2(x) := -x_2 \leq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \qquad\qquad g_3(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

Condizioni KKT:

$$\nabla f(x) + \mu^T \nabla g(x) = 0$$

$$\mu^T g(x) = 0$$

Scriviamo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = f(x) + \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) + \mu_3 g_3(x)$$

$$= x_1^3 (x_2 + 3) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 (x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Cond. KKT $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial x_2} = 0 \\ \mu_1 x_1 = 0 \\ \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 (x_2 + 3) - \mu_1 + 2\mu_3 x_1 = 0 \\ x_1^3 - \mu_2 + 2\mu_3 x_2 = 0 \\ \mu_1 x_1 = 0 \\ \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_3 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

(4) Problema dell'assegnamento con l'algoritmo ungherese

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aggiorniamo la matrice sottraendo ad ogni riga il suo elemento minimo

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aggiorniamo la matrice sottraendo ad ogni colonna il suo minimo

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

A → 2
B → 1
C NO
D → 3

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2* & 3* & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} *A \\ B \\ *C \\ *D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2}^{+1} & \boxed{4}^{+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} -1 \end{array}$$

Si mette un * nella riga che non è stata accoppiata

Si mettono * nelle colonne (2 e 3) che hanno zeri in corrispondenza della riga con * (3)

Si mettono * nelle righe accoppiate dall'assegnamento incompleto con le colonne con * (riga 1 e riga 4)

Si barrano le righe senza * e le colonne con *

δ = minimo degli elementi non barrati = 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soluzioni:

A → 2 A → 2 A → 3 A → 4

$A \to$			
$B \to 4$	$B \to 4$	$B \to 4$	$B \to 1$
$C \to 1$	$C \to 3$	$C \to 2$	$C \to 2$
$D \to 3$	$D \to 1$	$D \to 1$	$D \to 3$

Si ottiene così il ricoprimento minimo di zeri

costo di $(A,2)\ (B,4)\ (C,1)\ (D,3) = 1+0+3+0 = 4$

costo di $(A,2)\ (B,4)\ (C,3)\ (D,1) = 1+0+1+2 = 4$

Tutti i costi delle soluzioni hanno valore 4.

Avete deciso di organizzare una cena a casa vostra. Poiché però siete troppo impegnati a studiare per l'esame di Ricerca Operativa, avete pensato bene di far cucinare i vostri amici, che d'altra parte sono ben lieti di aiutarvi. Dopo aver lungamente meditato sulle capacità culinarie dei vostri amici, siete giunti a stilare la seguente tabella, dove la cifra indica il vostro giudizio sulla corrispondente pietanza preparata dal vostro amico/a.

amico/a	Antipasti	Primi	Secondi	Contorni	Dolci
Andrea	7	6	5	7	8
Barbara	6	8	7	6	5
Ciccio	6	5	4	4	8
Doriana	7	8	6	6	6
Everardo	5	6	7	5	0
Florinda	7	8	8	8	6
Gimmi	7	7	5	5	6

Il problema è quello di decidere *se* e cosa far preparare a ognuno, considerando che la vostra cena consisterà di una pietanza di ciascun tipo (ossia un antipasto, un primo, un secondo etc.) e che per discrezione non intendete chiedere a nessuno di preparare più di una pietanza.

1) Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di massimizzare la qualità della vostra cena

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?

Variabili $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ prepara la pietanza } j \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases}$

~~Funzione~~ Obiettivo: $\max \big(7x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} + 8x_{15} + \dots$

$+ 6x_{21} + 8x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 5x_{25} + \dots$

$- \; - \; - \; - \; -$

$+ 7x_{71} + 7x_{72} + 5x_{73} + 5x_{74} + 6x_{75} \big)$

$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1,..,7$ ognuno porta al max 1 pietanza

$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1,..,5$ ogni pietanza portata da una sola persona

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \; \forall j$

La matrice è TU $\Rightarrow$ si può risolvere il rilassamento lineare ~~per~~ ottenendo la soluzione intera

OSS. L'algoritmo ungherese ha complessità $O(n^3)$. Se i costi hanno valori 1 e 0 si può ancora applicare l'algoritmo ungherese.

Esercizio sul Branch and Bound

$\max(x_1 + 3x_2)$

$x_1 \geq \frac{1}{2}$

$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{13}{2}$

P_0

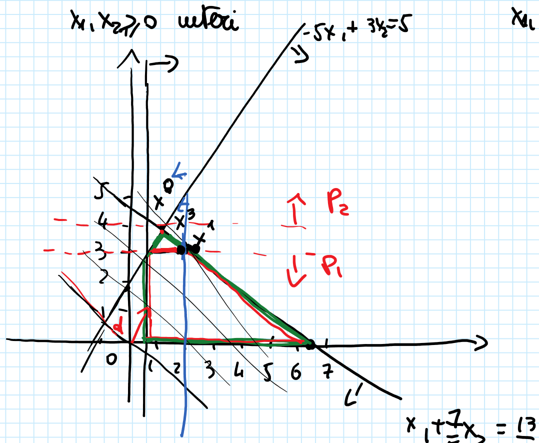
$\max(x_1 + 3x_2)$

$x_1 \geq \frac{1}{2}$

$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \leq \frac{13}{2}$

$-5x_1 + 3x_2 \le 5$ $\qquad\qquad$ $-5x_1 + 3x_2 \le 5$

$x_1, x_2 \ge 0$ interi $\qquad\qquad$ $x_1 x_2 \ge 0$



$(6.5, 0)$

$x_1 + \frac{7}{5}x_2 = \frac{13}{2} \to (0, 4.5)$

$-5x_1 + 3x_2 = 5 \to (0, 1.\bar{6})$

$(-1, 0)$

d = direzione di crescita $= (1, 3) = \nabla f(x)$

$x_1 + 3x_2 = 0$

$f(x) = x_1 + 3x_2$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sol. ottima di P_0 $\quad x^0 = \left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right) = (1.25;\ 3.75)$ $\quad UB^0 = 12.5$

$$x^0: \begin{cases} x_1 + \frac{7}{5}x_2 = \frac{13}{2} \\ -5x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

Scegliamo come variabile di branch x_2 (comp. frazionaria maggiore e coeff maggiore della f.o.)

Da P_0 nascono

P_1: $\max\ (x_1 + 3x_2)$
$x_1 \ge \frac{1}{2}$
$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \le \frac{13}{2}$
$-5x_1 + 3x_2 \le 5$
$x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$

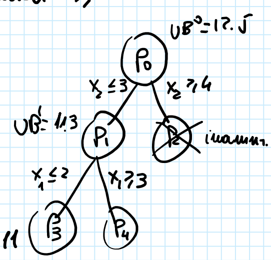
P_2 $\max\ (x_1 + 3x_2)$
$x_1 \ge \frac{1}{2}$
$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \le \frac{13}{2}$
$-5x_1 + 3x_2 \le 5$
$x_2 \ge 4$
$x_1, x_2 \ge 0$

inammissibile

$x^1 = (2.3, 3)$ $\quad UB^1 = 11.3$

l'avere scelto x_2 con parte frazionaria maggiore dà di fatto inammissibilità del problema con vincolo di branch $\ge$

Da P_1 nascono P_3 e P_4



$LB = UB^3 = 11$

P_3: $\max\ (x_1 + 3x_2)$
$x_1 \ge \frac{1}{2}$
$x_1 + \frac{7}{5}x_2 \le \frac{13}{2}$
$-5x_1 + 3x_2 \le 5$
$x_2 \le 3$
$x_1 \le 2$
$x_1, x_2 \ge 0$

P_3 $\max\ (x_1 + 3x_2)$
— —
— —
— —
——
$x_1 \ge 3$
$x_1 x_2 \ge 0$

$x^3 = (2,3)$ $UB^3 = LB = 11$

P_4 si chiude perché a partire da P_4 non potremmo trovare un valore migliore di 11. Infatti P_4 è figlio di P_1 con $UB^1 = 11.3$ ed avendo la f.o. solo coeff. interi al più si ottiene 11 come valore ottimo della f.o.

La soluzione ottima è $x^3 = (2,3)$

Esercizio (Zaino)

Vogliamo investire un capitale di 12.000 €. Si hanno 5 possibili investimenti con rendimento atteso e costo indicati nella tabella

investimenti	1	2	3	4	5
rendimento (in migliaia di €)	10	9	14	6	3
costo (in migliaia di €)	2	4	7	5	3

$$\max (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1..5$$

Applichiamo il metodo del Branch and Bound con best first

RL
$$\max (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_i \in [0,1] \quad i = 1,..,5$$

Risolviamo il problema

P_0 :
$$\max (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_i \in [0,1] \quad i = 1,..,5$$

$x^0 = (1, 1, \frac{12-6}{7}, 0, 0) = (1, 1, \frac{6}{7}, 0, 0)$ $UB^0 = 10 + 9 + 14 \cdot \frac{6}{7} = 31$

Sol ammissibile iniziale $\tilde{x} = (1,1,0,0,0)$ $LB = 10 + 9 = 19$

Branch su P_0, ma scegliamo

P_1 :
$$\max (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 0$$
$$x_i \in [0,1] \quad i = 1,..,5$$

P_2 :
$$\max (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_i \in [0,1], \quad i = 1,..,5$$

$x^1 = \left(1,1,0,1, \frac{12-11}{3}\right) = \left(1,1,0,1,\frac{1}{3}\right)$

$UB^1 = 10+9+6+3\cdot\frac{1}{3} = 26$

$x^2 = \left(1, \frac{12-9}{4}, 1,0,0\right) = \left(1, \frac{3}{4}, 1,0,0\right)$

$UB^2 = 10+9\cdot\frac{3}{4}+14 = 30.75$

Facciamo branch su P_2

P_3:

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

P_4:

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

$x^3 = \left(1,0,1, \frac{12-9}{5}, 0\right) = \left(1,0,1,\frac{3}{5},0\right)$

$UB^3 = 10+14+6\cdot\frac{3}{5} = 27.6$

$x^4 = \left(\frac{12-11}{2}, 1, 1, 0, 0\right)$

$UB^4 = 5+9+14 = 28$

Sono aperti i problemi

P_1 con $UB^1 = 26$; P_3 con $UB^3 = 27.6$ e P_4 con $UB^4 = 28$

Procediamo su P_4

P_5:

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 0$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

P_6

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 1$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

$x^5 = \left(0,1,1, \frac{12-11}{5}, 0\right) = \left(0,1,1,\frac{1}{5},0\right)$

$UB^5 = 9+14+6\cdot\frac{1}{5} = 24.2$

inammissibile

Si procede ora su P_3

P_7

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

P_8

$$\max\ (10x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 3x_5)$$
$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 \le 12$$
$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_4 = 1$$
$$x_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,5$$

$x^7 = (1,0,1,0,1)$

$UB^7 = 10+14+3 = 27$

$x^* = (1,0,1,0,1)$

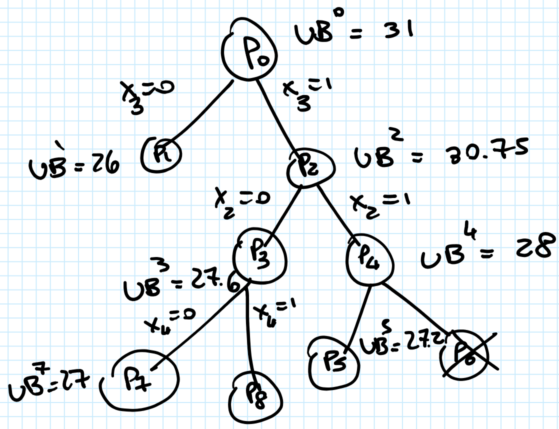
$UB^7 = 10 + 14 + 3 = 27$

Da P_5 e P_8 al max si può ottenere valore ottimo 27. Avendo già trovato valore ottimo 27, si possono chiudere.

Resta aperto P_1 con $UB^1 = 26 <$ valore corrente $= 27$

Si chiude P_1

La sol. ottima è $(1,0,1,0,1)$ con valore ottimo 27.



Prova

Monday, April 18, 2022 12:29 PM

Prova

.