1 Dualità

La dualità è uno degli aspetti più interessanti dell PL. Essa consiste nell'associare ad un problema di programmazione lineare (detto primale) un altro problema di programmazione lineare (detto duale), con gli stessi dati ma con variabili differenti. Il concetto di dualità fu introdotto da Von Neumann nel 1947, ma il teorema della dualità fu rigorosamente dimostrato nel 1951 da Gale, Kuhn e Tucker.

La dualità permette di:

- ottenere informazioni su caratteristiche del problema primale;
- ottenere una valutazione del valore ottimo del primale a partire dal valore ottimo del duale o viceversa;
- costruire algoritmi (Simplesso duale);
- effettuare l'analisi di sensibilità;
- operare sul duale (primale) per risolvere il primale (duale), se quest'ultimo si rivela più difficile da studiare.

Sia dato il **problema primale** in forma generale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

associamo il **problema duale**

$$\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

dove y è un vettore colonna di dimensione m. La coppia di problemi ottenuti costituisce una coppia di problemi duali simmetrici. Sia dato ora il **problema primale in forma standard**

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

il corrispondente **problema duale in forma asimmetrica** è dato da

$$\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T. \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

La seguente tabella illustra le trasformazioni necessarie per passare dal problema primale al duale e viceversa.

Tabella delle trasformazioni	
Problema primale	**Problema duale**
min	max
coefficienti f.o.	termini noti
coefficienti i-esimo vincolo	coefficienti i-esima variabile
i-esimo vincolo $\geq$ ($\leq$)	i-esima variabile ≥ 0 (≤ 0)
i-esimo vincolo $=$	i-esima variabile non vincolata
j-esima variabile ≥ 0 (≤ 0)	j-esimo vincolo $\leq$ ($\geq$)
j-esima variabile non vincolata	j-esimo vincolo $=$
numero vincoli	numero variabili

2 Esempi di problemi duali

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianficazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo. Questo perchè, come vedremo, le variabili duali possono essere anche interpretate come i cosiddetti prezzi ombra in quanto misurano i "costi" impliciti associati ai vincoli.

2.1 Il duale del problema dell'allocazione ottima delle risorse

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di m risorse R_i, $i = 1, \dots, m$ con la possibilità di fabbricare n prodotti P_j, $j = 1, \dots, n$ si può formulare questo problema come

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

dove ricordiamo $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti i livelli di produzione x_j di ciascuno dei prodotti, $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ il vettore colonna dei profitti netti e $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ il vettore colonna delle disponibilità massime di ciascuna delle risorse. Supponiamo di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente in un mercato immaginario (**mercato ombra**) e siano y_i, $i = 1 \dots, m$, i prezzi unitari associati alla i-esima risorsa (**prezzi ombra**). Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia vendere una quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi ombra y_i da assegnare alle risorse vendute direttamente, si cercano i valori più bassi possibile per le y_i. Affinchè la vendita sia conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale del profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{aligned} & a_{11} y_1 + \dots + a_{m1} y_m \ge c_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{1n} y_1 + \dots + a_{mn} y_m \ge c_n, \end{aligned}$$

con $y_i \ge 0$ $i = 1, \dots, m$ e dove le quantità a_{ij} rappresentano la quantità di risorsa R_i necessaria per fabbricare una unità di prodotto P_j. Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1, \dots, n \\ y_i \ge 0 \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

2.2 Il duale del problema di miscelazione

Consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno n sostanze S_j, $j = 1, \dots, n$ ciascuna delle quali contiene una quantità a_{ij} di componente utile C_i, $i = 1, \dots, m$. Come abbiamo già visto un problema di miscelazione di questo tipo si può formulare come

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

dove ricordiamo che $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ il vettore dei costi unitari delle sostanze, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela. Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano y_i, $i = 1 \ldots, m$ i prezzi unitari da assegnare a ciascuno di essi. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela, cioè per ciascun componente pari a b_i, il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m.$$

Inoltre, affinchè i prezzi y_i assegnati dall'industria ai componenti puri siano concorrenziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componenti ottenuti attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j.$$

Inoltre si deve imporre $y_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, m$. Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \ldots, n \\ y_i \geq 0 \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

2.3 Il duale del problema del trasporto

Supponiamo che un'azienda voglia provvedere in proprio ad effettuare il trasporto di materiali e che quindi cerchi di risolvere il problema dei trasporti

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = q_j \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

dove, ricordiamo, che le c_{ij} rappresentano il costo del trasporto dall'origine i alla destinazione j, le p_i le disponibilità alla i-esima origine e le q_j le richieste alla j-esima destinazione. Supponiamo, ora che una compagnia che esegue trasporti voglia proporsi a questa azienda, come alternativa vantaggiosa all'effettuazione dei trasporti in proprio; a tale scopo questa compagnia propone all'azienda di prelevare un'unità di prodotto dall'origine i per un prezzo unitario u_i e di consegnare una unità di prodotto alla destinazione j per un prezzo unitario v_j . Per assicurare che i suoi prezzi siano competitivi rispetto a quelli che l'azienda avrebbe effettuando i trasporti in proprio, la compagnia di trasporti deve fare sì che risulti

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

per ogni $i = 1 \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. D'altra parte la compagnia di trasporti vuole scegliere i prezzi da proporre $u_1, \ldots, u_m$ e $v_1, \ldots, v_n$ in modo da massimizzare il suo profitto complessivo. Poichè le quantità p_i e q_j di prodotto rispettivamente disponibili all'origine i e richieste alla destinazione j sono note alla compagnia di trasporti, questa cercherà di massimizzare la funzione

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} p_i u_i + \sum_{j=1}^{n} q_j v_j \right).$$

Quindi il problema che la compagnia di trasporti formula per determinare quali prezzi u_i e v_j proporre all'azienda è il seguente

$$\begin{cases} \max \left(\sum_{i=1}^{m} p_i u_i + \sum_{j=1}^{n} q_j v_j \right) \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

3 Teoremi fondamentali

Siano dati il problema primale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

e il problema duale

$$\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

Teorema 1 (Teorema della dualità debole)**.** *Dato il problema primale in forma avente soluzione ammissibile $\bar{x}$ e il corrispondente problema duale $\mathcal{D}$ avente soluzione ammissibile $\bar{y}$, risulta*

$$c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b.$$

Conseguenze

- Il valore della funzione obiettivo del primale calcolata in una qualsiasi soluzione ammissibile è un "upper bound" per il valore ottimo del duale.
- Il valore della funzione obiettivo del duale calcolata in una qualsiasi soluzione ammissibile è un "lower bound" per il valore ottimo del primale.
- I valori ottimi del primale e del duale sono finiti.
- l'ottimo del primale è sempre maggiore o uguale dell'ottimo del duale (in effetti si dimostrerà che coincidono).

Corollario 1. *Dato il problema primale avente soluzione ammissibile $\bar{x}$ e il corrispondente problema duale $\mathcal{D}$ avente soluzione ammissibile $\bar{y}$ tali che $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$, allora $\bar{x}$ è soluzione ottima del primale e $\bar{y}$ è soluzione ottima del duale.*

Corollario 2. *Se il problema primale (duale) non è limitato inferiormente (superiormente), allora il problema duale (primale) è inammissibile.*

%dimostrazione Supponiamo per assurdo che il problema primale sia illimitato e il

Teorema 2 (Teorema della dualità forte)**.** *Sia dato il problema primale $\mathcal{P}$ con soluzione ammissibile ottima $\bar{x} = (B^{-1}b, 0)$, allora il problema duale $\mathcal{D}$ ammette soluzione ottima $\bar{y}^T = c_B^T B^{-1}$.*

Teorema 3 (Formulazione alternativa del teorema della dualità forte)**.** *Se uno dei due problemi primale o duale ammette soluzione ottima finita, anche l'altro ha una soluzione ottima finita ed i corrispondenti valori delle funzioni obiettivo coincidono. Se uno dei due problemi è illimitato, l'altro non ammette soluzioni ammissibili.*

Osservazione 1. *La condizione di ammissibilità della soluzione duale è quindi la condizione di ottimalità primale.*

Se il problema primale ammette ottimo finito, sia B la base ottima e x la soluzione di base del primale associata a B. Allora si ha

$$x_B = B^{-1}b, \quad x_N = 0,$$

e i costi ridotti sono non negativi, cioè

$$c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T.$$

Ora alla base B possiamo associare la seguente soluzione di base duale

$$y_B^T = c_B^T B^{-1}.$$

Dimostriamo che è ammissibile per il duale, cioè che

$$\begin{aligned} y_B^T B &\leq c_B^T &(1)\\ y_B^T N &\leq c_N^T &(2) \end{aligned}$$

Si ha

$$y_B^T B = c_B^T B^{-1} B = c_B^T,$$

quindi (1) è soddisfatta. Inoltre

$$y_B^T N = c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T,$$

ed è verificata anche la (2). In conclusione y_B è una soluzione ammissibile duale. La condizione di ammissibilità della soluzione duale è quindi la condizione di ottimalità primale.

4 Calcolo della soluzione duale

La soluzione ottima del duale può essere ottenuta direttamente dalla tabella finale del problema primale. Nella tabella finale dell'algoritmo del simplesso applicato al problema primale, si ha

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N.$$

Sia $B_{iniziale}$ la base della tabella iniziale dell'algoritmo del simplesso applicato al problema primale e si ponga $N = B_{iniziale}$. Essendo le colonne di $B_{iniziale}$ formate solo da elementi nulli tranne uno, pari ad 1 in corrispondenza di una variabile scarto e pari a -1 in corrispondenza di una variabile surplus, la soluzione ottima duale è data da

$$\begin{aligned} y^T &= c_{B\,iniziale}^T - r_{B\,iniziale}^T, \quad &\text{se } x_{B\,iniziale} \text{ scarto}\\ y^T &= r_{B\,iniziale}^T - c_{B\,iniziale}^T, \quad &\text{se } x_{B\,iniziale} \text{ surplus,} \end{aligned}$$

dove $c_{B\,iniziale}^T$ è il vettore dei coefficienti di costo delle variabili associate alle colonne che erano in base nella tabella iniziale, cioè associate a $B_{iniziale}$; $r_{B\,iniziale}^T$ è il vettore dei costi ridotti della tabella finale delle variabili che erano in base nella tabella iniziale.

5 Condizioni di complementarietà

Teorema 4. *Sia dato un problema primale del tipo*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

ed il relativo problema duale

$$\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0. \end{cases} \qquad (\mathcal{D}_s)$$

Siano x ed y soluzioni ammissibili rispettivamente per il primale e per il duale. Allora x e y sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le ***condizioni di complementarietà***

$$\begin{aligned} y^T(Ax - b) &= 0\\ (y^T A - c^T)x &= 0 \end{aligned}$$

Data una coppia di problemi primale e duale

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{cases} \quad (\mathcal{D}_a)$$

le condizioni di complementarietà si riducono alla relazione

$$(y^T A - c^T)x = 0.$$

Osservazione 2.

$$y^T(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \Big) y_i = 0.$$

Se $y_i > 0$ *allora* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, *se* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ *allora* $y_i = 0$. *Se il prezzo ombra non è nullo, tutta la risorsa è utilizzata (vincolo saturo), se c'è un surplus di risorsa, il prezzo ombra sarà nullo.*

6 Simplesso duale

Supponiamo che nella tabella del simplesso si ottenga una componente di base negativa $x_r = \beta_r$ e costi ridotti $r_j \geq 0 \; \forall j$. In altre parole, supponiamo di avere una base con soluzione duale associata

	x_1	$\dots$	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	$\dots$	x_n	
x_1	.	.	.	.	.	.	.	.	$\beta_1 \geq 0$
x_2	.	.	.	.	.	.	.	.	$\beta_2 \geq 0$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_r	.	.	.	.	.	.	.	.	$\beta_r < 0$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_i	.	.	.	.	.	.	.	.	$\beta_i \geq 0$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_m	.	.	.	.	.	.	.	.	$\beta_m \geq 0$
r_j	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$-z_0$

ammissibile ($r_j \geq 0, \forall j$), ma con soluzione di base primale non ammissibile ($x_r = \beta_r < 0$). Si vuole mantenere l'ammissibilità duale $r_j \geq 0$ ed ottenere l'ammissibilità primale $x_B \geq 0$. Si applica allora il simplesso al problema duale. Pertanto, si genera una sequenza di basi con soluzioni di base associate duali ammissibili e soluzioni di base associate primali non ammissibili, fino a quando non si trova una base per la quale sia verificata anche l'ammissibilità per la soluzione di base primale (a meno che il problema duale non sia illimitato).

6.0.1 Criterio di ottimalità

Se $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ allora la base B è ottima. Inoltre si ottengono le soluzioni ottime del primale $\bar{x}^T = (B^{-1}b, 0)$ e del duale $\bar{y}^T = c_B^T B^{-1}$.

6.0.2 Criterio di non limitatezza

Sia $\alpha_{rj} \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, n$. In tal caso, per una qualsiasi soluzione ammissibile $x \geq 0$, il vincolo r-esimo non sarebbe soddisfatto, essendo $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj}x_j \geq 0$ e $\beta_r < 0$. Il primale non ammette soluzioni ammissibili e quindi il duale è non limitato. Si osserva che non si può verificare il caso in cui il problema duale non sia ammissibile, in quanto per ipotesi esiste una soluzione duale ammissibile associata alla base B.

6.0.3 Criterio di uscita di un vettore

Se esiste $\alpha_{rs} < 0$, si effettua un'operazione di pivot nell'elemento (r, s), per ottenere il nuovo termine noto $\beta_r > 0$. Esce dalla base la variabile x_r tale che

$$\beta_r = \min\{\beta_i : \beta_i < 0\}.$$

Qualora vi fossero più variabili nelle quali si raggiunge il minimo, si sceglie quella con indice minore.

6.0.4 Criterio di entrata di un vettore

La variabile entrante viene scelta in modo che sia mantenuta l'ammissibilità duale (l'ottimalità primale) $r_j \geq 0$. Dopo l'operazione di cardine si hanno i nuovi costi ridotti

$$r'_j = r_j - \alpha_{rj}\frac{r_s}{\alpha_{rs}}, \quad \forall j.$$

Deve essere

$$\begin{aligned} r_j - \alpha_{rj}\frac{r_s}{\alpha_{rs}} &\geq 0 \\ r_j &\geq \alpha_{rj}\frac{r_s}{-|\alpha_{rs}|}. \end{aligned}$$

Se $\alpha_{rj} \geq 0$, la diseguaglianza è verificata. Se $\alpha_{rj} < 0$, allora

$$r_j \geq -|\alpha_{rj}|\frac{r_s}{-|\alpha_{rs}|} \Rightarrow \frac{r_j}{|\alpha_{rj}|} \geq \frac{r_s}{|\alpha_{rs}|}.$$

Si sceglie quindi l'indice s in modo che si abbia

$$\min\left\{\frac{r_j}{|\alpha_{rj}|} : \alpha_{rj} < 0, j = 1, \ldots, n,\right\}.$$

6.0.5 I passi dell'algoritmo

1. Sia data una soluzione di base non ammissibile primale ed ammissibile duale $y^T = c_B^T B^{-1}$.
2. **Se** $x_j \geq 0$, $\forall j$ **STOP**: la soluzione di base corrente ottima è ammissibile.

   Altrimenti si scelga una riga r, $r = 1, \ldots, m$, tale che $x_r < 0$ per determinare la variabile da fare uscire dalla base.
3. **Se** $\alpha_{rj} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ **STOP**: il problema primale non è ammissibile ed il problema duale è illimitato.

   Altrimenti si calcolino i rapporti $\frac{r_j}{\alpha_{rj}}$, con $\alpha_{rj} < 0$, $j = 1, \ldots, n$ e si scelga la variabile entrante x_s con $s = \arg\min\{\frac{r_j}{|\alpha_{rj}|} : \alpha_{rj} < 0, j = 1, \ldots, n\}$.
4. Si aggiorni la tabella con pivot dato dall'elemento (r, s) e si torni al passo 2.

7 Analisi post-ottimale

Vediamo come varia la soluzione ottima del problema

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

perturbando i termini noti oppure i coefficienti di costo.

7.1 Perturbazione dei termini noti

Perturbiamo la componente b_r del vettore dei termini noti del problema iniziale in modo che diventi $b_r + \Delta b_r$. Si indichi con $\bar{b}$ il vettore dei termini noti perturbato. La nuova soluzione ottima primale è $x^T = (B^{-1}\bar{b}, 0)$

CASO I Se $B^{-1}\bar{b}$ ha delle componenti negative, la soluzione di base primale non è più ammissibile. Tuttavia, poichè $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$, la soluzione duale è ancora ammissibile. Si può allora risolvere il problema duale avviando il metodo del simplesso duale a partire dalla base iniziale B.

CASO II Se $B^{-1}\bar{b} \geq 0$ la soluzione di base primale è ancora ammissibile. Poichè $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ anche la soluzione duale risulta essere ammissibile. Pertanto la base B è ottima. La nuova soluzione primale è $x^T = (B^{-1}\bar{b}, 0)$ e la soluzione duale è $y^T = c_B^T B^{-1}$.

Vediamo come varia il valore ottimo della funzione obiettivo:

$$c_B^T B^{-1}\bar{b} - c_B^T B^{-1} b = c_B^T B^{-1}(\bar{b} - b) = y^T(\bar{b} - b) = y_r \Delta b_r.$$

Il valore y_r misura come varia il valore ottimo del problema al variare del termine noto. Se y_r è grande, piccole variazioni di b_r inducono notevoli variazioni del valore ottimo. Se y_r è piccolo, il valore ottimo è poco sensibile a variazioni del termine noto.