UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Triennale in Matematica

Geometrie del Toro
e
Gruppo Modulare

Il Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato
Simone Castellitto
Matricola
499713

Anno Accademico 2018-2019
Marzo 2020

Indice:

Introduzione

L’obbiettivo che ha portato alla scrittura di questa tesi è stato rispondere alla domanda: quando due geometrie sul toro sono simili? Nella trattazione daremo più risposte a questa domanda e giungeremo a risultati interessanti. Per sviluppare questo argomento, nel primo capitolo definiremo cosa intendiamo per geometria sul toro, definendola in due modi diversi, e daremo i principali risultati riguardo la sua modellizzazione, utili per il resto della trattazione. Definiremo anche il concetto di similitudine fra due geometrie. Nel secondo capitolo risponderemo alla domanda che ci siamo posti con due approcci diversi. Infine nel terzo capitolo introdurremo una definizione di numeri complessi basata sui concetti introdotti nel secondo capitolo che ci permetterà infine di applicare quanto abbiamo trovato al semipiano superiore complesso, trovando infine un interessante gruppo di trasformazioni, ovvero il gruppo modulare.

ASPETTI PRELIMINARI

Iniziamo dando la definizione di cosa significa specificare una geometria, per specificare una geometria abbiamo bisogno di due nozioni fondamentali:

●Un insieme di punti per il quale non ha importanza come li definiamo a patto che siano ben definiti.

●Una definizione di distanza che soddisfi le seguenti proprietà:

(a) $|ab| \geq 0$, e $|ab = 0|$ se e solo se $a = b$;

(b) $|ab| = |ba|$;

(c) $|ac| \leq |ab| + |bc|$.

(d) Per ogni a,b esistono $p_1,...,p_n$ t. c. $p_1=a$, $p_n=b$ tali che esistono $\alpha,\beta>0$ numeri naturali tali che:

$$|p_1 p_2| + \ldots + |p_{n-1} p_n| - |ab| < \alpha$$

e

$$|p_i p_{i+1}| < \beta \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

dove a,b,c e $p_1,...,p_n$ sono punti della geometria.

1.1. Un mondo connesso

Consideriamo un quadrato ABCD come in figura1 e chiamiamolo K. Diremo che due punti sui lati del quadrato sono opposti se il segmento che li unisce è parallelo agli altri due lati. Per esempio i punti *P*, *Q* e i punti *S*, *T* nella figura sottostante sono opposti, inoltre lo sono fra loro tutti e quattro i vertici del quadrato.

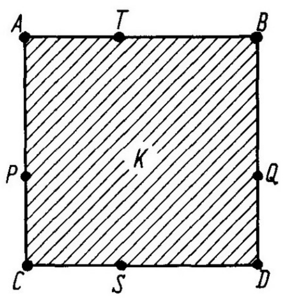


figura1

Supponiamo che tracciando un percorso in questa figura ogni volta che viene raggiunto un punto su un lato si venga immediatamente portati nel punto opposto. Quindi definiamo la distanza fra due punti qualsiasi *P* e *Q* la lunghezza del percorso più breve fra i due punti tenendo conto di questa proprietà. Perciò la distanza fra due punti opposti sarà ovviamente zero e quindi nella geometria dobbiamo considerarli come un unico punto. Incollando i lati *AC* e *BD* e successivamente le circonferenze *ATB* e *CSD* otteniamo una figura a ciambella come illustrato in figura2(c).

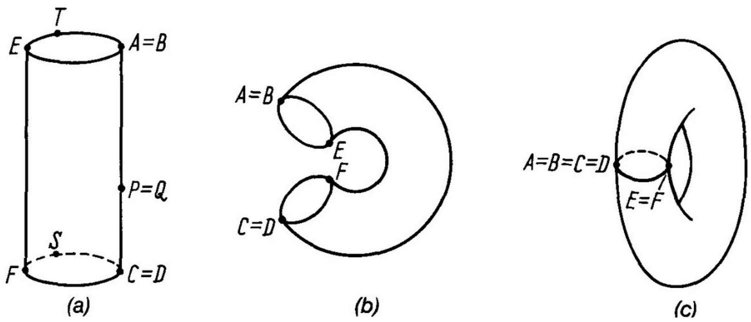
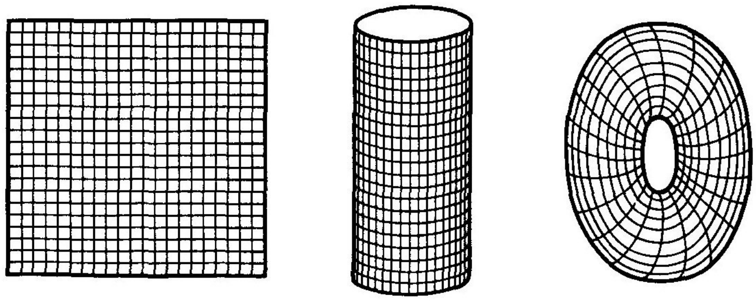


figura2

Chiamiamo questo oggetto che abbiamo ottenuto toro. Tuttavia, questo processo porterà necessariamente a distorcere le distanze, come possiamo vedere dalla figura sottostante, perciò usiamo il toro solo come una mappa distorta della nostra geometria che tuttavia ci aiuta a immaginare la geometria più chiaramente.



Abbiamo descritto la geometria del toro usando una rappresentazione intuitiva di un un servizio di trasporto che unisce i lati di un quadrato. Ora cercheremo di dare una definizione più formale.

Prendiamo come punti della geometria del toro i punti interni di un quadrato K e i lati ma solamente prendendone uno per ogni coppia di punti opposti. Per questo ammetteremo i lati *AB* e *AC* del quadrato ma non i lati *BD* e *CD*.

Possiamo dare la definizione di curva in questo caso come ciò che otteniamo facendo muovere un oggetto puntiforme con continuità nel piano. Mentre chiameremo traccia una linea composta da varie curve.

Definiamo la distanza fra due punti P e Q come la lunghezza della traccia più breve f nel quadrato composto dalle curve $f_1,...,f_n$, tali che f_1 inizi in P e f_n finisca in Q; e per ogni $i=1,...,n-1$, f_{i+1} inizi nel punto in cui finisce il predecessore f_i.

Per studiare questa geometria immaginiamo di essere su un piano e cercheremo di rimpiazzare lo studio delle traccie f del quadrato con quello di certe curve del piano. Con tale scopo ricopriamo il piano di quadrati uguali al quadrato originale K che ha definito la nostra geometria inizialmente.

Due punti P_1 e P_2 appartenenti a quadrati differenti K_1 e K_2 verranno detti equivalenti se la traslazione che porta K_1 in K_2 porta anche P_1 in P_2. In particolare quindi ogni punto del piano sarà equivalente a qualche punto di K, quindi corrispondente a un punto del toro e tutti i punti del piano che rappresentano un punto del toro sono equivalenti fra loro. Usando la notazione vettoriale possiamo dire che Q_1 e Q_2 sono equivalenti se Q_2 può essere ottenuto da Q_1 da una traslazione di un vettore della forma $k_1e_1+k_2e_2$, dove k_1 e k_2 sono numeri interi e $e_1=CD$, $e_2=CA$ sono i vettori formati dai lati del quadrato K a partire dal vertice *C*.

Definiamo ora la distanza: siano Q_1 e Q_2 due punti del piano e siano *A* e *B* gli insiemi contenenti i punti equivalenti rispettivamente di Q_1 e Q_2. Posso allora definire la distanza fra Q_1 e Q_2 come la distanza (nel piano) minore fra i punti di *A* e di *B*.

Quello che possiamo intuire da questo ragionamento quindi è che la geometria del toro (ma in generale ogni geometria) possiamo costruirla in due modi: nel primo modo, come un insieme di punti di un figura piana con la distanza fra i punti data dalla lunghezza della traccia più breve. Nel secondo modo, come un insieme di punti equivalenti nel piano. Avendo definito il concetto di equivalenza sull'esistenza di alcune isometrie[1] del piano (le traslazioni nel caso che abbiamo visto). Nel secondo metodo definiremo quindi la distanza come la classica distanza sul piano, ma fra insiemi di punti equivalenti. Partendo da questo secondo metodo si ottengono dei risultati di cui non ci occuperemo nella trattazione ma che ci porteranno a dire che la geometria del toro è quella generata a partire da un particolare gruppo di isometrie del piano Γ (gruppo uniformemente discontinuo di isometrie nel piano) che sarà generato da due traslazioni, quindi sarà del tipo $\Gamma=\langle T_a, T_b\rangle$.

1.2 Similitudini fra Geometrie

Ora che abbiamo visto come definiamo la nostra geometria vogliamo cercare di capire quando due geometrie definite in questo modo, con coppie di vettori differenti possono essere considerate simili: Per prepararci alla risposta di tale questione dobbiamo definire il concetto di similitudine fra geometrie.

Immaginiamo che due geometrie Σ Σ' abbiano degli abitanti, i quali possono comunicare fra loro tramite una radio e come risultato della discussione debbano convincersi o meno che le misurazioni fatte nelle rispettive geometrie diano lo stesso risultato. Questo possiamo esprimerlo matematicamente con una mappa da Σ a Σ' che preservi le distanze (isometria) tuttavia non stiamo tenendo conto di un aspetto, infatti affinché gli abitanti di entrambe le geometrie possano comparare le misurazioni debbono stabilire un'unità di misura comune a entrambi. Non possiamo però trovare un modo in cui gli abitanti delle rispettive geometrie possano averla. Quindi ha molto più senso per gli abitanti verificare che tutte le misure che possono fare nelle rispettive geometrie portino a risultati proporzionalmente uguali. Questo ci porta al concetto di similitudine.

1 Definiamo un'isometria come una trasformazione che preserva le distanze

DEFINIZIONE

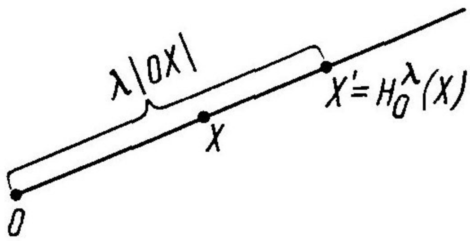
Supponiamo che ci sia una mappa *F* da tutto *Σ* a tutto *Σ'* e una costante $\lambda>0$ tale che

$$|F(A)F(B)|=\lambda|AB|$$

Per ogni *A*,*B* punti di *Σ*; allora le geometrie *Σ* e *Σ'* sono dette simili e *F* viene chiamata similitudine. Il coefficiente λ si dice rapporto della similitudine.

La similitudine riflette naturalmente il fatto che le proprietà sulle geometrie sono le stesse. Essa corrisponde all'idea che se tutti gli oggetti di un mondo, compresi noi stessi e i nostri strumenti di misurazione, vengono simultaneamente incrementati dello stesso fattore, allora non saremmo in grado di notare il cambiamento.

Un esempio familiare di similitudine è quello di Omotetia, di rapporto λ, rispetto a un punto fisso *O*. Ovvero la trasformazione che porta ogni punto *X* nel punto *X'* giacente sulla stessa retta passante per *O* e *X* e alla distanza $\lambda|OX|$ da *X*. Indicheremo l'omotetia H_O^λ.



GEOMETRIE SUL TORO

2.1 Geometrie sul Toro e la Figura Modulare

Consideriamo geometrie sul toro e cerchiamo di determinare quando sono simili. Ricordiamo che ogni gruppo Γ che definisce una geometria del toro è determinato da una coppia di vettori generatori (e_1,e_2); possiamo quindi scegliere una qualsiasi coppia di vettori non collineari del piano e Γ sarà il gruppo di tutte le traslazioni dei vettori del tipo me_1+ne_2, dove m e n sono numeri interi. Se facciamo partire tutti i vettori dallo stesso punto O allora il gruppo sarà rappresentato dal reticolo piano:

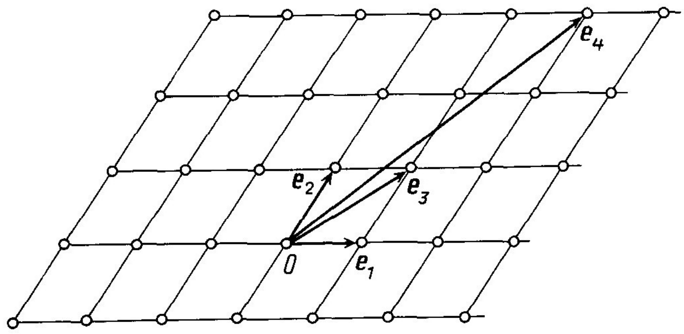


figura3

Il nostro problema si riduce quindi a capire quando due reticoli sono simili. Possiamo fissare il punto O, e quindi solo considerare similitudini F che fissano questo punto. Ci aiuta il risultato di tale lemma:

LEMMA1

Supponiamo che O sia un arbitrario punto fissato del piano. Ogni similitudine F del piano si ottiene come la composizione di alcune isometrie con l'omotetia H_O^{λ} . Chiamiamo quindi λ il rapporto di F.

DIMOSTRAZIONE

Sia F una similitudine piana con rapporto λ, consideriamo la mappa $G=FH_O^{(1/\lambda)}$. Segue dalla definizione che G è un'isometria.

Nell'uguaglianza $G(X)=F(H_O^{(1/\lambda)}(X))$

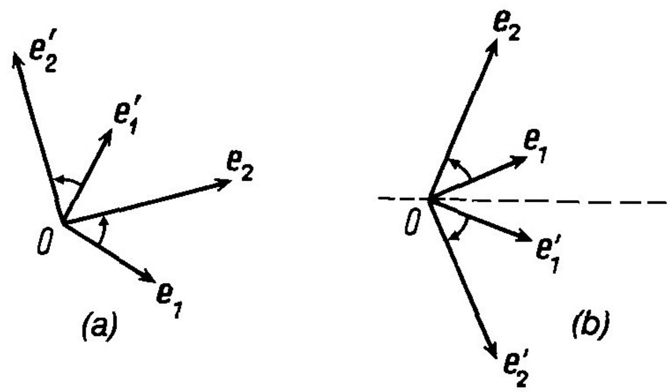
sostituiamo $H_O^{\lambda}(Y)$ per X. Ovviamente, $H_O^{(1/\lambda)}(H_O^{\lambda}(Y))=Y$, cosi che

$G(H_O^{\lambda}(Y))=F(Y)$

per ogni Y abbiamo: $F=GH_O^{(1/\lambda)}$. Poichè G è un'isometria questo prova il lemma. ■

Secondo tale lemma quindi ogni similitudine è ottenuta come la composizione di una omotetia centrata in O e qualche isometria G che lascia O fissato. Dal teorema di Chasles, secondo cui ogni isometria del piano è una traslazione o una riflessione o una glissoriflessione, segue che G può essere solo una rotazione con centro O o una riflessione su una linea che passa per O.
Il problema si divide quindi in due parti:
La ***prima parte*** è quella di capire quando due coppie di vettori (e_1,e_2) e (e_1',e_2') sono simili; ovvero: quando può esistere una similitudine F tale che $F(e_1)=e_1'$ e $F(e_2)=e_2'$?
Questa questione è abbastanza semplice e tutta la difficoltà del problema risiede nella ***seconda parte***, ovvero rispondere alla domanda: Quando coppie differenti di vettori generatori generano lo stesso reticolo?. Per esempio il reticolo nella Figura3 è generato da (e_1,e_2) e da (e_3,e_4).

La prima domanda che ci poniamo quindi è: quando due coppie di vettori (e_1,e_2) e (e_1',e_2') sono simili?



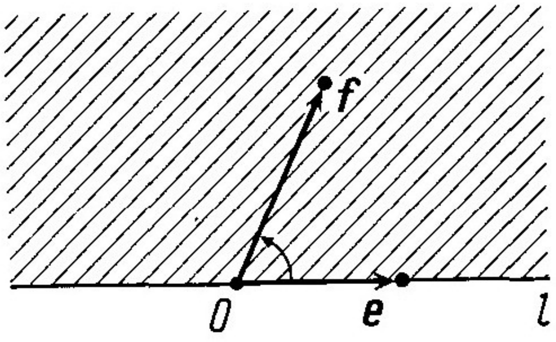
Sotto una similitudine il rapporto fra le lunghezze dei vettori: $|e_1|/|e_2|$ si conserva. Definiamo con angolo la misura della rotazione da e_1 a e_2, un angolo positivo corrisponde quindi a una rotazione in senso antiorario. Sarebbe allettante poter dire che anche l'angolo tra e_1 e e_2 si conserva. Tuttavia questo non è del tutto corretto. Per il Lemma1, la similitudine F è della forma GH_O^λ , dove H_O^λ è un'omotetia e G un'isometria, e quindi l'angolo si conserva se G è una rotazione e diventa negativo se G è una riflessione. Allora possiamo dire che l'angolo si conserva a meno del segno.
Abbiamo quindi ottenuto una condizione necessaria e sufficiente affinché due coppie di vettori siano simili:
Se (e_1,e_2) e (e_1',e_2') sono tali che :

$$\frac{e_1}{e_2}=\frac{e_1{}'}{e_2} \quad \text{e} \quad \theta = \pm\theta' \quad ,$$

dove θ è l'angolo fra e_1 e e_2, e θ' è quello fra e_1' e e_2', allora le due coppie sono simili.
Questo ovviamente perché per la condizione: $\theta = \pm\theta'$, possiamo applicare a (e_1,e_2) un'isometria G per far si che l'angolo tra e_1 e e_2 sia uguale a quello fra e_1' e e_2'. Dopodichè rimane

solo da applicare un'omotetia G centrata in O tale che $G(e_1)= e_1'$; quindi per la condizione sulle lunghezze avremo, $G(e_2)= e_2'$.

Usando ciò che abbiamo visto, data una coppia qualsiasi di vettori, possiamo trovare sempre una coppia simile con determinate proprietà. Per esempio, fissando un vettore e nel piano, ogni coppia di vettori non collineari (e_1,e_2) è simile a una coppia (e,f) per cui l'angolo fra e e f è minore di π; e per ogni coppia (e_1,e_2) la coppia (e,f) è unica. Il vettore e è di solito fissato collineare con una linea l orizzontale, e quindi la condizione che l'angolo sia minore di π sta nel fatto che la punta del vettore f sta nel semipiano superiore a l.



Abbiamo quindi, in questo modo, una corrispondenza biunivoca fra le coppie di vettori non collineari a meno di similitudini e i punti del semipiano superiore.

Ora passiamo alla seconda e più interessante domanda e qui possiamo decidere di avere due approcci differenti:

Una via è quella di determinare in ogni reticolo un modo per avere i due vettori generatori il più semplici possibile. Quindi ridurre il problema a capire quando due coppie di vettori di questo tipo generano lo stesso reticolo.

Altrimenti possiamo determinare quando due coppie di vettori generano lo stesso reticolo e quindi rappresentare l'insieme di tutti i reticoli a meno di similitudini. Iniziamo con il primo approccio:

DEFINIZIONE:

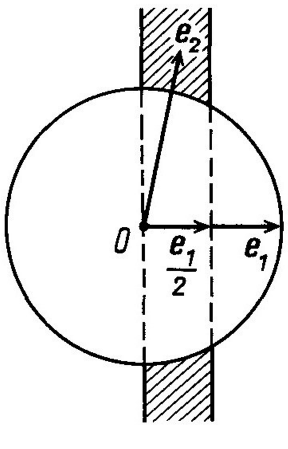
Due vettori (e_1,e_2) si dicono *vettori generatori ridotti* se soddisfano le condizioni:

(*i*) $|e_1| \geq |e_2|$

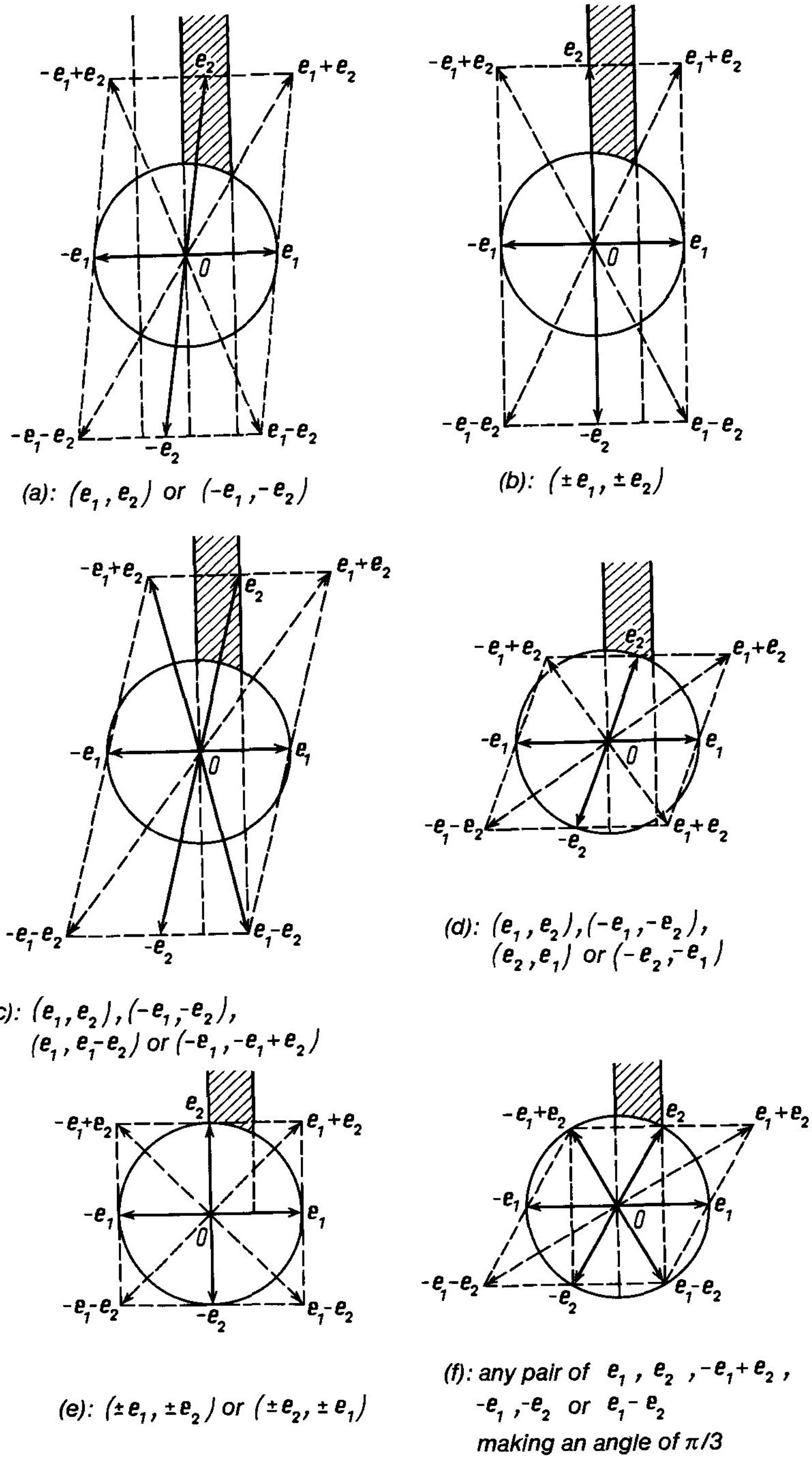
(*ii*) La proiezione di e_2 su e_1 è minore o uguale della metà della lunghezza di e_1.

(*iii*) l'angolo fra e_1 e e_2 non è ottuso.

Osserviamo che geometricamente le condizioni equivalgono a dire che la punta del vettore e_2 deve appartenere all'area indicata nella figura qui accanto. Possiamo facilmente mostrare che la definizione è ben posta, infatti fissati (e_1,e_2) ogni altra coppia di vettori generatori ridotti del reticolo sarà congruente a (e_1,e_2).



Quanto detto si evince facilmente nella figura sottostante. Che mostra tutte le posizioni possibili di coppie di vettori che soddisfano le condizioni (*i*), (*ii*) e (*iii*).



(a): (e_1, e_2) or $(-e_1, -e_2)$

(b): $(\pm e_1, \pm e_2)$

(c): $(e_1, e_2), (-e_1, -e_2),$
(e_1, e_1-e_2) or $(-e_1, -e_1+e_2)$

(d): $(e_1, e_2), (-e_1, -e_2),$
(e_2, e_1) or $(-e_2, -e_1)$

(e): $(\pm e_1, \pm e_2)$ or $(\pm e_2, \pm e_1)$

(f): any pair of e_1, e_2, $-e_1+e_2$,
$-e_1$, $-e_2$ or e_1-e_2
making an angle of $\pi/3$

Ora possiamo quindi dare una soluzione al nostro problema di similitudini fra reticoli. Sappiamo che ogni reticolo ha dei vettori generatori ridotti e che sono unici a meno di congruenze; Sappiamo che reticoli simili avranno vettori generatori ridotti simili. Perciò il problema si riduce a descrivere a meno di similitudini i vettori generatori ridotti. Una descrizione la possiamo fare ricordandoci che ogni coppia di vettori generatori ridotti si può ricondurre, avendo fissato un vettore e nel piano, alla coppia *(e,f)*, dove *e* è fissato, mentre *f* appartiene alla parte evidenziata rappresentata nella figura4.

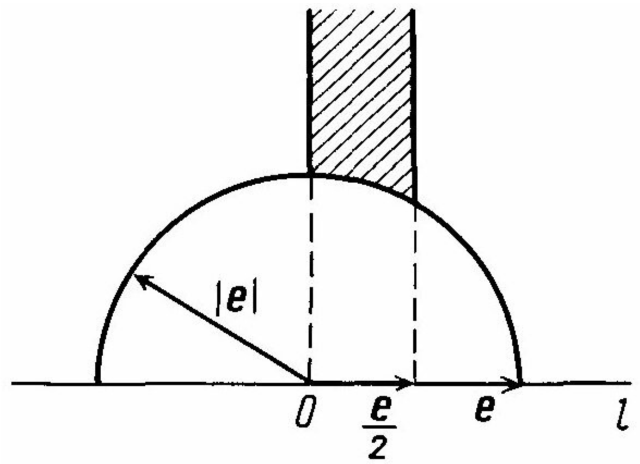


figura4

Quindi punti differenti di questa figura rappresentano reticoli differenti. Chiamiamo questa figura Figura Modulare.

Abbiamo quindi dato una risposta alla questione che ci eravamo posti, tuttavia la forma di questa riposta possiamo trovarla in un certo senso poco rigorosa, infatti questa figura che abbiamo trovato non ci ricorda nessuna figura nota ed è in generale difficilmente studiabile.

Per capire meglio ciò che abbiamo ottenuto cerchiamo di risolvere il problema usando il secondo approccio.

2.2.Quando due coppie di vettori generano lo stesso reticolo?

Cerchiamo ora di determinare le condizioni per cui (e_1,e_2) e (e_1',e_2') generano lo stesso reticolo.

La prima cosa che possiamo notare è che e_1' e e_2' devono appartenere al reticolo generato da (e_1,e_2) , ovvero posso esprimerli nella forma:

$$
\begin{aligned}
e_1' &= me_1+ne_2 \\
&\qquad\qquad\qquad (1) \\
e_2' &= ke_1+le_2
\end{aligned}
$$

dove m,n,k e l sono interi. Viceversa anche e_1 e e_2 devono appartenere al reticolo generato da (e_1',e_2'):

$$
\begin{aligned}
e_1 &= m'e_1'+n'e_2' \\
&\qquad\qquad\qquad (2) \\
e_2 &= k'e_1'+l'e_2'
\end{aligned}
$$

dove m',n',k', e l' sono interi.

LEMMA

Per le coppie di vettori (e_1,e_2) e (e_1',e_2') valgono le condizioni (1) e (2) se e solo se generano lo stesso reticolo.

DIMOSTRAZIONE

L'implicazione da sinistra a destra è ovvia.

Per dimostrare l'implicazione da destra a sinistra procediamo per doppia inclusione:

Sia il vettore $pe_1'+qe_2'$ appartenente al reticolo generato da (e_1',e_2'), allora esso possiamo per (1) scriverlo come:

$$p(me_1+ne_2)+q(ke_1+le_2)$$

che possiamo riscrivere come:

$$(pm+qk)e_1+(pn+ql)e_2$$

che appartiene quindi al secondo reticolo. Perciò avremo che il primo reticolo è contenuto nel secondo e con argomentazioni simili anche che il secondo è contenuto nel primo.■

Cerchiamo ora di scrivere le condizioni (1) e (2) in una forma più compatta:

$$e_1' = me_1+ne_2$$

$$e_2' = ke_1+le_2 \quad ,$$

moltiplicando la prima per l e la seconda per n otteniamo:

$$le_1' = lme_1+lne_2$$

$$ne_2' = nke_1+nle_2 \quad .$$

Ora sottraendo le due equazioni possiamo scrivere:

$$l e_1' - n e_2' = (lm - nk) e_1 \quad .$$

Nello stesso modo ma moltiplicando le (1) per *k* e *m* otteniamo:

$$k e_1' = mk e_1 + nk e_2$$

$$m e_2' = mk e_1 + ml e_2$$

da cui:

$$m e_2' - k e_1' = (ml - nk) e_2 \quad .$$

Sia *ml-nk =d*, (*d*≠0), allora:

$$l e_1' - n e_2' = d e_1 \quad \text{e} \quad -k e_1' + m e_2' = d e_2$$

da cui:

$$\frac{l}{d} e_1 - \frac{n}{d} e_2' = e_1 \quad \text{e} \quad -\frac{k}{d} e_1' + \frac{m}{d} e_2' = e_2 \quad .$$

Ora comparando con le (2) otteniamo

$$m' = \frac{l}{d} \ , \ n' = -\frac{n}{d} \ , \ k' = -\frac{k}{d} \ , \ l' = \frac{m}{d} \qquad (3)$$

con un procedimento identico partendo da (2) possiamo anche scrivere:

$$m = \frac{l'}{d'} \ , \ n = -\frac{n'}{d'} \ , \ k = -\frac{k'}{d'} \ , \ l = \frac{m'}{d'} \ , \quad (4)$$

dove *d'=m'l'-n'k'*.

Sostituendo una qualsiasi delle (3) in (4) otteniamo infine che *dd'=1*, ovvero che *d=d'=1* o *d=d'=-1*. Perciò $ml - nk = \pm 1$ .Facendo lo stesso percorso a ritroso possiamo quindi enunciare il prossimo Teorema.

TEOREMA

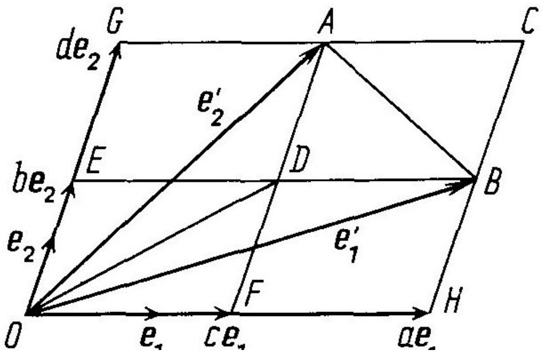
Siano *m,l,n* e *k* numeri interi, e sia $e_1' = m e_1 + n e_2$ e $e_2' = k e_1 + l e_2$;

allora la coppia (e_1',e_2') genera lo stesso reticolo se e solo se $ml - nk = \pm 1$.

Questo risultato può essere anche visto geometricamente in questo modo:

LEMMA

Se $e_1' = a e_1 + b e_2$ e $e_2' = c e_1 + d e_2$, allora l'area Δ' del parallelogramma costruito su e_1' e e_2' è uguale a $|ad - bc| \Delta$, dove Δ è l'area del parallelogramma costruito su e_1 e e_2.



DIMOSTRAZIONE

Supponiamo il caso in cui *a,b,c* e *d* sono positivi, lasciando gli altri casi, che hanno una trattazione simile, al lettore. Denotiamo Δ e Δ' le aree dei parallelogrammi costruiti rispettivamente su (e_1,e_2) e (e_1',e_2'). Allora *Δ'=2area(OAB);* d'altra parte

area(ADBC) = 2area(ADB), area(ADEG) = 2area(ADO)

e

area(*DBHF*) = 2*area*(*DBO*)

Allora,

Δ' = area(ADBC) + area(ADEG) + area(DBHF) =area(OGCH) – area(OEDF).

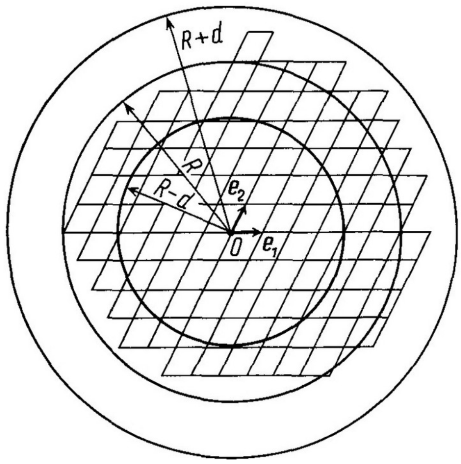
Quindi,

area(OGCH) = adΔ, area(OEDF) = bcΔ,

da cui *Δ' =(ad-bc)Δ.* ■

Mettendo insieme il Lemma e il Teorema giungiamo alla conclusione che per ogni coppia di vettori *(e,f)* che generano lo stesso reticolo, l'area del parallelogramma costruito su di essi è la stessa.

Possiamo dare una caratterizzazione di Δ indipendente dai vettori *(e,f)*. Se infatti consideriamo un disco di raggio R centrato in un punto del reticolo avremo, come si evince dalla figura5 (*d*=diagonale del parallelogramma), che l'area del disco è molto vicina a *n(R)Δ* dove *n(R)* è il numero di punti del reticolo contenuti nel disco, intuitivamente è quindi chiaro che avremo:



$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R^2}{n(R)} = \Delta .$$

figura5

Riassumendo abbiamo quindi visto che due coppie di vettori (e_1,e_2) e (e_1',e_2') sono equivalenti se e solo se generano lo stesso reticolo e che tale equivalenza si può riassumere nelle condizioni:

$$e_1' = me_1 + ne_2 \quad , \quad e_2' = k e_1 + l e_2 \quad \text{e} \quad ml - nk = \pm 1.$$

Ora però diamo una nuova definizione di equivalenza: due coppie di vettori *(*e_1*,*e_2*) e (*e_1*',*e_2*')* sono equivalenti se generano reticoli simili. Come abbiamo visto, ogni coppia *(*e_1*,*e_2*)* è equivalente a una coppia *(e,f)*, dove *e* è un vettore fissato e *f* è nel semipiano superiore ad *e*. Perciò ci limitiamo a considerare equivalenze fra coppie di vettori *(e,f) e (e,f')*.

Come possiamo esprimere l'equivalenza in questo caso? Notiamo che devono esistere degli interi *m,n,k* e *l* tali che $ml-nk=\pm 1$, e tali che la coppia di vettori *(me+nf, ke+lf)* costruita da essi soddisfa la seguente condizione:

Se *F* è una similitudine per cui:

F(me+nf)=e e *F(ke+lf)* cade nel semipiano superiore, allora deve essere *F(ke+lf)=f'*.

Questa definizione è però ancora lungi dall'essere chiara e formale e nei seguenti capitoli cercheremo di renderla tale.

L’ALGEBRA DELLE SIMILITUDINI: I NUMERI COMPLESSI

3.1 Definizione geometrica dei numeri complessi

In accordo con §3, Lemma1, ogni similitudine *F* può essere scritta nella forma $F=GH_O^{\lambda}$ dove G è un’isometria e H_O^{λ} è un’omotetia centrata in un punto fisso *O*. Ora consideriamo il caso in cui *G* sia una rotazione in senso antiorario di un angolo *φ* intorno allo stesso *O*, ovvero $G=R_O^{\varphi}$. Indichiamo questa trasformazione con $F_{\lambda,\varphi}$. Possiamo immediatamente verificare che avremo:

$$F_{\lambda,\varphi}F_{\lambda',\varphi'}=F_{\lambda\lambda',\varphi+\varphi'}$$

e (1)

$$(F_{\lambda,\varphi})^{-1}=F_{\lambda^{-1},-\varphi}$$

Un angolo *φ* sarà sempre considerato a meno di somme di *2kπ*, con *k* intero; quindi possiamo anche scrivere *2π-φ* invece di *-φ*.

Fissiamo ora nel piano un vettore *e=OP* di lunghezza 1. Ovviamente ogni similitudine è univocamente determinata per il suo effetto su *e* dal vettore $x=F_{\lambda,\varphi}(e)$, esso infatti verrà mandato in un vettore *x* di lunghezza *λ* che ha angolo con *e* pari a *φ*. Perciò scriveremo F_x per indicare $F_{\lambda,\varphi}$.

Questa correlazione fra similitudini e vettori nel piano ci suggerisce di trasportare la legge di composizione (1) per le similitudini ai vettori. L’operazione risultante per i vettori la chiameremo moltiplicazione, allora il prodotto tra i vettori *x* e *y* è definito come il vettore *z* tale che:

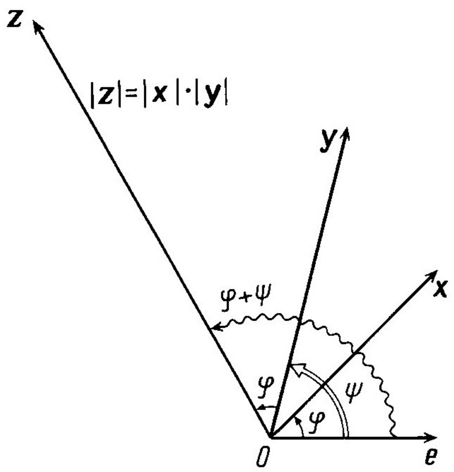


figura6

$$F_z=F_xF_y \qquad (2)$$

Comparandola con (1), possiamo dire che z è il prodotto fra x e y se la lunghezza di z è uguale al prodotto delle lunghezze di x e y e l’angolo che forma con e è uguale alla somma degli angoli che x e y formano con e come rappresentato nella figura6.

Avremo quindi:

$$F_z(e)=F_x(F_y(e)).$$

Per definizione di F_z e F_y abbiamo $F_z(e)=z$ e $F_y(e)=y$. Per questo la moltiplicazione fra vettori può anche essere scritta come:

$$z=F_x(y).$$

Come già visto in (1) quindi la composizione tra similitudini si riduce alla moltiplicazione fra i λ e la somma fra i φ. Poiché entrambe queste operazioni soddisfano la priopriètà commutativa, allora abbiamo $F_{\lambda,\varphi} F_{\lambda',\varphi'}=F_{\lambda',\varphi'} F_{\lambda,\varphi}$

e quindi $xy=yx$. Nello stesso modo si vede che la moltiplicazione fra vettori che abbiamo definito soddisfa la proprietà associativa $x(yz)=(xy)z$. $F_e=e$ manda e in se stesso, quindi sarà l'identita. Infatti si vede facilmente che gioca il ruolo di elemento neutro della moltiplicazione. Infine vediamo sempre dalla (1) per ogni vettore x diverso da zero esiste un vettore x^{-1} tale che $xx^{-1}=e$, basterà infatti prendere x^{-1} che ha lunghezza $1/|x|$ e angolo opposto all'angolo di x (Figura7).

Le proprietà di addizione sono come quelle che ci aspettiamo normalmente per i vettori con 0 elemento neutro e $-x$ come inverso.

Poiché una similitudine porta parallelogrammi in parallelogrammi, abbiamo ciò che possiamo vedere in Figura2:

$$F(x+y)=F(x)+F(y)$$

In particolare se $F=F_z$, abbiamo

$$z(x+y)=zx+zy \quad ,$$

ovvero la legge distributiva della moltiplicazione sull'addizione (figura8).

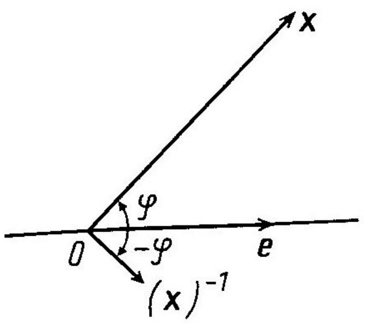


figura7

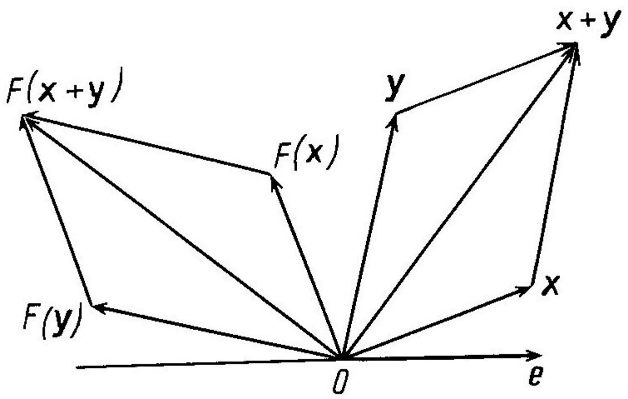


figura8

In virtù di questa completa analogia che abbiamo fatto con la definizione di moltiplicazione e addizione, i vettori nel piano possiamo chiamarli come numeri. Gli ordinari numeri reali sono inclusi in questi nuovi numeri che abbiamo definito come caso particolare: sono infatti i vettori ae, dove a è un numero reale.

È quindi ormai ovvio che i numeri che abbiamo definito in questo modo possiamo chiamarli *Numeri Complessi.*

Se rappresentiamo il numero complesso *e* come prima nel piano, non scrivendo l'intero vettore OX=x, ma identificandolo solo con la sua punta x, esso sarà semplicemente *1* e il vettore *ae* sarà scritto solamente come il corrispondente numero reale *a*. La linea passante per *O* su cui passa il vettore *e* verrà chiamata linea reale.

Consideriamo il vettore *f* di lunghezza *1* e angolo *π/2* che rappresenta una rotazione di *π/2*. Poiche $R_O^{\pi/2} R_O^{\pi/2} = R_o^{\pi} = F_{-e}$, abbiamo $f^2=-e$. Riserviamo a notazione speciale *i* per *f*.

Poiché ogni vettore ha un'unica espressione come combinazione di *e* e *f*, ogni numero complesso può essere scritto in modo unico nella forma $z=a+bi$, dove *a* e *b* sono numeri reali, *a* è chiamata la parte reale di *z* e si denota *Re(z)*, mentre *b* la parte immaginaria *Im(z)*. Poiché $i^2=-1$ e dalle regole di moltiplicazione e addizione che abbiamo visto, possiamo scrivere come segue il prodotto fra numeri complessi:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bdi^2+adi+bci=(ac-bd)+(ad-bc)i \quad .$$

Sia *z* un numero complesso, allora la sua lunghezza come vettore viene chiamata modulo di *z* e essa si indica con |*z*|. se $z=a+bi$ allora $z=\sqrt{a^2+b^2}$. Dalla moltiplicazione abbiamo $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ che implica la relazione:

$$|z_1\, z_2|^2=|z_1|^2\, |z_2|^2$$

Sia $z_1=x+iy$ e $z_2=u+iv$, allora da questa relazione otteniamo l'identità:

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

L'angolo *φ* che il vettore *z* forma con l'asse reale è chiamato l'argomento di *z* e si indica *arg(z)*. Dalle regole della moltiplicazione abbiamo: $arg(z_1z_2)=arg(z_1)arg(z_2)$.

Infine, supponiamo che $z=a+bi$ sia rappresentato dal punto *P*, allora il numero complesso *a-bi* è rappresentato dal punto *P'* che è una riflessione di *P* sulla linea reale. *P'* è chiamato il complesso coniugato di *z*, e si indica con $\bar{z}$. Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

$$z\bar{z}=|z|^2,\ \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2\ ,\ \overline{z_1\, z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2\ \ e\ \ \overline{z_1/z_2}=\bar{z}_1/\bar{z}_2\ .$$

Ora, definiti in questo modo i numeri complessi ci proponiamo di verificare il seguente domanda: Usando i numeri complessi, possiamo scrivere in modo semplice ogni similitudine del piano che fissa il punto *O*?

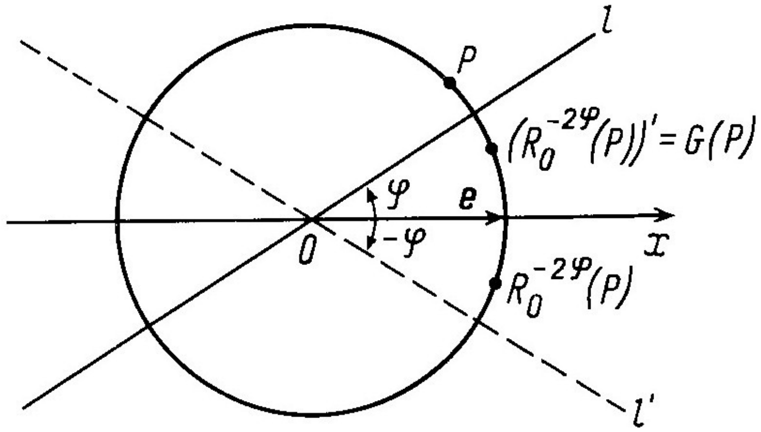
Abbiamo visto che $F=GH_O^{\lambda}$ e per come li abbiamo definiti sappiamo che ogni similitudine del tipo $R_O^{\varphi} H_O^{\lambda}$ si può esprimere con i numeri complessi.

Ora vogliamo considerare quindi l'altro caso, quando *G* non è una rotazione ma una riflessione lungo una retta passante per *O*.

Se *l* è la linea reale avremo che la nostra riflessione porta ogni z in $\bar{z}$. Se *l* non è la linea reale possiamo considerare la riflessione come la composizione di una rotazione e una riflessione su un asse dato, che sceglieremo come l'asse reale.

Se l'asse *l* forma quindi un angolo φ con l'asse reale, allora dobbiamo ruotare di

-2φ e dopo fare la riflessione sull'asse reale per ottenere lo stesso risultato della riflessione originale. Ciò si vede con più chiarezza nella figura qui sotto.



Abbiamo quindi il seguente Lemma:

LEMMA

Consideriamo i punti del piano come numeri complessi, ogni similitudine che fissa *O* può essere scritta come la trasformazione che manda z in $z_o z$, o che manda z in $\overline{z_O z}$; dove z_O è il numero complesso che definisce la trasformazione.

Nel prossimo capitolo considereremo i punti del piano come numeri complessi, come abbiamo descritto sopra, chiameremo il piano come piano complesso. Ricordiamo che per avere questa rappresentazione dei punti del piano dobbiamo fissare un punto *O* e un vettore *e* da cui gli angoli saranno misurati in senso antiorario.

3.2.Similitudini fra Reticoli e Gruppo modulare

Abbiamo visto che una coppia di vettori non collineari può essere rappresentata da un punto del semipiano superiore. Scegliamo il vettore *e* relativo a questo semipiano come vettore unità e consideriamo i punti del semipiano come numeri complessi.

La condizione per cui un numero complesso *z* appartenga al semipiano superiore complesso è: $\mathrm{Im}(z)\geq 0$.

Come coppia di vettori rappresentata da *z* possiamo scegliere *(1,z)* o una coppia simile. Ora scriviamo la condizione per cui i numeri complessi z_1 e z_2 rappresentano reticoli simili. Per quanto abbiamo visto una coppia di vettori che rappresentano la stessa griglia di $(1,z_1)$ può essere scritta nella forma $(m+nz_1, k+lz_1)$. Per trovare il punto del semipiano superiore che rappresenta il reticolo generato da questi due vettori, dobbiamo creare una similitudine tale che:

1. Il primo vettore va in *1*
2. Porta il secondo vettore in un vettore del semipiano superiore.

Per il Lemma precedente ogni similitudine è determinata da un numero complesso z_0; e ci sono due casi possibili: *z* viene mandato in $z_0 z$ o *z* viene mandato in $\overline{z_0}\, z$.

Prima di tutto cerchiamo di soddisfare la condizione 1. ovvero $z_0(m+nz_1)=1$ o $\overline{z_0(m+nz_1)}=1$ che sono in realtà la stessa condizione poiché $\bar{1}=1$. Quindi $z_0=(m+nz_1)^{-1}$. Perciò la nostra similitudine manda *z* in $z/(m+nz_1)$ o in $\overline{z/(m+nz_1)}$, quale dei due casi dipenderà da (2).

(2) richiede che il secondo vettore vada nel semipiano superiore. Per quanto detto $k+lz_1$ viene mandato in $k+lz_1/m+nz_1$ o in $\overline{k+lz_1/m+nz_1}$, ovvero:

$$\frac{k+lz_1}{m+nz_1} \quad \text{o} \quad \frac{k+l\,\bar{z}_1}{m+n\,\bar{z}_1}$$

Poichè la condizione che z ricada nel semipiano superiore è che l'immagine di *z* sia maggiore di zero allora dobbiamo capire quanto vale $\mathrm{Im}(k+lz_1/m+nz_1)$.

Con tale proposito moltiplichiamo sopra e sotto per il complesso coniugato:

$$\frac{k+lz_1}{m+nz_1}=\frac{k+lz_1}{m+nz_1}\frac{k+l\,\bar{z}_1}{m+n\,\bar{z}_1}=\frac{km+lnz_1\,\bar{z}_1+lmz_1+kn\,\bar{z}_1}{|m+nz_1|^2}$$

Poichè $z_1\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1)$ infine otteniamo:

$$\frac{k+lz_1}{m+nz_1}=\frac{km+lnz_1\bar{z}_1+lmz_1+kn\,\bar{z}_1}{|m+nz_1|^2}+i\frac{(lm-nk)\,\mathrm{Im}(z_1)}{|m+nz_1|^2}.$$

Ora z_1 è stato scelto nel semipiano superiore, per questo $\mathrm{Im}(z_1)>0$. Inoltre $\mathrm{Im}[(k+lz_1)/(m+nz_1)]$ ha lo stresso segno di $lm-nk$.

Abbiamo visto che $lm-nk=\pm 1$. Perciò se $lm-nk=1$, allora $(k+lz_1)/(m+nz_1)$ è nel semipiano superiore. Al contrario se $lm-nk=-1$, allora $k+l\bar{z}_1/m+n\bar{z}_1$ sarà nel semipiano superiore. Quanto abbiamo ottenuto ci permette quindi di formulare il seguente Teorema:

TEOREMA

La condizione necessaria e sufficiente affinché i numeri z_1 e z_2 del semipiano superiore complesso generino lo stesso reticolo è che z_2 sia ottenuto da z_1 in uno dei due modi seguenti:

$$z_2=\frac{k+lz_1}{m+nz_1} \quad \text{se } ml-nk=1 \qquad (1)$$

$$z_2=\frac{k+l\bar{z}_1}{m+n\bar{z}_1} \quad \text{se } ml-nk=-1 \qquad (2)$$

dove *l*,*m*,*n* e *k* sono interi.

L’insieme di tali trasformazioni è un gruppo, infatti:

Supponiamo per esempio di avere due trasformazioni di tipo (1): una data da (1) e l’altra da

$$z_3=\frac{k'+l'z_2}{m'+n'z_2} \text{ con } m'l'-n'k'=1.$$

Sostituendo la (1) in questa avremo che

$$z_3=\frac{k''+l''z_1}{m''+n''z_1}$$

dove *k”=k’m+l’k, l”=k’n+l’l, m”=m’m+n’k* e *n”=m’n+n’l.* Da questo si deduce che:

$$l''m''-k''n''=knn'k'+lml'm'-lmk'n'-knl'm'=(lm-kn)(l'm'-k'n')=1.$$

Quindi la composizione di due trasformazioni di tipo (1) è una trasformazione di tipo (1).

Nello stesso modo si può vedere che la composizione di trasformazioni (1) e (2) in qualsiasi ordine da una trasformazione di tipo (2), e che la composizione di due trasformazioni di tipo (2) è una trasformazione di tipo (1).

Infine l’inverso di una trasformazione di tipo (1) o di tipo (2) sarà una trasformazione dello stesso tipo con i coefficienti *l’=m, k’=-k, m’=l, n’=-n.*

Il gruppo composto dalle traformazioni di tipo (1) e (2) viene chiamato gruppo modulare.