PROOF. Immediato dalla dim. del Lemma. $\square$

Si osservi come il lemma asserisca la veridicità di una formula logica quantificata non banale, ovvero, per ogni linguaggio L, se L è regolare, allora vale:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall z \left(\begin{array}{l} (z \in L \land |z| \geq n) \rightarrow \exists u, v, w \\ \qquad \left(\begin{array}{l} z = uvw \land |uv| \leq n \land |v| > 0 \land \\ \forall i\, (i \in \mathbb{N} \rightarrow uv^i w \in L) \end{array} \right) \end{array} \right) \tag{1.1}$$

Il Pumping lemma viene largamente usato per mostrare che un dato linguaggio non è regolare (qualora non lo sia!). Per mostrare ciò, si assume che L non sia regolare e si deve mostrare che vale la negazione della formula (1.1), ovvero (si veda il Capitolo 4 per le tecniche di complementazione di una formula logica).

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z \left(\begin{array}{l} z \in L \land |z| \geq n \land \\ \qquad \forall u, v, w \left(\begin{array}{l} z = uvw \land |uv| \leq n \land |v| > 0 \\ \qquad \rightarrow \exists i\, (i \in \mathbb{N} \land uv^i w \notin L) \end{array} \right) \end{array} \right) \tag{1.2}$$

Nel prossimo esempio si illustrerà un corretto uso di questa tecnica, che dato l'annidamento di quantificazioni, può indurre ad errore.