Proof. Sia $M = \langle \{q_0, \dots, q_{n-1}\}, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ DFA tale che $L = L(M)$ (esiste poiché L è regolare). Sia $z = a_1 \cdots a_m$, $m \geq n$, $z \in L$ (si noti l'arbitrarietà della scelta di z; se una tale z non esistesse, il lemma varrebbe banalmente). Per $i = 1, \dots, n$ ($n \leq m$) si consideri l'evoluzione degli stati $\hat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$. In tal modo, considerando anche lo stato iniziale q_0, si raggiungono in tutto $n+1$ stati. Poiché gli stati dell'automa sono n per ipotesi, esiste (almeno) uno stato $\bar{q}$ raggiunto (almeno) due volte.

$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Dunque avremo una situazione del tipo

$\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P$
$\equiv Q \vee \neg P$
$\equiv \neg P \vee Q$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_{i_1}) &= \bar{q} \\ &= \hat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_{i_1} \cdots a_{i_2}) \quad i_2 > i_1 \end{aligned}$$

A questo punto, si prenda $u = a_1 \cdots a_{i_1}$, $v = a_{i_1+1} \cdots a_{i_2}$, $w = a_{i_2+1} \cdots a_m$.

Sappiamo dunque che $\hat{\delta}(q_0, u) = \bar{q}$ e $\hat{\delta}(q_0, uv) = \bar{q}$. Usando l'esercizio 3.8 si ha che $\hat{\delta}(\bar{q}, v) = \bar{q}$.

Inoltre, sappiamo per ipotesi che $\hat{\delta}(q_0, uvw) = q'$ per qualche $q' \in F$; assieme al fatto che $\hat{\delta}(q_0, uv) = \bar{q}$, usando l'esercizio 3.8 si ha che $\hat{\delta}(\bar{q}, w) = q'$.

Per induzione su $n \geq 0$ si mostra che $\hat{\delta}(q_0, uv^i) = \bar{q}$. Con l'ultima proprietà vista, si ha dunque che $\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = q' \in F$.

$|uv| \leq n$ per costruzione. $\square$