

4. Hausaufgabenblatt

Abgabe: 09.12.2024 (12:00 Uhr) auf ISIS (als PDF) in Gruppen mit maximal 4 Personen. Die Hausaufgabe kann nur von eingetragenen Gruppen abgegeben werden.

Hinweise:

- Sie dürfen das Internet zur Hilfe nehmen, müssen aber alle verwendeten Quellen angeben (insbesondere ChatGPT). Plagiate werden nicht toleriert und werden scharf geahndet.
- Falls nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen. Antworten ohne Begründung erhalten **0 Punkte**.
- Stellen Sie keine Fragen oder Ideen, die konkrete Hinweise auf die Lösungen geben, öffentlich ins ISIS-Forum.

Vorwort. Wie Sie bereits erfahren haben, müssen Sie in diesem Semester Hausaufgaben abgeben, um ein Hausaufgabenkriterium zu erfüllen. Hierbei werden Sie regelmäßig Beweise schreiben müssen. Diesen Prozess würden wir gerne für Sie und auch für die TutorInnen möglichst angenehm gestalten. Insbesondere, damit die TutorInnen Ihre Abgaben verstehen und nachvollziehen können, ist es dabei wichtig, dass Ihre Beweise lesbar, verständlich und sauber aufgeschrieben sind. Dazu einige Hinweise:

- Beweise sind deutsche Texte. Das heißt, Umformungen, Gleichungen, Definitionen und andere mathematische Konstrukte gehören in den Text eingebunden. Insbesondere ist es wichtig, in vollständigen Sätzen zu schreiben.
- Vermeiden Sie Symbole wie \implies , \forall , \wedge im Text: Statt „Somit gilt $x = 0 \implies$ der Algorithmus terminiert“ schreiben Sie zum Beispiel „Somit gilt $x = 0$, woraus folgt, dass der Algorithmus terminiert“.
- Das Ziel Ihrer Beweise ist es, die LeserInnen (in Ihrem Fall Ihre TutorInnen) von der Korrektheit derer zu überzeugen.

Aufgabe 1: **Entscheidbarkeit** (10 Punkte)

Seien L_1, \dots, L_n semi-entscheidbare Sprachen über dem endlichen Alphabet Σ , sodass $\bigcup_{i=1}^n L_i = \Sigma^*$ und $L_i \cap L_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass alle Sprachen L_1, \dots, L_n entscheidbar sind.

Aufgabe 2: **Abgeschlossenheit von Semi-Entscheidbarkeit** (10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle semi-entscheidbaren Sprachen L_1 und L_2 ist $L_1 \setminus L_2$ auch semi-entscheidbar. (5 P)

(b) Für alle semi-entscheidbaren Sprachen L_1 und L_2 ist $\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ auch semi-entscheidbar. (5 P)

Aufgabe 3: **Nicht (co-)semi-entscheidbare Sprachen** (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass es Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt, die weder semi- noch co-semi-entscheidbar sind. (Eine Sprache L ist genau dann *co-semi-entscheidbar*, wenn ihr Komplement semi-entscheidbar ist.)

Hinweis: Sie können z. B. mittels Diagonalisierung zeigen, dass eine solche Sprache existiert.