



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Sviluppo di un Attitude & Heading Reference System
basato su filtri di Kalman per l'integrazione di dati inerziali,
GPS e magnetometrici**

Relatori:

Prof. Ing. Eugenio Denti

Prof. Ing. Roberto Galatolo

Ing. Francesco Schettini

Candidato:

Giorgio Gasparroni

Anno Accademico 2007-2008

Sommario

Il presente lavoro si occupa dello sviluppo di un AHRS basato sul filtro di Kalman per l'integrazione delle misure fornite da sensori inerziali di basso costo, da un ricevitore GPS e da magnetometri, con l'obiettivo di conseguire elevati livelli di accuratezza nella stima degli angoli di assetto nelle severe condizioni di esercizio dei velivoli di alte prestazioni.

Mediante l'integrazione delle misure delle velocità angolari il sistema calcola l'assetto con errori che tendono a crescere rapidamente a causa dei rilevanti errori di misura dei giroscopi. Dalla stima del vettore gravità basata sulle misure degli accelerometri, dalle misure magnetometriche e dalla stima del campo magnetico terrestre effettuata con il WMM (*World Magnetic Model*), applicando il metodo di Gauss-Newton si ricavano delle misure dell'assetto indipendenti dall'integrazione delle velocità angolari, con cui un filtro di Kalman Esteso stima e corregge gli errori di assetto e gli errori di *Bias* dei giroscopi. Per migliorare le prestazioni del sistema si applicano molteplici accorgimenti. Dalla velocità fornita dal GPS e dalle misure delle velocità angolari si stima l'accelerazione del velivolo, sottraendola poi dalle misure degli accelerometri per ottenere una migliore stima del vettore gravità durante le manovre. L'accuratezza della misura dell'assetto dipende in buona parte dall'accelerazione del velivolo: affinché le correzioni degli stati del sistema vengano effettuate attribuendo un peso minore alle misure dell'assetto quando le manovre sono più intense, i parametri del filtro variano in tempo reale in funzione del modulo della misura degli accelerometri e della velocità angolare di imbardata, grandezze usate per descrivere la severità delle manovre. La logica di funzionamento del sistema è arricchita da due funzioni: il *Reject* delle misure, che consiste nello scartare le misure ritenute non valide secondo un opportuno criterio, ed il *Reset* dell'assetto, ovvero la re-inizializzazione dell'integrazione delle velocità angolari da nuovi valori di assetto ritenuti accurati.

Nella presente trattazione si descrivono le manovre di riferimento ed i modelli di errore dei sensori usati per condurre le simulazioni, si affronta lo sviluppo del sistema in ambiente SIMULINK, si effettua l'operazione di *Tuning* del filtro di Kalman e si valutano le prestazioni del sistema e l'efficacia dei vari accorgimenti applicati per migliorare le prestazioni.

Indice

SOMMARIO II

INDICE III

1	INTRODUZIONE	1
1.1	I sistemi AHRS	1
1.2	Obiettivo	6
1.3	Caratteristiche del sistema	6
1.4	Metodo di analisi	10
1.5	Valutazione delle prestazioni.....	11
1.6	Suddivisione della Tesi.....	11
2	RICHIAMI GENERALI	13
2.1	Sistemi di Riferimento.....	13
2.1.1	Assi Inerziali	13
2.1.2	Assi Terrestri.....	13
2.1.3	Assi Verticali Locali	14
2.1.4	Assi Corpo.....	14
2.1.5	Terne dei sensori	14
2.2	Angoli di Eulero	15
2.2.1	Definizione	15
2.2.2	Trasformazione di vettori.....	16
2.3	Quaternioni	16
2.3.1	Elementi di algebra dei quaternioni	17
2.3.2	Trasformazione di vettori.....	18
2.3.3	Relazioni con gli angoli di Eulero.....	19
2.3.4	Vantaggi	20
2.4	Equazioni differenziali di assetto	21
2.5	Elementi di base dei processi stocastici.....	22
2.5.1	Definizioni di interesse	22
2.5.2	Rumore Bianco.....	26
2.5.3	Shaping Filter	27
2.5.4	Processo di Wiener (Random-Walk)	27

2.5.5	Processo di Gauss-Markov.....	28
2.6	Modello discreto equivalente	29
2.7	Filtro di Kalman discreto.....	33
2.7.1	Introduzione	33
2.7.2	Equazioni iterative del filtro.....	36
2.8	Filtro di Kalman Esteso	39
2.8.1	Definizione	39
2.8.2	Linearizzazione del modello	40
2.8.3	Aspetti della realizzazione del filtro	42
2.9	Sistema a “stati aumentati”.....	44
2.10	Analisi Monte Carlo	45
2.11	World Magnetic Model	46
3	MODELLI DI ERRORE DEI SENSORI	49
3.1	Sensori inerziali	49
3.1.1	Misalignment.....	51
3.1.2	Bandwidth	53
3.1.3	Constant Bias (CB)	54
3.1.4	Long Term Bias Stability (LTBS).....	55
3.1.5	Short Term Bias Stability (STBS).....	55
3.1.6	Bias Temperature Shift (BTS)	56
3.1.7	Measurement Noise.....	57
3.1.8	Long Term Scale Factor Stability (LTSFS)	58
3.1.9	Asimmetry (AS)	59
3.1.10	Non-Linearity (NL)	59
3.1.11	Scale Factor Temperature Shift (SFTS)	60
3.1.12	G and G ² Sensitivity	61
3.1.13	Saturation	62
3.1.14	Quantization	63
3.1.15	Sampling	63
3.1.16	Parametri di errore dei giroscopi.....	64
3.1.17	Parametri di errore degli accelerometri.....	64
3.2	Magnetometri	66
3.2.1	Parametri di errore dei magnetometri	67
3.3	GPS.....	67
3.3.1	Introduzione	67
3.3.2	Errori di pseudorange	69
3.3.3	Dilution Of Precision	71
3.3.4	Accuratezza della posizione	73
3.3.5	Modello di errore di posizione	75
3.3.6	Modello di errore di velocità.....	76

4	MANOVRE DI RIFERIMENTO	79
4.1	Dati di volo di riferimento	79
4.1.1	ManvTEST4	80
4.1.2	LightTurbulence_leveled	80
4.1.3	HighTurbulence_leveled	80
4.2	Sequenze di ingresso	84
4.2.1	Sequenza di Sviluppo	84
4.2.2	Sequenza di Allineamento	84
4.2.3	Sequenze di Tuning	85
4.2.4	Sequenze di Valutazione	86
5	SVILUPPO DEL SISTEMA AHRS	87
5.1	Descrizione generale	87
5.2	Modello matematico del sistema	90
5.2.1	Dinamica linearizzata dell'assetto	90
5.2.2	Errori dei giroscopi	94
5.2.3	Misura dell'assetto	95
5.2.4	Modello completo di perturbazione	95
5.2.5	Discretizzazione del modello	96
5.2.6	Stime degli stati	97
5.3	Ingressi	99
5.4	Compensazione dei sensori inerziali	99
5.5	Calcolo dell'assetto	102
5.6	Riferimento Verticale	104
5.6.1	Stima dell'accelerazione del velivolo	106
5.7	Misura dell'assetto	111
5.7.1	Metodo di Gauss-Newton	111
5.7.2	Metodo Master-Slave	115
5.8	Filtro di Kalman	122
5.9	Modalità di funzionamento – Covarianze del modello	127
5.10	Allineamento	129
5.11	Reject delle misure	133
5.12	Reset dell'assetto	136
5.13	Unità di Controllo	140
5.14	Altri blocchi	143
6	TUNING DEL FILTRO	145
6.1	Criterio di Tuning	146
6.2	Procedimento applicato	146
6.2.1	Modalità con GPS attivo	147
6.2.2	Modalità con GPS disattivo	149
6.2.3	Modalità di Allineamento	150

7 RISULTATI	151
7.1 Prestazioni	151
7.2 Efficacia delle soluzioni	152
7.3 Esempi di funzionamento	158
7.3.1 Esempi sulle tre manovre di riferimento	158
7.3.2 Confronto di diverse sensibilità di stima dei <i>Bias</i>	158
8 CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	165
8.1 Conclusioni.....	165
8.2 Sviluppi futuri.....	167
RINGRAZIAMENTI	170
BIBLIOGRAFIA	171
APPENDICE A MANOVRA LIGHTTURBOLENCE_LEVELED	173
APPENDICE B MANOVRA HIGHTURBOLENCE_LEVELED	176

1 Introduzione

1.1 I sistemi AHRS

L'AHRS è un dispositivo che combina le funzioni dell'orizzonte artificiale e della girobussola, fornendo gli angoli di beccheggio, di rollio e di imbardata del velivolo. Questo sistema trova applicazione in molteplici campi. Esso può essere impiegato per rilevare l'assetto di veicoli aerei, terrestri e marini, fornendo le informazioni al pilota, al sistema di controllo di bordo e ad altri apparati avionici, ad esempio ai sistemi di puntamento delle antenne. L'AHRS ha diversi vantaggi rispetto all'orizzonte artificiale e alla girobussola: esso è più affidabile, fornisce dati più accurati e non soffre i problemi di *gimbal-lock* come alcuni orizzonti artificiali. Questo sistema risulta utile anche per fornire le misure dei sensori inerziali ad altri apparati di bordo ed al sistema di controllo del velivolo.

Il funzionamento dell'AHRS è basato sull'integrazione delle velocità angolari misurate da giroscopi triassiali installati solidalmente al velivolo (piattaforma analitica o *strapdown*). In linea di principio, se si dispone di informazioni esatte sull'assetto iniziale e di giroscopi di elevata accuratezza, l'integrazione delle equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione nel tempo dell'assetto in funzione delle velocità angolari è sufficiente a fornire gli angoli di assetto del velivolo con bassi errori per lunghi periodi di funzionamento. A causa degli errori sull'assetto iniziale, degli errori di integrazione numerica delle equazioni differenziali e soprattutto a causa delle imperfezioni dei giroscopi, questo tipo di soluzione comporta dei crescenti errori di assetto che limitano il tempo di funzionamento entro il quale i dati forniti dal sistema sono sufficientemente accurati. Il problema principale nella realizzazione dell'AHRS secondo questa soluzione concettualmente elementare è legato alla necessità di usare dei giroscopi dai costi e dagli ingombri improponibili per la maggior parte delle applicazioni a cui il sistema è destinato.

La soluzione di base per la realizzazione dell'AHRS, che consente di abbassare i costi e gli ingombri del sistema, impiega giroscopi di qualità inferiore a quelli necessari nel caso precedente e si avvale di sensori aggiuntivi con i quali limitare gli errori di assetto. Un sistema

di questo tipo è costituito da giroscopi, accelerometri e magnetometri, tutti triassiali ed installati su piattaforma *strapdown*, ed impiega evoluti metodi di elaborazione, come il filtro di Kalman, per l'integrazione di dati provenienti da fonti diverse. Lo schema della soluzione di base è rappresentato in Figura 1.1. Il principio di funzionamento è il seguente:

- Partendo da valori iniziali ottenuti dagli accelerometri, gli angoli di assetto vengono calcolati ed aggiornati ad alta frequenza mediante l'integrazione delle velocità angolari. Principalmente a causa dei rilevanti errori di misura dei giroscopi, si sviluppano degli errori di assetto che crescono rapidamente nel tempo. Gli angoli di beccheggio e di rollio così calcolati vengono inviati al filtro di Kalman, mentre si ignora l'angolo di imbardata.
- Ad opportuni intervalli di tempo, dalle misure degli accelerometri si effettua una rilevazione del vettore gravità, mediante il quale si ricava la misura degli angoli di beccheggio e di rollio in modo indipendente dall'integrazione delle velocità angolari. Questi angoli di assetto, affetti anch'essi da errori, vengono inviati a loro volta al filtro di Kalman.
- Il filtro di Kalman elabora i dati provenienti dal calcolo e dalla misura dell'assetto per ottenere degli angoli di beccheggio e di rollio aggiornati ad alta frequenza ed affetti da errori limitati. Le misure dell'assetto vengono impiegate dal filtro per stimare e correggere gli errori che si sviluppano nell'integrazione delle velocità angolari.
- Gli accelerometri sono sensibili alla forza di gravità ed alle accelerazioni a cui il

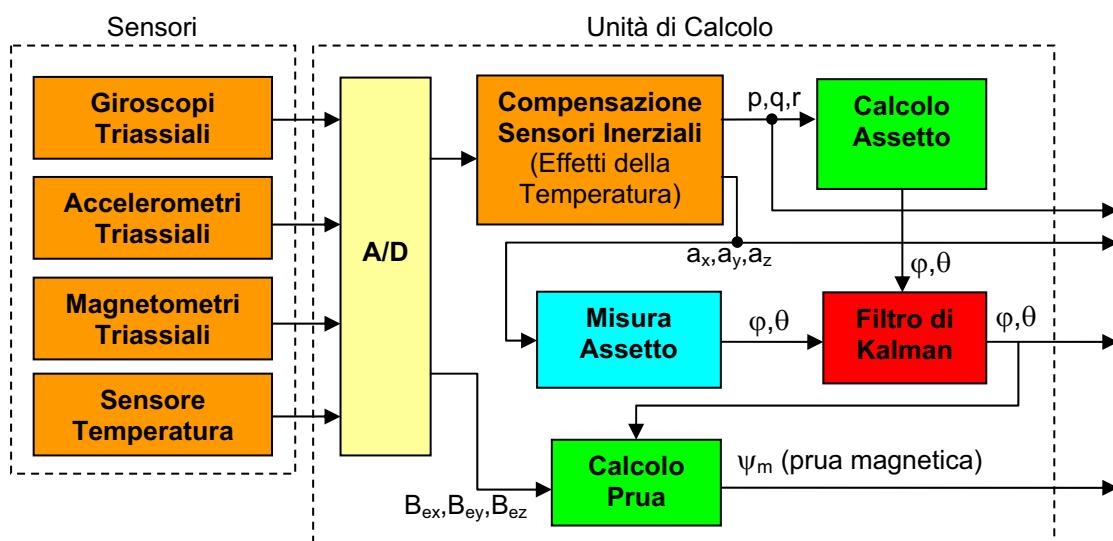


Figura 1.1 Schema della soluzione di base per la realizzazione dell'AHRS.

velivolo è soggetto rispetto ad un riferimento inerziale. Quando il velivolo si muove di moto rettilineo uniforme, le misure degli accelerometri si possono usare per rappresentare efficacemente il vettore gravità e le misure degli angoli di beccheggio e di rollio che ne derivano sono accurate. Negli altri casi le accelerazioni del velivolo si sovrappongono all'accelerazione di gravità e le misure dell'assetto presentano errori che possono diventare notevoli, in particolare nelle virate.

- Quando vengono effettuate delle manovre, la logica di funzionamento del sistema è tale da interrompere il processo di correzione attuato dal filtro, per evitare che le misure degradate dell'assetto introducano degli errori nelle uscite del sistema. In queste circostanze, quindi, gli angoli di beccheggio e di rollio forniti dall'AHRS coincidono con il risultato dell'integrazione delle velocità angolari e gli errori crescono secondo la loro dipendenza dagli errori di misura dei giroscopi. L'esecuzione delle manovre viene individuata basandosi sul modulo della misura degli accelerometri: una differenza superiore ad una soglia minima fra i moduli dell'accelerazione misurata e dell'accelerazione di gravità indica la presenza di accelerazioni dovute alle manovre.
- Dagli angoli di beccheggio e di rollio forniti dal filtro, il vettore campo magnetico terrestre, misurato dai magnetometri, viene ruotato dalla terna di riferimento solidale al velivolo ad una terna T' avente l'asse Z' coincidente con l'asse Z_{VL} degli Assi Verticali Locali (quindi piano $X'Y'$ orizzontale) e l'asse X' allineato con la prua del velivolo. Dalla proiezione del vettore campo magnetico sul piano $X'Y'$ si determina l'angolo di prua magnetica del velivolo, il quale viene direttamente fornito in uscita al sistema.
- All'interno dell'AHRS è spesso presente un sensore di temperatura, il quale viene usato per applicare alle misure dei sensori inerziali delle leggi di compensazione degli errori dipendenti dalla temperatura. Tali errori possono diventare molto importanti e vanno necessariamente compensati per non penalizzare le prestazioni del sistema.

Un AHRS realizzato adottando questa soluzione si presta male all'impiego su velivoli che eseguono frequenti manovre, in quanto il processo di correzione degli errori di assetto viene spesso interrotto e l'accuratezza delle uscite del sistema peggiora in pochi minuti. Per

migliorare le prestazioni degli AHRS sono state sviluppate delle soluzioni avanzate volte a risolvere i limiti della soluzione di base.

Una soluzione diffusa per migliorare le prestazioni si può applicare fornendo al sistema una misura della velocità di volo. Tale velocità, elaborata insieme alle misure dei giroscopi, permette di stimare l'accelerazione del velivolo, la quale viene poi sottratta dalle misure degli accelerometri per ottenere una stima più accurata del vettore gravità durante le manovre. In questo modo si ottengono delle misure di assetto più accurate in condizioni dinamiche e si può evitare di interrompere il processo di correzione degli errori. La velocità di volo può essere fornita dal sistema dati aria o da un ricevitore GPS. Gli AHRS che si avvalgono di ulteriori misure oltre a quelle dei sensori previsti nella soluzione di base si dicono “assistiti” (*aided AHRS*). Lo schema di un AHRS assistito dal sistema dati aria è rappresentato in Figura 1.2.

Oltre alla stima dell'accelerazione del velivolo, nel sistema di Figura 1.2 sono presenti ulteriori accorgimenti per il miglioramento delle prestazioni. Nell'implementazione del filtro di Kalman è abbastanza comune effettuare anche la stima degli errori di *Bias* dei giroscopi, i quali rientrano fra le principali cause di errore nel calcolo dell'assetto comportandone la deriva. La stima dei *Bias* è utile per far fronte a situazioni in cui tali errori siano importanti fin dall'accensione del sistema o quando, per cause brusche ed improvvise, essi subiscano rilevanti variazioni durante il funzionamento, circostanze in cui le prestazioni dell'AHRS risulterebbero altrimenti degradate.

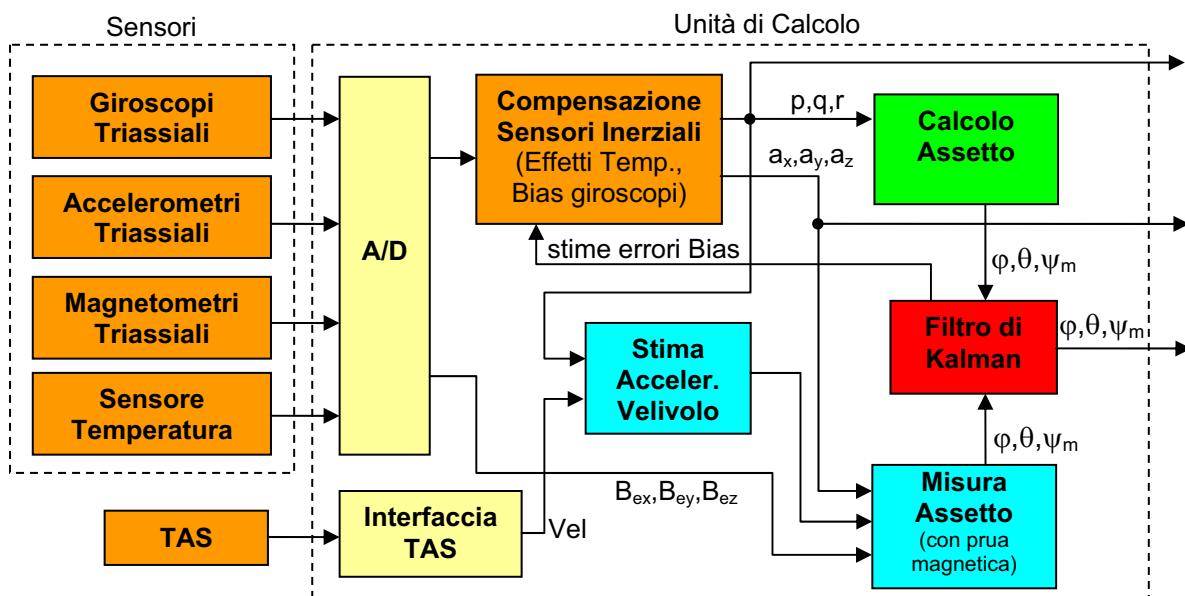


Figura 1.2 Schema di una soluzione avanzata per la realizzazione di un AHRS assistito dal sistema dati aria.

Un altro accorgimento presente nello schema di Figura 1.2 consiste nell'elaborare mediante il filtro di Kalman tutti gli angoli di assetto, anziché omettere l'angolo di prua come nella soluzione di base. Le misure degli angoli di assetto vengono determinate con lo stesso procedimento applicato nella soluzione di base, con l'unica differenza che l'angolo di prua si ricava partendo dagli angoli di beccheggio e di rollio misurati anziché da quelli forniti dal filtro.

Quando l'AHRS viene sviluppato per avvalersi delle misure di un ricevitore GPS, oltre agli accorgimenti già descritti per il sistema assistito dai dati aria si può adottare un'ulteriore tecnica di miglioramento delle prestazioni, a fronte di una maggiore complessità del sistema. In Figura 1.3 è rappresentato lo schema di un AHRS assistito dal GPS. In condizioni di manovra può essere possibile ottenere una misura dell'assetto affetta da minori errori basandosi maggiormente sulle misure dei magnetometri, la cui accuratezza è indipendente dalle accelerazioni del moto. Per far questo è necessario conoscere in Assi Verticali Locali il vettore campo magnetico terrestre nella posizione occupata dal velivolo, il quale si stima mediante il *World Magnetic Model* i cui dati di ingresso, costituiti dalla posizione del velivolo rispetto alla Terra e dalla data, sono forniti dal GPS. Dalla rilevazione in Assi Corpo del vettore gravità e del vettore campo magnetico terrestre, insieme alla conoscenza di tali vettori in Assi Verticali Locali, applicando opportune tecniche di elaborazione si risale alla misura dell'assetto. L'impiego del *World Magnetic Model* consente inoltre di determinare l'angolo di prua vero del velivolo, invece dell'angolo di prua magnetica come nelle soluzioni precedenti.

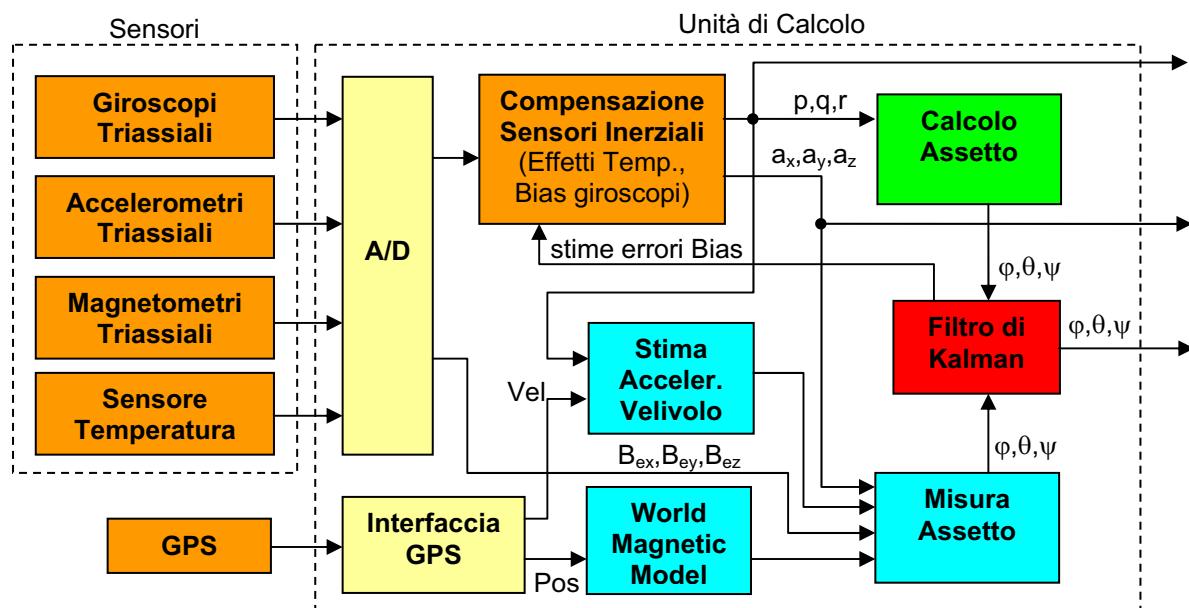


Figura 1.3 Schema di una soluzione avanzata per la realizzazione di un AHRS assistito dal GPS.

Gli AHRS assistiti dal GPS vengono spesso sviluppati per essere in grado di fornire anche informazioni accurate di velocità e posizione, in modo analogo ai sistemi di navigazione inerziale. Va tenuto presente, tuttavia, che la misura del GPS può venire a mancare in qualsiasi momento, essendo un sistema che non garantisce l'integrità, provocando la perdita di accuratezza dei dati di navigazione nell'arco di pochi minuti.

1.2 Obiettivo

L'obiettivo di questo lavoro è lo sviluppo di un AHRS in grado di determinare con elevata accuratezza gli angoli di assetto nelle severe condizioni di esercizio dei velivoli di alte prestazioni, basandosi sull'integrazione mediante il filtro di Kalman delle misure provenienti da sensori inerziali di basso costo, da un ricevitore GPS e da magnetometri.

Le condizioni di esercizio sono caratterizzate da frequenti manovre con forti accelerazioni e dalla possibilità di assumere qualsiasi assetto.

Il set di sensori è fissato in termini di accuratezza ed errori. I sensori inerziali devono essere equivalenti alla IMU (*Inertial Measurement Unit*) Honeywell HG1900, costituita da accelerometri e giroscopi triassiali installati su piattaforma *strapdown* e realizzati con tecnologia MEMS (*Micro Electro-Mechanical Systems*). I magnetometri sono anch'essi triassiali *strapdown*, con caratteristiche assunte equivalenti alla triade Honeywell HMR-2300r. Il ricevitore GPS si considera a singola frequenza (SPS – *Standard Positioning Service*) con aggiornamento della posizione e della velocità a 4 Hz.

1.3 Caratteristiche del sistema da sviluppare

L'architettura dell'AHRS da sviluppare è in buona parte già definita nell'obiettivo dal set di sensori a disposizione e dallo strumento matematico per l'integrazione delle misure. Il principio di funzionamento del sistema è quello descritto al paragrafo 1.1 per gli AHRS assistiti dal GPS, il cui schema è rappresentato in Figura 1.3. Per individuare completamente la soluzione che si intende sviluppare si devono comunque compiere delle scelte che caratterizzano il sistema e che possono essere suddivise in due categorie.

La prima categoria di scelte riguarda i dettagli dell'applicazione del principio di funzionamento e le comuni soluzioni che si possono adottare per arricchire le funzioni e per migliorare le prestazioni dell'AHRS. Queste scelte riguardano aspetti dello sviluppo del sistema trattati più o meno approfonditamente in bibliografia e che possono ritenersi comuni

alla maggior parte dei sistemi di questo tipo. Tali scelte possono essere sintetizzate nel modo seguente:

1. *Si sviluppa un sistema le cui uscite siano unicamente gli angoli di assetto.* La disponibilità del GPS dà la possibilità di realizzare un sistema in grado di fornire dati accurati di posizione e velocità aggiornati ad alta frequenza, ma nel presente lavoro si decide di ignorare tali funzionalità concentrando l'attenzione unicamente sulla determinazione dell'assetto.
2. *Internamente al sistema l'assetto viene descritto mediante i quaternioni.* Le condizioni di esercizio impongono di descrivere l'assetto, internamente al sistema, mediante i quaternioni, per evitare i punti di singolarità legati agli angoli di Eulero quando l'angolo di beccheggio assume i valori $\theta = \pm(\pi/2)$. L'uscita del sistema può essere comunque espressa in termini di angoli di Eulero col vantaggio di essere chiaramente interpretabile dal pilota.
3. *Il filtro di Kalman viene realizzato in forma Estesa e Discreta.* Il modello matematico che descrive il sistema presenta delle non linearità dovute alle equazioni differenziali delle componenti del quaternione. Il filtro di Kalman va implementato sull'approssimazione lineare del modello in una delle due forme *Linearizzata* o *Estesa*, dove la scelta determina la “traiettoria” (il profilo temporale degli stati) di riferimento rispetto a cui linearizzare. Il filtro viene realizzato in forma Estesa perché consente di ottenere risultati migliori e perché il sistema non si presta all'individuazione a priori di una traiettoria nominale per effettuare una buona approssimazione lineare del modello (condizione necessaria nella forma Linearizzata del filtro). Per rendere il sistema direttamente realizzabile a livello pratico, inoltre, il filtro di Kalman si realizza in forma *Discreta*.
4. *Il filtro di Kalman viene realizzato per stimare anche gli errori di Bias dei giroscopi.* Nell'integrazione delle velocità angolari, gli errori di *Bias* dei giroscopi hanno un ruolo importante nell'accrescimento degli errori di assetto. Un accorgimento che permette di migliorare le prestazioni del sistema al costo di un maggiore impiego di risorse di calcolo è quello di realizzare il filtro di Kalman per stimare non solo gli errori di assetto ma anche gli errori di *Bias* dei giroscopi, al fine di compensarli.
5. *La velocità fornita dal GPS viene impiegata per stimare l'accelerazione del velivolo, con cui ottenere una stima più accurata del vettore gravità.* La stima del vettore gravità è uno degli elementi su cui si basa il sistema per la stima e la correzione degli

errori di assetto e di *Bias*. Essa viene ottenuta dalle misure degli accelerometri, i quali sono sensibili alla forza peso ed alle accelerazioni del moto. Durante le manovre le accelerazioni diventano importanti e le sole misure degli accelerometri forniscono una stima del vettore gravità affetta da errori rilevanti. Dalla velocità fornita dal GPS e dalle misure di velocità angolare dei giroscopi è possibile stimare l'accelerazione del moto del velivolo, sottraendola poi dalle misure degli accelerometri per ottenere una stima più accurata del vettore gravità durante le manovre.

6. *Le misure fornite al filtro di Kalman sono misure dell'assetto.* Il sistema si basa sulle misure del vettore gravità e del vettore campo magnetico terrestre per la stima e la correzione degli errori di assetto e di *Bias*. Queste misure possono essere fornite direttamente al filtro di Kalman oppure possono essere elaborate con opportune tecniche per determinare l'assetto del velivolo, da usare a sua volta come misura dell'assetto da fornire al filtro. Questi sono due diversi modi di usare le misure dei sensori per correggere gli errori degli stati del sistema. In questo lavoro si impiega il secondo approccio, che in particolare risulta computazionalmente meno oneroso. Nel primo caso, infatti, le componenti delle misure sono sei e le equazioni di misura (le relazioni nel modello matematico del filtro che descrivono il legame fra gli stati del sistema e le misure) sono non lineari e vanno quindi linearizzate per rispettare le ipotesi del filtro. Nel secondo caso le componenti delle misure sono solo quattro, costituite dalle componenti del quaternione che descrive l'assetto misurato, e le equazioni di misura sono lineari ed in particolare banali perché vengono misurati direttamente gli stati del sistema.

La seconda categoria di scelte riguarda le tecniche che si intende sperimentare alla ricerca di soluzioni innovative o all'avanguardia, che permettano di aumentare ulteriormente le prestazioni del sistema. Queste tecniche possono riguardare ad esempio metodi evoluti di elaborazione dati tratti da pubblicazioni di ricerche scientifiche, oppure logiche di funzionamento del sistema accennate in qualche trattazione o intuite da chi lavora allo sviluppo del sistema stesso, ma in ogni caso si tratta di tecniche non ancora ampiamente testate e documentate da potersi ritenere soluzioni comuni e consolidate. In questa categoria rientrano tutte le particolari tecniche applicate dai produttori di AHRS per massimizzare le prestazioni dei propri sistemi ma che vengono mantenute segrete per motivi concorrenziali. Le scelte compiute relativamente a questa categoria sono sintetizzate di seguito:

7. *Si sperimenta una metodologia di misura dell'assetto basata maggiormente sui dati magnetometrici, la cui accuratezza è indipendente dalle accelerazioni del moto.* Un modo classico di effettuare la misura dell'assetto consiste nel determinare gli angoli di beccheggio e di rollio dalle componenti della stima del vettore gravità lungo gli assi solidali al velivolo, per poi determinare l'angolo di imbardata dalla misura del campo magnetico terrestre. In questo modo, purtroppo, gli errori di stima del vettore gravità condizionano pesantemente la misura dell'assetto. Una tecnica per migliorare la misura dell'assetto consiste nell'adottare un metodo di calcolo che si basi maggiormente sulle misure del campo magnetico terrestre, perché queste hanno un'accuratezza indipendente dalle accelerazioni del moto. Secondo questo concetto si applica il metodo iterativo di Gauss-Newton per risolvere un problema ai minimi quadrati, il cui risultato fornisce il quaternione di miglior compromesso che trasforma la stima del vettore gravità e la misura del vettore campo magnetico terrestre dagli Assi Corpo agli Assi Verticali Locali. In Assi Verticali Locali le direzioni di questi due vettori sono date rispettivamente dallo stesso asse Z_{VL} della terna di riferimento e dalla stima del campo magnetico terrestre effettuata con il WMM (*World Magnetic Model*). Il quaternione così determinato rappresenta la misura dell'assetto.
8. *Si sviluppa una logica di funzionamento che varia i parametri del filtro di Kalman in funzione della severità delle manovre.* Il filtro di Kalman calcola le correzioni da apportare agli stati del sistema dando un peso alle misure dell'assetto che dipende dai valori assegnati ai parametri che regolano il suo funzionamento. All'aumentare della severità delle manovre si riduce l'accuratezza delle misure dell'assetto per via della degradazione della stima del vettore gravità. Per tenere conto di questo fatto si sviluppa una logica di funzionamento del sistema che varia i parametri del filtro in tempo reale in funzione di due grandezze usate per descrivere la severità delle manovre, per fare in modo che il filtro stimi gli errori degli stati del sistema dando un peso minore alle misure dell'assetto quando le manovre sono più severe. Le grandezze usate per descrivere la severità delle manovre sono il modulo della misura degli accelerometri e la velocità angolare di imbardata, dove la prima permette di rilevare la presenza di accelerazioni legate al moto mentre la seconda permette di riconoscere le virate.
9. *Si definiscono le “modalità di funzionamento” per ottimizzare il comportamento del filtro in funzione della disponibilità del GPS.* La degradazione delle misure dell'assetto che si osserva all'aumentare della severità delle manovre è più marcata se

le misure del GPS non sono disponibili. Per massimizzare le prestazioni del sistema, nel caso di GPS disattivo, all'aumentare della severità delle manovre la diminuzione del peso dato dal filtro alle misure dell'assetto deve essere anch'essa più marcata rispetto al caso di GPS attivo. Si tiene conto di questo aspetto definendo le *modalità di funzionamento* con GPS attivo e con GPS disattivo. Ciascuna modalità di funzionamento è caratterizzata da una specifica assegnazione dei parametri del filtro che ottimizza il funzionamento del sistema nel rispettivo caso.

10. *Si definisce la funzione di “Reject delle misure”.* Talvolta le misure dell'assetto possono essere affette da errori consistenti, influendo negativamente sull'accuratezza delle uscite dell'AHRS. Per aumentare le prestazioni del sistema si può realizzare la funzione di *Reject* delle misure in grado di riconoscere e di scartare le misure dell'assetto fortemente corrotte. Un modo per valutare la bontà delle misure è quello di confrontarle con le uscite del sistema, facendo l'ipotesi, non priva di rischi, che le uscite siano sempre accurate.
11. *Si definisce la funzione di “Reset dell'assetto”.* Nelle situazioni di moto approssimativamente rettilineo uniforme le accelerazioni sono trascurabili e gli accelerometri rilevano efficacemente il vettore gravità, consentendo di effettuare le misure dell'assetto con bassi errori. In questi casi può risultare vantaggioso resettare le uscite dell'AHRS al valore dell'assetto misurato, per limitare gli errori sviluppati fino a quel momento e non corretti dal filtro. Per riconoscere le condizioni di moto rettilineo uniforme ci si può basare sulle misure dei sensori inerziali, ricercando i momenti in cui gli accelerometri misurano solo l'accelerazione di gravità ed in cui i giroscopi forniscono una misura nulla. Questa tecnica risulta efficace solo quando l'accuratezza delle misure dell'assetto nelle condizioni di moto rettilineo uniforme risulta migliore dell'accuratezza generale del sistema nella stima dell'assetto.

1.4 Metodo di analisi

Le analisi del sistema completo o solo di alcune sue parti vengono condotte mediante le simulazioni di funzionamento. A tal fine sono disponibili tre manovre di riferimento da assumere come dati veri, le quali descrivono diverse condizioni di esercizio. Applicando alle manovre di riferimento i modelli di errore dei sensori si generano delle *sequenze di ingresso*, ovvero delle sequenze di dati realistici delle misure da porre in ingresso al sistema, la cui

elaborazione produce risultati che è possibile analizzare attraverso il confronto con i dati veri di partenza.

Le analisi del sistema vengono condotte in tre diverse fasi del lavoro: lo sviluppo, il *Tuning* del filtro di Kalman (ovvero la ricerca delle migliori impostazioni dei parametri del filtro) e la valutazione delle prestazioni. Nella fase di sviluppo le analisi vengono condotte basandosi su una sola sequenza di ingresso con lo scopo principale di eseguire il *debug* del sistema, per verificare la correttezza dell'implementazione di tutte le sue parti. Nelle fasi di *Tuning* e di valutazione delle prestazioni le analisi vengono condotte con la tecnica Monte Carlo, che consiste nell'eseguire le simulazioni su un elevato numero di sequenze di ingresso caratterizzate da un'assegnazione casuale dei parametri di errore aleatori dei sensori, al fine di ottenere dei risultati statisticamente rappresentativi del funzionamento del sistema.

1.5 Valutazione delle prestazioni

Limitatamente alle manovre di riferimento disponibili vengono condotte delle simulazioni per valutare le massime prestazioni del sistema e l'efficacia delle diverse tecniche adottate per migliorare l'accuratezza di determinazione dell'assetto. Vengono prodotti i dati che evidenziano gli effetti della disponibilità del GPS, della stima dei *Bias* dei giroscopi, dell'uso del metodo di Gauss-Newton per determinare la misura dell'assetto, della funzione di *Reject* delle misure e della funzione di *Reset* dell'assetto.

1.6 Suddivisione della Tesi

Il capitolo 2 è dedicato ai richiami degli strumenti matematici necessari per la comprensione e lo sviluppo del lavoro, ai quali si fa riferimento nei successivi capitoli.

Il capitolo 3 tratta i modelli di errore dei sensori inerziali, dei magnetometri e del GPS, con i quali è possibile riprodurre le misure dei sensori per condurre le simulazioni.

Il capitolo 4 descrive le tre manovre di riferimento su cui si basano le simulazioni e le diverse tipologie di sequenze di ingresso generate specificamente per lo sviluppo del sistema, per il *Tuning* del filtro e per la valutazione delle prestazioni.

Il capitolo 5 riguarda dettagliatamente lo sviluppo dell'AHRS, descrivendo dapprima il processo matematico che porta alla stima accurata degli angoli di assetto e spiegando successivamente come vengono implementate le operazioni necessarie, mostrando in alcuni casi i risultati dei metodi adottati, come per le stime dell'accelerazione del velivolo e del

vettore gravità o per ottenere la misura dell’assetto dalla stima del vettore gravità e dalle misure dei magnetometri.

Il capitolo 6 descrive il processo di *Tuning* del filtro di Kalman, effettuato facendo attenzione ad interpretare con senso critico i risultati dell’analisi, tenendo presente che l’esiguo numero di manovre di riferimento a disposizione non può rappresentare significativamente il quadro completo delle condizioni di esercizio dell’AHRS.

Il capitolo 7 riassume i risultati di una serie di simulazioni condotte per valutare le prestazioni massime conseguibili dal sistema nelle condizioni di test e l’efficacia dell’uso del GPS, della stima dei *Bias* dei giroscopi, dell’uso del metodo di Gauss-Newton per determinare la misura dell’assetto e delle funzioni di *Reject* e di *Reset*. Per disporre di un riferimento sulle prestazioni degli AHRS vengono riportati i valori di accuratezza di tre sistemi certificati FAA, specificando la tipologia e la tecnologia dei sensori impiegati. Per finire vengono riportati graficamente degli esempi di simulazione sulle tre manovre di riferimento e viene effettuato un confronto del comportamento del sistema con diverse impostazioni della sensibilità di stima dei *Bias*.

Il capitolo 8 chiude il lavoro traendo le conclusioni e fornendo dei suggerimenti per proseguire e migliorare lo sviluppo del sistema.

2 Richiami generali

2.1 Sistemi di Riferimento

2.1.1 Assi Inerziali

Un sistema di riferimento Assi Inerziali $T_I = (X_I, Y_I, Z_I)$ è una qualsiasi terna ortogonale in cui valga il primo principio della dinamica o principio d'inerzia, per cui un corpo non soggetto a forze, osservato da una terna inerziale, si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete. L'origine e l'orientamento degli Assi Inerziali sono arbitrari. I sensori inerziali misurano le grandezze rispetto a questi sistemi di riferimento.

2.1.2 Assi Terrestri

Il sistema di riferimento Assi Terrestri $T_E = (X_E, Y_E, Z_E)$ viene assunto con l'origine coincidente con il centro della Terra, l'asse Z_E passante per i poli ed orientato verso Nord, gli assi X_E ed Y_E giacenti nel piano equatoriale ed orientati in modo da rendere la terna levogira, con X_E passante per il meridiano di Greenwich.

La Terra ha un moto di rotazione intorno all'asse Z_E con una velocità angolare $\Omega_E = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, ha un moto di rivoluzione intorno al sole con velocità angolare $\Omega_R = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$ e si sposta con una velocità variabile a seconda della sua posizione rispetto al sole. Per tempi dell'ordine di alcune ore una ragionevole schematizzazione del moto della Terra può essere effettuata trascurando la velocità angolare di rivoluzione rispetto a quella di rotazione e considerando costante la velocità di spostamento. Facendo questa assunzione, gli Assi Terrestri non risultano inerziali solo a causa del moto di rotazione.

2.1.3 Assi Verticali Locali

Il sistema di riferimento Assi Verticali Locali $T_{VL} = (X_{VL}, Y_{VL}, Z_{VL})$ è assunto con l'origine fissa al baricentro del velivolo e l'asse Z_{VL} orientato verso il basso secondo la direzione della verticale locale. Gli assi X_{VL} e Y_{VL} sono tali da individuare un piano normale all'asse Z_{VL} , con X_{VL} orientato verso il Nord geografico e Y_{VL} orientato verso Est in modo da rendere la terna levogira. Questa terna segue il velivolo nel moto intorno alla Terra mantenendo invariato il suo orientamento.

2.1.4 Assi Corpo

Il sistema di riferimento Assi Corpo $T_B = (X_B, Y_B, Z_B)$ è solidale al velivolo ed ha l'origine coincidente con il baricentro del velivolo stesso. L'asse X_B in questo lavoro è assunto coincidente con l'asse longitudinale del velivolo e diretto secondo la direzione di volo, l'asse Z_B è contenuto nel piano di simmetria longitudinale del velivolo e diretto verso il basso nelle condizioni di volo orizzontale, l'asse Y_B è tale da rendere la terna levogira.

2.1.5 Terne dei sensori

I sensori inerziali ed i magnetometri sono fissati solidalmente al velivolo, costituendo una piattaforma di tipo *strapdown*. Idealmente gli assi di ingresso dei sensori sono allineati agli Assi Corpo per misurare le grandezze su questa terna di riferimento, ma nella costruzione e nell'installazione dell'apparato hardware dell'AHRS vengono introdotti i seguenti errori, che non sempre sono trascurabili:

- Errori di mutuo allineamento fra i sensori della stessa triade (accelerometri, giroscopi, magnetometri) che non risultano reciprocamente ortogonali;
- Errori di allineamento delle triadi di sensori con gli assi di riferimento dell'involucro dell'AHRS;
- Errori di allineamento dell'involucro dell'AHRS con gli Assi Corpo.

Per le triadi di sensori si definiscono le terne di riferimento non ortogonali aventi gli assi allineati con le direzioni di ingresso di ciascun sensore, indicate con T_A , T_G e T_M , rispettivamente per gli accelerometri, i giroscopi ed i magnetometri. Al paragrafo 3.1.1 vengono considerate le trasformazioni dei vettori dagli Assi Corpo alle terne dei sensori, che sono date da matrici di trasformazione non ortogonali.

2.2 Angoli di Eulero

2.2.1 Definizione

Date due generiche terne di riferimento ortogonali, orientate nello spazio in modo qualsiasi, è sempre possibile allineare una terna con l'altra facendole compiere tre rotazioni successive intorno ai propri assi. Esistono sei diverse sequenze di rotazioni con cui è possibile ottenere l'allineamento delle terne e specificando una di esse, si descrive l'orientamento di una terna rispetto all'altra.

In particolare, quando si considerano gli Assi Verticali Locali e gli Assi Corpo, si usa descrivere l'orientamento della seconda rispetto alla prima mediante una certa sequenza di rotazioni descritta da tre parametri, gli angoli di Eulero: ψ, ϑ, φ . Specificare gli angoli di Eulero consente così di descrivere l'assetto di un velivolo, indicando il suo orientamento rispetto agli Assi Verticali Locali.

Gli angoli di Eulero rappresentano tre rotazioni successive da eseguire intorno agli assi di una terna inizialmente allineata con gli Assi Verticali Locali per allinearla agli Assi Corpo. La prima rotazione avviene intorno all'asse Z_{VL} di un angolo pari a ψ , detto *angolo di imbardata (yaw)*, ottenendo una terna intermedia T' , il cui asse X' è allineato con la proiezione dell'asse X_B sul piano orizzontale individuato dagli assi $X_{VL}Y_{VL}$. La successiva rotazione avviene intorno all'asse Y' di un angolo pari a ϑ , detto *angolo di beccheggio (pitch)*, ottenendo una terna T'' , il cui asse X'' risulta definitivamente allineato con l'asse X_B . L'ultima rotazione avviene intorno all'asse X'' di un angolo pari a φ , detto *angolo di rollio (roll)*, che allinea completamente le due terne.

Per ogni orientamento degli Assi Corpo, la precedente sequenza di rotazioni ammette una sola combinazione degli angoli di Eulero tranne che nel caso $\vartheta = \pm(\pi/2)$, in cui si hanno i punti di singolarità che rendono possibili infinite combinazioni degli angoli di rollio e di imbardata. Considerando un'alternativa sequenza di rotazioni, i punti di singolarità cambiano ma non scompaiono, costituendo uno dei problemi legati all'uso degli angoli di Eulero nella descrizione dell'assetto. Per risolvere il problema delle singolarità si deve passare ad una descrizione dell'assetto con un numero maggiore di parametri, minimo quattro come nel caso dei quaternioni, descritti successivamente.

2.2.2 Trasformazione di vettori

Considerando le tre rotazioni rappresentate dagli angoli di Eulero, che consentono di allineare gli Assi Verticali Locali agli Assi Corpo, le trasformazioni intermedie fra un sistema di riferimento e l'altro hanno delle espressioni particolarmente semplici:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{VL} \\ y_{VL} \\ z_{VL} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Componendo le tre rotazioni successive si ottiene la trasformazione di un vettore \mathbf{v}^B (espresso in Assi Corpo) nota che sia la sua rappresentazione \mathbf{v}^{VL} (in Assi Verticali Locali), individuando la matrice di trasformazione \mathbf{R}_{VL2B} [4]:

$$\mathbf{v}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}^{VL} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}^B = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \vartheta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix} \mathbf{v}^{VL} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}^B = \mathbf{R}_{VL2B} \mathbf{v}^{VL} \quad (2.6)$$

La matrice \mathbf{R}_{VL2B} è ortogonale e la trasformazione inversa, dagli Assi Corpo agli Assi Verticali Locali, è data semplicemente da:

$$\mathbf{R}_{B2VL} = \mathbf{R}_{VL2B}^T \quad (2.7)$$

2.3 Quaternioni

Nell'ambito della navigazione inerziale i quaternioni sono impiegati per descrivere la rotazione dei sistemi di riferimento. Essi rappresentano una conveniente alternativa agli

angoli di Eulero nella descrizione dell'assetto dei velivoli nei sistemi di calcolo per l'assenza di punti di singolarità e per vantaggi dal punto di computazionale.

2.3.1 Elementi di algebra dei quaternioni

I quaternioni sono quadruple di numeri reali considerati in un preciso ordine. Il quaternione può essere rappresentato come un numero complesso generalizzato a quattro componenti:

$$\underline{\mathbf{q}} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (2.8)$$

Per i prodotti delle unità immaginarie \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{ii} &= -1 & \mathbf{jj} &= -1 & \mathbf{kk} &= -1 \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} & \mathbf{jk} &= \mathbf{i} & \mathbf{ki} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i} & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Il prodotto fra due quaternioni $\underline{\mathbf{q}}$ ed $\underline{\mathbf{r}}$ è così definito:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{qr}} &= q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3 + (q_0 r_1 + q_1 r_0 + q_2 r_3 - q_3 r_2) \mathbf{i} + \\ &\quad + (q_0 r_2 + q_2 r_0 + q_3 r_1 - q_1 r_3) \mathbf{j} + (q_0 r_3 + q_1 r_2 + q_3 r_0 - q_2 r_1) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

In forma matriciale il prodotto fra quaternioni è dato da:

$$\underline{\mathbf{qr}} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ r_1 & r_0 & r_3 & -r_2 \\ r_2 & -r_3 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Il coniugato di $\underline{\mathbf{q}}$ è:

$$\underline{\mathbf{q}}^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} \quad (2.12)$$

Il modulo di $\underline{\mathbf{q}}$ è definito come:

$$|\underline{\mathbf{q}}| = \sqrt{\underline{\mathbf{qq}}^*} = \sqrt{\underline{\mathbf{q}}^* \underline{\mathbf{q}}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (2.13)$$

L'inverso di $\underline{\mathbf{q}}$ è dato da:

$$\underline{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\underline{\mathbf{q}}^*}{|\underline{\mathbf{q}}|^2} \quad (2.14)$$

Un vettore $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ si può esprimere sotto forma di quaternione, $\underline{\mathbf{v}}$, a sola parte immaginaria:

$$\underline{\mathbf{v}} = 0 + v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.15)$$

2.3.2 Trasformazione di vettori

Secondo il Teorema di Eulero, qualsiasi sequenza di rotazioni nello spazio può essere sostituita da una singola rotazione intorno ad un solo opportuno asse. Un quaternione che rappresenti una rotazione ha modulo unitario e le sue componenti hanno il seguente significato:

$$\underline{\mathbf{q}} = \cos \frac{\vartheta}{2} + \underline{\mathbf{n}} \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (2.16)$$

dove $\cos(\vartheta/2)$ è la parte reale, $\underline{\mathbf{n}} \sin(\vartheta/2)$ è la parte immaginaria, $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ è un vettore unitario che rappresenta l'asse di rotazione, $\underline{\mathbf{n}}$ è la rappresentazione di \mathbf{n} come quaternione e ϑ è l'angolo di rotazione positiva intorno a \mathbf{n} . Se il quaternione $\underline{\mathbf{q}}$ rappresenta la trasformazione dalla generica terna di riferimento A alla generica terna di riferimento B , la terna A risulterà allineata alla terna B dopo una rotazione intorno ad \mathbf{n} di un angolo di ϑ radianti.

Sia \mathbf{v}^A un vettore espresso sulla terna di riferimento A e sia $\underline{\mathbf{v}}^A$ la sua rappresentazione come quaternione. La trasformazione di \mathbf{v}^A dalla terna A alla terna B si ottiene mediante [11]:

$$\underline{\mathbf{v}}^B = \underline{\mathbf{q}}^{-1} \underline{\mathbf{v}}^A \underline{\mathbf{q}} \quad (2.17)$$

Dato che il modulo del quaternione che rappresenta la rotazione è unitario, la precedente relazione è equivalente a:

$$\underline{\mathbf{v}}^B = \underline{\mathbf{q}} * \underline{\mathbf{v}}^A \underline{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

Sviluppando i calcoli si individua la matrice di trasformazione in termini delle componenti del quaternione:

$$\mathbf{v}^B = \mathbf{R}_{A2B} \mathbf{v}^A \quad (2.19)$$

$$\mathbf{R}_{\text{A2B}} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Quando il quaternione $\underline{\mathbf{q}}$ descrive l'assetto del velivolo, rappresentando la rotazione che allinea gli Assi Verticali Locali agli Assi Corpo, la matrice (2.20) costituisce la matrice di trasformazione \mathbf{R}_{VL2B} in termini del quaternione.

E' possibile compiere il passaggio inverso, ricavando le componenti del quaternione dagli elementi della matrice di rotazione, utile ad esempio per inizializzare il quaternione quando sia nota la matrice di trasformazione. Indicando con r_{ij} l'elemento sulla riga i e sulla colonna j della matrice (2.20), dai termini sulla diagonale si ricavano le seguenti relazioni [11]:

$$\begin{cases} 4q_0^2 = 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} \\ 4q_1^2 = 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} \\ 4q_2^2 = 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} \\ 4q_3^2 = 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{cases} \quad (2.21)$$

mentre dai termini fuori dalla diagonale si ricavano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 4q_0q_1 = r_{23} - r_{32} \\ 4q_0q_2 = r_{31} - r_{13} \\ 4q_0q_3 = r_{12} - r_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} 4q_1q_2 = r_{12} + r_{21} \\ 4q_2q_3 = r_{23} + r_{32} \\ 4q_1q_3 = r_{13} + r_{31} \end{cases} \quad (2.22)$$

Le relazioni (2.21) forniscono i moduli delle componenti del quaternione ma non i segni. Il procedimento per ricavare il quaternione è quello di partire dalle relazioni (2.21) scegliendo quella che ha il modulo più grande, si calcola la sua radice quadrata e si sceglie arbitrariamente il segno del risultato, ottenendo così una prima componente del quaternione. Successivamente, con una componente del quaternione nota, dalle (2.22) si ottengono le rimanenti.

2.3.3 Relazioni con gli angoli di Eulero

Anche se l'assetto viene calcolato mediante i quaternioni, è indispensabile disporre di relazioni che leghino i quaternioni e gli angoli di Eulero perché questi ultimi costituiscono una descrizione più pratica dell'assetto. Ad esempio l'assetto iniziale del velivolo è generalmente noto in termini di angoli di Eulero con i quali si deve inizializzare il quaternione per effettuare i calcoli, mentre durante il funzionamento dei sistemi come l'AHRS il pilota del

velivolo comprende agevolmente le informazioni di assetto se queste sono fornite sotto forma di angoli di Eulero.

Le relazioni cercate si ottengono dal confronto dei termini delle matrici di trasformazione fra gli Assi Verticali Locali e gli Assi Corpo, \mathbf{R}_{VL2B} , espresse mediante il quaternione e mediante gli angoli di Eulero. Il quaternione $\underline{\mathbf{q}}$ che descrive l'assetto del velivolo rappresenta la rotazione che allinea gli Assi Verticali Locali agli Assi Corpo e la matrice \mathbf{R}_{VL2B} ha la forma della (2.20). Dal confronto della (2.20) con la matrice (2.5) si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \\ \theta = \arcsin [2(q_0 q_2 - q_1 q_3)] \\ \psi = \arctan \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{cases} \quad (2.23)$$

Le relazioni opposte, che forniscono le componenti del quaternione in funzione degli angoli di Eulero, sono [11]:

$$\begin{cases} q_0 = \pm \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ q_1 = \pm \left(\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ q_2 = \pm \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ q_3 = \pm \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

dove il simbolo \pm sta ad indicare che si possono cambiare i segni di tutte le componenti del quaternione continuando a rappresentare la medesima rotazione. La scelta del segno deve essere la stessa per tutte le precedenti relazioni.

2.3.4 Vantaggi

Il vantaggio principale che deriva dall'impiego dei quaternioni è dato dalla mancanza di singolarità, mentre con gli angoli di Eulero tale problema si verifica quando l'angolo di beccheggio assume i valori $\theta = \pm(\pi/2)$.

Impiegando i quaternioni, le equazioni differenziali di assetto (paragrafo 2.4) sono più semplici rispetto all'uso degli angoli di Eulero, nei quali le equazioni differenziali includono funzioni trigonometriche. Anche se con l'uso dei quaternioni le equazioni di assetto sono quattro mentre con gli angoli di Eulero sono solo tre, le risorse di calcolo complessivamente impiegate sono minori, con vantaggi dal punto di vista computazionale.

2.4 Equazioni differenziali di assetto

Internamente al sistema sviluppato in questo lavoro l'assetto dell'aereo viene descritto mediante i quaternioni. Di seguito vengono fornite le equazioni differenziali delle componenti del quaternione in funzione della velocità angolare del velivolo, che integrate forniscono l'evoluzione nel tempo dell'assetto.

Sia $\underline{\omega} = [p \quad q \quad r]^T$ la velocità angolare degli Assi Corpo rispetto agli Assi Verticali Locali, espressa in Assi Corpo. Si indichi con \underline{q} il quaternione che descrive la rotazione che allinea gli Assi Verticali Locali agli Assi Corpo. Esprimendo il vettore $\underline{\omega}$ sotto forma di quaternione, $\underline{\omega} = 0 + p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}$, le equazioni differenziali di assetto sono:

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \underline{q} \underline{\omega} \quad (2.25)$$

In forma matriciale, dall'espressione (2.11), tali equazioni sono espresse come segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Il quaternione che descrive l'assetto del velivolo deve avere modulo unitario. A causa degli errori numerici legati all'integrazione al calcolatore, nelle equazioni di assetto viene introdotto un termine correttivo per mantenere unitario il modulo del quaternione. Nell'implementazione al calcolatore vengono integrate le seguenti equazioni:

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \underline{q} \underline{\omega} + \varepsilon \underline{q} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \quad (2.28)$$

Questo accorgimento presenta uno svantaggio: l'errore di una componente del quaternione si ripercuote sul calcolo delle altre componenti e può aumentare l'errore nella determinazione dell'assetto.

2.5 Elementi di base dei processi stocastici

In questo paragrafo vengono richiamati gli elementi di base sulla teoria delle probabilità e sui processi stocastici necessari per la comprensione e l'applicazione del filtro di Kalman [1],[4].

2.5.1 Definizioni di interesse

Si considerino due variabili aleatorie continue, X ed Y , e si indichino con x ed y i generici valori che tali variabili possono assumere. Similmente si considerino due variabili aleatorie discrete, X_D ed Y_D , e siano x_i ed y_i i generici n valori che esse possono assumere.

Si indichi con la notazione $P(X < x)$ la probabilità che la variabile X assuma un valore minore di x . La **funzione di distribuzione di probabilità** associata alla variabile X è:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.29)$$

La funzione $F_X(x)$ è non decrescente, vale $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(\infty) = 1$.

La **funzione di densità di probabilità** associata alla variabile aleatoria X è:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.30)$$

La funzione $f_X(x)$ è non negativa e, dalle definizioni precedenti, si ha:

$$P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (2.31)$$

Si noti che per una variabile aleatoria continua la probabilità di assumere esattamente un particolare valore è nulla.

Per la variabile aleatoria discreta X_D si definisce **distribuzione di probabilità** l'insieme delle probabilità p_i che tale variabile assuma ciascuno dei possibili valori x_i :

$$p_{X_D}(x_i) = P(X_D = x_i) \quad (2.32)$$

Quando si considerano due o più variabili aleatorie, le precedenti definizioni si estendono e diventano la *funzione di distribuzione di probabilità congiunta*, *funzione di densità di probabilità congiunta* e *distribuzione di probabilità congiunta*, rispettivamente:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \& Y \leq y) \quad (2.33)$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.34)$$

$$p_{X_D Y_D}(x_i, y_i) = P(X_D = x_i \& Y_D = y_i) \quad (2.35)$$

La **Media** (*Expectation*) di X è definita come:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (2.36)$$

Nel caso della variabile aleatoria discreta X_D la media è:

$$\bar{X}_D = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (2.37)$$

La **Varianza** di X è definita come:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu_X)^2] \quad (2.38)$$

In senso qualitativo, la varianza è una misura della dispersione di X intorno alla media.

La **deviazione standard**, σ , è la radice quadrata della varianza.

Una variabile aleatoria X si dice **normale** o **Gaussiana** se la sua funzione di densità di probabilità è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x - \mu_X)^2\right] \quad (2.39)$$

In Figura 2.1 sono riportati i grafici della densità di probabilità $f_X(x)$ e della distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile Gaussiana. Le caratteristiche statistiche di una variabile normale sono completamente definite dai parametri μ_X e σ_X , che sono la media e la deviazione standard della variabile. Considerando gli intervalli di x centrati su μ_X e di ampiezza pari a $2\sigma_X$, $4\sigma_X$ e $6\sigma_X$, le probabilità che X cada all'interno dell'intervalle sono rispettivamente 68.3%, 95.5% e 99.7%.

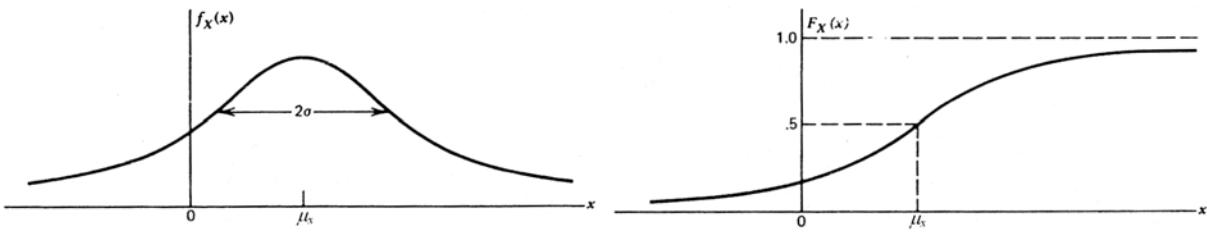


Figura 2.1 Funzione di densità di probabilità e funzione di distribuzione di probabilità normali [1].

La distribuzione normale è molto diffusa in campo statistico perché descrive accuratamente numerosi fenomeni naturali stocastici, grazie al *Teorema del Limite Centrale* della statistica. Secondo questo teorema, dalla sovrapposizione di un elevato numero di variabili aleatorie, descritte da qualsiasi densità di probabilità e fra di esse statisticamente indipendenti, deriva una variabile aleatoria risultante la cui descrizione statistica tende alla distribuzione normale. I processi incontrati in natura sono spesso dovuti alla sovrapposizione di numerosi piccoli contributi, per questo la distribuzione Gaussiana si incontra di frequente.

La **Correlazione** fra le variabili aleatorie X ed Y è definita come:

$$\text{corr}(X, Y) = E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \quad (2.40)$$

La **Covarianza** fra le variabili X ed Y è definita come:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.41)$$

E' immediato notare che nel caso di variabili a media nulla la correlazione e la covarianza coincidono. Le precedenti definizioni, fornite per il caso continuo, si estendono immediatamente al caso discreto applicando la definizione della media (2.37).

Nel filtro di Kalman compaiono le matrici delle covarianze associate a vettori di rumori bianchi, relative ad un determinato istante. Siano \mathbf{X} ed \mathbf{Y} due variabili aleatorie vettoriali a media nulla, rispettivamente con m ed n elementi. La **matrice delle covarianze**, come definita nell'ambito del filtro di Kalman, è data da:

$$E[\mathbf{XY}^T] = \begin{bmatrix} E(X_1 Y_1) & \dots & E(X_1 Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_m Y_1) & \dots & E(X_m Y_n) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Come si può notare, tale matrice è costituita da correlazioni anziché da covarianze, ma non c'è differenza quando le variabili considerate hanno media nulla.

Si considerino ora due processi stocastici continui, $X(t)$ ed $Y(t)$.

Il processo $X(t)$ si definisce **stazionario** se tutte le caratteristiche statistiche del processo sono invarianti nel tempo.

Il processo $X(t)$ si definisce **stazionario in senso largo** se solo la media e la varianza del processo sono invarianti nel tempo. Un processo Gaussiano è completamente definito dalla media e dalla varianza: in tal caso, se tale processo è stazionario in senso largo allora è anche stazionario.

L'**autocorrelazione** del processo stocastico $X(t)$ è definita come:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.43)$$

Si noti che, per $t_1 = t_2$, la covarianza e la varianza all'istante t_1 coincidono.

La **cross-correlazione** fra i processi $X(t)$ ed $Y(t)$ è definita come:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (2.44)$$

La **covarianza** del processo $X(t)$ è definita da:

$$\text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \quad (2.45)$$

La **cross-covarianza** fra i processi $X(t)$ ed $Y(t)$ è definita da:

$$\text{cov}[X(t_1), Y(t_2)] = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][Y(t_2) - \mu_Y(t_2)]\} \quad (2.46)$$

Si fa notare che, nei casi di processi a media nulla, l'autocorrelazione coincide con la covarianza e la cross-correlazione coincide con la cross-covarianza. Nei casi stazionari, le funzioni appena citate sono solo funzione di $\tau = t_2 - t_1$. Ad esempio l'autocorrelazione diventa $R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$, e le altre funzioni variano in modo analogo.

La **funzione di densità spettrale di potenza** si definisce per un processo stazionario $X(t)$ come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del processo:

$$S_X(j\omega) = \Im[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.47)$$

La densità spettrale si può anche esprimere in funzione della variabile complessa s sostituendo $j\omega = s, \omega^2 = -s^2$. Se è nota la densità spettrale di un processo, è possibile calcolare l'autocorrelazione del processo stazionario mediante la trasformata inversa, ed in particolare, ponendo $\tau = 0$, si calcola la varianza del processo:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.48)$$

2.5.2 Rumore Bianco

Il rumore bianco è un processo stocastico stazionario con densità spettrale costante a tutte le frequenze [1]:

$$S_{WN} = A \quad (2.49)$$

La corrispondente funzione di autocorrelazione è:

$$R_{WN} = A\delta(\tau) \quad (2.50)$$

dove $\delta(\tau)$ è la funzione delta di Dirac:

$$\delta(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(\tau) \quad \delta_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |\tau| < \varepsilon \\ 0 & |\tau| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (2.51)$$

Per una proprietà dell'autocorrelazione dei processi stazionari, secondo cui $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$ implica $\mu = 0$, si può affermare che il rumore bianco è un processo a media nulla:

$$\mu_{WN} = 0 \quad (2.52)$$

Il rumore bianco si dice *Gaussiano* se la sua funzione di densità di probabilità è Gaussiana.

Il processo appena definito ha varianza infinita ($\sigma_{WN}^2 = R_{WN}(\tau = 0) = \infty$) e non esiste in natura, ma è un'utile astrazione matematica che semplifica la trattazione analitica dei problemi statistici grazie al fatto di avere densità spettrale costante. Il rumore bianco è non correlato nel tempo, e per questo la conoscenza del valore del segnale ad un certo istante non dà alcuna informazione sul segnale agli istanti precedenti e successivi. Anche se, costituendo un segnale che varia con ampiezze e velocità infinite, il rumore bianco non ha fisicamente senso, si può impiegare come approssimazione di processi che entro l'intervallo di frequenze di interesse hanno densità spettrale approssimativamente costante. Ad esempio il rumore bianco può essere vantaggiosamente impiegato per semplificare il problema quando un sistema vede al suo ingresso un segnale che abbia la densità spettrale circa costante entro una frequenza superiore di almeno due ordini di grandezza della banda passante del sistema

stesso: la risposta del sistema praticamente non cambia se si sostituisce il segnale di ingresso con un rumore bianco della stessa densità spettrale.

Nell'impiego del filtro di Kalman il rumore bianco è fondamentale, in quanto è l'unico tipo di rumore che per ipotesi deve essere presente nel modello del sistema come errore di processo o errore di misura.

2.5.3 Shaping Filter

Lo “Shaping Filter” è un sistema lineare che consente di generare un rumore avente le desiderate caratteristiche di densità spettrale partendo da un rumore bianco unitario.

Si consideri un sistema lineare stabile, a parametri costanti, rappresentato dalla funzione di trasferimento $G(s)$. Se in ingresso al sistema è presente un segnale stazionario con densità spettrale $S_U(s)$, l'uscita y è un segnale stazionario e si ha [1]:

$$S_Y(s) = G(s)G(-s)S_U(s) \quad (2.53)$$

La (2.53) può essere convenientemente impiegata per determinare lo Shaping Filter. Per un rumore bianco unitario in ingresso si ha $S_U(s) = 1$. Fissata la densità spettrale del rumore che si vuole generare, $S_Y(s)$, se questa può essere fattorizzata e se le radici sono disposte simmetricamente rispetto all'asse immaginario nel piano complesso e non presentano poli sull'asse immaginario stesso, tutte le radici nel semipiano negativo definiscono il sistema a sfasamento minimo $G(s)$ che costituisce lo Shaping Filter.

2.5.4 Processo di Wiener (Random-Walk)

Il processo di Wiener, comunemente indicato come *Random-Walk*, è un processo non stazionario Gaussiano di valore iniziale nullo e dato dall'integrazione nel tempo di un rumore bianco Gaussiano:

$$RW(t) = \int_0^t WN(\tau) d\tau \quad RW(0) = 0 \quad (2.54)$$

Per questo processo risulta:

$$\mu_{RW}(t) = 0 \quad (2.55)$$

$$\sigma_{RW}^2(t) = At \quad (2.56)$$

dove con A si è indicata la densità spettrale del rumore bianco.

In Figura 2.2 sono riportati alcuni esempi di evoluzione nel tempo di un processo di Wiener.

Il Random Walk è abbastanza comune nel campo della navigazione inerziale, in cui le misure dei sensori inerziali vengono integrate per calcolare le velocità di moto e l'assetto del veicolo: fra gli errori di misura dei sensori inerziali è corretto considerare la presenza dei rumori bianchi, che nell'operazione di integrazione introducono errori di velocità e di assetto di tipo Random-Walk.

Un dato spesso indicato per specificare la qualità di un sensore è il *parametro di Random-Walk*, pari alla deviazione standard del processo al tempo unitario, $\sigma_{RW}(t=1)$. Questo parametro serve a specificare quantitativamente il rumore di misura del sensore, oltre ad indicare la dispersione nel tempo dell'errore di integrazione del segnale misurato dal sensore. Ad esempio, per un giroscopio a fibra ottica può essere indicato un parametro di Random-Walk di $4.0^\circ/\sqrt{h}$ [1], che rappresenta l'evoluzione nel tempo della deviazione standard dell'errore di integrazione dell'uscita.

2.5.5 Processo di Gauss-Markov

Il processo di Gauss-Markov è un processo stazionario Gaussiano con funzione di autocorrelazione esponenziale. Per un processo di questo tipo si ha:

$$\mu_{GM}(t) = 0 \quad (2.57)$$

$$R_{GM}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \quad (2.58)$$

$$S_{GM}(s) = \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 - s^2} \quad (2.59)$$

dove σ^2 e $1/\beta$ sono la varianza e la costante di tempo del processo. In Figura 2.3 sono riportati i grafici dell'autocorrelazione e della densità spettrale.

Il processo di Gauss-Markov è particolarmente utile perché descrive un grande numero di

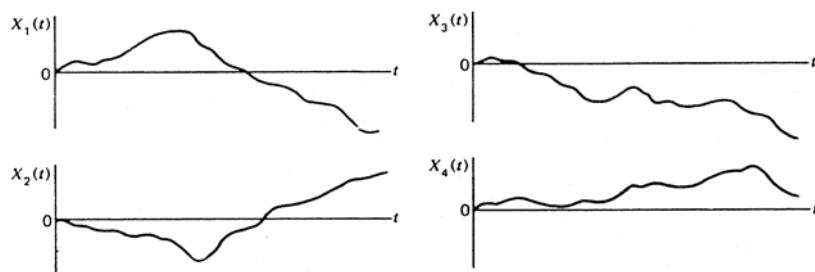


Figura 2.2 Esempi di andamenti nel tempo del Random-Walk [1].

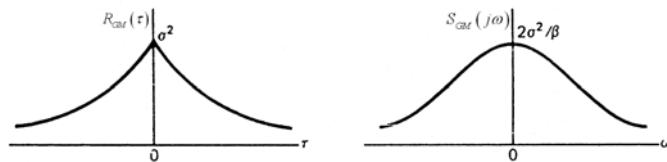


Figura 2.3 Autocorrelazione e densità spettrale di un processo di Gauss-Markov [1].

processi fisici con ragionevole accuratezza ed ha una formulazione matematica relativamente semplice.

Lo Shaping Filter che realizza un processo di Gauss-Markov partendo da un rumore bianco Gaussiano unitario è:

$$G_{GM}(s) = \frac{\sqrt{2\beta}\sigma}{s + \beta} \quad (2.60)$$

che nel dominio del tempo è rappresentato dalla seguente equazione differenziale:

$$\dot{y} = -\beta y + \sqrt{2\beta}\sigma u \quad (2.61)$$

dove u è il rumore bianco unitario Gaussiano di ingresso.

In Figura 2.4 è riportato un esempio di processo di Gauss Markov con $\sigma = 1$ e costante di tempo $1/\beta = 300$ s.

2.6 Modello discreto equivalente

Spesso i sistemi sono di natura continua ma per varie ragioni può essere utile rappresentarli con modelli discreti. In questi casi risulta comodo formulare il modello continuo del sistema per poi determinare il modello discreto equivalente. Un modello discreto si dice equivalente ad un modello continuo se, agli istanti in cui viene calcolato, esso fornisce valori delle variabili del sistema identici a quelli del modello continuo agli stessi istanti.

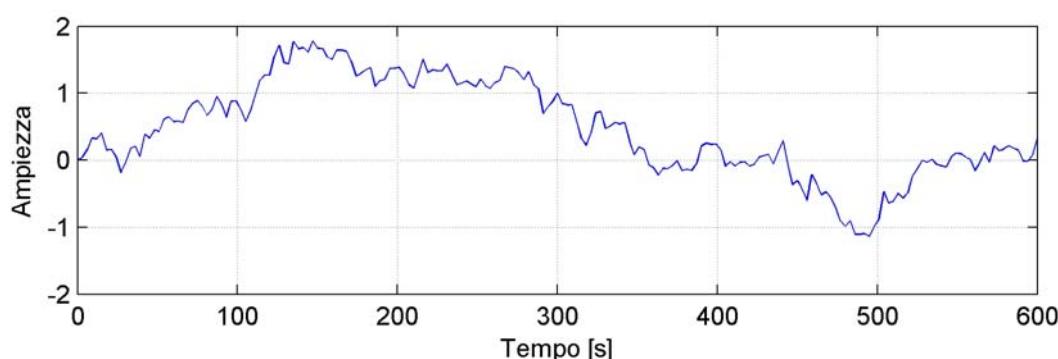


Figura 2.4 Esempio di processo di Gauss Markov.

Sia dato il seguente modello lineare continuo rappresentato in variabili di stato:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2.62)$$

- $\mathbf{x}(t) = (n \times 1)$ vettore degli stati
- $\mathbf{F}(t) = (n \times n)$ matrice dinamica
- $\mathbf{B}(t) = (n \times q)$ matrice degli ingressi deterministici
- $\mathbf{G}(t) = (n \times r)$ matrice degli ingressi stocastici
- $\mathbf{u}_d(t) = (q \times 1)$ vettore degli ingressi deterministici
- $\mathbf{w}(t) = (r \times 1)$ vettore di rumori bianchi

I rumori bianchi $\mathbf{w}(t)$ sono caratterizzati statisticamente dalla seguente matrice delle covarianze:

$$E[\mathbf{w}(t_i)\mathbf{w}^T(t_j)] = \begin{cases} \mathbf{Q}(t) & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases} \quad (2.63)$$

Si cerca un modello discreto equivalente al (2.62) del tipo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_d(t_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.64)$$

dove \mathbf{w}_k sono sequenze bianche e si assume che, fra gli istanti t_k e t_{k+1} , gli ingressi deterministici rimangano costanti al valore $\mathbf{u}_d(t_k)$. Le matrici del sistema discreto sono generalmente variabili ai diversi istanti t_k .

Le matrici del sistema discreto equivalente si determinano dalla soluzione del modello continuo fra gli istanti t_k e t_{k+1} con condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_k)$. La generica soluzione in forma esplicita della (2.62) con soli ingressi deterministici, quindi per $\mathbf{w} = 0$, è [2]:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}_d(\tau)d\tau \quad (2.65)$$

dove la *matrice di transizione di stato*, Φ , che descrive il moto libero del sistema, è data dalla soluzione dell'equazione differenziale omogenea:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le matrici Φ_k e \mathbf{B}_k del modello (2.64) sono allora date da:

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \Phi(t_{k+1}, t_k), \text{ con} \\ \dot{\Phi}(t, t_k) &= \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_k) \\ \Phi(t_k, t_k) &= \mathbf{I}\end{aligned}\tag{2.67}$$

$$\mathbf{B}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau\tag{2.68}$$

Per definire completamente il modello discreto equivalente rimane da caratterizzare le sequenze bianche \mathbf{w}_k . Esse sono descritte statisticamente dalla matrice delle covarianze:

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}\tag{2.69}$$

dove [2]:

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau\tag{2.70}$$

Spesso, per convenienza di calcolo, è conveniente risolvere delle equazioni differenziali piuttosto che degli integrali. Le espressioni (2.68) e (2.70), seguendo tale approccio, si possono derivare ottenendo delle equazioni differenziali da risolvere entro l'intervallo (t_k, t_{k+1}) con condizioni iniziali nulle. Le matrici \mathbf{B}_k e \mathbf{Q}_k , quindi, possono essere determinate risolvendo le seguenti equazioni differenziali [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{B}}}(t, t_k) &= \mathbf{F}(t)\bar{\mathbf{B}}(t, t_k) + \mathbf{B}(t) \\ \bar{\mathbf{B}}(t_k, t_k) &= 0\end{aligned}\tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{Q}}}(t, t_k) &= \mathbf{F}(t)\bar{\mathbf{Q}}(t, t_k) + \bar{\mathbf{Q}}(t, t_k)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \\ \bar{\mathbf{Q}}(t_k, t_k) &= 0\end{aligned}\tag{2.72}$$

e sarà:

$$\mathbf{B}_k = \bar{\mathbf{B}}(t_{k+1}, t_k)\tag{2.73}$$

$$\mathbf{Q}_k = \bar{\mathbf{Q}}(t_{k+1}, t_k)\tag{2.74}$$

In definitiva il modello discreto equivalente (2.64) si determina risolvendo le tre equazioni differenziali (2.67), (2.71) e (2.72).

Il risultato del metodo appena presentato è esatto e vale per il caso generico di modello continuo tempo variante, ma il calcolo delle equazioni differenziali indicate può risultare computazionalmente impegnativo. Per questo, quando possibile, si adottano delle soluzioni approssimate più semplici da calcolare, che sono presentate di seguito.

Nel caso di sistema continuo tempo invariante la matrice di transizione di stato ha una forma più semplice:

$$\Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1} - t_k) = e^{\mathbf{F}\Delta t} \quad (2.75)$$

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

Esistono diversi algoritmi per il calcolo della matrice esponenziale. Un modo per approssimarla, per Δt piccoli, è mediante il calcolo dei primi termini della definizione in serie di potenze:

$$e^{\mathbf{F}\Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{F}\Delta t)^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{(\mathbf{F}\Delta t)^2}{2!} + \dots \quad (2.76)$$

Sempre nel caso di modello tempo invariante e Δt piccoli, l'integrale (2.70) si può calcolare facendo l'approssimazione $\Phi \approx \mathbf{I}$ per cui [1]:

$$\mathbf{Q}_k \approx \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \Delta t \quad (2.77)$$

Quando il modello continuo è tempo invariante o ben approssimabile come tale, e quando si considerano Δt piccoli, le relazioni (2.75) e (2.77) rappresentano una buona approssimazione delle matrici Φ_k e \mathbf{B}_k . Si fa notare che per applicare il filtro di Kalman non è necessario determinare la matrice \mathbf{B}_k .

Se le misure in un sistema vengono effettuate con dispositivi che forniscono dati in modo continuo, le equazioni di misura risultano continue. Volendo usare le misure ad intervalli di tempo fissati, in forma discreta, si deve decidere come trattare i dati continui. Il modo più semplice per rendere discrete le misure consiste nel campionarle, ignorando i dati forniti fra un campionamento ed il successivo. Questo metodo è poco efficiente dal punto di vista dei risultati e spesso si adottano delle tecniche di elaborazione dei dati per migliorare la qualità delle misure, ottenendo ad esempio la riduzione del rumore.

Le equazioni continue di misura siano:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Hx} + \mathbf{v} \quad (2.78)$$

con gli errori di misura \mathbf{v} costituiti da rumori bianchi caratterizzati dalla matrice delle covarianze:

$$E[\mathbf{v}(t_i)\mathbf{v}^T(t_j)] = \begin{cases} \mathbf{R} & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases} \quad (2.79)$$

Le equivalenti equazioni discrete siano:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.80)$$

dove \mathbf{v}_k è un vettore di sequenze bianche con matrice delle covarianze:

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (2.81)$$

Nel caso di semplice campionamento delle misure la corrispondenza fra le equazioni continue e discrete è esatta, avendo [5]:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R} \quad (2.83)$$

2.7 Filtro di Kalman discreto

2.7.1 Introduzione

Il filtro di Kalman¹ è un algoritmo ricorsivo di elaborazione dati in grado di stimare in modo ottimale gli stati di un processo stocastico lineare Gaussiano discreto, avvalendosi di misure, discrete anch'esse e corrotte da rumori bianchi Gaussiani, di grandezze legate agli stati del sistema da relazioni lineari. Questa definizione è estremamente sintetica e le spiegazioni che seguono sono di aiuto per chiarire l'argomento.

I processi stocastici per i quali è possibile stimare gli stati mediante il filtro di Kalman devono avere in ingresso, come uniche componenti aleatorie, dei rumori bianchi Gaussiani. Il filtro deve essere provvisto di un modello matematico del processo, rappresentato in variabili di stato come segue:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.84)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k \quad (2.85)$$

- $\mathbf{x}_k = (n \times 1)$ vettore di stato del processo all'istante t_k
- $\Phi_k = (n \times n)$ matrice della dinamica che correla gli stati all'istante t_k con gli stati all'istante t_{k+1} (se il sistema è l'equivalente discreto di un processo continuo, questa prende il nome di *Matrice di Transizione di Stato*)

¹ Il filtro di Kalman è un argomento molto complesso che non si può presentare in modo completo con una breve sintesi. Per gli approfondimenti ed i chiarimenti si rimanda a [1], [2], [3], [4], [5].

$\mathbf{w}_k = (n \times 1)$	vettore che rappresenta il <i>rumore di processo</i> , i cui elementi sono sequenze bianche gaussiane
$\mathbf{y}_k = (p \times 1)$	vettore delle uscite del processo all'istante t_k
$\mathbf{B}_k = (p \times n)$	matrice delle uscite che lega linearmente le uscite agli stati all'istante t_k

Per le proprietà del rumore bianco, le sequenze bianche di \mathbf{w}_k hanno media nulla e correlazione nulla nel tempo, ma non è escluso che si possa avere cross-correlazione non nulla fra le componenti del vettore allo stesso istante (l'autocorrelazione è certamente non nulla). Si assume di conoscere la matrice delle covarianze associata al vettore \mathbf{w}_k all'istante t_k , indicata con \mathbf{Q}_k , per cui è:

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (2.86)$$

Un simile sistema spesso costituisce la componente stocastica di un modello dinamico che presenti anche degli ingressi deterministici, nel quale il rumore in ingresso costituisce il *rumore di processo* ed ha lo scopo di mettere in conto le lacune del modello. Ad esempio gli aspetti di secondaria importanza del sistema possono essere stati lasciati non modellati per semplicità, oppure possono esserci disturbi sovrapposti agli ingressi deterministici che non possono essere controllati ne' eliminati: in ogni caso la sola componente deterministicia del modello non descrive perfettamente il sistema reale e la parte stocastica mette in conto tale carenza. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'evoluzione esatta degli stati per effetto degli ingressi deterministici può essere calcolata indipendentemente dal resto mediante la teoria dei sistemi lineari, mentre l'effetto degli ingressi aleatori viene stimato mediante il filtro di Kalman. Il modello dinamico con i soli ingressi aleatori rappresenta un processo stocastico. Gli ingressi aleatori ammessi dal filtro di Kalman sono solo rumori bianchi, ma grazie agli Shaping Filters (paragrafo 2.5.3) questo fatto non costituisce una severa limitazione.

Per la stima degli stati del processo stocastico il filtro di Kalman si avvale di misure discrete di qualsiasi grandezza che sia legata da relazioni lineari agli stati del processo, quindi si possono misurare direttamente gli stati del sistema (quando sia possibile) o una qualsiasi combinazione lineare di essi. E' ammesso che tali misure siano corrotte da rumori bianchi, che rappresentano gli *errori di misura* ed introducono incertezza nei valori forniti. Il filtro deve disporre di un modello che rappresenti le misure fornite, con la seguente forma:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.87)$$

- $\mathbf{z}_k = (m \times 1)$ vettore delle misure all'istante t_k
 $\mathbf{H}_k = (m \times n)$ matrice che lega linearmente le misure ideali (in assenza di rumore di misura) agli stati all'istante t_k
 $\mathbf{v}_k = (m \times 1)$ vettore che rappresenta il *rumore di misura*, i cui elementi sono sequenze bianche Gaussiane

Il vettore \mathbf{v}_k ha caratteristiche analoghe al vettore \mathbf{w}_k . Si assume nota la matrice delle covarianze associata a \mathbf{v}_k e si esclude una possibile correlazione fra le componenti di \mathbf{v}_k e \mathbf{w}_k :

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (2.88)$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] = 0 \quad \text{per ogni } i, k \quad (2.89)$$

Il filtro assegna, di volta in volta a ciascuna misura, un peso che dipende dai livelli di rumorosità e quindi dall'attendibilità dei valori forniti. Se un sistema di misura presenta errori diversi dal rumore bianco, entro certi limiti si può far uso degli Shaping Filters come nel caso dei rumori di processo e come viene specificato successivamente.

Il filtro di Kalman stima in modo ottimale gli stati del processo, nel senso che le misure vengono pesate in modo da ottimizzare, da un punto di vista statistico, gli errori di stima degli stati, minimizzando la somma delle varianze di tali errori. Le prestazioni ottenibili mediante il filtro di Kalman sono le migliori in assoluto per il caso di processi Gaussiani, non serve cercare altri metodi di elaborazione dati.

Dicendo che il filtro di Kalman è un algoritmo ricorsivo si intende che, quando una nuova misura viene elaborata per aggiornare la stima degli stati del processo, non è necessario ripetere i calcoli su tutte le misure effettuate in precedenza. La stima attuale degli stati viene effettuata sulla base della loro stima all'istante precedente e dalle misure attuali. In confronto ad altri metodi di elaborazione dati per la stima degli stati, questo aspetto consente di impegnare minori risorse di calcolo e minori quantità di memoria dell'elaboratore, a vantaggio dell'applicazione del filtro in tempo reale. Da questo punto di vista il filtro di Kalman impegna in maniera ottimale anche le risorse disponibili, evitando di “sprecare” i calcoli eseguiti agli istanti precedenti.

La possibilità di impiegare gli Shaping Filters nel filtro di Kalman necessita di alcune considerazioni. Ogni volta che si fa uso di tale strumento si desidera modellare con maggior precisione gli errori di processo o di misura, piuttosto che assumerli come rumori bianchi come richiesto dal filtro di Kalman, anche quando sarebbe un'approssimazione grossolana. Uno Shaping Filter aggiunge nuove variabili di stato che devono essere stimate, quindi la loro introduzione risulta utile solo se il sistema continua ad essere osservabile mediante le misure a disposizione. In caso contrario, se il sistema non è più osservabile, l'uso degli Shaping Filters diventa controproducente perché si hanno problemi di divergenza delle stime degli stati.

L'argomento del filtro di Kalman è stato inizialmente sviluppato nella versione discreta e poi, successivamente, è stata elaborata la versione continua. Per le applicazioni pratiche, nell'impiego in tempo reale nei sistemi di calcolo, il filtro discreto è quello più utile, ma il filtro continuo ha comunque una notevole importanza teorica e concettuale.

2.7.2 Equazioni iterative del filtro

Ad ogni iterazione del filtro di Kalman vengono calcolate le stime degli stati del processo. Ogni iterazione del filtro consiste nella soluzione di quattro equazioni algebriche matriciali, che sono presentate dopo alcune necessarie premesse.

Per eseguire il filtro di Kalman sono necessari i seguenti elementi:

- Il modello del processo di cui si desidera stimare gli stati, nella forma (2.84);
- Il modello delle misure, nella forma (2.87);
- Le matrici delle covarianze dei rumori di processo e di misura, \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k ;
- I valori iniziali degli stati del processo, \mathbf{x}_0 , ed i valori iniziali delle covarianze dei loro errori, cioè la matrice delle covarianze degli errori all'istante iniziale, \mathbf{P}_0 , che viene definita più avanti.

Si adotta la seguente notazione:

- \mathbf{x}_k è il vettore degli stati esatto;
- $\hat{\mathbf{a}}_k^-$, $\hat{\mathbf{a}}_k$: il simbolo ‘ \wedge ’ indica la stima dell’elemento considerato, in questo caso il generico vettore \mathbf{a}_k . Il simbolo ‘ $-$ ’ in apice o la sua assenza indicano il vettore, all’istante considerato, rispettivamente prima e dopo che le misure di quell’istante, \mathbf{z}_k , vengano elaborate.

Si definisce il vettore degli errori di stima degli stati come:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (2.90)$$

e si indica la matrice delle covarianze degli errori di stima con:

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \quad (2.91)$$

I valori sulla diagonale di \mathbf{P}_k danno una descrizione statistica dell'attendibilità della stima, visto che rappresentano la varianza di ciascun elemento del vettore \mathbf{e}_k .

Si considerino noti i valori di $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e \mathbf{P}_k^- ad un certo istante t_k , che in particolare possono essere i valori \mathbf{x}_0 e \mathbf{P}_0 all'istante iniziale t_0 . Date le misure \mathbf{z}_k , esse vengono elaborate per aggiornare la stima degli stati mediante la seguente espressione:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.92)$$

Questa espressione aggiorna le stime degli stati combinando opportunamente, mediante la matrice dei guadagni \mathbf{K}_k , le stime disponibili al momento attuale e le misure.

I valori di \mathbf{K}_k determinano il peso da dare agli stati $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ed alle misure \mathbf{z}_k nell'aggiornamento delle stime. Ciascun valore di \mathbf{K}_k è compreso fra 0 ed 1. Considerando le due situazioni estreme, nel caso di guadagno nullo le misure vengono ignorate e la stima dello stato rimane invariata, mentre nel caso di guadagno unitario il valore dello stato viene assegnato esclusivamente sulla base delle misure attuali ignorando le informazioni fornite dal modello del processo. Nelle situazioni intermedie le misure hanno un peso variabile, il cui valore dipende dal criterio adottato per la determinazione di \mathbf{K}_k .

Il funzionamento ottimale del filtro si ha quando si determina \mathbf{K}_k imponendo la minimizzazione della traccia di \mathbf{P}_k , cioè quando si rendono minimi, da un punto di vista statistico, gli errori di stima degli stati. Applicando questo criterio, il \mathbf{K}_k che ne deriva prende il nome di *guadagno di Kalman* ed è dato da:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.93)$$

Dall'espressione del guadagno si intuisce che il peso dato alle misure dipende dalla descrizione statistica delle affidabilità delle stime degli stati e delle misure, attraverso i valori delle matrici delle covarianze \mathbf{P}_k^- ed \mathbf{R}_k . Grandi valori di \mathbf{R}_k rispetto ai valori di \mathbf{P}_k^-

indicano bassa affidabilità delle misure, facendo ottenere guadagni bassi che danno maggior peso alle informazioni fornite dal modello del processo, cioè $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. Nel caso opposto si ottengono alti valori dei guadagni che danno maggior peso alle misure.

Quando le stime degli stati vengono aggiornate cambia il loro livello di affidabilità, questo è espresso dall'aggiornamento della matrice delle covarianze degli errori \mathbf{P}_k . In particolare le covarianze degli errori si riducono perché nell'operazione di aggiornamento delle stime vengono inglobate delle informazioni, date dalle misure, che contribuiscono ad aumentare la precisione degli stati calcolati dal filtro. Esistono diverse espressioni per l'aggiornamento di \mathbf{P}_k , ciascuna delle quali ha determinate caratteristiche. Quella che segue è la *forma di Joseph*, che rispetto ad altre forme richiede un maggior numero di calcoli ma ha il vantaggio di mantenere la simmetria di \mathbf{P}_k :

$$\mathbf{P}_k = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right] \mathbf{P}_k^- \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \right]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.94)$$

Le matrici delle covarianze sono simmetriche per loro natura. La perdita di simmetria di \mathbf{P}_k è un problema legato agli errori numerici presenti nei calcoli eseguiti da un sistema digitale e, qualora non si adottino le opportune cautele, si verifica dopo lunghi tempi di esecuzione del filtro compromettendone il corretto funzionamento.

Le ultime operazioni da eseguire per concludere l'esecuzione del filtro di Kalman sono le propagazioni all'istante successivo t_{k+1} della stima degli stati e della matrice delle covarianze degli errori. La propagazione della stima degli stati è effettuata mediante il modello del processo secondo l'evoluzione libera descritta dalla matrice della dinamica:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k \quad (2.95)$$

A questa propagazione corrisponde una riduzione dell'affidabilità delle stime degli stati a causa delle incertezze del modello del processo, che si riflette nella variazione di \mathbf{P}_k . La propagazione della matrice delle covarianze degli errori è data da:

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (2.96)$$

Più sono intensi i rumori di processo, rappresentati dalla matrice \mathbf{Q}_k , e più si riduce l'affidabilità delle stime al tempo t_{k+1} .

A questo punto l'iterazione del filtro relativamente al tempo t_k è conclusa. Una nuova iterazione avviene al tempo t_{k+1} , quando sono disponibili nuove misure. I valori di $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ e \mathbf{P}_{k+1}^- appena calcolati con le (2.95) e (2.96) diventano i nuovi valori di $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e \mathbf{P}_k^- . In Figura 2.5 è rappresentata schematicamente la sequenza dei calcoli da eseguire in una iterazione del filtro.

2.8 Filtro di Kalman Esteso

2.8.1 Definizione

Il filtro di Kalman stima gli stati di processi descritti da modelli lineari ed in cui le misure sono legate agli stati da relazioni anch'esse lineari. Sono frequenti i casi in cui i modelli dei processi di interesse e/o le relazioni delle misure sono invece descritti da modelli non lineari, ma il filtro di Kalman viene ancora efficacemente impiegato ricorrendo alla linearizzazione dei modelli.

La linearizzazione viene effettuata rispetto ad una “traiettoria” di riferimento, intendendo genericamente con “traiettoria” l’andamento nel tempo degli stati del sistema. Ci sono due possibilità per la scelta della traiettoria di riferimento: ci si può basare su una traiettoria predefinita a priori oppure si possono prendere come riferimento le stesse stime calcolate dal

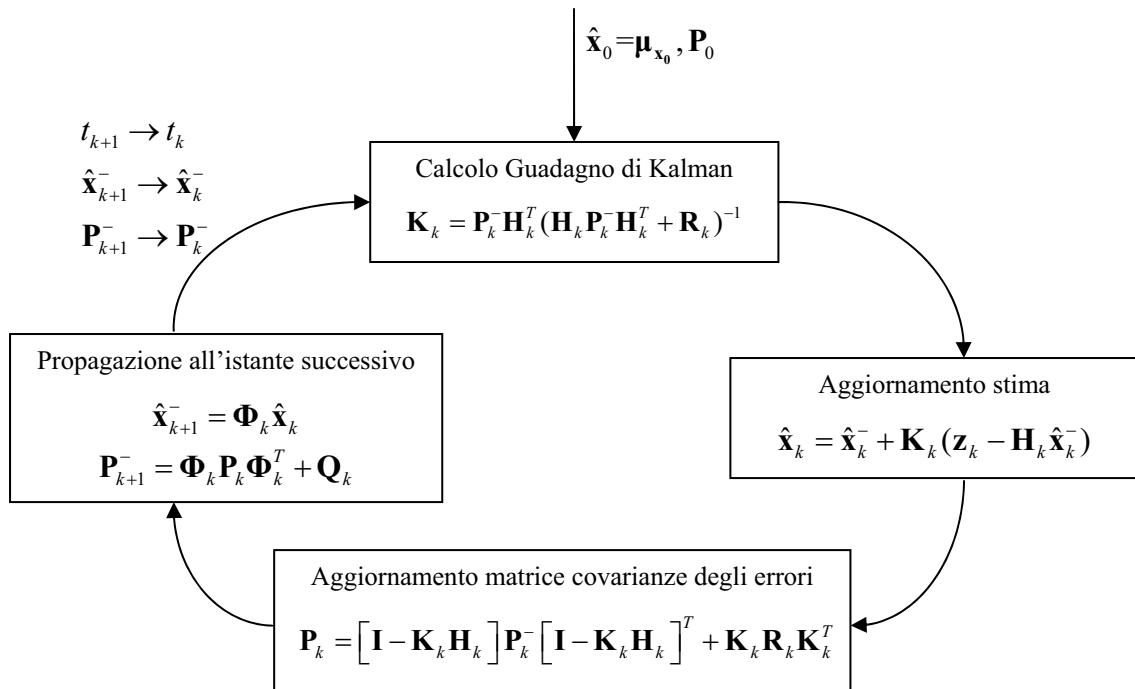


Figura 2.5 Passi dell'iterazione del filtro di Kalman.

filtro. Il filtro di Kalman viene quindi implementato sul modello linearizzato risultante, che differisce a seconda della traiettoria di riferimento considerata. Nel primo caso si parla di *Filtro di Kalman Linearizzato*, mentre nel secondo caso si parla di *Filtro di Kalman Esteso (Extended Kalman Filter – EKF)*.

Il filtro di Kalman esteso è in grado di raggiungere prestazioni migliori del filtro di Kalman linearizzato, infatti se le stime degli stati sono buone si ha una valida traiettoria di riferimento rispetto a cui linearizzare e l'approssimazione lineare del modello può essere migliore rispetto all'altro caso. Il filtro esteso presenta però il rischio di incorrere in problemi di divergenza, infatti può accadere che una cattiva stima degli stati, anche solo temporanea, faccia ottenere un modello linearizzato mal rappresentativo delle condizioni attuali, degradando quindi le prestazioni di stima ed innescando un meccanismo che può risultare instabile.

2.8.2 Linearizzazione del modello

Si consideri un processo continuo in cui il modello matematico e le relazioni delle misure siano non lineari [1],[2]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_d, t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2.97)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.98)$$

Il vettore \mathbf{u}_d sono ingressi deterministici, mentre \mathbf{w}, \mathbf{v} sono vettori di rumori bianchi, costituenti i rumori di processo e di misura, caratterizzati dalle seguenti matrici delle covarianze:

$$E[\mathbf{w}(t_i)\mathbf{w}^T(t_j)] = \begin{cases} \mathbf{Q} & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases} \quad (2.99)$$

$$E[\mathbf{v}(t_i)\mathbf{v}^T(t_j)] = \begin{cases} \mathbf{R} & t_i = t_j \\ 0 & t_i \neq t_j \end{cases} \quad (2.100)$$

$$E[\mathbf{w}(t_i)\mathbf{v}^T(t_j)] = 0 \quad \text{per ogni } t_i, t_j \quad (2.101)$$

La condizione iniziale degli stati del processo sia descritta dalla variabile aleatoria vettoriale Gaussiana \mathbf{x}_0 con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0}$ e caratterizzata dalla matrice delle covarianze \mathbf{P}_0 .

Nelle (2.97) e (2.98) si assume che i rumori di processo e di misura siano additivi anziché rientrare nelle relazioni non lineari.

Si indichi con $\bar{\mathbf{x}}$ la traiettoria di riferimento per la linearizzazione. Sia $\bar{\mathbf{x}}$ la soluzione di:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_d, t) \quad (2.102)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} \quad (2.103)$$

Sia $\bar{\mathbf{z}}$ il vettore delle misure nominali corrispondenti alla traiettoria di riferimento:

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (2.104)$$

Il vettore degli stati ed il vettore delle misure possono essere scritti come:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \delta \mathbf{x}(t) \quad (2.105)$$

$$\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{z}}(t) + \delta \mathbf{z}(t) \quad (2.106)$$

dove $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \mathbf{z}$ sono i termini di perturbazione degli stati e delle misure.

Sostituendo le (2.105) e (2.106) nelle equazioni (2.97) e (2.98) ed assumendo che $\delta \mathbf{x}$ sia sufficientemente piccolo, tali equazioni si possono sviluppare in serie di Taylor trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_d, t) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (2.107)$$

$$\bar{\mathbf{z}}(t) + \delta \mathbf{z}(t) \approx \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.108)$$

dove:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Indicando con \mathbf{F} ed \mathbf{H} le matrici Jacobiane (2.109) valutate sulla traiettoria di riferimento e tenendo conto delle (2.102) e (2.104), le (2.107) e (2.108) diventano:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (2.110)$$

$$\delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.111)$$

Queste equazioni sono l'approssimazione lineare dei termini di perturbazione del modello del processo e delle equazioni di misura.

2.8.3 Aspetti della realizzazione del filtro

Per applicare il filtro² nella forma discreta si deve prima determinare il modello discreto equivalente del processo (2.110) con la metodologia indicata al paragrafo 2.6. Il modello discreto risultante è rappresentato dalle seguenti equazioni:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.112)$$

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.113)$$

I rumori di processo e di misura sono caratterizzati dalle rispettive matrici delle covarianze come indicato dalle (2.86), (2.88) e (2.89), che qui vengono omesse.

Il filtro di Kalman Esteso si realizza applicando il normale filtro discreto al modello lineare definito dalle (2.112) e (2.113), con cui si stimano le perturbazioni $\delta \hat{\mathbf{x}}_k$ da usarsi per il calcolo delle stime degli stati mediante la seguente espressione, derivata dalla (2.105):

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \delta \hat{\mathbf{x}}_k \quad (2.114)$$

La condizione iniziale della perturbazione degli stati è descritta dalla variabile aleatoria $\delta \mathbf{x}_0$, definita come:

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}(t_0) \quad (2.115)$$

Avendo assunto, in (2.102), $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mu_{\mathbf{x}_0}$, la variabile $\delta \mathbf{x}_0$ è caratterizzata da $\mu_{\delta \mathbf{x}_0} = 0$ e dalla stessa matrice delle covarianze \mathbf{P}_0 della precedente variabile \mathbf{x}_0 . Questo serve a definire i dati di partenza per l'esecuzione del filtro di Kalman, che saranno $\delta \mathbf{x}_0 = \mu_{\delta \mathbf{x}_0} = 0$ e \mathbf{P}_0 .

Si consideri ora l'iterazione del filtro al generico istante t_k .

Il calcolo del guadagno di Kalman è come visto al paragrafo 2.7.2 e non necessita di commenti.

L'aggiornamento delle stime delle perturbazioni degli stati è dato da:

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k = \delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\delta \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \delta \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathbf{K}_k \delta \mathbf{z}_k \quad (2.116)$$

dove, dalle (2.104) e (2.106), $\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_k, t_k)$. L'espressione (2.116) risulta semplificata dal fatto che $\delta \hat{\mathbf{x}}_k^-$ è sempre nullo, come viene giustificato più avanti.

² Riferimenti bibliografici: [1],[2],[4].

Nel momento in cui si calcola $\delta\hat{\mathbf{x}}_k$, esso è subito usato per aggiornare le stime degli stati mediante la (2.114). A questo punto si compiono due azioni:

- La variabile $\delta\hat{\mathbf{x}}_k$ viene posta uguale a zero, dato che la variabile globale della stima degli stati, $\hat{\mathbf{x}}_k$, è stata aggiornata;
- Si aggiorna la traiettoria di riferimento all'istante t_k , $\bar{\mathbf{x}}(t_k)$, alla nuova stima del vettore di stato, $\hat{\mathbf{x}}_k$. Questo si realizza facendo ripartire l'integrazione della (2.102) ponendo la condizione iniziale pari a $\hat{\mathbf{x}}_k$ al tempo t_k .

L'aggiornamento e la propagazione della matrice delle covarianze \mathbf{P}_k si effettua come visto al paragrafo 2.7.2.

La propagazione all'istante t_{k+1} delle stime degli stati è data da:

- Per le perturbazioni degli stati è $\delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \delta\hat{\mathbf{x}}_k$. Dal momento che $\delta\hat{\mathbf{x}}_k$ è stato precedentemente posto uguale a zero, anche $\delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ sarà nullo. Questo è il motivo per cui $\delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ è sempre nullo, come precedentemente anticipato.
- Per i valori globali degli stati, dalla (2.114), essendo $\delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = 0$, la stima $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ è pari alla traiettoria di riferimento all'istante t_{k+1} , $\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1})$. In particolare la stima degli stati entro tutto l'intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1}]$ coincide proprio con la soluzione della (2.102), che qui viene ripetuta con una notazione adatta ad indicare esplicitamente la stima degli stati: $\dot{\hat{\mathbf{x}}}^-(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^-, \mathbf{u}_d, t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\hat{\mathbf{x}}^-(t_k) = \hat{\mathbf{x}}(t_k)$.

In Figura 2.6 sono riportati schematicamente i calcoli da eseguire per compiere un'iterazione del filtro. In Figura 2.7 è rappresentata graficamente l'evoluzione della traiettoria di riferimento considerata nel filtro di Kalman esteso, che coincide con la traiettoria stimata e subisce delle correzioni ad ogni elaborazione delle misure.

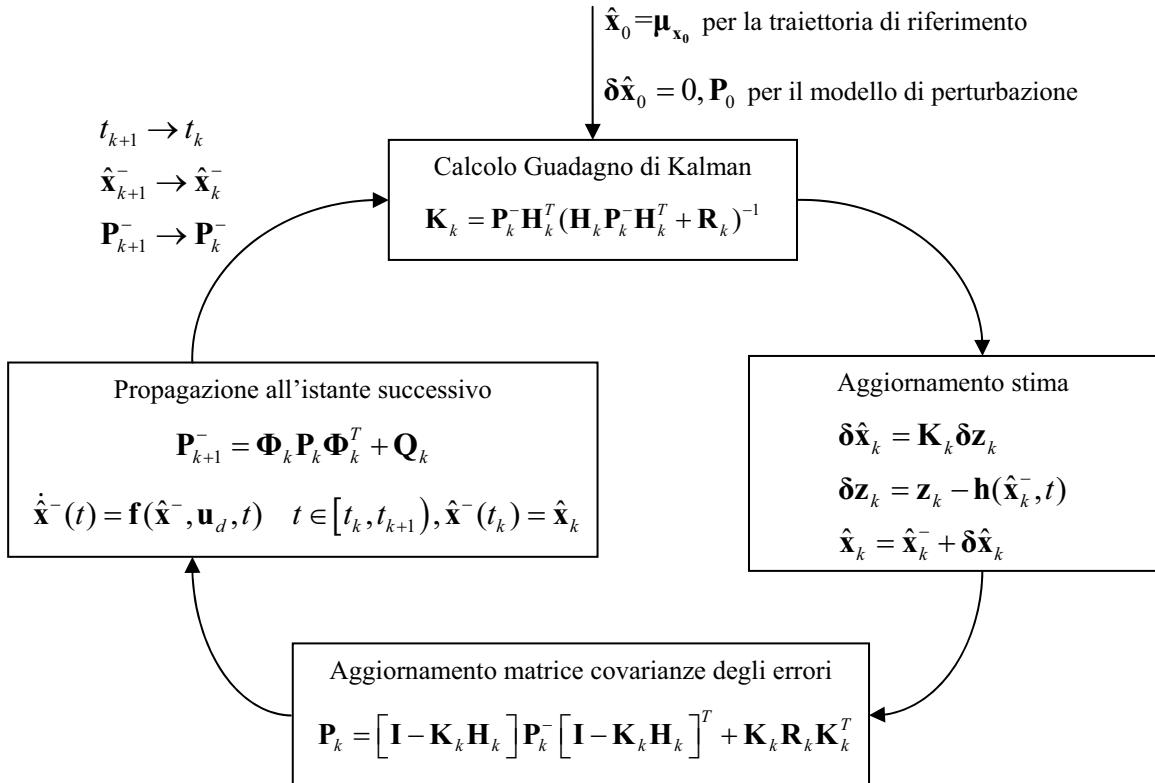


Figura 2.6 Passi dell'iterazione del filtro di Kalman esteso.

2.9 Sistema a “stati aumentati”

Il filtro di Kalman impone che il rumore di processo ed il rumore di misura siano bianchi. Può accadere che una modellazione più accurata del sistema in considerazione richieda di considerare dei segnali aleatori con caratteristiche statistiche più complesse del rumore bianco e, in tal caso, la soluzione può essere fornita dagli Shaping Filters.

Mediante l'uso degli Shaping Filters è possibile creare processi aleatori con determinate caratteristiche spettrali partendo da rumori bianchi, come visto al paragrafo 2.5.3, e questo

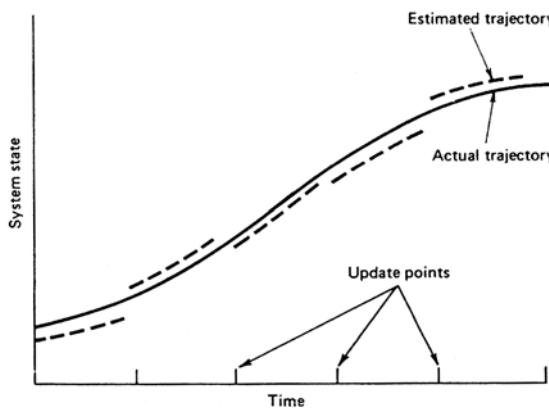


Figura 2.7 Traiettoria reale e traiettoria di riferimento per il filtro di Kalman esteso [1].

consente di affinare il modello del sistema senza violare le ipotesi del filtro di Kalman. Il prezzo da pagare è un aumento del numero di variabili di stato del modello complessivo, aumentando l'impiego delle risorse di calcolo e rischiando di incappare in situazioni in cui gli stati introdotti non siano osservabili.

Si consideri un generico sistema lineare continuo [4]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} \end{cases} \quad (2.117)$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\mu}$ sono vettori di rumori non bianchi ma realizzabili mediante Shaping Filters. Siano dati i modelli che producono i rumori con le desiderate caratteristiche statistiche:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_\varepsilon = \mathbf{F}_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon + \mathbf{G}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon + \mathbf{v}_\varepsilon \end{cases} \quad (2.118)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_\mu = \mathbf{F}_\mu \mathbf{x}_\mu + \mathbf{G}_\mu \mathbf{w}_\mu \\ \boldsymbol{\mu} = \mathbf{H}_\mu \mathbf{x}_\mu + \mathbf{v}_\mu \end{cases} \quad (2.119)$$

dove i rumori $\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w}_\mu, \mathbf{v}_\mu$ sono bianchi.

Combinando i precedenti modelli si ottiene il sistema a “stati aumentati”:

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{G}_a \mathbf{w}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G}\mathbf{H}_\varepsilon & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_\varepsilon \\ \mathbf{x}_\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\varepsilon \\ \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{w}_\mu \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

$$\mathbf{z}_a = \mathbf{H}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \mathbf{H}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_\varepsilon \\ \mathbf{x}_\mu \end{bmatrix} + \mathbf{v}_\mu \quad (2.121)$$

Come si vede, i rumori di processo e di misura del sistema a stati aumentati sono solo bianchi.

2.10 Analisi Monte Carlo

L’analisi Monte Carlo è una tecnica di indagine che si applica ai sistemi il cui comportamento dipende da una serie di variabili aleatorie, quindi non determinabili a priori, delle quali si dispone di una descrizione statistica. Questo tipo di analisi si effettua eseguendo un elevato numero di simulazioni di funzionamento del sistema assegnando ogni volta, alle variabili aleatorie, uno stato determinato casualmente nel rispetto delle rispettive

caratteristiche statistiche. In questo modo, se il numero di simulazioni condotte è sufficientemente ampio, i dati ottenuti sul comportamento del sistema sono statisticamente rappresentativi e possono essere elaborati per ricavare le descrizioni statistiche delle caratteristiche del sistema.

L’aspetto chiave di questo tipo di analisi risiede nella validità delle simulazioni eseguite. Se le simulazioni si basano su una cattiva rappresentazione del contesto reale in cui il sistema opera, i dati raccolti non sono significativi.

Oltre all’indagine delle caratteristiche dei sistemi, l’analisi Monte Carlo trova altri tipi di impiego. Essa può essere adottata per mettere a punto alcuni parametri del sistema affinché consegua delle prefissate caratteristiche di funzionamento. Da questo punto di vista l’analisi Monte Carlo costituisce una possibile tecnica di *Tuning*. Un’altra utilità di questo metodo sta nel poter eseguire il test dei sistemi in un contesto controllato, per rilevare possibili difetti sfuggiti o non previsti in fase di sviluppo prima di passare ai test reali sul campo. In questo caso l’analisi Monte Carlo consente di testare un sistema in diverse situazioni mettendo in conto le variabilità previste nell’ambiente di impiego. Sempre nell’ambito del test dei sistemi, questa tecnica di analisi è adatta ad essere impiegata a diversi stadi dello sviluppo di un sistema complesso, in cui di volta in volta le parti di esso che vengono concretamente realizzate possono prendere il posto della loro parte simulata.

2.11 World Magnetic Model

Il *World Magnetic Model*³ (WMM) è un modello del campo magnetico terrestre principale dovuto al nucleo esterno della Terra, sviluppato principalmente per essere impiegato nei sistemi di navigazione aerei e marini. Questo modello viene aggiornato ogni cinque anni: la validità dell’attuale WMM-2005 si estende fino al 31 Dicembre 2009.

Il WMM è realizzato dal *National Geophysical Data Center* (NGDC) degli Stati Uniti d’America e dal *British Geological Survey* (BGS), finanziati dalla *National Geospatial-Intelligence Agency* (NGA) degli Stati Uniti d’America e dalla *Defence Geographic Imagery and Intelligence Agency* (DGIA) del Regno Unito. Il WMM è il modello standard adottato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti d’America, dal Ministero della Difesa del Regno Unito, dall’Organizzazione del Trattato del Nord Atlantico (NATO) e dall’Organizzazione Idrografica Mondiale (WHO) nei sistemi di navigazione e negli AHRS. Tale modello è anche largamente impiegato nei sistemi di navigazione civili.

³ Riferimento bibliografico: [12].

Il campo magnetico terrestre, \mathbf{B}_e , è una quantità vettoriale che varia nello spazio, (\mathbf{r}), e nel tempo, (t). Esso è dovuto alla sovrapposizione di molteplici effetti, dove i più importanti sono:

- Il campo magnetico generato dal nucleo esterno fluido della Terra, \mathbf{B}_m , che rappresenta la componente predominante del campo magnetico complessivo e sulla superficie terrestre ha un peso del 95%. Esso è funzione dello spazio e del tempo;
- Il campo magnetico generato dal mantello e dalla crosta terrestre, \mathbf{B}_c , che sulla scala dei tempi di interesse si può ritenere funzione solo dello spazio;
- Il campo magnetico generato dalle correnti elettriche presenti nella ionosfera e nella magnetosfera e dalle correnti elettriche indotte nella crosta e nel mantello terrestre, \mathbf{B}_d , funzione dello spazio e del tempo.

Complessivamente è:

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_c(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_d(\mathbf{r}, t)$$

Il WMM rappresenta solo la componente principale $\mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t)$ mediante delle funzioni armoniche sferiche, i cui coefficienti sono determinati sulla base di misurazioni sperimentali del campo magnetico effettuate da satelliti in orbita e da sensori dislocati sulla superficie terrestre. Gli ingressi del modello sono la posizione nello spazio espressa mediante la latitudine λ ($^{\circ}$), la longitudine φ ($^{\circ}$) e l'altezza da terra h (m), e la data espressa in forma di anno decimale. Le quantità fornite sono le tre componenti del campo magnetico terrestre in Assi Verticali Locali, B_{eN}, B_{eE}, B_{eD} (nT), l'intensità totale F (nT), l'intensità orizzontale H (nT), l'angolo di Inclinazione magnetica I ($^{\circ}$) (l'angolo fra il vettore di campo magnetico ed il piano orizzontale, misurato positivo verso il basso) e l'angolo di Declinazione magnetica D ($^{\circ}$) (l'angolo sul piano orizzontale fra il nord vero ed il vettore di campo magnetico, misurato positivo verso Est).

Le prestazioni del WMM su scala globale sono molto buone, infatti si è calcolato che nell'arco dei cinque anni di validità del modello gli errori RMS sugli angoli di Declinazione D e di Inclinazione I sulla superficie terrestre sono inferiori ad 1° e gli errori RMS sulle intensità orizzontale H , verticale B_{eD} e totale F sono inferiori ai 200 nT. Esistono rari casi,

tuttavia, limitati nello spazio e nel tempo, con errori di angolo di Declinazione magnetica che possono superare i 10° e casi più frequenti con errori di $3 - 4^\circ$.

3 Modelli di errore dei sensori

Il sensore è un dispositivo che ha la funzione di rilevare una caratteristica di una grandezza fisica e fornirne la misura, la quale è affetta da errori di diverse tipologie. Questi errori possono essere insiti nel principio con cui avviene la rilevazione della grandezza e la trasmissione della misura o possono essere causati da difetti di fabbricazione del dispositivo. La caratterizzazione e la quantificazione degli errori di misura consente di determinare l'impatto che ogni tipo di errore ha sulle prestazioni di un sistema, permette di qualificare e confrontare sensori diversi che svolgono lo stesso tipo di rilevazione e, cosa utile in questo lavoro, permette di formulare un modello matematico da impiegare nelle simulazioni per produrre dati realistici delle misure.

Di seguito vengono descritti i modelli di errore impiegati nella presente tesi. Per la loro definizione è stato necessario elaborare le informazioni tratte da diverse fonti ([2],[4],[5],[6],[14]) in quanto non è stato individuato alcun testo che trattasse in modo completo l'argomento. I valori dei termini di errore sono stati assegnati sulla base dei dati reperibili nelle brochure dei prodotti presenti sul mercato.

3.1 Sensori inerziali

In Figura 3.1 è rappresentata la struttura della *IMU (Inertial Measurement Unit)*. In ingresso ci sono le misure inerziali ideali *IM* costituite dalle accelerazioni e dalle velocità angolari espresse in Assi Corpo. Gli errori di disallineamento dei sensori sono messi in conto a questo livello della struttura, applicando una trasformazione delle misure inerziali ideali dagli Assi Corpo alle terne non ortogonali delle triadi di accelerometri e di giroscopi mediante i blocchi *Accelerometers Misalignment* e *Gyros Misalignment*. A questo punto, alle misure ideali lungo ogni asse di ingresso dei sensori vengono introdotti gli errori di misura di ciascun sensore, ottenendo complessivamente le misure inerziali affette da errore sulla terna di riferimento Assi Corpo.

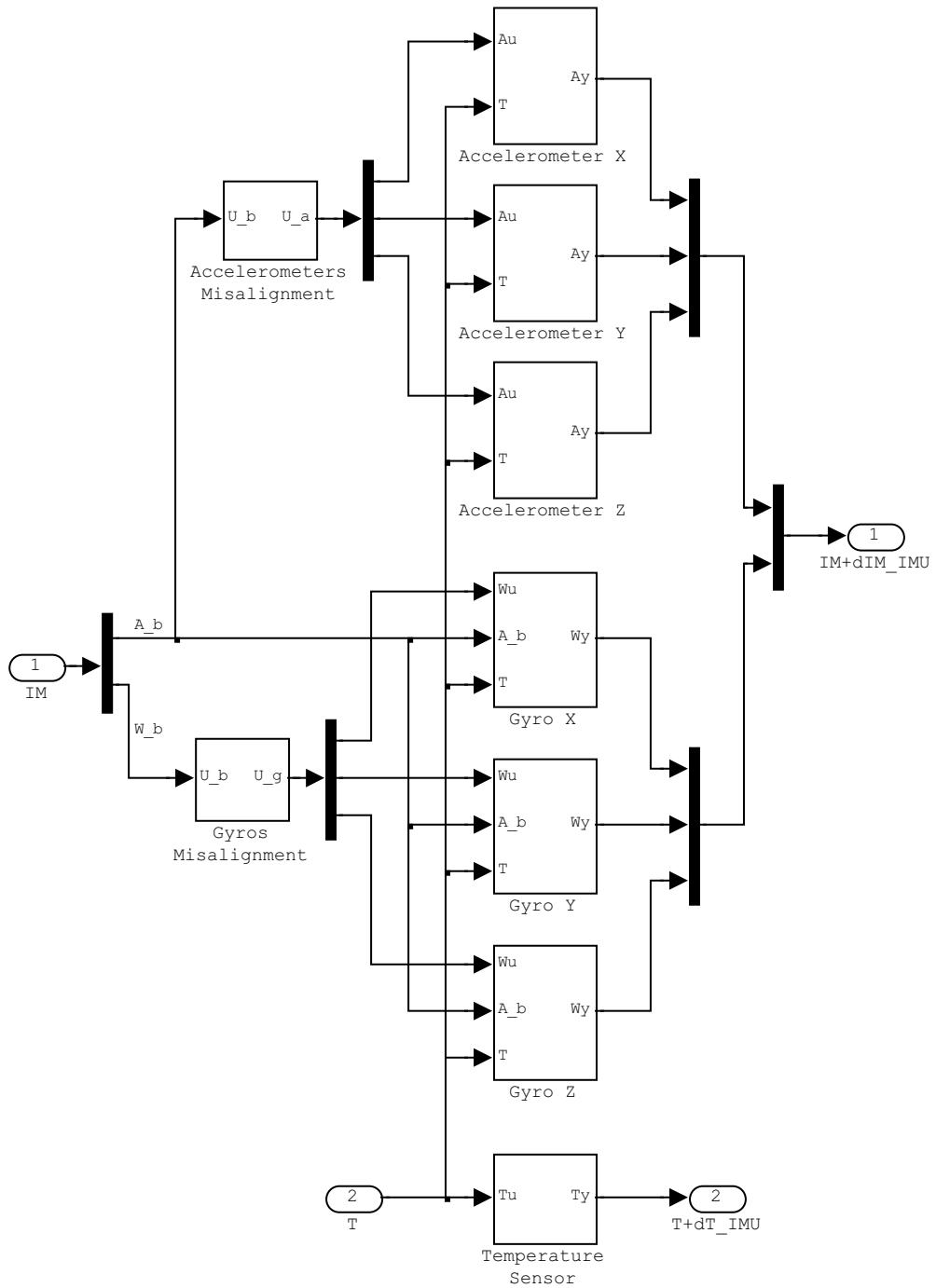


Figura 3.1 Schema dell'IMU.

Oltre ai tre accelerometri ed ai tre giroscopi, che forniscono le misure inerziali, nell'IMU è previsto un sensore di temperatura che al momento è modellato come ideale (uscita coincidente con l'ingresso). La presenza di un termometro all'interno delle IMU è abbastanza comune perché la temperatura ha un effetto importante sulle caratteristiche di errore dei sensori. Molti produttori di IMU applicano una pre-elaborazione delle misure per compensare gli effetti della temperatura ed in tal caso la presenza del termometro non interessa in modo diretto l'utilizzatore. In certi casi è possibile acquistare le IMU ad un costo inferiore

rinunciando alla compensazione integrata degli effetti della temperatura, dovendo provvedere da soli a questa operazione facendo allora un uso diretto del termometro.

In Figura 3.2 è rappresentato lo schema del modello di errore di un giroscopio, ad esempio di *Gyro X* di Figura 3.1. Questo modello viene impiegato anche per gli accelerometri ed i magnetometri eliminando il termine di sensibilità alle accelerazioni lineari, rappresentato dal blocco *G and G² Sensitivity*, che è caratteristico solo dei giroscopi.

Per i termini di errore si possono definire due categorie principali, quelli dipendenti dall'ingresso e quelli indipendenti da esso. Gli errori dipendenti dall'ingresso sono quelli che in Figura 3.2 vengono rappresentati nel gruppo in alto, che sono: *Saturation, Long Term Scale Factor Stability, Non-Linearity, Asymmetry, Scale Factor Temperature Shift*. I termini *Bandwidth* e *Sampling* (in Figura 3.2 indicato con *Output Data Rate*) introducono degli errori che dipendono dalla storia temporale dell'ingresso e non direttamente dal suo valore, quindi sono a cavallo delle due categorie appena definite. Tutti gli altri termini di errore sono quelli indipendenti dall'ingresso.

Di seguito vengono descritte in dettaglio le caratteristiche di errore considerate.

3.1.1 Misalignment

Il disallineamento dei sensori è il primo errore introdotto nelle misure ideali, Figura 3.1. Le cause del disallineamento sono molteplici:

- le triadi di sensori non sono mai perfettamente ortogonali;
- si commettono errori di allineamento nel montaggio dei sensori nell'involucro dell'AHRS;
- si introducono errori nella fase di installazione dell'AHRS a bordo del velivolo;
- ci sono gli effetti legati alla deformazione termica, qui trascurati.

Ciascun sensore, di conseguenza, misura una quantità che dipende non solo dall'ingresso lungo l'Asse Corpo a cui è nominalmente allineato ma anche dagli ingressi lungo le altre direzioni ortogonali. L'errore provocato dal disallineamento sta nel considerare le quantità misurate sulle terne dei sensori come misure in Assi Corpo.

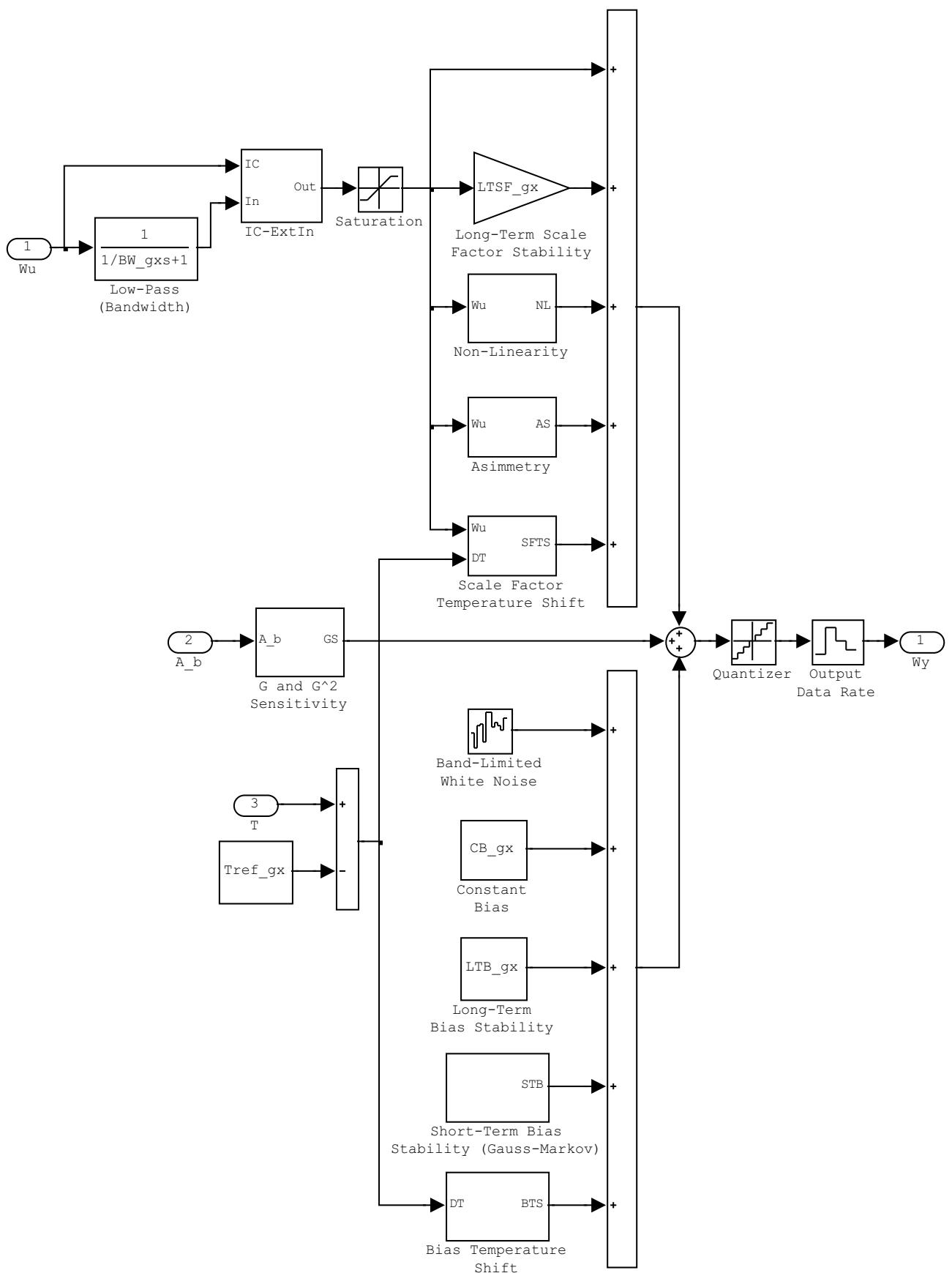


Figura 3.2 Schema del modello di errore di un giroscopio.

Le matrici di trasformazione dagli Assi Corpo alle terne dei sensori consentono di calcolare gli ingressi veri lungo le direzioni di ingresso di ciascun sensore a partire dagli ingressi veri in Assi Corpo. Siano $\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T$ e $\boldsymbol{\omega}^G = [\omega_{xg} \quad \omega_{yg} \quad \omega_{zg}]^T$ la velocità angolare della terna Assi Corpo rispetto agli Assi Inerziali espressa rispettivamente in Assi Corpo e sulla terna dei giroscopi. La trasformazione dagli Assi Corpo alla terna dei giroscopi è data da:

$$\boldsymbol{\omega}^G = \mathbf{R}_{B2G} \boldsymbol{\omega}^B \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_{B2G} = \mathbf{I} + \Delta_{B2G} \quad (3.2)$$

$$\Delta_{B2G} = \begin{bmatrix} 0 & a_{ik} & -a_{ij} \\ -a_{jk} & 0 & a_{ji} \\ a_{kj} & -a_{ki} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dove a_{ik} è l'angolo positivo di rotazione, in radianti, intorno all'Asse Corpo k del piano degli Assi Corpo i, k per portarlo sull'asse i dei giroscopi. Nelle precedenti relazioni si è assunto che gli angoli di disallineamento siano piccoli, tali che valgano le approssimazioni $\cos \alpha \approx 1$ e $\sin \alpha \approx \alpha$. La trasformazione inversa $\mathbf{R}_{G2B} = (\mathbf{R}_{B2G})^{-1}$, approssimata al primo ordine, è data da:

$$\mathbf{R}_{G2B} = \mathbf{I} - \Delta_{B2G} \quad (3.4)$$

Gli errori di disallineamento vengono inseriti nel modello dei sensori mediante la (3.1), generando casualmente i parametri della (3.3) assumendo che il loro andamento sia descritto da una distribuzione Gaussiana a media nulla e deviazione standard definita fra le caratteristiche di errore dei sensori.

3.1.2 Bandwidth

Il sensore ha una banda passante limitata che lo rende insensibile agli ingressi aventi frequenze superiori ad un valore di soglia. Ogni sensore, in base alla tipologia ed ai dettagli della realizzazione, ha una banda passante massima legata alle proprie caratteristiche fisico-mecaniche. Ci sono esempi di sensori destinati all'impiego in presenza di vibrazioni intense che vengono realizzati specificamente con una banda passante limitata, attraverso un'adeguata geometria degli elementi sensibili e provvedendo essi di un elevato smorzamento, allo scopo di filtrare meccanicamente gli ingressi spuri provocati dalle vibrazioni. Quando previsto, la

banda passante del sensore può essere opportunamente ridotta agendo sulla sezione elettronica del dispositivo, variando i parametri di un filtro passa basso che opera sul segnale della misura, che può essere analogico o digitale, a seconda del sensore. Abbassare quanto possibile la banda passante del sensore, in funzione delle esigenze applicative, è utile perché c'è il vantaggio di ridurre l'intensità del rumore di misura additivo. Il legame fra la banda passante e l'intensità del rumore di misura viene richiamato più avanti.

Come si vede in Figura 3.2, la banda passante del sensore è stata modellata mediante un filtro passa basso ad un polo con frequenza di taglio pari a $2\pi BW$ rad/s, con BW in Hz, la cui funzione di trasferimento è:

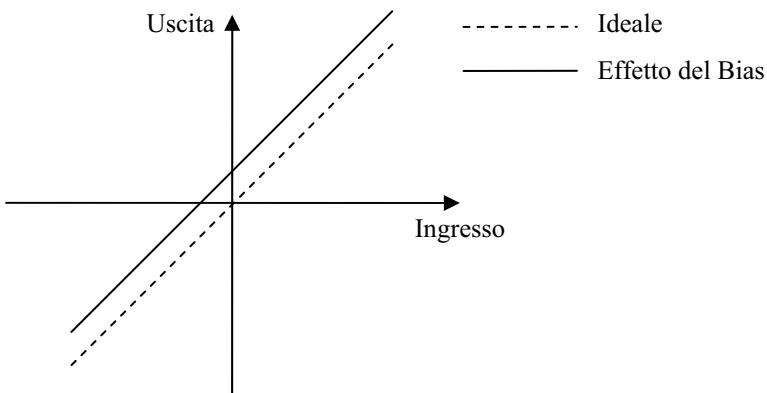
$$G_{LP}(s) = \frac{1}{\frac{1}{BW}s + 1} \quad (3.5)$$

Il blocco *IC-ExtIn* (*Initial Condition – External Input*) in Figura 3.2 serve solo per inizializzare correttamente le simulazioni, in modo che il valore iniziale dell'ingresso del sensore passi inalterato invece di essere elaborato erroneamente dal filtro come se fosse una transizione istantanea dall'ingresso nullo al valore iniziale.

3.1.3 Constant Bias (CB)

Quando l'ingresso è nullo, idealmente il sensore dovrebbe dare una misura nulla. In realtà la misura fornita è generalmente diversa da zero ed il valore dello scostamento, definito come errore di *Bias*, varia nel tempo con le modalità descritte più avanti. Il *Constant Bias*, indicato con *CB*, rappresenta in termini generici il valore di riferimento dell'errore di *Bias*, quello che si osserva più frequentemente o con maggior probabilità. Assumendo che la variazione dell'errore di *Bias* sia descritta statisticamente da una distribuzione Gaussiana, il *Constant Bias* rappresenta il valor medio della distribuzione.

L'errore di *Constant Bias* viene inserito nel modello dei sensori sommando il valore *CB* alla misura. L'effetto del *Bias* sulla risposta del sensore è rappresentata in Figura 3.3.

Figura 3.3 Effetto dell'errore di *Bias*.

3.1.4 Long Term Bias Stability (LTBS)

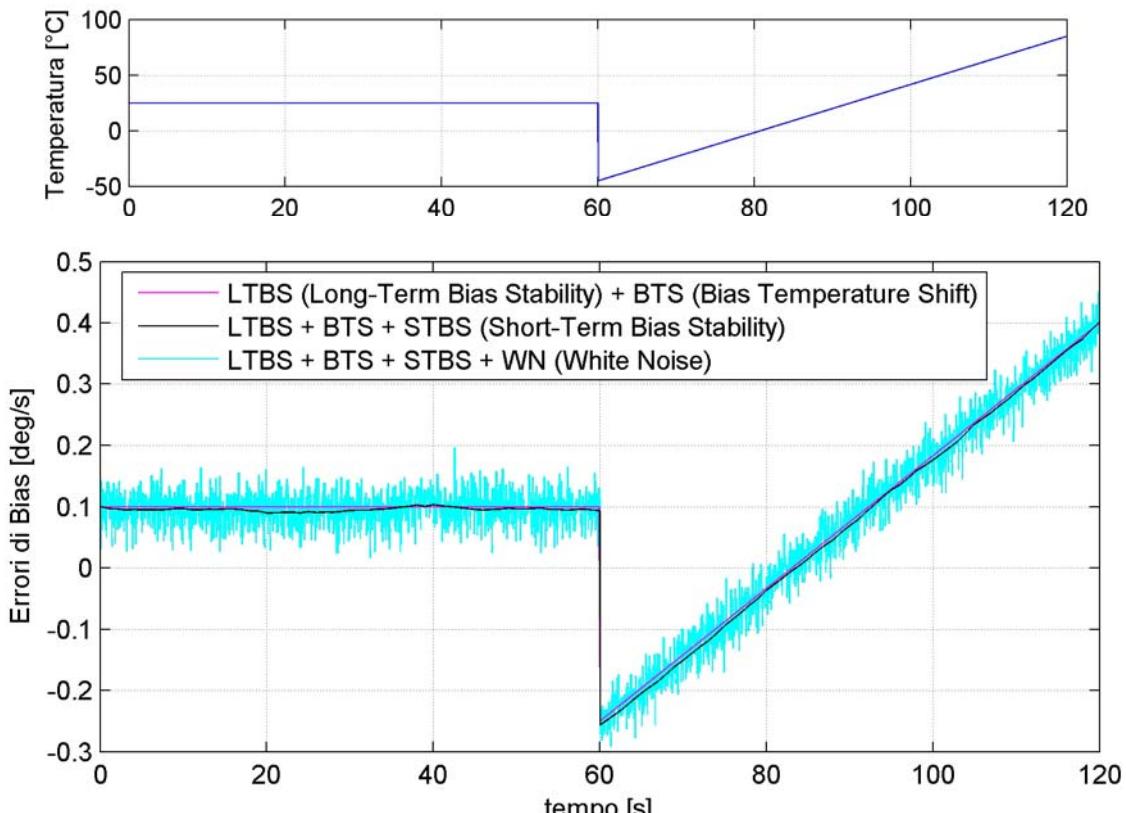
Il *Long Term Bias Stability* rappresenta la variazione di errore di *Bias* nel lungo termine, che si può osservare fra un'accensione e l'altra del sensore o, con costanti di tempo ancora più lunghe, osservabile con l'invecchiamento del sensore stesso. Esso descrive la dispersione dell'errore di *Bias* rispetto al valore *CB* di *Constant Bias*.

Per modellare questo errore si assume che la distribuzione dell'errore di *Bias* sia Gaussiana e che il parametro *LTBS* rappresenti la deviazione standard dell'errore. Viene generato un numero casuale con distribuzione normale di media nulla e deviazione standard *LTBS*, indicato con e_{LTBS} , sommandolo quindi alla misura del sensore. Tale errore viene considerato costante per tutto il tempo della simulazione.

3.1.5 Short Term Bias Stability (STBS)

Lo *Short Term Bias Stability* rappresenta l'oscillazione del *Bias* nel breve termine, che avviene con costanti di tempo dell'ordine delle centinaia di secondi e si osserva durante il funzionamento del sensore. L'oscillazione del *Bias* avviene intorno al valore costante dato dal *Constant Bias* e dal *Long Term Bias Stability*.

Si assume che l'errore di *Short Term Bias Stability* sia un processo a media nulla e caratterizzato dalla sua deviazione standard, rappresentata dal parametro *STBS*. Tale errore viene modellato con un processo di Gauss Markov (paragrafo 2.5.5) con deviazione standard *STBS* e costante di tempo τ_{STBS} di 300 secondi, ottenendo una oscillazione dell'errore di *Bias* nel breve termine come rappresentato in Figura 3.4.

Figura 3.4 Esempio di Errori di *Bias* e *Measurement Noise*.

3.1.6 Bias Temperature Shift (BTS)

La temperatura influenza in modo importante sugli errori di misura facendo variare in modo rilevante gli errori di *Bias* e di *Scale Factor*. Questi effetti devono essere necessariamente compensati per contenere gli errori entro valori accettabili quando si opera a temperature di decine di gradi di differenza rispetto alla temperatura a cui gli errori di *Bias* e di *Scale Factor* sono specificati, che generalmente è 25°C. Nei sensori di un certo livello la compensazione degli effetti di temperatura viene eseguita internamente da un sistema di elaborazione dati che applica delle leggi di compensazione messe a punto dal produttore, mentre nei casi di prodotti economici la compensazione deve essere eseguita dall'utilizzatore.

Un modo in cui la temperatura provoca la variazione delle caratteristiche di misura dei sensori è legato alla differente dilatazione termica dei materiali con cui essi sono realizzati. Ad esempio nei sensori MEMS le componenti meccaniche sono realizzate in silicio e su di esse viene depositato uno strato di materiale conduttore per realizzare i collegamenti elettrici. Quando l'architettura del sensore non prevede la simmetria della parte strutturale o quando la simmetria viene a mancare a causa di lievi disomogeneità che possono verificarsi in fase di produzione, lo stato di tensione introdotto dalla dilatazione termica sposta la posizione di equilibrio dell'elemento sensibile variando l'errore di *Bias*.

L'effetto della temperatura sulla variazione del *Bias* viene modellato in modo piuttosto semplice mediante una legge lineare perché i dati reperibili su questa caratteristica di errore sono molto generici e sommari, mentre la dipendenza dalla temperatura è in realtà non lineare. Indicando con e_{BTS} l'errore di *Bias* legato alla temperatura e con T_{rif} la temperatura di riferimento a cui tale errore è nullo (la temperatura a cui vengono specificati gli errori di *Bias* e *Scale Factor*), alla misura del sensore si somma il termine:

$$e_{BTS} = BTS \cdot \Delta T \quad (3.6)$$

$$\Delta T = T - T_{rif} \quad (3.7)$$

dove BTS è il parametro (in °s/°C per i giroscopi) con cui, in questa sede, viene specificato l'errore di *Bias Temperature Shift*. Nella precedente Figura 3.4 è rappresentato graficamente l'effetto della temperatura.

3.1.7 Measurement Noise

Il rumore è il risultato della sovrapposizione di tante piccole fonti di disturbo che nel complesso si manifestano attraverso una fluttuazione rapida ed imprevedibile, generalmente di piccola intensità, della misura. Esempi di sorgenti di rumore sono:

- gli attriti e le vibrazioni nei sensori meccanici con parti in movimento, come i giroscopi;
- i disturbi del segnale elettrico nella sezione elettronica di codifica e di trasmissione della misura, principalmente a causa della presenza delle resistenze elettriche
- le forze Browniane [15], non trascurabili per i corpi di piccole dimensioni come possono essere le parti sensibili dei sensori MEMS.

E' stato detto in precedenza che limitare la banda passante del sensore serve a limitare anche l'intensità del rumore di misura. Considerando un rumore con densità spettrale costante S_{WN} infatti, dalla (2.48) con $\tau = 0$, la varianza di tale rumore è data dal prodotto della densità spettrale con la banda passante del sensore, $\sigma_{WN}^2 = S_{WN} \cdot BW$. Se da un lato la riduzione della banda passante rende il sensore più lento e meno sensibile alle dinamiche di alta frequenza facendo perdere informazioni, dall'altro lato la diminuzione di rumore di misura riduce gli errori di tipo Random Walk quando le misure del sensore vengono impiegate nelle integrazioni.

Il rumore di misura viene modellato mediante il rumore bianco (densità spettrale costante) Gaussiano di banda passante pari a quella del sensore. Esso è rappresentato nella precedente Figura 3.4 sovrapposto agli altri termini di errore.

3.1.8 Long Term Scale Factor Stability (LTSFS)

I sensori vengono realizzati in modo che, in assenza di errori, il legame fra il segnale di misura, s , e l'ingresso, u , sia lineare, con fattore di proporzionalità dato dallo *Scale Factor*, K :

$$s = K \cdot u \quad (3.8)$$

In assenza di errori, la misura del sensore, z , è data da:

$$z = \frac{s}{K} = u \quad (3.9)$$

Analogamente al *Bias*, lo *Scale Factor* varia nel lungo termine da un'accensione all'altra del sensore o, in tempi ancora più lunghi, col suo invecchiamento. Il *Long Term Scale Factor Stability* rappresenta questo fenomeno.

Nel caso della sola presenza dell'errore di *Scale Factor*, la misura del sensore è data da:

$$\tilde{z} = z - e_{LTSF} = \frac{\tilde{s}}{K} = \frac{\tilde{K}u}{K} = \frac{(K - K + \tilde{K})u}{K} = \frac{(K - \Delta K)u}{K} = \left(1 - \frac{\Delta K}{K}\right)u \quad (3.10)$$

\tilde{z}	misura effettiva
z	misura ideale ($z = u$)
$e = z - \tilde{z}$	errore di misura
\tilde{s}	segnale di misura effettivo
K	valore nominale dello <i>Scale Factor</i>
\tilde{K}	valore effettivo dello <i>Scale Factor</i>
$\Delta K = K - \tilde{K}$	

L'errore di misura dovuto all'errore di *Scale Factor* risulta essere:

$$e_{LTSFS} = \frac{\Delta K}{K}u \quad (3.11)$$

L'errore di *Scale Factor* viene generalmente rappresentato dalla quantità $\Delta K/K$, fornendo così un'indicazione diretta del corrispondente errore di misura.

Per modellare l'errore di *Long Term Scale Factor Stability* si assume che l'andamento dello *Scale Factor* sia descritto da una distribuzione Gaussiana la cui media è il valore

nominale dello *Scale Factor*. Di conseguenza l’andamento del termine $\Delta K/K$ è descritto da una distribuzione Gaussiana a media nulla e con deviazione standard che qui viene indicata col parametro *LTSFS*. L’errore di *Long Term Scale Factor Stability* viene inserito sommando alla misura il termine (3.11), dove u è la misura ideale del sensore, coincidente con l’ingresso, e $\Delta K/K$ viene fissato generando casualmente un numero che rispetti la distribuzione Gaussiana di media nulla e deviazione standard *LTSFS*. In Figura 3.5 è rappresentato l’errore proporzionale all’ingresso introdotto nella misura.

3.1.9 Asimmetry (AS)

L’asimmetria è la caratteristica di errore per cui la curva di risposta del sensore, in questo caso considerata perfettamente lineare, ha pendenze diverse nei casi di ingresso di segno positivo o di segno negativo.

L’errore di Asimmetria, qui indicato col parametro *AS*, viene rappresentato dalla quantità

$$AS = \frac{K^+ - K^-}{K} \quad (3.12)$$

K	valore nominale dello <i>Scale Factor</i>
K^+, K^-	pendenze delle curve di risposta per ingresso rispettivamente positivo e negativo

Per inserire l’errore di Asimmetria nel modello del sensore si assume che esso sia equiripartito fra i due rami di risposta per ingressi positivi e negativi. Sviluppando calcoli analoghi al caso del *Long Term Scale Factor Stability* si ricava la seguente espressione dell’errore di misura dovuto all’asimmetria:

$$e_{AS} = \frac{AS}{2}|u| \quad (3.13)$$

L’effetto dell’errore di Asimmetria sulla curva di risposta è rappresentato in Figura 3.5.

3.1.10 Non-Linearity (NL)

La curva di risposta del sensore non è mai perfettamente lineare. L’errore di *Non Linearità* viene specificato quantitativamente attraverso l’errore percentuale, calcolato rispetto alla misura di fondo scala nominale, nel punto della curva di risposta vera che più si allontana dalla curva nominale lineare:

$$NL = \frac{\tilde{z}(u^*) - z(u^*)}{z(u_{\max})} = \frac{\tilde{z}(u^*) - u^*}{u_{\max}} \quad (3.14)$$

dove u^* è il valore dell'ingresso per cui si ha il massimo errore fra la curva di risposta vera e quella nominale.

Per modellare l'errore di non linearità del sensore, nella precedente definizione si assume che la misura $\tilde{z}(u^*)$ sia compensata dagli errori di *Bias*, dagli effetti della temperatura e dal *Long Term Scale Factor Stability*, ma non dell'errore di Asimmetria che si ritiene opportuno considerarlo fra gli errori di non linearità. Nel modello di errore, il contributo mancante di non linearità si decide di introdurlo attraverso un termine che va col cubo dell'ingresso come segue, in modo che tale effetto sia simmetrico e non cambi le caratteristiche di asimmetria della risposta già modellata con la (3.13):

$$e_{NL} = C_{NL} u^3 \quad (3.15)$$

Secondo le assunzioni precedenti risulta che il massimo errore di Non Linearità si ha per ingresso di fondo scala: $u^* = u_{\max}$. Il coefficiente C_{NL} viene determinato in modo che all'ingresso di fondo scala gli errori percentuali di Asimmetria e di Non Linearità valgano NL , cioè:

$$Err_{NL} = \frac{\frac{AS}{2} u_{\max} + C_{NL} u_{\max}^3}{u_{\max}} \quad (3.16)$$

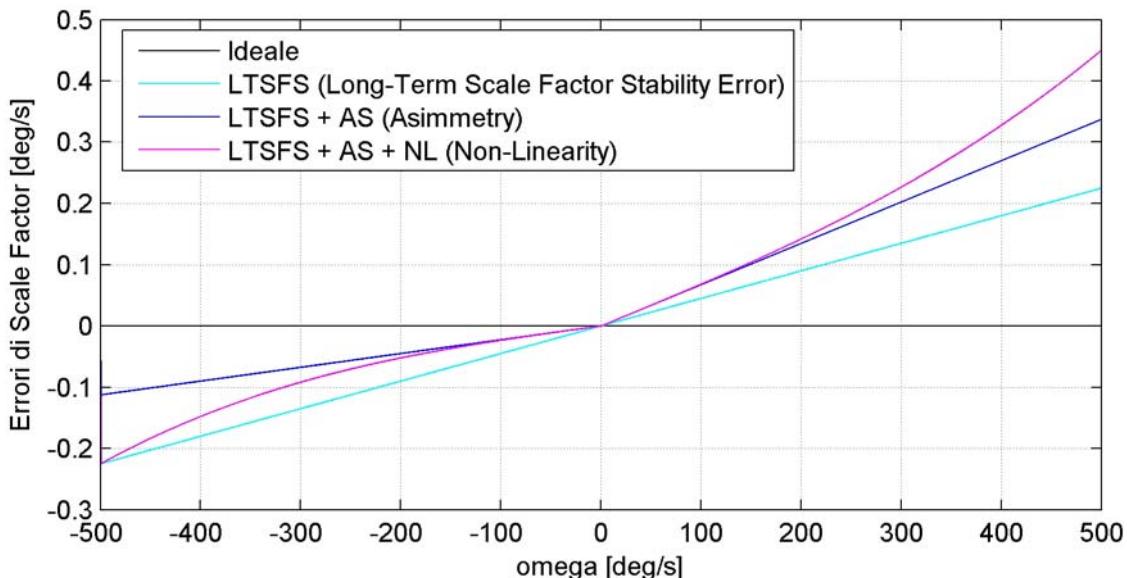
da cui:

$$C_{NL} = \frac{Err_{NL} - \frac{AS}{2}}{u_{\max}^2} \quad (3.17)$$

L'effetto dell'errore di Non Linearità così modellato è rappresentato in Figura 3.5.

3.1.11 Scale Factor Temperature Shift (SFTS)

Lo *Scale Factor Temperature Shift* è un effetto molto importante di variazione dello *Scale Factor* in funzione della temperatura, analogamente a quanto visto per il *Bias Temperature Shift* a cui si rimanda per i commenti.

Figura 3.5 Esempio di errori di *Scale Factor*.

Basandosi sui pochi dati numerici che vengono forniti dai produttori di sensori, il modello di errore adottato per lo *Scale Factor Temperature Shift* è una semplice dipendenza lineare dalla temperatura, come segue:

$$e_{SFTS} = SFTS \cdot \Delta T \cdot u \quad (3.18)$$

$$\Delta T = T - T_{ref} \quad (3.19)$$

dove il parametro *SFTS* (espresso in $1/^\circ\text{C}$) specifica quantitativamente questo errore. In Figura 3.6 è rappresentato graficamente l'effetto di questo termine di errore.

3.1.12 G and \mathbf{G}^2 Sensitivity

Fra i sensori considerati nel presente lavoro questa caratteristica di errore riguarda solo i giroscopi. A seconda del principio di funzionamento su cui si basano, i giroscopi sono più o meno sensibili alle accelerazioni lineari, con una dipendenza generalmente modellata con legge lineare e quadratica.

Per mettere in conto questo termine di errore, per ogni giroscopio vanno innanzi tutto determinate le accelerazioni lungo la direzione di ingresso e lungo le due direzioni trasversali. In questo modello, per semplicità, tali accelerazioni si approssimano con le componenti sulla terna di riferimento della triade dei giroscopi, la quale non è ortogonale per cui le accelerazioni trasversali calcolate contengono dei piccoli errori che si accetta di trascurare. Le componenti dell'accelerazione sulla terna dei giroscopi dalla terna Assi Corpo sono date dalla (3.1):

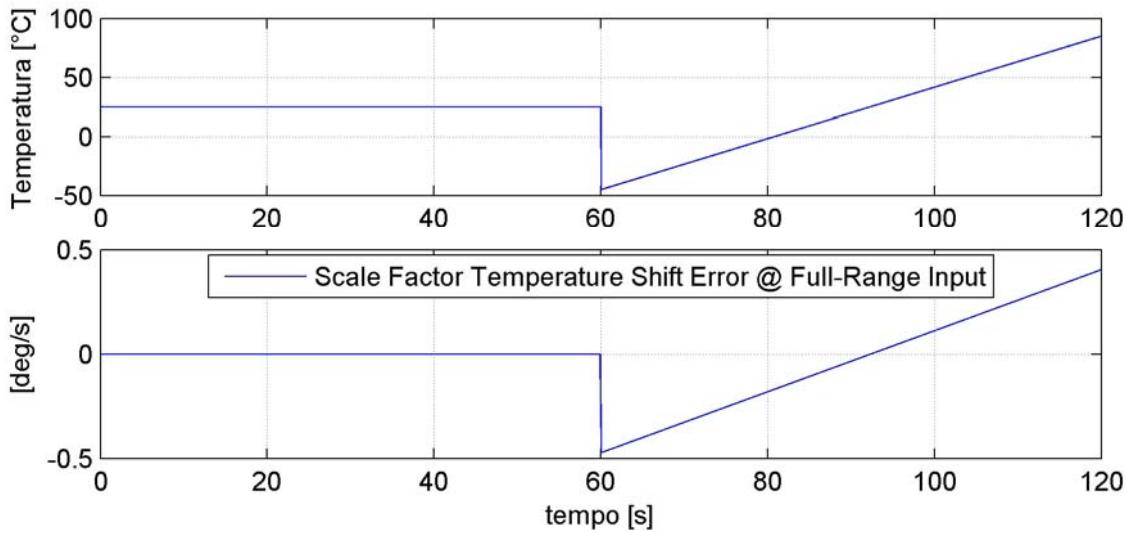


Figura 3.6 Esempio di errore di *Scale Factor Temperature Shift*.

$$\mathbf{A}^G = \mathbf{R}_{B2G} \mathbf{A}^B \quad (3.20)$$

dove le accelerazioni si esprimono in g anziché in m/s^2 .

La G *Sensitivity* di ogni giroscopio è data dal prodotto scalare dell'accelerazione \mathbf{A}^G con il vettore dei fattori di sensibilità alle accelerazioni lineari $\mathbf{GS} = [GS_x \quad GS_y \quad GS_z]^T$:

$$gsens = \mathbf{A}^G \cdot \mathbf{GS} = A_x^G GS_x + A_y^G GS_y + A_z^G GS_z \quad (3.21)$$

I fattori di sensibilità devono essere opportunamente assegnati a seconda della direzione di ingresso del giroscopio che si sta considerando. Ad esempio, per il giroscopio allineato all'asse Y_G della terna dei giroscopi, il fattore GS_y è la sensibilità all'accelerazione lungo l'asse di ingresso, mentre GS_x e GS_z sono le sensibilità alle accelerazioni trasversali.

La G^2 *Sensitivity*, analogamente al caso precedente, è data dalla relazione seguente:

$$g2sens = (A_x^G)^2 G2S_x + (A_y^G)^2 G2S_y + (A_z^G)^2 G2S_z \quad (3.22)$$

dove $G2S_x, G2S_y, G2S_z$ sono i fattori di sensibilità ai quadrati delle accelerazioni.

3.1.13 Saturation

Quando gli ingressi del sensore superano i valori di fondo scala (*Input Range*) la misura fornita è pari al valore dell'estremo superato:

$$z = \begin{cases} u_{\max} & u > u_{\max} \\ u_{\min} & u < u_{\min} \end{cases} \quad (3.23)$$

Come si vede in Figura 3.2, la saturazione è applicata sulla linea che elabora l'ingresso senza coinvolgere gli errori indipendenti dall'ingresso stesso.

3.1.14 Quantization

La *Quantizzazione* è l'operazione con cui una grandezza continua viene codificata in forma digitale.

Fissato il numero n di bit disponibili, si hanno a disposizione 2^n valori discreti per esprimere il valore continuo in forma digitale. La differenza q fra due valori discreti contigui dipende dal range R dei valori che la grandezza continua può assumere e definisce l'*intervallo di quantizzazione*:

$$q = \frac{R}{2^n - 1} \quad (3.24)$$

Tutti i valori della grandezza continua che rientrano nell'intervallo di ampiezza q centrato su un certo valore discreto digitale vengono espressi con quel valore, introducendo un *errore di quantizzazione* che in modulo vale al massimo $q/2$.

In questo modello tramite l'errore di quantizzazione si assume di mettere in conto anche l'errore di risoluzione. L'errore di quantizzazione viene modellato con il blocco presente nelle librerie del Simulink, nel quale basta specificare l'intervallo di quantizzazione.

3.1.15 Sampling

Il *Campionamento* è l'operazione con cui, ad intervalli di tempo opportuni, vengono rilevati i valori di un segnale che evolve con continuità nel tempo per rappresentarlo con una sequenza finita di valori.

Senza applicare particolari tecniche di elaborazione dei dati, i valori delle grandezze misurate dai sensori ad un determinato istante vengono considerate costanti entro tutto l'intervallo di tempo di campionamento, commettendo l'errore di non tener conto dell'evoluzione della grandezza fino al successivo istante di campionamento.

Per il *Teorema di Campionamento*, la minima frequenza con cui un segnale deve essere campionato per non perdere informazioni, detta *Frequenza di Nyquist*, è pari al doppio della massima frequenza contenuta nel segnale. Nel modello dei sensori il campionamento è modellato mediante il blocco Simulink *Zero-Order Hold*, in cui va specificato l'intervallo di

campionamento. In questo lavoro la frequenza di campionamento viene fissata pari al doppio della banda passante del sensore, affinché sia pari alla frequenza di Nyquist.

3.1.16 Parametri di errore dei giroscopi

Collezionare un set completo di parametri di errore di un sensore è un'impresa ardua. Si è potuto constatare che i produttori non forniscono informazioni complete e dettagliate sui prodotti commercializzati, di conseguenza, per definire completamente il modello di errore appena visto, è stato necessario reperire i diversi parametri di errore da più fonti, integrandoli con buon senso.

In questo lavoro si simula l'uso della IMU Honeywell HG1900, costituita da sensori inerziali *MEMS* (*Micro Electro-Mechanical Systems*). I valori dei parametri di errore vengono tratti, quelli presenti, dalle brochure informative fornite dal produttore [16],[17]. Per tutti gli altri parametri di errore si è fatto riferimento ai dati raccolti da altri produttori e dalle fonti bibliografiche, relativamente alla stessa tipologia di sensore, basandosi su di essi per stabilire il peso relativo fra le caratteristiche di errore incognite e quelle note. Si è potuto così fissare, in modo approssimativo, i parametri mancanti in proporzione a quelli disponibili.

In Tabella 3.1 sono riportati i valori assegnati ai parametri di errore dei giroscopi, specificando la loro origine.

3.1.17 Parametri di errore degli accelerometri

Per gli accelerometri vengono simulati i sensori MEMS della IMU Honeywell HG1900. I valori dei parametri assegnati alle caratteristiche di errore degli accelerometri sono riportati in Tabella 3.2, dove sono indicate anche le fonti di provenienza dei valori.

Parametri di Errore dei Giroscopi				
Caratteristica	Parametro	Unità di Misura	Valore	Fonte*
Input Range	IR	°/s	±1000	1,2
Banda Passante	BW	Hz	50	3
Constant Bias	CB	°/s	0	3
Long Term Bias Stability, 1σ	LTBS	°/s	15/3600	1,2
Short Term Bias Stability, 1σ	STBS τ_{STB}	°/s s	5/3600 300	1,2 3
Bias Temperature Shift	BTS T_{rif}	(°/s)/°C °C	2e-4 25	3 3
Long Term Scale Factor Stability, 1σ	LTSFS	-	150 ppm**	1,2
Asimmetria, 1σ	AS	-	150 ppm	3
Non Linearità, 1σ	NL	-	150 ppm	2
Scale Factor Temperature Shift	SFTS T_{rif}	1/°C °C	1.5e-4 25	3 3
G Sensitivity	GS _i	(°/s)/g	3/3600	2
G ² Sensitivity	G2S _i	(°/s)/g ²	0.6/3600	2
Rumore di Misura	S _{WN}	(°/s) ² /Hz	(0.1/60) ²	1,2
Disallineamento, 1σ	a_{ij}	μrad	50/sqrt(2)	2
Quantizzazione	q	°/s	1e-3	3
Campionamento		Hz	100	3

(*) Fonti:
 1 – Brochure Honeywell HG1900 MEMS IMU [17]
 2 – Brochure Honeywell TACTICAL INERTIAL MEASUREMENT UNITS – Comprehensive solutions for inertial positioning information [16]
 3 – valore assegnato dall'analisi dei dati di altri sensori o da scelta personale per i parametri impostabili
 (** ppm = parti per milione = 1e-6

Tabella 3.1 Parametri di errore dei giroscopi per simulare la IMU Honeywell HG1900.

Parametri di Errore degli Accelerometri					
Caratteristica	Parametro	Unità di Misura	Valore	Fonte*	
Input Range	IR	m/s ²	±70*9.81	1,2	
Banda Passante	BW	Hz	50	3	
Constant Bias	CB	m/s ²	0	3	
Long Term Bias Stability, 1σ	LTBS	m/s ²	9.81e-3	2	
Short Term Bias Stability, 1σ	STBS	m/s ²	9.81e-3	2	
	τ_{STB}	s	300	3	
Bias Temperature Shift	BTS	(m/s ²)/°C	9.81e-4	3	
	T _{ref}	°C	25	3	
Long Term Scale Factor Stability, 1σ	LTSFS	-	300 ppm	1,2	
Asimmetria, 1σ	AS	-	500 ppm	3	
Non Linearità, 1σ	NL	-	500 ppm	1,2	
Scale Factor Temperature Shift	SFTS	1/°C	5e-4	3	
	T _{ref}	°C	25	3	
Rumore di Misura	S _{WN}	(m/s ²) ² /Hz	(0.22/60) ²	2	
Disallineamento, 1σ	a_{ij}	μrad	100/sqrt(2)	2	
Quantizzazione	q	m/s ²	1e-3	3	
Campionamento		Hz	100	3	

(*) Fonti:
 1 – Brochure Honeywell HG1900 MEMS IMU [17]
 2 – Brochure Honeywell TACTICAL INERTIAL MEASUREMENT UNITS – Comprehensive solutions for inertial positioning information [16]
 3 – valore assegnato dall'analisi dei dati di altri sensori o da scelta personale per i parametri impostabili

Tabella 3.2 Parametri di errore degli accelerometri per simulare la IMU Honeywell HG1900.

3.2 Magnetometri

Il modello dei magnetometri è concettualmente identico a quello dei sensori inerziali e non necessita di ulteriori spiegazioni.

In Figura 3.7 è rappresentato lo schema della triade di magnetometri. Gli ingressi sono le componenti in Assi Corpo del campo magnetico presente nel punto occupato dai magnetometri, le uscite sono le misure di tale campo magnetico corrotte dai vari errori di misura. Il modello di ciascun magnetometro della triade è identico a quello di Figura 3.2 eliminando il blocco *G and G^2 Sensitivity*.

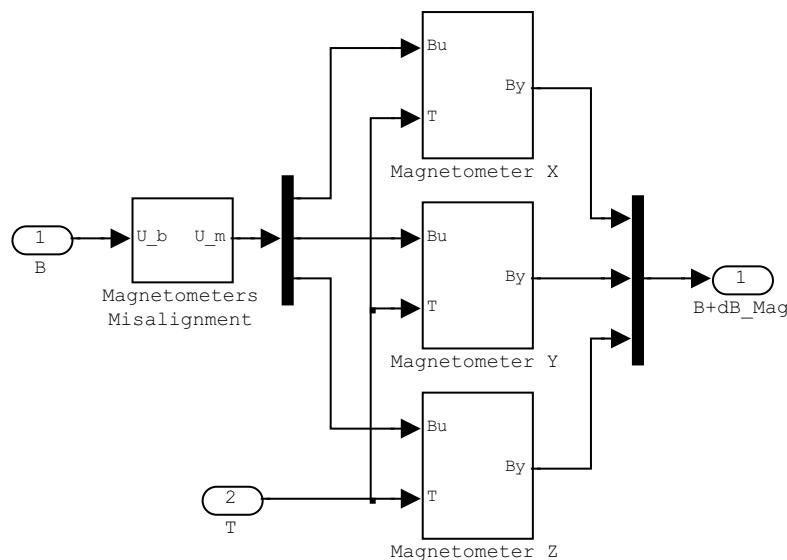


Figura 3.7 Schema della triade di magnetometri.

3.2.1 Parametri di errore dei magnetometri

In questo lavoro si simula l'uso dei magnetometri triassiali *strapdown* Honeywell HMR2300r. I parametri di errore, riportati in Tabella 3.3, sono stati assegnati con lo stesso criterio seguito per i sensori inerziali.

3.3 GPS

3.3.1 Introduzione

Il *GPS*⁴ (*Global Positioning System*) è un sistema di navigazione in grado di fornire informazioni di posizione, velocità e tempo, in ogni punto della Terra, in qualsiasi condizione meteorologica e con continuità nel tempo. Il sistema si basa su una costellazione di 24 satelliti non geostazionari, disposti su sei orbite di raggio approssimativo di 20'200 Km in modo da garantire la presenza di almeno quattro satelliti sopra l'orizzonte in ogni punto del Globo in qualsiasi momento. I satelliti, dotati di un trasmettitore, inviano continuamente sulla Terra una serie di dati che un *ricevitore GPS* elabora per determinare la propria posizione e la propria velocità, oltre a fornire un'accurata indicazione dell'ora e della data. Il GPS è anche composto da una rete di *stazioni di controllo* a terra, che svolgono funzioni importanti di gestione del sistema fra cui quella di mantenere aggiornati i dati che ogni satellite trasmette. Per poter comunicare con le stazioni di controllo i satelliti sono dotati di un ricevitore.

⁴ Fonti bibliografiche: [1],[4],[5],[7].

Parametri di Errore dei Magnetometri				
Caratteristica	Parametro	Unità di Misura	Valore	Fonte*
Input Range	IR	nT	2e5	1
Banda Passante	BW	Hz	50	2
Constant Bias	CB	nT	0	2
Long Term Bias Stability, 1σ	LTBS	nT	20	1
Short Term Bias Stability, 1σ	STBS	nT	4	2
	τ_{STB}	s	300	2
Bias Temperature Shift	BTS T_{rif}	(nT)/°C °C	20e-4 25	1 1
Long Term Scale Factor Stability, 1σ	LTSFS	-	500 ppm	1
Asimmetria, 1σ	AS	-	500 ppm	2
Non Linearità, 1σ	NL	-	1000 ppm	1
Scale Factor Temperature Shift	SFTS T_{rif}	1/°C °C	6e-4 25	1 1
Rumore di Misura	S _{WN}	nT ² /Hz	(0.7) ²	1
Disallineamento, 1σ	a_{ij}	μrad	12000/sqrt(2)	1
Quantizzazione	q	nT	7	1
Campionamento		Hz	100	2

(*) Fonti:
 1 – Documento fornito da Honeywell contenente le specifiche tecniche del prodotto [18]
 2 – valore assegnato dall'analisi dei dati di altri sensori o da scelta personale per i parametri impostabili

Tabella 3.3 Parametri di errore per simulare i magnetometri triassiali *strapdown* Honeywell HMR2300r.

I dati trasmessi da ogni satellite consentono al ricevitore GPS di risalire a due importanti informazioni: la posizione del satellite (mediante le sue effemeridi) e la distanza ricevitore-satellite, il *range*, che prende il nome di *pseudorange* perché tale dato è affetto in modo esplicito dall'errore incognito, da stimare e rimuovere, di sincronizzazione dell'orologio del ricevitore con gli orologi dei satelliti. Note queste informazioni per almeno quattro satelliti, il ricevitore è in grado di calcolare la propria posizione nello spazio e l'errore di sincronizzazione degli orologi mediante la risoluzione di un sistema di quattro equazioni come la seguente:

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2 + (z_i - Z)^2} + c\Delta t \quad i = 1 \dots 4 \quad (3.25)$$

- | | |
|-----------------|---|
| ρ_i | <i>pseudorange</i> dal satellite i , noto |
| x_i, y_i, z_i | posizione del satellite i , nota |
| X, Y, Z | posizione del ricevitore GPS, incognita |

c	velocità di propagazione del segnale (velocità della luce nel vuoto)
Δt	errore di sincronizzazione dell'orologio del ricevitore GPS con gli orologi dei satelliti, incognito

La determinazione dello *pseudorange* si basa sulla misura del tempo che il segnale trasmesso dal satellite impiega a raggiungere il ricevitore, assumendo che la velocità di propagazione del segnale sia esattamente pari alla velocità della luce nel vuoto.

La trasmissione dei dati da parte dei satelliti avviene su due frequenze, denominate L1 ed L2. Per la determinazione dello *pseudorange* vengono inviati due segnali, il C/A (*Coarse/Acquisition*) ed il P (*Precise*), rispettivamente sulle frequenze L1 ed L2. Il segnale C/A è quello usato da qualsiasi ricevitore GPS e conferisce risultati di un certo livello, mentre il segnale P può essere usato solo da ricevitori autorizzati e consente di ottenere misure di *pseudorange* più precise. I ricevitori accessibili liberamente a chiunque operano sulla singola frequenza L1, mentre i ricevitori che possono usufruire del segnale P operano su entrambe le frequenze. Il segnale C/A è usato anche dai ricevitori che si avvalgono del segnale P, in questo caso solo per effettuare velocemente una prima determinazione della posizione. Per applicazioni in campo militare, il segnale P viene criptato per garantire una maggior sicurezza nell'escludere dal suo impiego gli utenti non autorizzati, e viene indicato con Y. Per quanto detto il sistema GPS è in grado di fornire due livelli di servizio, che vengono denominati *SPS* (*Standard Positioning Service*) quello accessibile a chiunque, e *PPS* (*Precise Positioning Service*) accessibile solo ad utenti autorizzati.

3.3.2 Errori di *pseudorange*

Lo *pseudorange* calcolato dal ricevitore è affetto dall'errore di sincronizzazione dell'orologio e da altre forme di errore che sono elencate di seguito.

ERRORI DI PROPAGAZIONE NELLA IONOSFERA

Nella ionosfera il segnale trasmesso dal satellite subisce una variazione di velocità di propagazione, la quale dipende dalla frequenza del segnale e dalle caratteristiche della ionosfera stessa. Se nel calcolo dello *pseudorange* la velocità di propagazione del segnale viene considerata costante si introducono inevitabilmente degli errori, che dipendono anche dall'angolo di elevazione del satellite perché cambia la lunghezza del percorso compiuto attraverso la ionosfera. Per i ricevitori a singola frequenza (SPS) ci sono dei modelli per

stimare gli effetti della propagazione nella ionosfera e si riesce a ridurre l'errore introdotto nello *pseudorange* mediamente della metà. Nei ricevitori a doppia frequenza (PPS) questo errore viene quasi annullato perché si può calcolare in modo abbastanza preciso l'effetto della ionosfera, basandosi sul fatto che i segnali alle due frequenze L1 ed L2 subiscono diverse variazioni di velocità di propagazione.

ERRORI DI PROPAGAZIONE NELLA TROPOSFERA

L'aria ed il vapore acqueo provocano la rifrazione del segnale inviato dal satellite, facendogli compiere un percorso più lungo per giungere al ricevitore. La distanza aggiuntiva percorsa dal segnale costituisce direttamente l'errore di *pseudorange*. Questo effetto è indipendente dalla frequenza del segnale, quindi non ci sono differenze fra SPS e PPS. L'errore è maggiore per piccoli angoli di elevazione del satellite perché il percorso del segnale all'interno della troposfera diventa più lungo rispetto al caso di satellite sulla verticale del ricevitore. L'effetto dovuto all'aria influisce per il 90% dell'errore totale di propagazione nella troposfera ma si riesce a modellare con buoni risultati. L'effetto del vapore acqueo influisce per il restante 10% dell'errore complessivo ma non è stimabile perché non è possibile prevedere la quantità di vapore nello spazio e nel tempo.

ERRORI DA PERCORSI MULTIPLI

Quando ci sono oggetti circostanti al ricevitore essi riflettono il segnale del satellite generando dei segnali secondari, i quali percorrono una distanza maggiore e si sovrappongono al segnale diretto, distorcendolo. La distorsione del segnale elaborato dal ricevitore peggiora l'accuratezza con cui viene determinato lo *pseudorange*, in modo più importante nel caso SPS che per PPS.

SELECTIVE AVAILABILITY

Si tratta di una fonte di errore volutamente introdotta per ridurre l'accuratezza del GPS agli utenti del SPS. Essa viene realizzata alterando l'ora e le effemeridi trasmesse dai satelliti. Dal 1 Maggio del 2000 l'errore di *Selective Availability* è stato disattivato.

ERRORI DEL RICEVITORE

La presenza di rumore nelle misure del tempo effettuate dal ricevitore introduce un errore nello *pseudorange*. Altri errori sono legati alla qualità del software implementato nel

ricevitore, alla velocità di calcolo ed alla precisione numerica consentita dal microprocessore impiegato.

ERRORI DI EFFEMERIDE

Le stazioni di controllo monitorano le orbite dei satelliti ed aggiornano le effemeridi da loro inviate, ma tali effemeridi forniscono solo un'approssimazione delle orbite e presentano degli errori che crescono col tempo.

ERRORI NELL'OROLOGIO INTERNO AL SATELLITE

Gli orologi interni ai satelliti e quello del ricevitore devono essere sincronizzati. I satelliti contengono orologi atomici estremamente precisi che comunque richiedono delle correzioni da parte delle stazioni di controllo. Gli errori residui negli orologi introducono piccoli errori di *pseudorange*.

3.3.3 Dilution Of Precision

L'errore della posizione calcolata dal ricevitore GPS dipende dall'errore di *pseudorange* e dall'effetto di *Dilution Of Precision (DOP)*. Il DOP è un effetto geometrico che dipende dalla disposizione dei satelliti e dalla posizione del ricevitore al momento del calcolo della posizione. La risoluzione del sistema di quattro equazioni (3.25) si basa sulla ricerca del punto di intersezione delle sfere centrate sui satelliti e di raggio pari ai rispettivi *pseudorange* corretti del termine $c\Delta t$. L'incertezza sul valore dello *pseudorange* determina una variazione del raggio delle sfere ed i possibili punti di intersezione fra di esse individuano un volume nello spazio che dipende dalla posizione dei satelliti e rappresenta le possibili posizioni del ricevitore GPS. A parità di errore di *pseudorange*, le configurazioni geometricamente sfavorevoli dei satelliti fanno individuare un volume più esteso rispetto ai casi più favorevoli, con una conseguente maggiore incertezza sulla posizione del ricevitore.

L'effetto del DOP si può esprimere mediante dei “coefficienti di diluizione della precisione” che moltiplicano l'errore di *pseudorange* e si ottengono come segue. Dopo aver linearizzato il set di equazioni (3.25) si ricava l'espressione esplicita approssimata dell'errore delle variabili incognite del ricevitore, $\delta\mathbf{X}$, in funzione degli errori di *pseudorange*, $\delta\mathbf{p}$, e delle posizioni dei satelliti, a cui applicare quindi l'espressione per il calcolo della covarianza, $E(\delta\mathbf{X}\delta\mathbf{X}^T)$ [5]. I termini sulla diagonale della matrice delle covarianze rappresentano le varianze degli errori di posizione lungo le tre direzioni North, East e Down, e dell'errore di

sincronizzazione dell'orologio interno. Assumendo che gli errori di *pseudorange* con i vari satelliti siano non correlati ed abbiano varianza σ_ρ^2 , si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= NDOP^2 \sigma_\rho^2 \\ \sigma_E^2 &= EDOP^2 \sigma_\rho^2 \\ \sigma_D^2 &= VDOP^2 \sigma_\rho^2 \\ \sigma_T^2 &= TDOP^2 \sigma_\rho^2\end{aligned}\tag{3.26}$$

<i>NDOP</i>	<i>North Dilution Of Precision</i>
<i>EDOP</i>	<i>East Dilution Of Precision</i>
<i>VDOP</i>	<i>Vertical Dilution Of Precision</i>
<i>TDOP</i>	<i>Time Dilution Of Precision</i>

I precedenti termini DOP sono funzione della posizione del ricevitore e delle posizioni dei satelliti. Essi rappresentano le deviazioni standard degli errori di posizione lungo le direzioni del sistema di riferimento e la deviazione standard dell'errore di sincronizzazione dell'orologio dati da un errore di misura dello *pseudorange* con varianza unitaria.

Data l'indipendenza statistica dei precedenti termini di errore di posizione, è possibile estendere le definizioni di DOP alla posizione sul piano orizzontale e nello spazio tridimensionale:

$$\begin{aligned}HDOP &= \sqrt{NDOP^2 + EDOP^2} \\ PDOP &= \sqrt{HDOP^2 + VDOP^2} \\ GDOP &= \sqrt{PDOP^2 + TDOP^2}\end{aligned}\tag{3.27}$$

<i>HDOP</i>	<i>Horizontal Dilution Of Precision</i>
<i>PDOP</i>	<i>Position Dilution Of Precision</i>
<i>GDOP</i>	<i>Geometric Dilution Of Precision</i>

Il valore medio mondiale di PDOP è pari a 2.5 [7]. Con quattro satelliti a disposizione e con il ricevitore posizionato sulla superficie della Terra (a quota zero), il minimo valore dei DOP si ottiene quando tre satelliti sono disposti a 120° al minimo angolo di elevazione (sui vertici di un triangolo equilatero centrato sul ricevitore sul piano tangente alla Terra) ed il quarto satellite sulla verticale del ricevitore, e valgono: $GDOP = 1.83$, $PDOP = 1.72$, $HDOP = 1.16$, $VDOP = 1.26$, $TDOP = 0.64$ [5],[7]. Si fa notare che questa configurazione dei satelliti è ottimale solo dal punto di vista geometrico, infatti molti degli errori visti in precedenza diventano più intensi ai bassi angoli di elevazione.

Valori medi dei DOP delle (3.26) da considerarsi nelle analisi sono:

$$\begin{aligned} NDOP &= 1.5 \\ EDOP &= 1.5 \\ VDOP &= 2.5 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Da quanto detto si nota che il DOP introduce una variabilità dell'errore di posizione molto maggiore degli errori di *pseudorange*.

3.3.4 Accuratezza della posizione

Nelle tabelle che seguono sono riportati i valori degli errori di *pseudorange* introdotti dalle varie fonti di errore elencate in precedenza [7]. Per ciascun termine di errore sono riportate due componenti, una di tipo *Bias* per indicare che l'errore introdotto varia con una certa lentezza dipendente dal fenomeno considerato, ed una di tipo *Random* che indica un tipo di errore che non mostra correlazione fra le successive rilevazioni dello *pseudorange*, aventi quindi caratteristiche simili al rumore bianco. Tutte le voci di errore si considerano indipendenti, così l'errore complessivo si può calcolare mediante la radice della somma dei quadrati indicandolo con *UERE* (*User Equivalent Range Error*), basandosi sull'assunzione che tutti i fenomeni abbiano media nulla (valida solo nei lunghi periodi di osservazione, di molte ore o anche giorni).

In assenza di *Selective Availability*, Tabella 3.4, la fonte di errore predominante è la propagazione del segnale nella ionosfera. In presenza di *Selective Availability* varia significativamente solo la voce di *Bias* per l'errore dell'orologio del satellite, che prevale rispetto agli errori volutamente introdotti sulle effemeridi dei satelliti. In questo caso la fonte di errore predominante è proprio la *Selective Availability*, come si vede in Tabella 3.5. Per gli utenti autorizzati del PPS viene a mancare l'errore di *Selective Availability* e viene significativamente ridotto l'errore di propagazione nella ionosfera, mentre le altre voci sono inalterate, Tabella 3.6. In Tabella 3.7 sono riportate le costanti di tempo approssimative delle componenti correlate di vari termini di errore di *pseudorange*, valide per un osservatore immobile [1].

Standard Positioning Service, senza Selective Availability			
Fonte di Errore	Errore RMS, m		
	Bias	Random	Totale
Effemeridi	2.1	0.0	2.1
Orologio Satelliti	2.0	0.7	2.1
Ionosfera	4.0	0.5	4.0
Troposfera	0.5	0.5	0.7
Percorsi Multipli	1.0	1.0	1.4
Ricevitore	0.5	0.2	0.5
UERE, RMS	5.1	1.4	5.3
UERE filtrato, RMS	5.1	0.4	5.1
Errore Orizzontale, RMS ($HDOP = 2$)			10.2
Errore Verticale, RMS ($VDOP = 2.5$)			12.8

Tabella 3.4 Valori degli errori di *pseudorange* e di posizione, SPS senza SA [7].

Standard Positioning Service, con Selective Availability			
Fonte di Errore	Errore RMS, m		
	Bias	Random	Totale
Effemeridi	2.1	0.0	2.1
Orologio Satelliti	20.0	0.7	20.0
Ionosfera	4.0	0.5	4.0
Troposfera	0.5	0.5	0.7
Percorsi Multipli	1.0	1.0	1.4
Ricevitore	0.5	0.2	0.5
UERE, RMS	20.5	1.4	20.6
UERE filtrato, RMS	20.5	0.4	20.5
Errore Orizzontale, RMS ($HDOP = 2$)			41.1
Errore Verticale, RMS ($VDOP = 2.5$)			51.4

Tabella 3.5 Valori degli errori di *pseudorange* e di posizione, SPS con SA [7].

Precise Positioning Service			
Fonte di Errore	Errore RMS, m		
	Bias	Random	Totale
Effemeridi	2.1	0.0	2.1
Orologio Satelliti	2.0	0.7	2.1
Ionosfera	1.0	0.7	1.2
Troposfera	0.5	0.5	0.7
Percorsi Multipli	1.0	1.0	1.4
Ricevitore	0.5	0.2	0.5
UERE, RMS	3.3	1.5	3.6
UERE filtrato, RMS	3.3	0.4	3.3
Errore Orizzontale, RMS ($HDOP = 2$)			6.6
Errore Verticale, RMS ($VDOP = 2.5$)			8.3

Tabella 3.6 Valori degli errori di *pseudorange* e di posizione, PPS [7].

Fonte di Errore	Costante di tempo (min)
Posizione Satellite	30
Ionosfera	30
Troposfera	60
Percorsi Multipli	10
Selective Availability	3

Tabella 3.7 Costanti di tempo approssimative delle componenti di errore di *pseudorange* correlate, per un osservatore immobile [1].

3.3.5 Modello di errore di posizione

Il ricevitore GPS considerato in questa tesi ha una frequenza di aggiornamento della posizione pari a 4 Hz. Si considera il caso comune di accesso al servizio SPS assumendo disabilitato l'errore di *Selective Availability*.

I dati di riferimento per la descrizione statistica dell'errore di posizione del GPS sono quelli di Tabella 3.4 e Tabella 3.7. Gli errori nel tempo di latitudine, longitudine e quota forniti dal ricevitore GPS vengono simulati ciascuno mediante la generazione di un profilo di errore di *pseudorange* indipendente dagli altri ed assumendo i valori di *Dilution Of Precision* riportati in (3.28). L'errore di *pseudorange* ed il DOP consentono di ottenere l'errore di posizione sotto forma di lunghezza: per gli errori di latitudine e longitudine va fatta la conversione in angoli degli errori in lunghezza relativi alle direzioni Nord ed Est.

L'errore di *pseudorange* viene ottenuto dalla sovrapposizione di un processo di Gauss Markov con deviazione standard pari al UERE di 5.1 m per la componente di errore di tipo *Bias* e di un rumore bianco per la componente di errore di tipo *Random*. La deviazione standard del processo di Gauss Markov viene fissata pari al valore complessivo di UERE di 5.1 m; la costante di tempo viene scelta pari a 30 minuti, dato che rappresenta un valore intermedio per i termini di errore di interesse e soprattutto perché coincide con la costante di tempo dei termini di errore predominanti. Il rumore bianco viene generato in modo che la deviazione standard dei valori di errore introdotti ad ogni rilevazione della posizione sia pari a 0.4 m.

Gli errori di latitudine e longitudine, in radianti, vengono ricavati dagli errori lungo le direzioni Nord ed Est secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} e_\lambda &\approx \frac{e_N}{(R_e + h)} \\ e_\varphi &\approx \frac{e_E}{(R_e + h) \cos \lambda} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\lambda, \varphi, h, N, E$ latitudine, longitudine, quota, nord, est
 R_e raggio della Terra, 6378 Km

Il grafico dell'errore di posizione così modellato è riportato in Figura 3.8. La latitudine assunta per il calcolo di e_φ è $\lambda = 43^\circ$.

3.3.6 Modello di errore di velocità

Le informazioni reperite per formulare il modello di errore di velocità sono sommarie, relative ad un test che riguarda la verifica dell'accuratezza della velocità fornita da un ricevitore GPS [8]. I risultati del test mostrano che l'accuratezza della misura della velocità diminuisce quando aumenta l'accelerazione a cui è soggetto il ricevitore. In condizioni di velocità costante di 20-35 mph la deviazione standard dell'errore di velocità è 0.03 m/s nelle direzioni Nord ed Est e 0.05 m/s nella direzione verticale. In condizioni di alta velocità ed accelerazioni di 2-3g, ottenute con l'ausilio di un razzo, la deviazione standard dell'errore di velocità arriva a 2 m/s alla massima accelerazione.

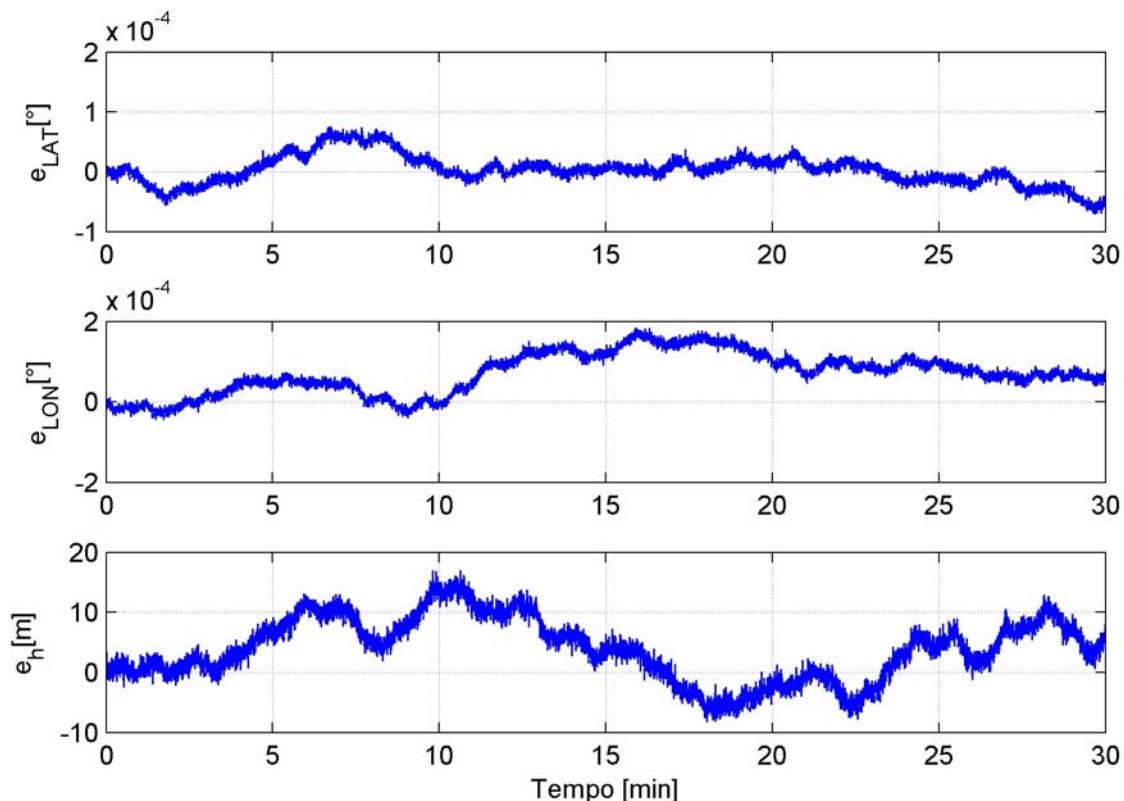


Figura 3.8 Esempio di errore di posizione del modello del GPS, senza *Selective Availability*.

Sulla base dei dati precedenti, il modello di errore di velocità è stato formulato in modo molto semplice mettendo in relazione l'errore lungo ogni direzione degli Assi Verticali Locali con l'accelerazione attuale del velivolo. Per accelerazione nulla l'errore di velocità è stato fissato cautelativamente pari a 0.1 m/s, facendolo aumentare linearmente fino a 2 m/s quando l'accelerazione totale del velivolo vale 3g. Per accelerazioni superiori a 3g, non avendo informazioni in merito, l'errore viene fatto aumentare sempre linearmente ma con pendenza maggiore, in modo che a 10g l'errore lungo ogni asse sia di 20 m/s. In questo modo l'errore complessivo di velocità, che è dato dalla composizione degli errori lungo i tre assi, risulta cautelativamente maggiorato di un fattore $\sqrt{3}$ rispetto ai dati sperimentali, per cercare di compensare tutte le caratteristiche di errore ignote e non modellate. In Figura 3.9 è riportato il grafico dell'errore di velocità lungo ogni componente della terna verticale locale e l'errore di velocità complessivo (la precedente curva moltiplicata per il fattore $\sqrt{3}$), in funzione dell'accelerazione del velivolo.

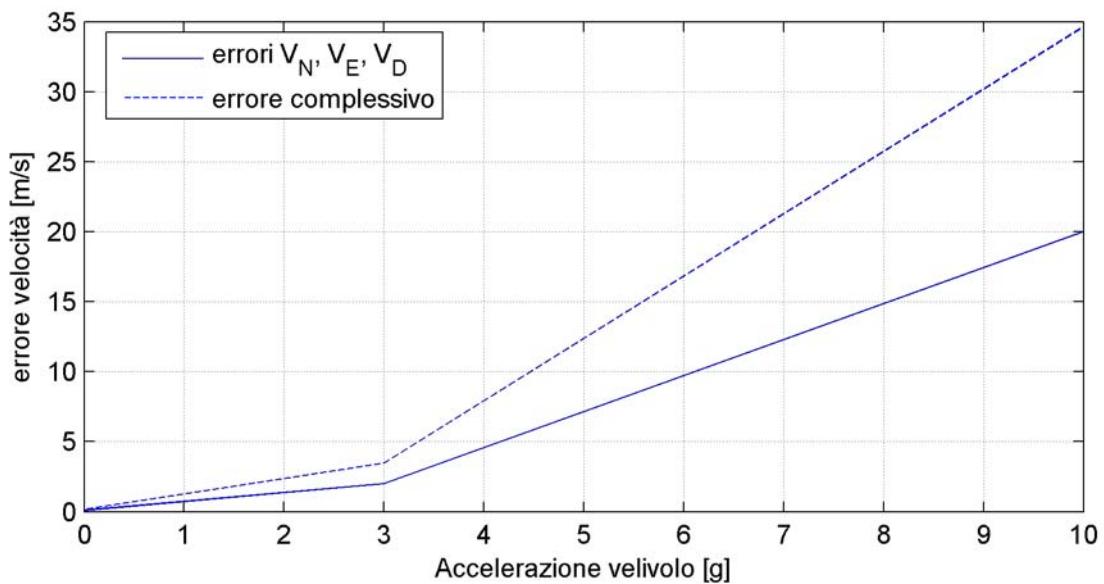


Figura 3.9 Errore di velocità modellato per il GPS.

4 Manovre di riferimento

Le manovre di riferimento sono delle sequenze di manovre compiute da un generico simulatore di volo su cui basarsi per effettuare le simulazioni dell'AHRS. Esse sono descritte da sequenze di dati di volo che specificano le caratteristiche del moto necessarie a definire le condizioni di funzionamento del sistema.

Nelle simulazioni, le manovre di riferimento costituiscono la realtà. I dati di volo che le descrivono vengono assunti come “veri” e con essi si generano le sequenze di ingresso per il sistema. Le sequenze d ingresso sono dati che rappresentano le misure effettuate dai sensori dell'AHRS, cioè i dati che vengono elaborati per ricostruire gli angoli di assetto veri. Tali sequenze si generano applicando, ai dati veri, i modelli di errore dei sensori trattati al capitolo 3.

Al termine delle simulazioni le manovre di riferimento si usano per valutare le prestazioni dell'AHRS, confrontando i valori veri delle variabili di interesse con quelli ottenuti dal sistema.

Di seguito vengono descritte le manovre di riferimento disponibili nel presente lavoro e le sequenze di ingresso generate ai fini dello sviluppo, del *Tuning* e della valutazione delle prestazioni del sistema.

4.1 Dati di volo di riferimento

Le analisi del sistema si effettuano su tre manovre di riferimento relative a tre diverse tipologie di volo, descritte dai seguenti dati:

- Posizione rispetto alla Terra: latitudine λ ($^{\circ}$), longitudine ϕ ($^{\circ}$), quota h (m);
- Velocità in Assi Verticali Locali: V_N , V_E , V_D , (m/s);
- Assetto in angoli di Eulero: rollio φ , beccheggio θ , imbardata ψ , ($^{\circ}$);

- Misure ideali di accelerometri *strapdown*: A_x, A_y, A_z , (m/s^2), sono le componenti in Assi Corpo della sovrapposizione delle accelerazioni vere del velivolo e dell’accelerazione di gravità invertita di segno, $\mathbf{A} = \mathbf{a} - \mathbf{g}$;
- Misure ideali di giroscopi *strapdown*: p, q, r , ($^{\circ}/\text{s}$), sono le componenti in Assi Corpo della velocità angolare del velivolo rispetto ad una terna inerziale.
- Per completare i dati necessari per lo studio dell’AHRS sono stati generati i valori di campo magnetico terrestre mediante il *World Magnetic Model* (paragrafo 2.11), ottenendo le componenti di campo magnetico in Assi Verticali Locali B_{eN}, B_{eE}, B_{eD} , (nT).

Tutti i dati di volo sono campionati a 100Hz. Le tre manovre di riferimento hanno in comune le condizioni iniziali di posizione, velocità e prua, che sono le seguenti:

- Posizione: $\lambda_0 = 43^{\circ} 43' 16.92'' \text{ N}$, $\phi_0 = 10^{\circ} 23' 3.92'' \text{ E}$, $h_0 = 500\text{m}$;
- Velocità: $V_N = 100\text{m/s}$, $V_E = 0\text{m/s}$, $V_D = 0\text{m/s}$;
- Prua: $\psi_0 = 0^{\circ}$.

Di seguito viene descritta ciascuna manovra di riferimento.

4.1.1 ManvTEST4

Questa manovra di riferimento rappresenta un volo della durata di 1500 secondi, svolto in condizioni di aria calma, in cui si effettuano delle manovre intervallate da tratti di volo rettilineo. Da Figura 4.1 a Figura 4.6 sono rappresentati gli andamenti dei dati di volo.

4.1.2 LightTurbulence_leveled

Questa manovra di riferimento rappresenta una fase di volo prevalentemente livellato della durata di 300 secondi, in condizioni di turbolenza atmosferica leggera. I grafici dei dati di volo sono riportati in APPENDICE A.

4.1.3 HighTurbulence_leveled

Questa manovra di riferimento è simile alla precedente, essa rappresenta una fase di volo prevalentemente livellato della durata di 300 secondi ma in condizioni di turbolenza atmosferica forte. I grafici dei dati di volo sono riportati in APPENDICE B.

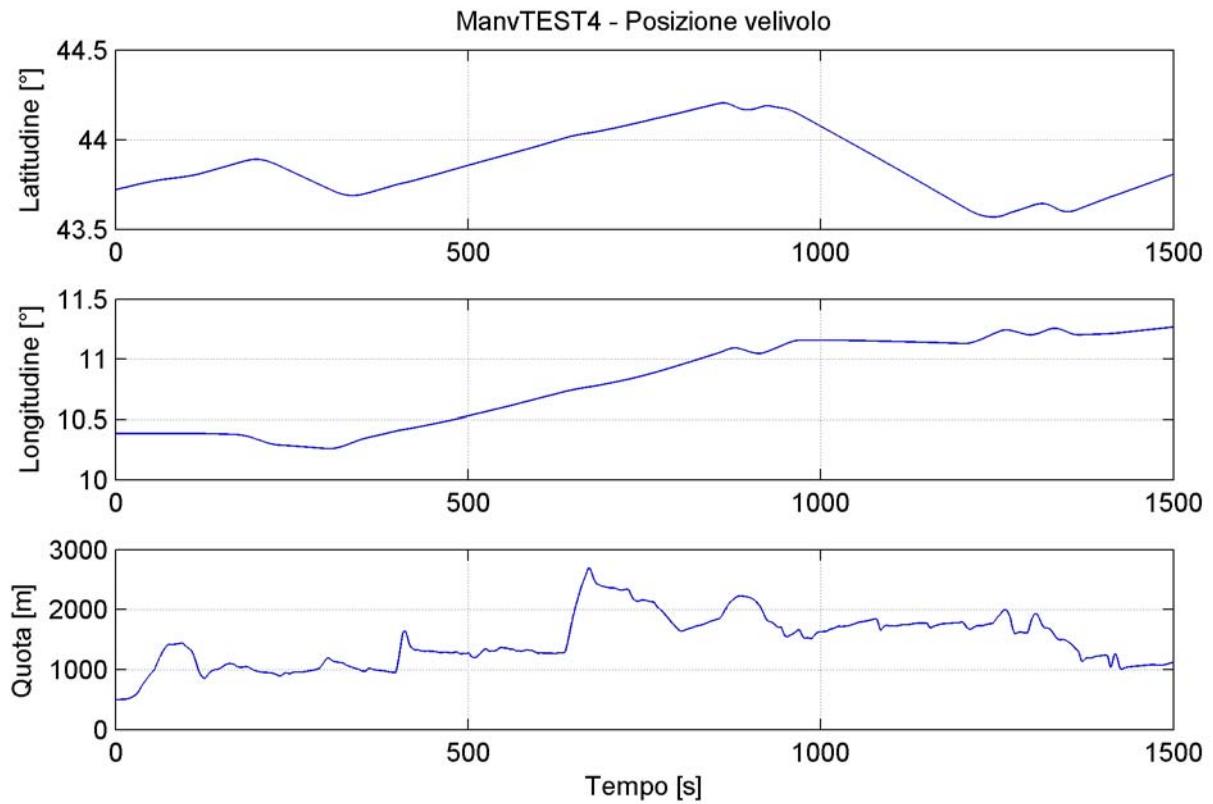


Figura 4.1 Posizione nella manovra ManvTEST4.

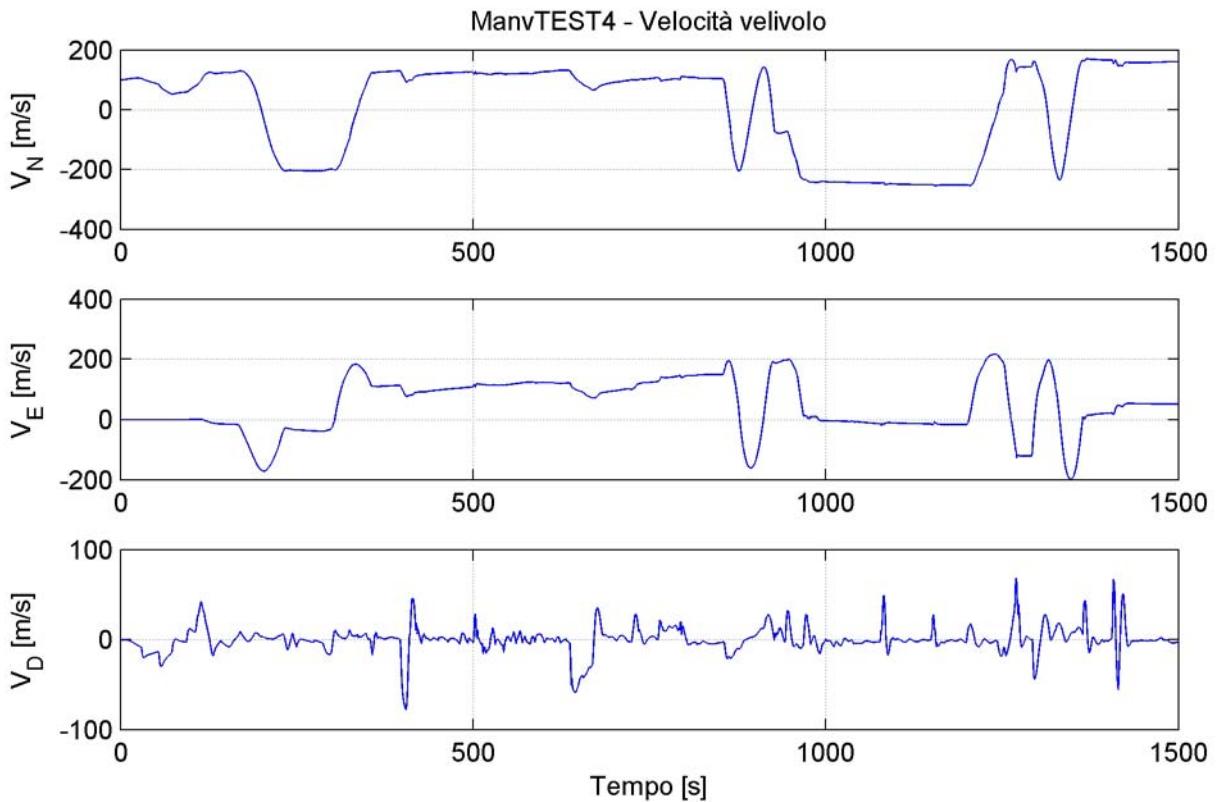


Figura 4.2 Velocità nella manovra ManvTEST4.

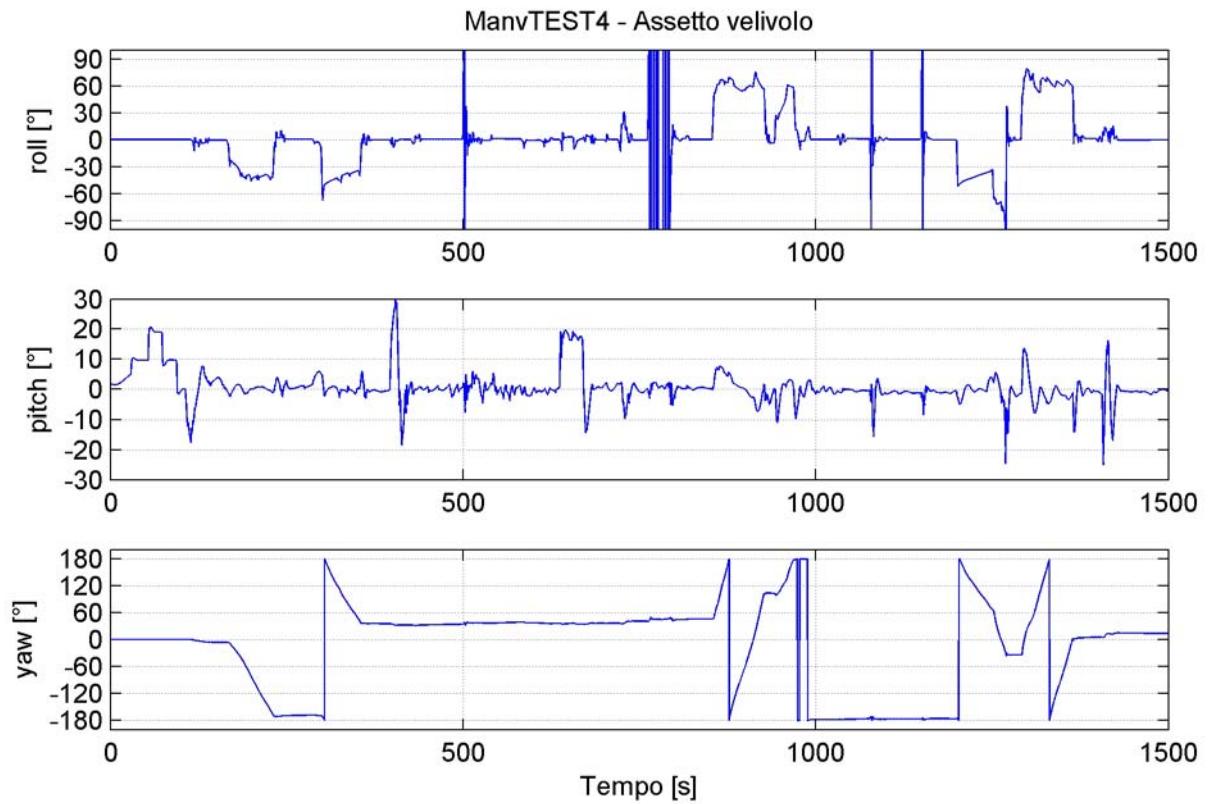


Figura 4.3 Assetto nella manovra ManvTEST4.

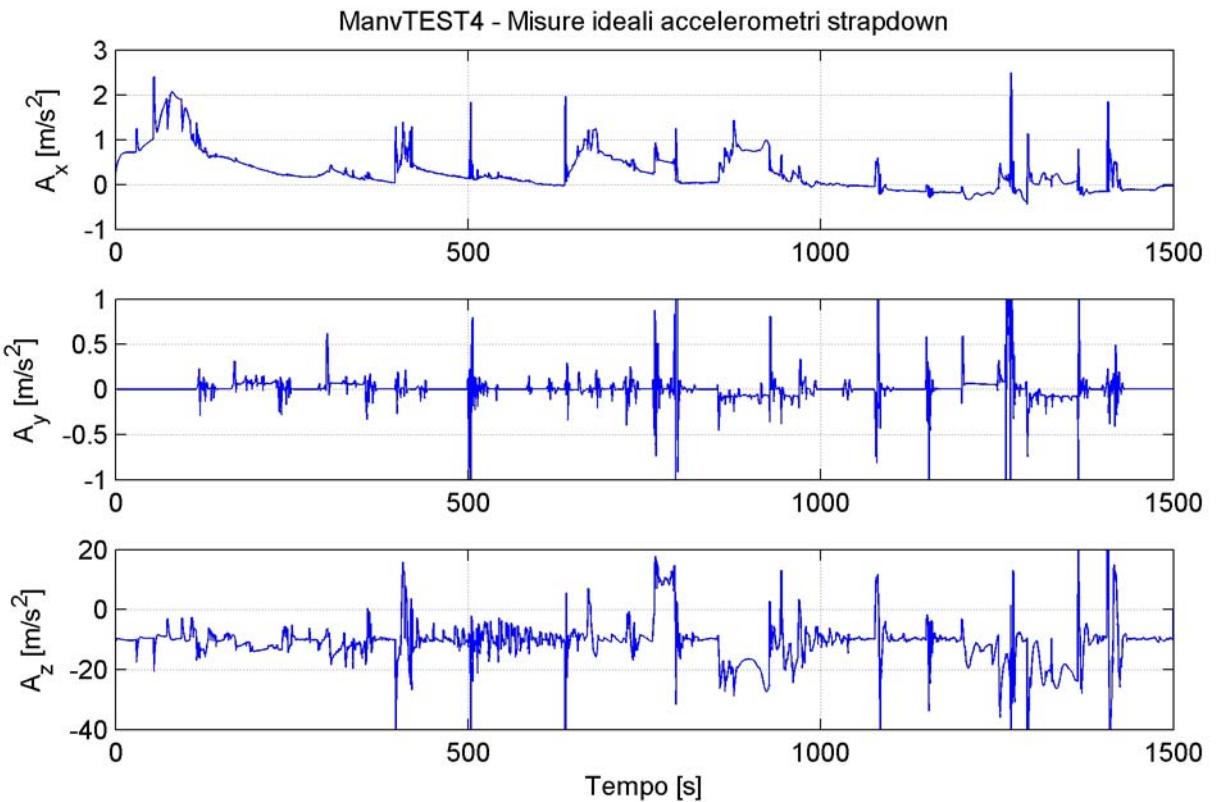


Figura 4.4 Misure ideali di accelerometri *strapdown* nella manovra ManvTEST4.

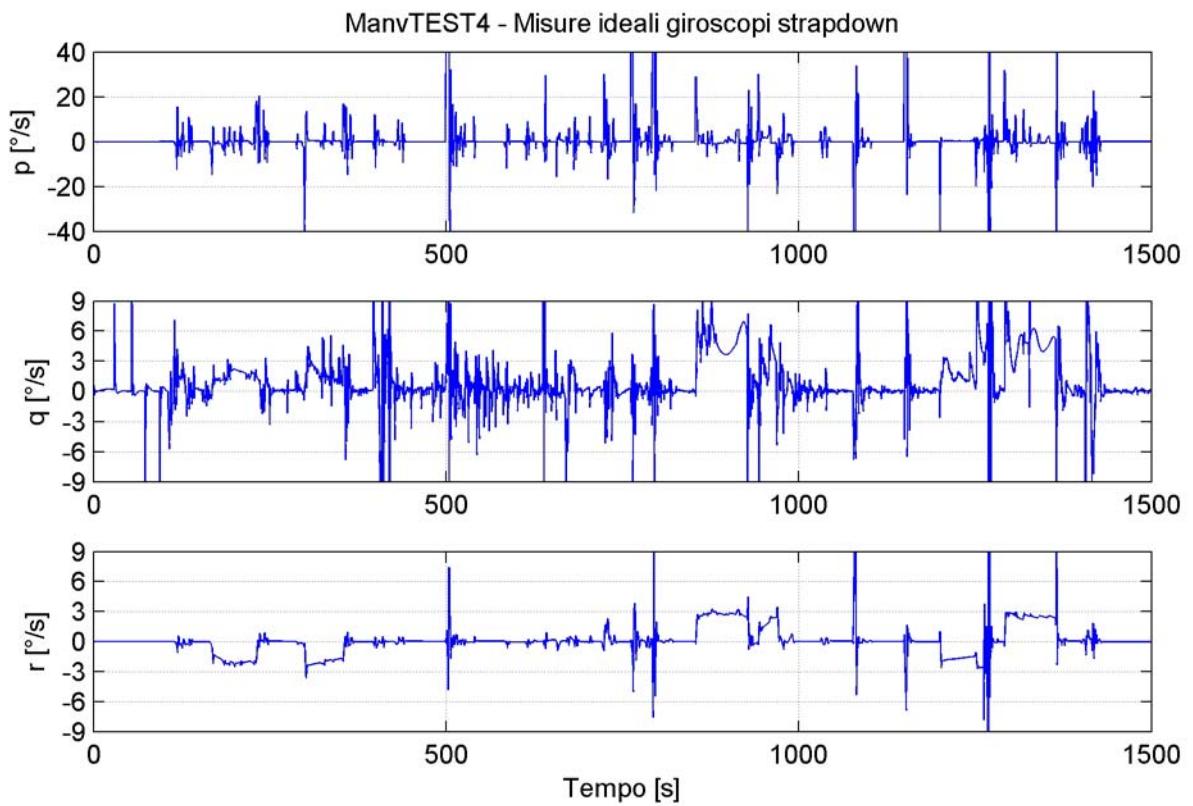


Figura 4.5 Misure ideali di giroscopi *strapdown* nella manovra ManvTEST4.

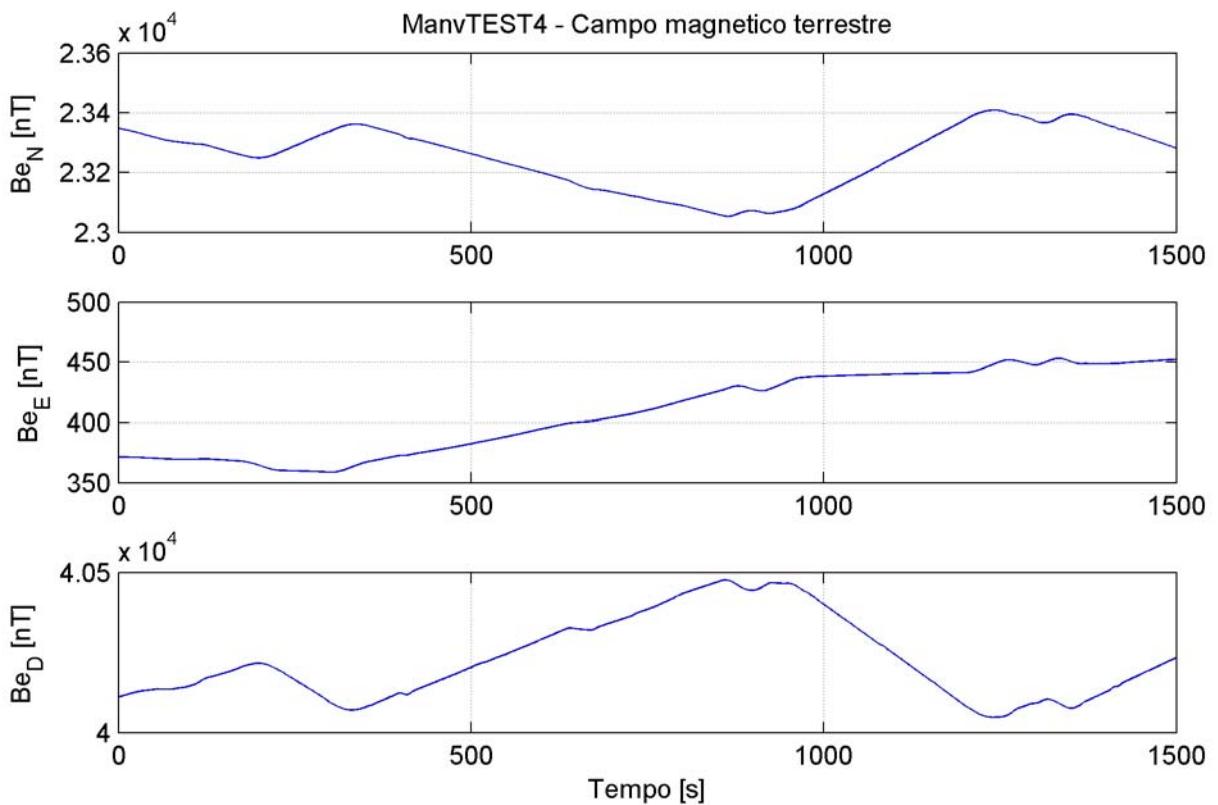


Figura 4.6 Intensità di campo magnetico terrestre nella manovra ManvTEST4.

4.2 Sequenze di ingresso

Applicando i modelli di errore dei sensori alle manovre di riferimento sono state prodotte delle sequenze di ingresso con cui condurre le simulazioni del sistema.

Sono state realizzate quattro tipologie diverse di sequenze di ingresso da usare nelle diverse fasi del lavoro, ciascuna con caratteristiche specifiche per il tipo di analisi da condurre nella fase di lavoro considerata. Esse sono descritte di seguito.

4.2.1 Sequenza di Sviluppo

La Sequenza di Sviluppo è stata generata per rappresentare una condizione standard di funzionamento dell'AHRS con cui effettuare le analisi del sistema completo o di parti di esso durante tutta la fase di sviluppo, allo scopo di eseguire il debug delle procedure implementate e per svolgere le prime analisi sul modo in cui le impostazioni dei parametri del sistema modificano il suo funzionamento.

La Sequenza di Sviluppo è stata ottenuta dalla manovra di riferimento ManvTEST4 assegnando a tutti i parametri di errore dei sensori un valore pari alla loro deviazione standard. Per i *Bias* dei giroscopi, inoltre, al tempo $t = 500\text{ sec}$ è stata realizzata una variazione positiva a gradino del valore dell'errore pari a cinque volte il *Long Term Bias Stability*, al fine di disporre di condizioni di funzionamento in grado di sollecitare in modo significativo la parte del sistema adibita alla stima dei *Bias*.

4.2.2 Sequenza di Allineamento

Questa sequenza viene usata per testare e mettere a punto la funzione di Allineamento.

La Sequenza di Allineamento non si basa sulle manovre di riferimento precedenti ma è stata realizzata simulando la condizione di velivolo immobile per la durata di 500 secondi. A tutti i termini di errore dei sensori è stato assegnato un valore pari alla loro deviazione standard ad eccezione degli errori di *Long Term Bias Stability* dei giroscopi, ai quali è stato assegnato un valore di dieci volte la loro deviazione standard.

L'elevato errore iniziale dei *Bias* dei giroscopi è stato introdotto per effettuare lo sviluppo del sistema e valutarne i limiti in condizioni di esercizio che risultano severe per la fase di Allineamento.

4.2.3 Sequenze di Tuning

Le Sequenze di *Tuning* sono state prodotte per effettuare un’assegnazione di primo tentativo dei parametri del filtro di Kalman mediante il processo di *Tuning* esposto al capitolo 6. Le manovre di riferimento a disposizione non sono sufficienti a rappresentare in modo esaurente le condizioni di esercizio del sistema, per cui i risultati delle analisi condotte con le Sequenze di *Tuning* devono essere interpretati con cautela e non possono essere impiegati per effettuare delle analisi di sensibilità. I risultati delle simulazioni sono usati solo per individuare le impostazioni del filtro che provocano comportamenti chiaramente insoddisfacenti, fissando poi i valori dei parametri del filtro stesso in modo che siano mediamente centrali negli intervalli di valori che risultano accettabili.

Le Sequenze di *Tuning* sono 60 sequenze di ingresso ottenute generando venti “realizzazioni” di ciascuna manovra di riferimento. Una “realizzazione” consiste nel generare una sequenza di ingresso assegnando in modo casuale, nel rispetto delle rispettive caratteristiche statistiche, i valori dei parametri aleatori. In questo caso sono stati assegnati casualmente i valori dei termini di errore di *Long Term Bias Stability* e di Disallineamento di tutti i sensori.

Nelle 20 sequenze di ingresso generate da ManvTEST4 è stata aggiunta anche una variazione casuale a gradino degli errori di *Bias* dei giroscopi: l’istante in cui avviene la variazione è unico per i tre giroscopi ed è determinato casualmente sulla base di una densità di probabilità Gaussiana con media 500 sec e deviazione standard 200 sec, mentre l’entità della variazione del termine di errore è determinata casualmente per ciascun giroscopio da una densità di probabilità Gaussiana con media nulla e deviazione standard pari a cinque volte il *Long Term Bias Stability*.

Ci sono due motivi per cui sono state introdotte le variazioni dei *Bias* dei giroscopi. Un motivo è la necessità di creare delle condizioni di esercizio che siano in grado di mettere in risalto gli effetti di diverse sensibilità di stima dei *Bias* durante il funzionamento del sistema. Considerando situazioni con modesti errori di *Bias*, infatti, la variazione dei parametri del filtro di Kalman che controllano la stima dei *Bias* può avere effetti non apprezzabili e mascherati da altri aspetti del sistema, per cui non ci sarebbero le condizioni per effettuare una scelta sensata di tali parametri. L’altro motivo sta nel fatto che la variazione improvvisa dei *Bias* dei sensori è un evento che può realmente verificarsi per cause brusche ed accidentali. In tale circostanza, se il sistema è in grado di compensare efficacemente la variazione dell’errore di *Bias*, le prestazioni di stima dell’assetto sono certamente migliori.

4.2.4 Sequenze di Valutazione

Queste sequenze vengono usate per valutare le prestazioni del sistema una volta che siano stati fissati i suoi parametri.

Le Sequenze di Valutazione sono analoghe alle Sequenze di *Tuning* ma non presentano la variazione a gradino degli errori di *Bias* dei giroscopi. Si tratta quindi di 60 sequenze costituite da venti realizzazioni di ogni manovra di riferimento nella quali vengono assegnati casualmente gli errori di *Long Term Bias Stability* e di Disallineamento di tutti i sensori.

5 Sviluppo del sistema AHRS

5.1 Descrizione generale

La funzione del sistema sviluppato è di stimare gli angoli di assetto del velivolo sul quale è installato, con elevata frequenza di aggiornamento e bassi errori. Esistono soluzioni di AHRS in grado di fornire informazioni accurate di posizione e velocità, adempiendo anche alle funzioni dei sistemi di navigazione, ma in questa tesi non è stata contemplata alcuna funzione aggiuntiva.

I sensori considerati per lo sviluppo del sistema sono giroscopi, accelerometri e magnetometri, tutti triassiali e su piattaforma *strapdown*, ed un ricevitore GPS per disporre di informazioni di posizione e velocità.

Il principio di funzionamento su cui si basa il presente sistema è descritto al paragrafo 1.1 relativamente agli AHRS assistiti dal GPS. In Figura 5.1 è rappresentato lo schema della soluzione adottata, derivato direttamente dalla Figura 1.3. Di seguito vengono descritti sommariamente i dettagli del sistema non trattati al paragrafo 1.1 e le ulteriori tecniche sviluppate per migliorare le prestazioni, trattate approfonditamente in seguito.

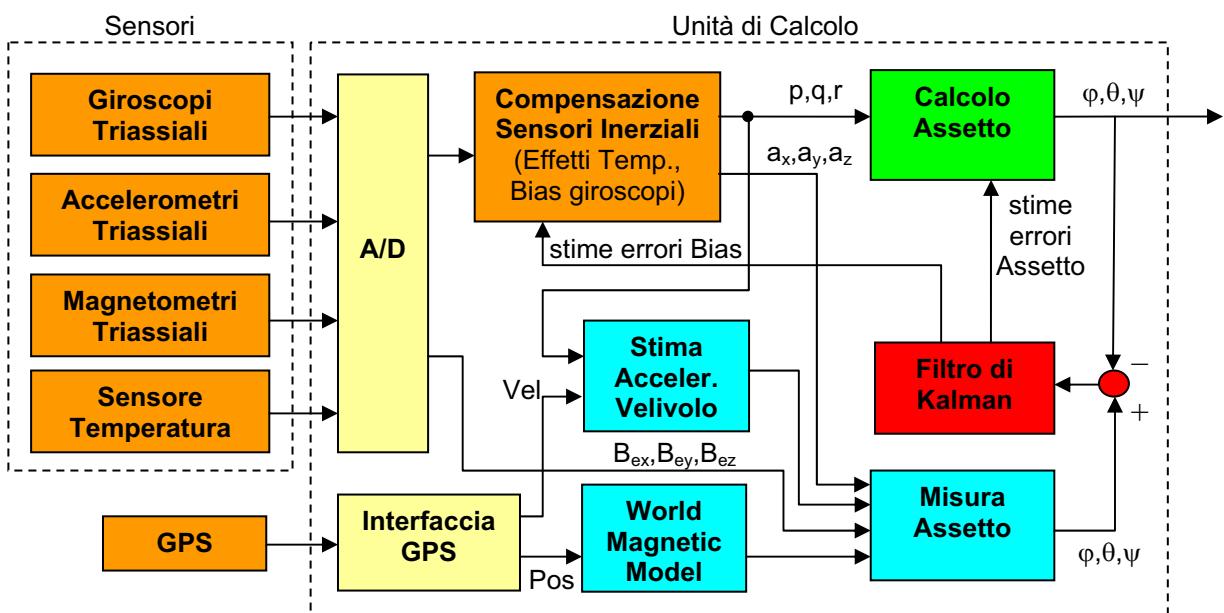


Figura 5.1 Schema della soluzione adottata per realizzare l'AHRS.

Internamente al sistema l'assetto del velivolo viene descritto mediante i quaternioni, questo comporta una trattazione del problema matematico meno intuitiva ma porta dei vantaggi di carattere computazionale ed elimina il problema delle singolarità legate all'uso degli angoli di Eulero (paragrafo 2.3.4).

Il filtro di Kalman è implementato nella forma Estesa e Discreta. Esso si basa sul modello linearizzato della dinamica dell'errore dell'assetto, il cui punto di linearizzazione coincide con le stime degli stati del sistema. Come è stato rappresentato nello schema di Figura 5.1, il filtro effettua il feedback delle stime degli errori dell'assetto e le correzioni vengono inserite nei calcoli.

Le correzioni all'assetto apportate dal filtro di Kalman dipendono dalla differenza fra l'assetto misurato e l'assetto calcolato (il residuo dell'assetto) e dalle affidabilità ad essi attribuite. Per favorire le prestazioni del sistema è stato realizzato un meccanismo che, ad ogni misura dell'assetto, assegna delle affidabilità variabili alle misure stesse in funzione di parametri rappresentativi della severità della manovra all'istante considerato, in modo che il filtro dia un peso minore alle misure quando si ritiene che esse siano affette da errori maggiori. I parametri usati per descrivere la severità della manovra sono il modulo della misura degli accelerometri e la velocità angolare di imbardata.

L'AHRS è stato dotato di tre modalità di funzionamento, che ai fini della realizzazione del sistema differiscono esclusivamente per i valori dei parametri del filtro, i quali regolano il peso delle misure dell'assetto nella determinazione delle correzioni degli stati del sistema. Esse sono:

- Modalità di Allineamento;
- Modalità con GPS attivo;
- Modalità con GPS disattivo.

La modalità di Allineamento si attiva all'accensione del sistema. Essa serve ad assegnare la condizione iniziale nell'integrazione delle velocità angolari per il calcolo dell'assetto e ad effettuare velocemente la stima iniziale degli errori di *Bias* dei giroscopi. Durante l'allineamento è richiesto che il velivolo non sia soggetto ad accelerazioni perché il vettore gravità si determina dalle sole misure degli accelerometri. In questa modalità i parametri del filtro sono assegnati in modo che la misura dell'assetto riceva un peso molto elevato.

Dopo la fase di Allineamento si alternano le altre due modalità di funzionamento in base alla disponibilità delle misure del GPS alle quali, durante le manovre del velivolo, è legata

l'accuratezza della determinazione del vettore gravità e quindi della misura dell'assetto. Nel caso di misure del GPS non disponibili, il vettore gravità è assunto pari alle sole misure degli accelerometri. Quando il velivolo non è soggetto ad accelerazioni dovute al moto, il vettore gravità è correttamente dato dai soli accelerometri e la disponibilità del GPS non influisce sull'accuratezza della misura dell'assetto. Proprio per questo, per la condizione di assenza di manovre, nelle due modalità di funzionamento i parametri del filtro sono impostati identicamente. Quando vengono effettuate delle manovre, invece, la disponibilità del GPS consente di ottenere una misura dell'assetto più attendibile e questo si riflette sulle impostazioni dei parametri del filtro, che nella modalità di funzionamento con GPS disattivo determinano, all'aumentare della severità delle manovre, una riduzione del peso delle misure più marcata che per GPS attivo.

Per favorire ulteriormente le prestazioni del sistema, la logica di elaborazione dei dati è stata dotata di due funzioni: il *Reject* delle misure ed il *Reset* dell'assetto. Il *Reject* consiste nello scartare una misura nel caso in cui essa venga ritenuta errata, condizione che viene rilevata controllando se i residui degli angoli di assetto sono superiori ad un certo valore di soglia. I motivi per effettuare il *Reject* della misura sono due:

- a causa di una manovra particolarmente severa o di condizioni di funzionamento sfavorevoli il vettore gravità determinato può essere affetto da errori troppo grandi;
- il procedimento di misura dell'assetto che impiega il metodo dei minimi quadrati può non convergere al risultato corretto, fornendo una misura priva di senso.

Visto che in condizioni di manovre intense il filtro è già predisposto per dare poco peso alle misure, il *Reject* è utile soprattutto per il secondo motivo. L'adozione di questa funzione è rischiosa perché si affida alle stime dell'assetto per determinare la validità delle misure, potendo provocare la divergenza del sistema nel caso in cui, ad un certo momento, fossero le stime dell'assetto ad essere affette da errori di una certa entità anziché le misure.

Durante il volo possono esserci istanti in cui il velivolo non è soggetto ad accelerazioni, trovandosi in condizioni di moto rettilineo uniforme. In questi casi la misura degli accelerometri fornisce una buona stima del vettore gravità e la misura dell'assetto che ne deriva è affetta da piccoli errori. Il *Reset* dell'assetto consiste nel far coincidere le stime dell'assetto, negli istanti di moto rettilineo uniforme, ai valori delle misure, determinando un miglioramento delle prestazioni del sistema se gli errori della misura dell'assetto in quelle condizioni sono minori degli errori di stima accumulati fino a quel momento.

Lo schema generale del sistema sviluppato in ambiente SIMULINK è rappresentato in Figura 5.2. Nei paragrafi che seguono vengono presentati in dettaglio tutti i blocchi che costituiscono il sistema e le metodologie di elaborazione dei dati applicate.

5.2 Modello matematico del sistema

In questo paragrafo viene formulato il modello matematico su cui di base il filtro di Kalman Esteso.

Questo sistema si basa sull'integrazione delle equazioni differenziali non lineari di assetto (paragrafo 2.4), le quali devono essere usate per formulare un modello matematico che fornisca la descrizione del sistema al filtro di Kalman. L'applicazione del filtro in questi casi si basa sull'approssimazione lineare delle equazioni, dove la scelta della "traiettoria" rispetto a cui linearizzare porta a distinguere le modalità di impiego del filtro che, a seconda dei casi, prende il nome di Filtro di Kalman Linearizzato o Filtro di Kalman Esteso (paragrafo 2.8.1). In questo lavoro la linearizzazione delle equazioni si effettua rispetto alla stima dell'assetto, applicando quindi il filtro di Kalman Esteso. Per favorire le prestazioni dell'AHRS vengono stimati anche gli errori di *Bias* dei giroscopi, i quali sono fra le cause principali degli errori del calcolo dell'assetto. Per far ciò il modello del sistema deve essere arricchito con la descrizione matematica di tali errori di *Bias*. Le quantità complessivamente da stimare sono sette, le quattro componenti del quaternione ed i tre errori di *Bias* dei giroscopi, dove solo le prime costituiscono le uscite del sistema.

Le misure fornite al filtro sono le componenti del quaternione, ovvero una parte degli stati del sistema, per cui le relazioni che descrivono le misure sono estremamente semplici e soprattutto sono lineari.

Quanto segue si basa sui contenuti dei paragrafi 1.7, 1.9 e 1.10. In questa particolare applicazione la non linearità delle equazioni di assetto coinvolge le quantità stocastiche presenti negli errori di misura dei giroscopi, ma tale situazione non è prevista nella trattazione generale riportata al paragrafo 1.9 dove i segnali aleatori sono considerati additivi, per cui si elaborano le dovute modifiche per applicare il procedimento a questo caso specifico.

5.2.1 Dinamica linearizzata dell'assetto

Parlando della dinamica dell'assetto si fa riferimento alle equazioni differenziali di assetto espresse in termini di quaternione in funzione delle velocità angolari, riportate al paragrafo 2.4.

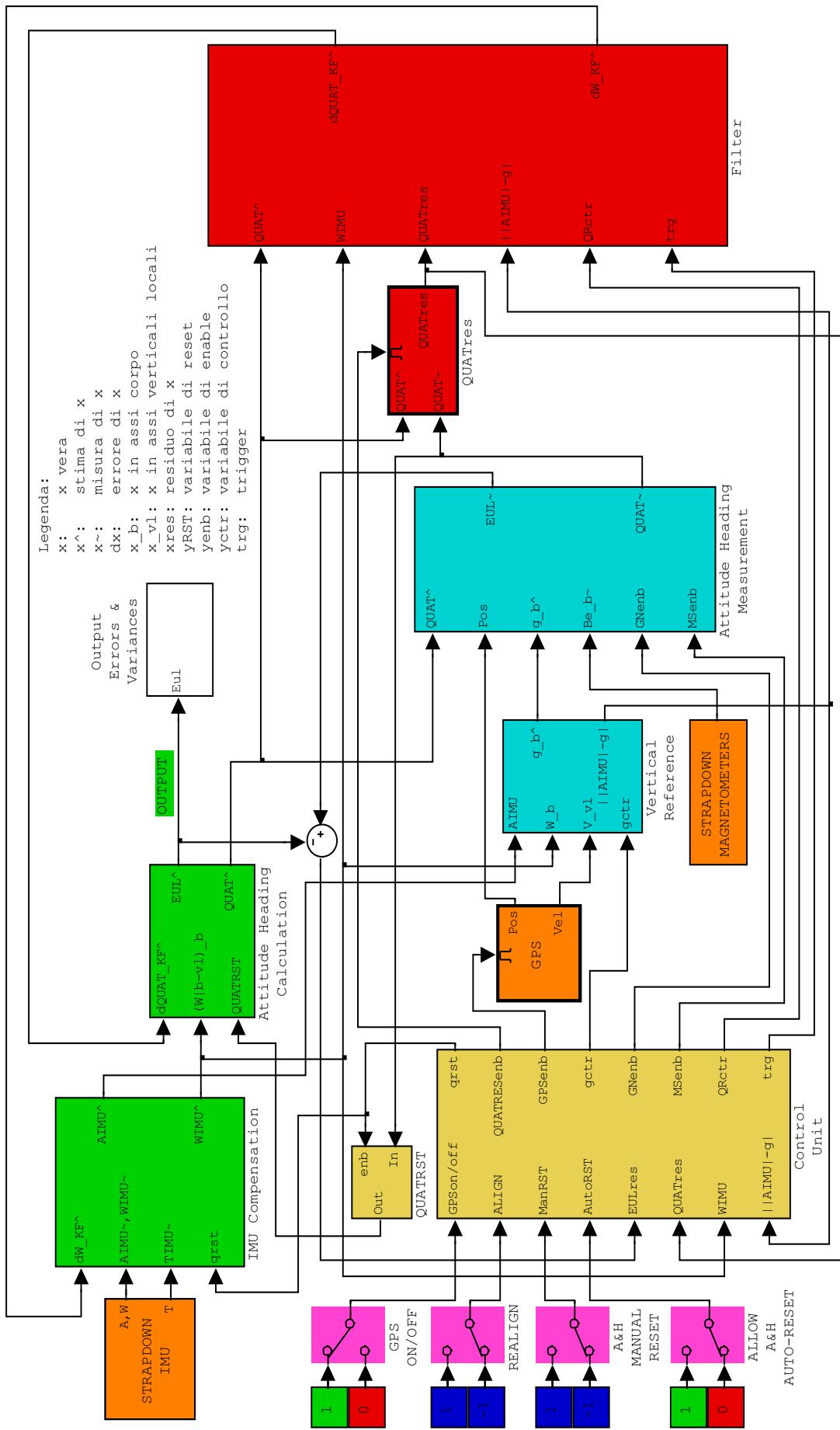


Figura 5.2 Schema generale dell'AHRS.

Si consideri la seguente simbologia, relativamente ad un generico vettore:

- \mathbf{a} vettore vero
- $\hat{\mathbf{a}}$ stima di \mathbf{a}
- $\tilde{\mathbf{a}}$ misura di \mathbf{a}
- $\bar{\mathbf{a}}$ valore nominale o di riferimento di \mathbf{a}
- $\delta \mathbf{a}$ termine di perturbazione rispetto alla soluzione di riferimento $\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}$, ma anche errore di stima $\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$ perché nel filtro di Kalman Esteso la soluzione di riferimento coincide con la stima della variabile nel tempo: $\bar{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}$, come visto al paragrafo 2.8.3.

Le equazioni di assetto (2.27), già nella forma corretta per essere espresse in variabili di stato, possono essere rappresentate come segue:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_q, \mathbf{u}) \\ \mathbf{q} = \mathbf{H}_q \mathbf{x}_q \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H}_q = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (5.2)$$

dove \mathbf{u} sono le velocità angolari in ingresso alle equazioni.

Si indichi con $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'errore di misura degli ingressi, definito come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.3)$$

Data una stima degli errori di misura degli ingressi, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, si può definire un ingresso di riferimento per le equazioni di assetto nel seguente modo:

$$\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.4)$$

Sostituendo nella (5.4) le espressioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.5)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.6)$$

si ottiene:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.7)$$

Sia $\bar{\mathbf{x}}_q$ la soluzione delle equazioni di assetto per l'ingresso di riferimento appena definito:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_q = \mathbf{f}_q(\bar{\mathbf{x}}_q, \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.8)$$

Sostituendo nella (5.1) le espressioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q &= \bar{\mathbf{x}}_q + \delta \mathbf{x}_q \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5.9)$$

e facendo uno sviluppo in serie di Taylor, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_q + \delta \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{f}_q(\bar{\mathbf{x}}_q + \delta \mathbf{x}_q, \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{e}) = \\ &= \mathbf{f}_q(\bar{\mathbf{x}}_q, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{x}_q} \right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} \cdot \delta \mathbf{x}_q + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} \cdot \delta \mathbf{e} + \text{hot}'s \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se le quantità $\delta \mathbf{x}_q$ e $\delta \mathbf{e}$ sono piccole, i termini di grado superiore al primo risultano trascurabili e sostituendo la (5.8) nella (5.10) si ottiene l'approssimazione lineare della perturbazione dell'assetto⁵:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_q \approx \mathbf{F}_q \delta \mathbf{x}_q + \mathbf{G}_q \delta \mathbf{e} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{F}_q = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{x}_q} \right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} -2q_0^2 & -\frac{p}{2} - 2q_0q_1 & -\frac{q}{2} - 2q_0q_2 & -\frac{r}{2} - 2q_0q_3 \\ \frac{p}{2} - 2q_1q_0 & -2q_1^2 & \frac{r}{2} - 2q_1q_2 & -\frac{q}{2} - 2q_1q_3 \\ \frac{q}{2} - 2q_2q_0 & -\frac{r}{2} - 2q_2q_1 & -2q_2^2 & \frac{p}{2} - 2q_2q_3 \\ \frac{r}{2} - 2q_3q_0 & \frac{q}{2} - 2q_3q_1 & -\frac{p}{2} - 2q_3q_2 & -2q_3^2 \end{bmatrix}_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{G}_q = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} -\frac{q_1}{2} & -\frac{q_2}{2} & -\frac{q_3}{2} \\ \frac{q_0}{2} & -\frac{q_3}{2} & \frac{q_2}{2} \\ \frac{q_3}{2} & \frac{q_0}{2} & -\frac{q_1}{2} \\ -\frac{q_2}{2} & \frac{q_1}{2} & \frac{q_0}{2} \end{bmatrix}_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_q \\ \bar{\mathbf{u}}}} \quad (5.13)$$

⁵ Nella (5.12), sulla diagonale di \mathbf{F}_q è stato trascurato l'addendo $\varepsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$, sempre molto piccolo.

5.2.2 Errori dei giroscopi

Gli errori di misura dei giroscopi vengono considerati composti da un termine di errore di *Bias* ed una restante parte di rumore bianco. I *Bias* vengono modellati mediante il processo di Wiener (paragrafo 2.5.4) che è lineare, per cui l'intero modello di errore dei giroscopi è lineare e la sua rappresentazione in variabili di stato è la seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \end{bmatrix} &= [\mathbf{0}_{3 \times 3}] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} &= [\mathbf{I}_{3 \times 3}] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

dove i termini b_i sono gli errori di *Bias*, gli η_i sono i rumori bianchi di ingresso dei processi di Wiener ed i v_i sono i rumori di misura dei giroscopi. In forma compatta il sistema è scritto come segue:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\varepsilon} = \mathbf{F}_{\varepsilon} \mathbf{x}_{\varepsilon} + \mathbf{G}_{\varepsilon} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}_{\varepsilon} \mathbf{x}_{\varepsilon} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{\varepsilon} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{G}_{\varepsilon} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{H}_{\varepsilon} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.16)$$

Per inserire $\delta\varepsilon$ nell'equazione (5.11), il sistema (5.15) viene scritto in termini di perturbazioni. Siano:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\varepsilon} &= \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon} + \delta\mathbf{x}_{\varepsilon} \\ \varepsilon &= \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon \end{aligned} \quad (5.17)$$

con $\bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon}$ ed $\bar{\varepsilon}$ tali che:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\varepsilon} = \mathbf{F}_{\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} = \mathbf{H}_{\varepsilon} \bar{\mathbf{x}}_{\varepsilon} \end{cases} \quad (5.18)$$

Sostituendo le (5.17) e (5.18) nelle (5.15) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\delta\mathbf{x}}_{\varepsilon} = \mathbf{F}_{\varepsilon} \delta\mathbf{x}_{\varepsilon} + \mathbf{G}_{\varepsilon} \boldsymbol{\eta} \\ \delta\varepsilon = \mathbf{H}_{\varepsilon} \delta\mathbf{x}_{\varepsilon} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.19)$$

Dato che la matrice \mathbf{F}_ε è nulla, qualsiasi vettore di valori costanti di $\bar{\mathbf{x}}_\varepsilon$ soddisfa le (5.18). Affinché i termini di perturbazione $\delta\varepsilon$ siano piccoli, però, i valori di $\bar{\mathbf{x}}_\varepsilon$ vanno posti uguali alle più recenti stime degli errori di *Bias*.

5.2.3 Misura dell'assetto

Gli errori di misura dell'assetto vengono modellati esclusivamente come rumori bianchi, per cui il modello della misura dell'assetto sono dato da:

$$\mathbf{z} = \mathbf{q} + \mathbf{v} \quad (5.20)$$

oppure, facendo uso delle variabili di stato:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}_q \mathbf{x}_q + \mathbf{v} \quad (5.21)$$

dove $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$ è il vettore dei rumori di misura. Per scrivere le equazioni di misura in termini di perturbazioni, per prepararle ad essere impiegate nel filtro di Kalman Esteso, si scrive il vettore della misura come la somma della misura di riferimento con il termine di perturbazione:

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z} \quad (5.22)$$

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{H}_q \bar{\mathbf{x}}_q \quad (5.23)$$

che sostituite nella (5.21) danno:

$$\delta\mathbf{z} = \mathbf{H}_q \delta\mathbf{x}_q + \mathbf{v} \quad (5.24)$$

5.2.4 Modello completo di perturbazione

Unendo i modelli di perturbazione della dinamica del quaternione e degli errori di misura dei giroscopi come indicato al paragrafo 2.9 si ottiene il modello di perturbazione del sistema a stati aumentati da impiegare nel filtro di Kalman:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a \delta\mathbf{x}_a + \mathbf{G}_a \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_q & \mathbf{G}_q \mathbf{H}_\varepsilon \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_q \\ \delta\mathbf{x}_\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Il modello di perturbazione della misura diventa:

$$\delta\mathbf{z} = \mathbf{H}_a \delta\mathbf{x}_a + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_q \\ \delta\mathbf{x}_\varepsilon \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad (5.26)$$

Per definire completamente il modello rimane da caratterizzare i rumori di processo \mathbf{w} e di misura \mathbf{v} attraverso la definizione delle matrici delle covarianze \mathbf{Q}_a ed \mathbf{R}_a , che si considerano così definite:

$$Q_{ij} = \begin{cases} GyrWNCOV & i = j = 1, 2, 3, 4 \\ RWCOV & i = j = 5, 6, 7 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.27)$$

$$R_{ij} = \begin{cases} QCov & i = j = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.28)$$

GyrWNCOV covarianze dei rumori di misura dei giroscopi

RWCov covarianze dei rumori dei processi di Wiener

QCov covarianze dei rumori di misura dell'assetto

Questa struttura delle matrici delle covarianze è la conseguenza di due ipotesi:

- cross-correlazione nulla fra tutti i rumori, che determina valori nulli per le covarianze nei casi $i \neq j$;
- i giroscopi sono tutti uguali, le caratteristiche degli errori di *Bias* sono identiche fra di loro ed anche le caratteristiche degli errori di misura delle varie componenti del quaternione coincidono. Per questo i valori dei parametri *GyrWNCOV*, *RWCov* e *QCov* non vengono distinti per i singoli termini di errore che rappresentano.

L'assegnazione dei valori delle covarianze fa parte del lavoro di sviluppo del sistema e viene trattata in seguito. Il valore di *QCov* viene fatto variare in funzione di due parametri usati per indicare la severità delle manovre eseguite dal velivolo, per cui *QCov* è in generale variabile nel tempo.

5.2.5 Discretizzazione del modello

Applicando una delle due metodologie descritte al paragrafo 2.6, il modello continuo di perturbazione rappresentato dalle (5.25) e (5.26) diventa:

$$\delta \mathbf{x}_{ak+1} = \Phi_{ak} \delta \mathbf{x}_{ak} + \mathbf{w}_k \quad (5.29)$$

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_{ak} \delta \mathbf{x}_{ak} + \mathbf{v}_k \quad (5.30)$$

$$E\left[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (5.31)$$

$$E\left[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T\right] = \begin{cases} \mathbf{R}_k & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (5.32)$$

In questo lavoro sono state testate entrambe le metodologie di discretizzazione e si è adottata quella approssimata perché i risultati nei due casi sono risultati paragonabili. Il modello continuo di questo sistema è tempo variante mentre il metodo scelto si applica ai sistemi a parametri costanti, per questo, per il calcolo delle matrici del modello discreto equivalente, il modello continuo viene valutato all'istante t_k in cui si esegue del filtro. Le matrici del sistema discreto, da calcolare ad ogni nuova esecuzione del filtro, sono⁶:

$$\Phi_{ak} = e^{F_a(t_k)\Delta t} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_a \quad (5.34)$$

$$\mathbf{Q}_{ak} = \mathbf{G}_a(t_k) \mathbf{Q}_a \mathbf{G}_a^T(t_k) \Delta t \quad (5.35)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_a(t_k) \quad (5.36)$$

5.2.6 Stime degli stati

Applicando il procedimento di calcolo indicato al paragrafo 2.8.3 si ottengono le stime degli stati del sistema, in particolare quelle desiderate dell'assetto. Di seguito viene riepilogata la procedura per sommi capi applicata a questo caso specifico.

Il filtro di Kalman, applicato al modello definito al paragrafo precedente, all'istante t_k elabora le seguenti misure:

$$\delta \tilde{\mathbf{z}}_k = \tilde{\mathbf{q}}(t_k) - \mathbf{H}_a \bar{\mathbf{x}}_a(t_k) \quad (5.37)$$

Esso fornisce le stime degli errori degli stati $\hat{\mathbf{x}}_{ak}$ rispetto alle soluzioni di riferimento $\bar{\mathbf{x}}_a(t)$, dove:

$$\bar{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}_e(t) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

⁶ Nelle matrici \mathbf{H}_a e \mathbf{Q}_a del modello continuo, i cui parametri non cambiano nel tempo, si è volutamente omesso l'argomento t_k .

Le stime degli stati all'istante t_k sono date da:

$$\hat{\mathbf{x}}_a(t_k) = \bar{\mathbf{x}}_a(t_k) + \delta \hat{\mathbf{x}}_{ak} \quad (5.39)$$

oppure, distinguendo l'assetto ed i *Bias*:

$$\hat{\mathbf{x}}_q(t_k) = \bar{\mathbf{x}}_q(t_k) + \delta \hat{\mathbf{x}}_{qk} \quad (5.40)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_\epsilon(t_k) = \bar{\mathbf{x}}_\epsilon(t_k) + \delta \hat{\mathbf{x}}_{\epsilon k} \quad (5.41)$$

Da queste stime, che sono le più aggiornate, si ridefiniscono le soluzioni di riferimento in modo che, nell'intervallo di tempo (t_k, t_{k+1}) , sia:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_q(t) = \mathbf{f}_q(\bar{\mathbf{x}}_q(t), \bar{\mathbf{u}}(t)) \quad \bar{\mathbf{x}}_q(t_k) = \hat{\mathbf{x}}_q(t_k) \quad (5.42)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}(t) = \mathbf{H}_\epsilon \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t) \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t_k) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t_k) \quad (5.43)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t) \quad (5.44)$$

Aggiornando le soluzioni di riferimento, le stime $\delta \hat{\mathbf{x}}_a$ si annullano entro tutto l'intervallo di tempo (t_k, t_{k+1}) fino a quando non viene eseguito nuovamente il filtro di Kalman, quindi le precedenti (5.42) e (5.43) rappresentano le stime degli stati entro l'intervallo. La (5.43), inoltre, si è voluta scrivere in modo formalmente completo, ma la matrice \mathbf{H}_ϵ è nulla e la soluzione è costante entro tutto l'intervallo e pari alla stima all'istante t_k . Le (5.37), (5.43) e (5.44) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\delta \mathbf{z}_k = \tilde{\mathbf{q}}(t_k) - \hat{\mathbf{x}}_q(t_k) \quad (5.45)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t_k) \quad (5.46)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t_k) \quad (5.47)$$

All'istante t_{k+1} , dopo la nuova esecuzione del filtro di Kalman, il ciclo di operazioni si ripete.

Per iniziare il processo di stima, all'istante t_0 si deve assegnare il valore iniziale degli stati $\hat{\mathbf{x}}_{a0}$ e si deve fornire al filtro la misura della loro attendibilità attraverso il valore iniziale della matrice delle covarianze degli errori \mathbf{P}_{a0} .

Il risultato della (5.42) costituisce la stima dell'assetto nel tempo e rappresenta l'uscita dell'AHRS.

5.3 Ingressi

Gli ingressi del sistema sono le misure dei sensori inerziali, dei magnetometri e le misure di posizione e velocità fornite dal ricevitore GPS. I sensori inerziali ed i magnetometri sono tutti triassiali e vincolati rigidamente alla struttura del velivolo, ovvero su piattaforma *strapdown*, con lo scopo di misurare le grandezze in Assi Corpo.

In Figura 5.2 i sensori sono rappresentati dai blocchi di colore arancione. I dati da essi forniti, nelle simulazioni del sistema, sono realizzati sulla base delle manovre di riferimento a disposizione come indicato al capitolo 4, simulando gli errori di misura con i modelli e con le caratteristiche dei sensori riportati al capitolo 3. I sensori inerziali ed i magnetometri considerati forniscono le misure con una frequenza di aggiornamento di 100 Hz, mentre il GPS fornisce la posizione e la velocità ad una frequenza di 4 Hz.

I dati forniti dal sistema GPS possono subire interruzioni a causa della disattivazione del servizio o, in certi momenti, per l'impossibilità dell'antenna del ricevitore di vedere il cielo perché coperta dalla struttura del velivolo, ad esempio durante manovre eseguite ad assetti molto accentuati. In questo sistema l'attivazione e la disattivazione del GPS viene controllata manualmente mediante l'interruttore *GPS on/off* di Figura 5.2 allo scopo, nelle fasi di sviluppo, di valutare il funzionamento del sistema in sessioni di test in cui il GPS sia sempre attivo o sempre disattivo. Non sono stati considerati i casi di interruzione del funzionamento del GPS per brevi intervalli di tempo, i cui effetti sulle prestazioni del sistema sono intermedi fra i casi limite di GPS sempre attivo o sempre disattivo.

La disattivazione del GPS è stata realizzata facendo in modo che i dati di posizione rimangano congelati al valore dell'ultimo istante di funzionamento. Se la simulazione inizia con GPS disattivo, la posizione fornita dal blocco del GPS viene fatta coincidere con la posizione iniziale del velivolo. In questo modo, nelle simulazioni, la posizione indicata dal GPS può essere sempre usata come dato di ingresso del *World Magnetic Model*, anche nel caso di GPS disattivo fin dall'avvio del sistema, mentre in condizioni reali, in questa situazione, dovrebbe essere l'utente ad inserire manualmente la posizione di partenza.

5.4 Compensazione dei sensori inerziali

La compensazione consiste nell'applicare delle leggi di elaborazione alle misure dei sensori per ridurre una parte degli errori di cui sono affette. Ci sono sensori sul mercato che comprendono questa funzione e forniscono delle misure già compensate, ma in questo lavoro si assume che le misure non siano state soggette ad alcuna pre-elaborazione.

In Figura 5.3 è rappresentato il blocco *IMU Compensation*. Gli ingessi del blocco sono le misure inerziali effettuate dall'IMU, la misura della temperatura interna all'IMU proveniente dal termometro di cui essa è dotata, le stime degli errori di *Bias* dei giroscopi provenienti dal filtro di Kalman e la variabile di controllo *qrst* che comanda l'esecuzione della funzione di *Reset* dell'assetto. Le uscite del blocco sono le misure inerziali compensate, che costituiscono i valori più attendibili a disposizione di tali grandezze e per questo sono indicate col simbolo '^', a rappresentare la loro stima.

Il blocco *IMU Compensation* svolge due funzioni:

- la compensazione dei principali errori di misura
- la memorizzazione e l'aggiornamento degli errori di *Bias*

La compensazione dei sensori inerziali riguarda i principali termini di errore costituiti dagli effetti della temperatura, dal *Constant Bias* e, per i giroscopi, dall'errore residuo di *Bias* stimato dal filtro. La legge di compensazione applicata alla misura del generico giroscopio *i* è la seguente:

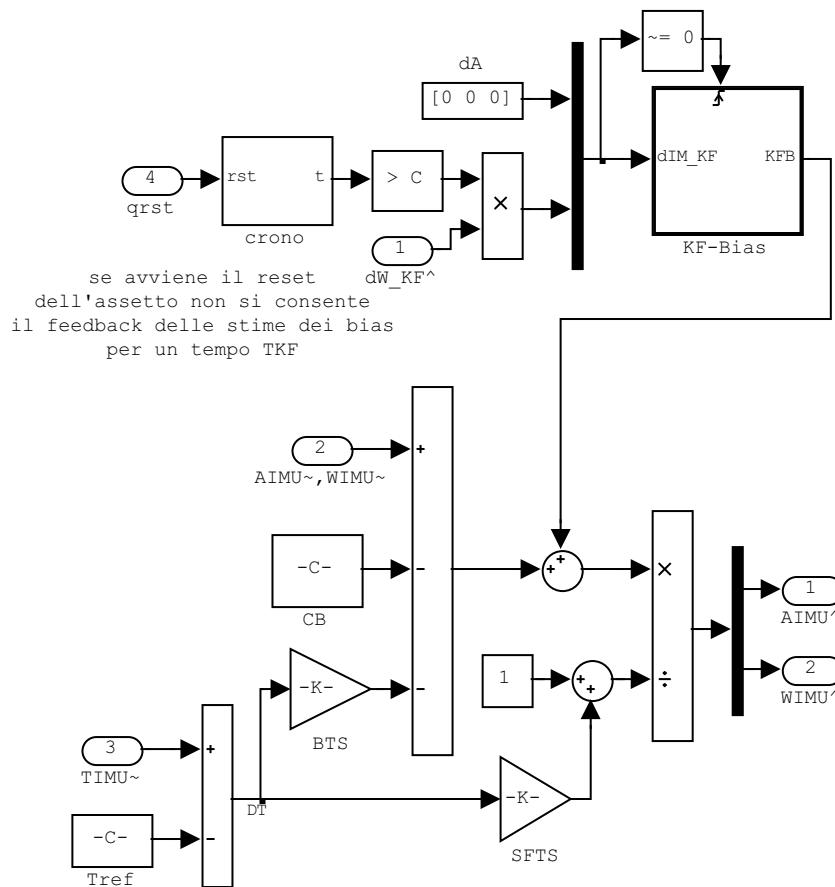


Figura 5.3 Blocco *IMU Compensation*.

$$\hat{\omega}_i^{IMU} = \frac{\tilde{\omega}_i^{IMU} + KFB_i - CB_i - BTS_i \cdot \Delta T}{1 + SFTS_i \cdot \Delta T} \quad (5.48)$$

Il termine KFB_i rappresenta la più recente stima dell'errore di *Bias* del giroscopio i , o in altri termini è la soluzione di riferimento rappresentata dalla (5.46). Sommando KFB_i alla misura $\tilde{\omega}_i^{IMU}$ del giroscopio si esegue l'operazione indicata dalla (5.47).

Il blocco *KF-Bias*, rappresentato in Figura 5.4, è quello che memorizza le stime dei *Bias* dei giroscopi e le aggiorna ogni volta che il filtro invia in feedback dei valori correttivi, compiendo l'operazione di aggiornamento della stima (5.41). Esso è realizzato mediante un *Triggered Subsystem* che viene eseguito una sola volta per ogni transizione della linea di feedback da zero ad un valore $d\omega_{KF}^+$ non nullo, quindi, per il tempo restante, mantiene sulla sua uscita l'ultimo valore calcolato, KFB . Il blocco del filtro è realizzato per inviare il feedback per la durata di un passo di simulazione e poi riportare il valore della linea a zero, in questo modo il segnale di feedback viene usato anche per sincronizzare la comunicazione fra i vari blocchi.

I termini $d\omega_{KF}^+$ e KFB sono quantità vettoriali costituite da tre valori, uno per ogni giroscopio. Se ad un certo momento l'esecuzione del filtro dovesse essere interrotta, questa soluzione per effettuare la memorizzazione e l'aggiornamento delle stime dei *Bias* consente di continuare a compensare gli errori con le stime più recenti disponibili.

Il blocco *crono* e l'ingresso *qrst* di Figura 5.3 servono ad evitare che avvenga l'aggiornamento delle stime dei *Bias* all'esecuzione del filtro di Kalman successiva ad un *Reset* dell'assetto. Quando si effettua il *Reset* si interferisce con il naturale funzionamento del filtro, in particolar modo si va ad influire sui residui dell'assetto calcolati dal blocco *QUATres* di Figura 5.2 che costituiscono le misure del filtro, condizionando le stime degli errori calcolate in tale occasione. Cautelativamente, in questa circostanza, si preferisce ignorare il feedback degli errori, realizzando tale controllo come segue. All'invio del comando di *Reset* dell'assetto viene resettato anche il blocco *crono*, il quale è un cronometro che misura il

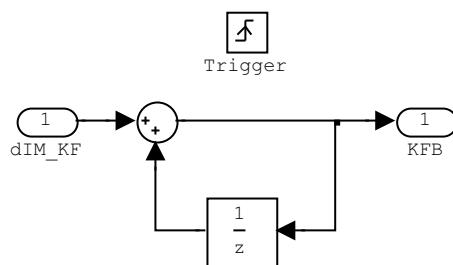


Figura 5.4 Blocco *KF-Bias*

tempo trascorso dall'ultimo *Reset*. Per un tempo pari a TKF , che rappresenta l'intervallo di tempo nominale fra le esecuzioni del filtro di Kalman, sulla linea di feedback degli errori di *Bias* viene forzato un segnale nullo, impedendo l'esecuzione del blocco *KF-Bias*, come desiderato.

5.5 Calcolo dell'assetto

Il calcolo dell’assetto viene effettuato dal blocco *Attitude Heading Calculation* di Figura 5.2. La funzione principale del blocco è quella di integrare le velocità angolari misurate dai giroscopi per descrivere l’evoluzione nel tempo degli angoli di assetto del velivolo con elevata frequenza di aggiornamento. Tale risultato costituisce l’uscita del sistema AHRS ed in termini di implementazione del filtro di Kalman Esteso rappresenta il calcolo della soluzione di riferimento (5.42) con gli ingressi (5.47).

In Figura 5.5 è rappresentato lo schema del blocco *Attitude Heading Calculation*. Gli ingressi sono le velocità angolari del velivolo rispetto agli Assi Verticali Locali espresse in Assi Corpo, la stima dell'errore dell'assetto effettuata dal filtro di Kalman e la variabile di controllo che comanda l'esecuzione del *Reset* dell'assetto. Le uscite del blocco sono l'evoluzione nel tempo dell'assetto espresso in termini di quaternione e di angoli di Eulero.

Internamente al sistema l'assetto viene descritto mediante i quaternioni mentre l'uscita dell'AHRS viene fornita mediante gli Angoli di Eulero, ottenuti dalle componenti del quaternione mediante le relazioni del paragrafo 2.3.3.

L'evoluzione nel tempo dell'assetto si calcola integrando le equazioni differenziali non lineari (2.27), che per comodità vengono qui ripetute:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{q}} \underline{\boldsymbol{\omega}} + \varepsilon \underline{\mathbf{q}} \quad (5.49)$$

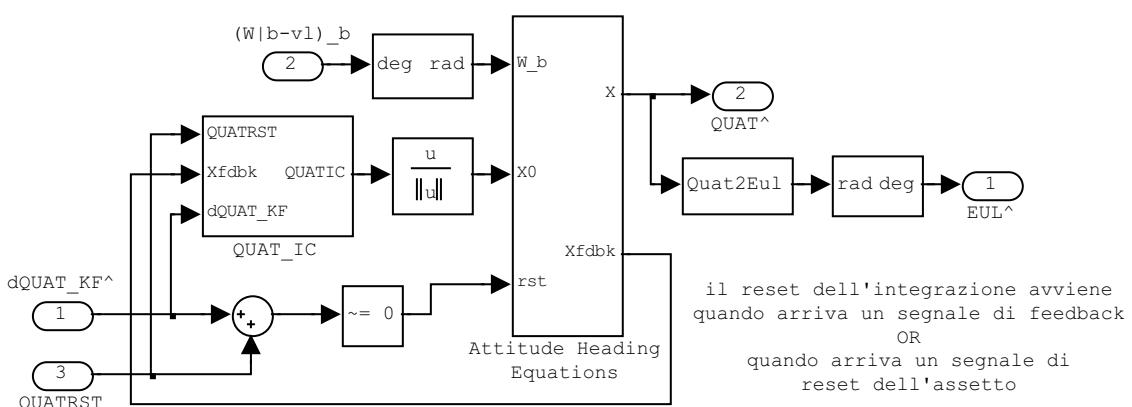


Figura 5.5 Blocco Attitude Heading Calculation.

dove $\varepsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$, $\underline{\omega} = \mathbf{0} + p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = [p \quad q \quad r]^T$. In Figura 5.5 l'integrazione delle equazioni avviene nel blocco *Attitude Heading Equations*.

Le velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ richieste nelle precedenti equazioni sono quelle del velivolo rispetto agli Assi Verticali Locali, espresse in Assi Corpo. I giroscopi misurano le velocità angolari rispetto ad un riferimento inerziale, quindi è:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{B-VL}}^B + \boldsymbol{\omega}_{\text{VL-E}}^B + \boldsymbol{\omega}_e^B + \boldsymbol{\delta\omega}_{\text{IMU}} \quad (5.50)$$

$\boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}}$	velocità angolari misurate dai giroscopi dell'IMU
$\boldsymbol{\omega}_{\text{B-VL}}^B$	velocità angolare degli Assi Corpo rispetto agli Assi Verticali Locali, in Assi Corpo
$\boldsymbol{\omega}_{\text{VL-E}}^B$	velocità angolare degli Assi Verticali Locali rispetto agli Assi Terrestri, in Assi Corpo
$\boldsymbol{\omega}_e^B$	velocità angolare degli Assi Terrestri rispetto agli Assi Inerziali, in Assi Corpo
$\boldsymbol{\delta\omega}_{\text{IMU}}$	Errori di misura

Il termine $\boldsymbol{\omega}_{\text{VL-E}}^B$, dovuto al moto del velivolo intorno alla terra, ed il termine $\boldsymbol{\omega}_e^B$, dovuto alla rotazione terrestre, sono generalmente piccoli rispetto a $\boldsymbol{\omega}_{\text{B-VL}}^B$ e soprattutto, nel caso di giroscopi di qualità non elevata come quelli attualmente considerati, sono paragonabili agli errori di misura $\boldsymbol{\delta\omega}_{\text{IMU}}$. In queste condizioni è giustificabile fare l'approssimazione di Terra piana e non ruotante trascurando la quantità $\boldsymbol{\omega}_{\text{VL-E}}^B + \boldsymbol{\omega}_e^B$ nella (5.50), assumendo quindi che le misure dei giroscopi siano fatte rispetto agli Assi Verticali Locali:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{B-VL}}^B + \boldsymbol{\delta\omega}_{\text{IMU}} \quad (5.51)$$

Da questa assunzione vengono poste in ingresso al blocco *Attitude Heading Calculation* le misure compensate dei giroscopi, come si vede in Figura 5.2.

La condizione iniziale per l'integrazione della (5.49) all'avvio del sistema è assegnata dalla procedura di Allineamento, descritta più avanti. A causa di vari errori fra cui l'incertezza della condizione iniziale, ma soprattutto per gli errori di misura $\boldsymbol{\delta\omega}_{\text{IMU}}$ della velocità angolare, il calcolo dell'assetto presenta degli errori crescenti nel tempo che vengono corretti e limitati mediante l'uso del filtro di Kalman e dalle informazioni sull'assetto provenienti dalle altre fonti di misura del sistema.

Dal punto di vista dell'esecuzione dei calcoli, l'integrazione numerica viene effettuata con un passo pari al periodo di campionamento dei segnali dei giroscopi, che in questo caso vale un centesimo di secondo.

Quando, ad un certo istante, il filtro di Kalman invia una stima degli errori sulla linea di feedback o viene effettuato il *Reset* dell'assetto, bisogna aggiornare opportunamente il quaternione nell'integrazione della (5.49) in modo che le correzioni abbiano effetto dall'istante dell'aggiornamento in poi. Nel sistema Simulink questo viene realizzato facendo ripartire l'integrazione da nuove condizioni iniziali. Nel primo caso si tratta di eseguire l'aggiornamento della stima dell'assetto indicato dalla (5.40) e riprendere l'integrazione della (5.42). Nel caso venga eseguito il *Reset* dell'assetto, l'integrazione deve ripartire da:

$$\underline{\mathbf{q}}(t_R) = \underline{\mathbf{q}}_R(t_R) \quad (5.52)$$

dove $\underline{\mathbf{q}}_R(t_R)$ rappresenta l'assetto a cui resettare il sistema all'istante t_R di Reset. La tecnica con cui si gestisce la ripartenza dell'integrazione, in entrambi i casi di feedback e di Reset, è la stessa con cui avviene il feedback nel blocco di compensazione dei sensori inerziali, dove il segnale stesso gestisce la sincronizzazione delle operazioni.

Il blocco *QUAT_IC* di Figura 5.5 assegna la dovuta condizione iniziale fra la (5.40) o la (5.52) per far ripartire l'integrazione, dando la priorità alla funzione di *Reset* nel caso in cui essa venga eseguita in coincidenza di un feedback degli errori di assetto. Analogamente al caso della compensazione dei sensori, dopo un *Reset* dell'assetto si ignora cautelativamente il successivo feedback degli errori stimati dal filtro di Kalman, implementando le necessarie operazioni all'interno di questo blocco.

5.6 Riferimento Verticale

Il Riferimento Verticale è una delle due direzioni da determinare in Assi Corpo per risalire all'assetto del velivolo in modo indipendente dall'integrazione delle velocità angolari, per fornire le misure dell'assetto da elaborare mediante il filtro di Kalman. Come Riferimento Verticale si assume l'accelerazione di gravità \mathbf{g} , la cui determinazione presenta delle difficoltà che richiedono di fare delle approssimazioni con la conseguente introduzione di errori.

Per determinare \mathbf{g} in Assi Corpo ci si basa sulle misure degli accelerometri dell'IMU, che sono sensibili alle accelerazioni \mathbf{a}^B del velivolo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale ed all'accelerazione di gravità nel seguente modo:

$$\mathbf{a}_{\text{IMU}} = \mathbf{a}^B - \mathbf{g}^B + \boldsymbol{\delta}\mathbf{a}_{\text{IMU}} \quad (5.53)$$

dove $\boldsymbol{\delta}\mathbf{a}_{\text{IMU}}$ rappresenta gli errori di misura. In condizioni di accelerazioni \mathbf{a}^B trascurabili, corrispondenti ad un moto approssimativamente rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento inerziale, l'accelerazione di gravità in Assi Corpo è ben rappresentata dalle misure degli accelerometri. In condizioni di manovra del velivolo, invece, se si assume come Riferimento Verticale la misura degli accelerometri si commette un errore che dipende dall'intensità della manovra attraverso l'accelerazione \mathbf{a}^B . Un modo per limitare tale errore è quello di stimare le accelerazioni dovute al moto del velivolo e rimuoverle dalle misure degli accelerometri. La stima delle accelerazioni viene compiuta mediante le misure della velocità di volo e delle velocità angolari, nel modo descritto più avanti.

Ci sono delle situazioni durante il funzionamento dell'AHRS in cui si assume come Riferimento Verticale la sola misura degli accelerometri, ovvero:

$$\hat{\mathbf{g}}^B = -\mathbf{a}_{\text{IMU}} \quad (5.54)$$

Tali situazioni sono:

- GPS disattivo;
- Fase di Allineamento;
- *Reset* dell'assetto.

Nel primo caso l'assunzione è obbligata perché manca la misura della velocità con cui effettuare la stima dell'accelerazione del velivolo. Negli altri due casi la scelta è stata fatta per ragioni di affidabilità della procedura. La fase di Allineamento deve essere eseguita a velivolo immobile o comunque soggetto ad accelerazioni trascurabili, mentre il *Reset* dell'assetto può essere compiuto solo quando viene rilevata una condizione di moto approssimativamente rettilineo uniforme. In entrambi i casi le accelerazioni del velivolo \mathbf{a}^B sono trascurabili e si può omettere la loro stima nella (5.53), evitando così di introdurre qualsiasi errore legato alla stima stessa.

Nel caso di GPS attivo si calcola la stima dell'accelerazione del velivolo, $\hat{\mathbf{a}}^B$, e come Riferimento Verticale si assume:

$$\hat{\mathbf{g}}^B = \hat{\mathbf{a}}^B - \mathbf{a}_{\text{IMU}} \quad (5.55)$$

La determinazione del Riferimento Verticale viene effettuata dal blocco *Vertical Reference*, rappresentato in Figura 5.6. Gli ingressi sono le misure compensate dell'IMU, la

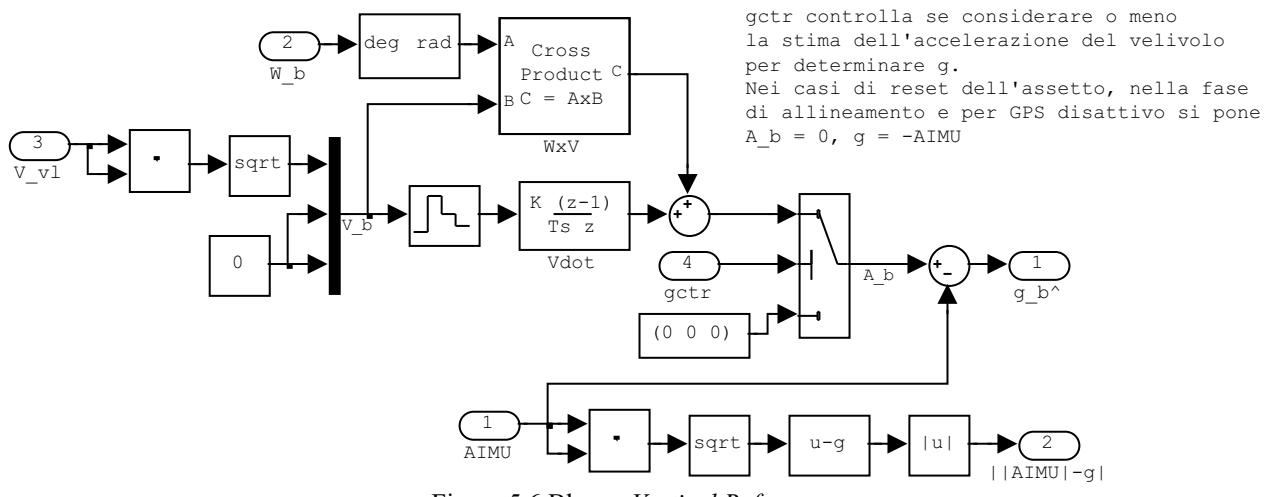


Figura 5.6 Blocco Vertical Reference.

velocità misurata dal GPS e la variabile di controllo $gctr$ che fa includere o meno la stima dell'accelerazione del velivolo $\hat{\mathbf{a}}^b$ nella determinazione di \mathbf{g} . Le uscite sono l'accelerazione di gravità stimata in Assi Corpo e la quantità $\|\mathbf{a}_{IMU} - g\|$.

5.6.1 Stima dell'accelerazione del velivolo

L'accelerazione del velivolo rispetto ad un riferimento inerziale, espressa in Assi Verticali Locali, è data da:

$$\mathbf{a}^{VL} = \dot{\mathbf{v}}^{VL} + \boldsymbol{\omega}_{VL-E}^{VL} \wedge \mathbf{v}^{VL} + 2\boldsymbol{\omega}_e^{VL} \wedge \mathbf{v}^{VL} + \boldsymbol{\omega}_e^{VL} \wedge \boldsymbol{\omega}_e^{VL} \wedge \mathbf{r}_{VL-E}^{VL} \quad (5.56)$$

\mathbf{v}^{VL}	velocità del velivolo rispetto agli Assi Terrestri
$\boldsymbol{\omega}_{VL-E}^{VL}$	velocità angolare degli Assi Verticali Locali rispetto agli Assi Terrestri
$\boldsymbol{\omega}_e^{VL}$	velocità angolare degli Assi Terrestri rispetto ad un riferimento inerziale
\mathbf{r}_{VL-E}^{VL}	vettore posizione degli Assi Verticali Locali (quindi del velivolo) rispetto agli Assi Terrestri

dove tutti i vettori sono espressi in Assi Verticali Locali. Facendo l'approssimazione di Terra piana e non ruotante, di impatto trascurabile rispetto alle approssimazioni che vengono successivamente introdotte, l'espressione dell'accelerazione diventa semplicemente:

$$\mathbf{a}^{VL} = \dot{\mathbf{v}}^{VL} \quad (5.57)$$

Nelle stesse condizioni l'espressione dell'accelerazione in Assi Corpo, con simbologia analoga al caso precedente, è data da:

$$\mathbf{a}^B = \dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B-E}}^B \wedge \mathbf{v}^B \quad (5.58)$$

Per la stima dell'accelerazione emergono dei problemi. Si fa notare che nella (5.53) l'accelerazione va espressa in Assi Corpo e che il GPS fornisce le velocità rispetto agli Assi Terrestri espressa in Assi Verticali Locali. Un possibile approccio è quello di applicare la (5.57) alle velocità del GPS, per poi ruotare il vettore accelerazione sulla Terna Assi Corpo sulla base degli angoli di assetto stimati dall'AHRS: dovendo però usare, nel filtro di Kalman, il Riferimento Verticale per correggere gli errori dell'assetto calcolato, si viene a creare una forte correlazione fra gli errori delle variabili da stimare e gli errori delle misure, portando facilmente alla divergenza la stima degli errori. Un altro possibile approccio è quello di ruotare la velocità del GPS in Assi Corpo ed applicare quindi la (5.58), con le velocità angolari fornite dai giroscopi secondo l'assunzione (5.51) ed osservando che $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{VL-E}}$ è nulla nell'ipotesi di Terra piana: anche in questo caso si deve far uso degli angoli di assetto stimati dall'AHRS, incappando nello stesso tipo di problema del caso precedente.

I principali termini di accelerazione che pregiudicano la determinazione del Riferimento Verticale dalla sola misura degli accelerometri sono l'accelerazione longitudinale dovuta alla variazione di velocità di volo e l'accelerazione centripeta che si genera durante la virata [10]. Sulla base di questo si assume che la velocità misurata dal GPS sia sempre e soltanto lungo l'asse longitudinale del velivolo, $\mathbf{v}^B = u\mathbf{i}$, con componenti v e w identicamente nulle. In tal modo, quando si applica la (5.58), si mettono in conto i termini di accelerazione appena detti e non c'è correlazione fra il Riferimento Verticale e gli angoli di assetto calcolati. Gli errori introdotti così facendo dipendono in particolare dall'aver trascurato la componente di velocità w . Sviluppando la (5.58) con $\mathbf{v}^B = u \cdot \mathbf{i}$ si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^B &= (\dot{u} + q\dot{w} - r\dot{v})\mathbf{i} + (\dot{r} - p\dot{w} + ur)\mathbf{j} (\dot{w} + p\dot{v} - uq)\mathbf{k} = \\ &= i\mathbf{i} + ur\mathbf{j} - uq\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.59)$$

In Figura 5.7, Figura 5.8 e Figura 5.9 sono riportati degli esempi di errori di stima dei termini di accelerazione $\dot{\mathbf{v}}^B$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{B-E}}^B \wedge \mathbf{v}^B$ e dell'accelerazione complessiva \mathbf{a}^B , ottenuti applicando questo metodo di stima dell'accelerazione ai dati della Sequenza di Sviluppo.

Assumere la componente di velocità longitudinale del velivolo pari al modulo della misura del GPS costituisce una buona approssimazione, ma nonostante ciò in Figura 5.7 si vede che l'errore di determinazione di \dot{u} non è trascurabile. La causa di questo errore risiede nell'operazione di derivazione discreta della velocità, rappresentata dal blocco *Vdot* di Figura 5.6, per via di come sono stati modellati gli errori di misura della velocità del GPS (paragrafo

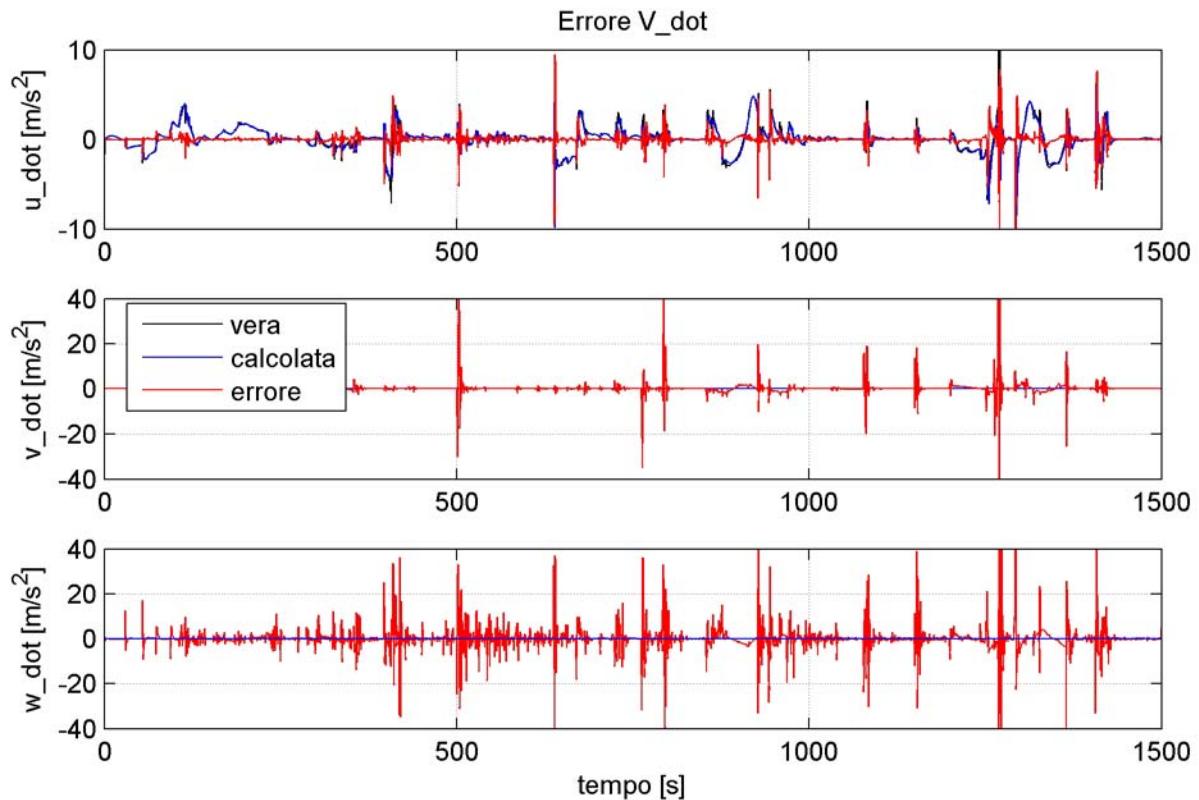
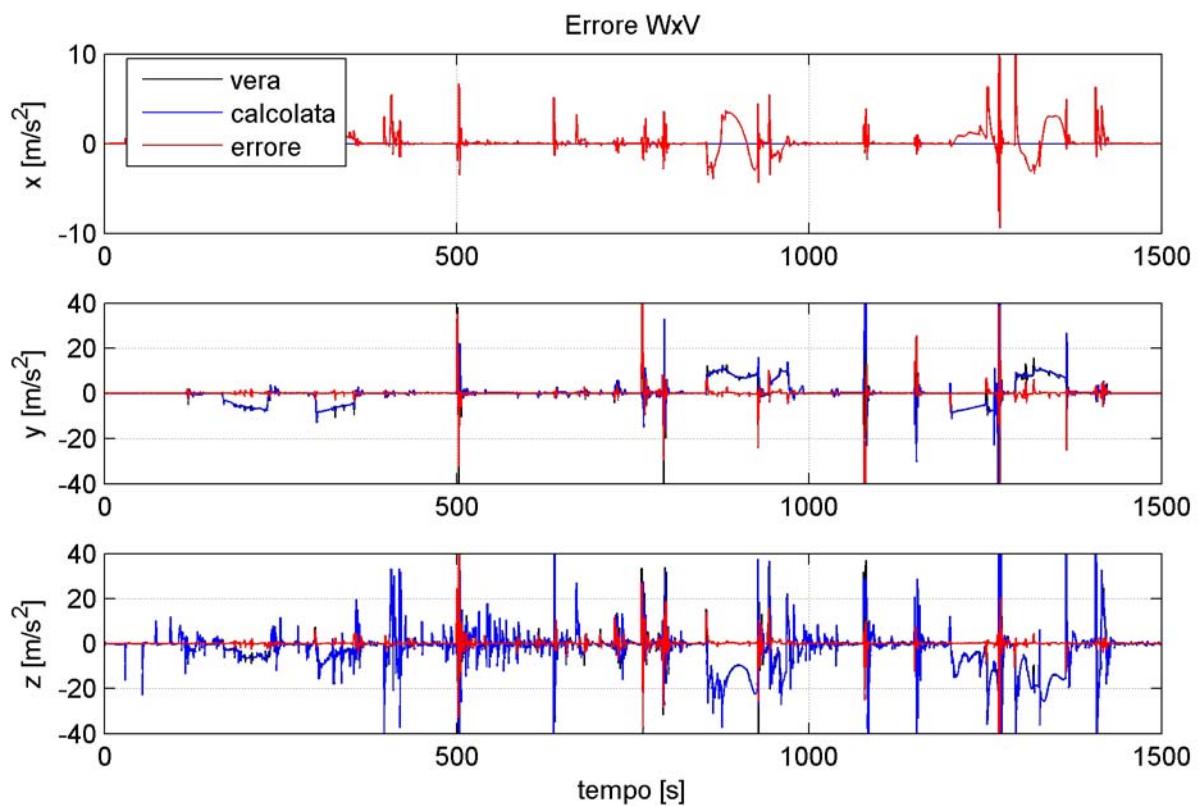
3.3.6). Tali errori sono stati definiti proporzionali alle accelerazioni del velivolo e per questo, ad una rapida variazione di accelerazione, come ad esempio all'inizio o alla fine di una manovra, corrisponde un'altrettanto rapida variazione di errore di velocità, che nell'operazione di derivazione dà luogo a contributi errati di \dot{u} . Questo problema si manifesta con il massimo peso quando l'intervallo di tempo Δt della derivata discreta è dell'ordine dei tempi con cui variano le forze agenti sul velivolo, fermo restando che Δt non può essere inferiore al tempo di aggiornamento delle misure del GPS. Aumentando il valore di Δt questo tipo di errore si riduce ma se ne presenta un altro, dovuto al fatto che all'interno di Δt la derivata della velocità ad ogni istante si approssima col suo valor medio e si possono commettere errori importanti. Nelle simulazioni attuali il GPS ha una frequenza di aggiornamento della misura della velocità pari a 4 Hz. L'intervallo di tempo di derivazione discreta è stato fissato a $\Delta t = 1s$, che è sembrato un valore di buon compromesso per limitare gli errori di \dot{u} .

Tornando alla Figura 5.7, relativamente alla manovra di riferimento considerata, si vede che gli errori più importanti si hanno nella \dot{w} , che comunque sono poco influenti ai fini della determinazione dell'assetto del velivolo quando si impiega il metodo di Gauss-Newton, come viene mostrato al prossimo paragrafo.

In Figura 5.8 si osservino gli errori nel termine di accelerazione lungo l'asse longitudinale del velivolo: essi sono dovuti principalmente alla mancanza del termine qw nella (5.59), avendo posto identicamente $w=0$. Gli errori lungo gli assi y e z degli Assi Corpo risultano mediamente abbastanza limitati, questo perché i termini più importanti del prodotto vettoriale, quelli che coinvolgono u , sono ben approssimati.

In Figura 5.9 si possono valutare gli errori complessivi di stima dell'accelerazione del velivolo.

In Figura 5.10 sono messi a confronto gli errori di determinazione dell'accelerazione di gravità nei casi di GPS attivo e disattivo, che corrispondono alle situazioni di considerare o meno la stima dell'accelerazione del velivolo. Gli errori per GPS attivo, lo si può dedurre dalle (5.53) e (5.55), sono esattamente gli stessi della determinazione dell'accelerazione di gravità a meno degli errori di misura degli accelerometri, che in tal caso risultano trascurabili. Prendendo in esame le componenti di errore lungo x ed y , importanti per la determinazione dell'assetto, si osserva che gli errori lungo x non presentano nette differenze mentre l'errore lungo y nel caso di GPS attivo, nelle virate, è decisamente minore che nell'altro caso.

Figura 5.7 Errore di stima di $\dot{\mathbf{V}}^B$.Figura 5.8 Errore di stima di $\omega_{\mathbf{B}-\mathbf{E}}^B \wedge \mathbf{V}^B$.

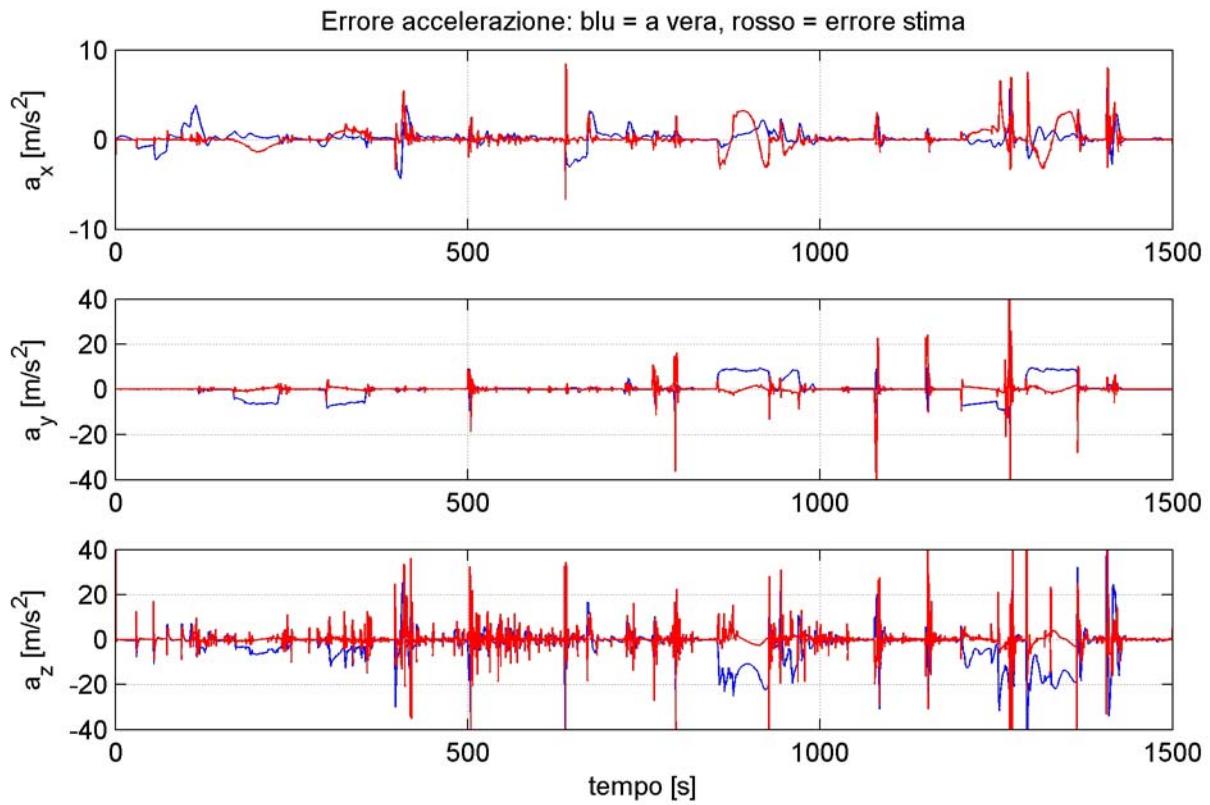


Figura 5.9 Errore complessivo di stima dell'accelerazione.

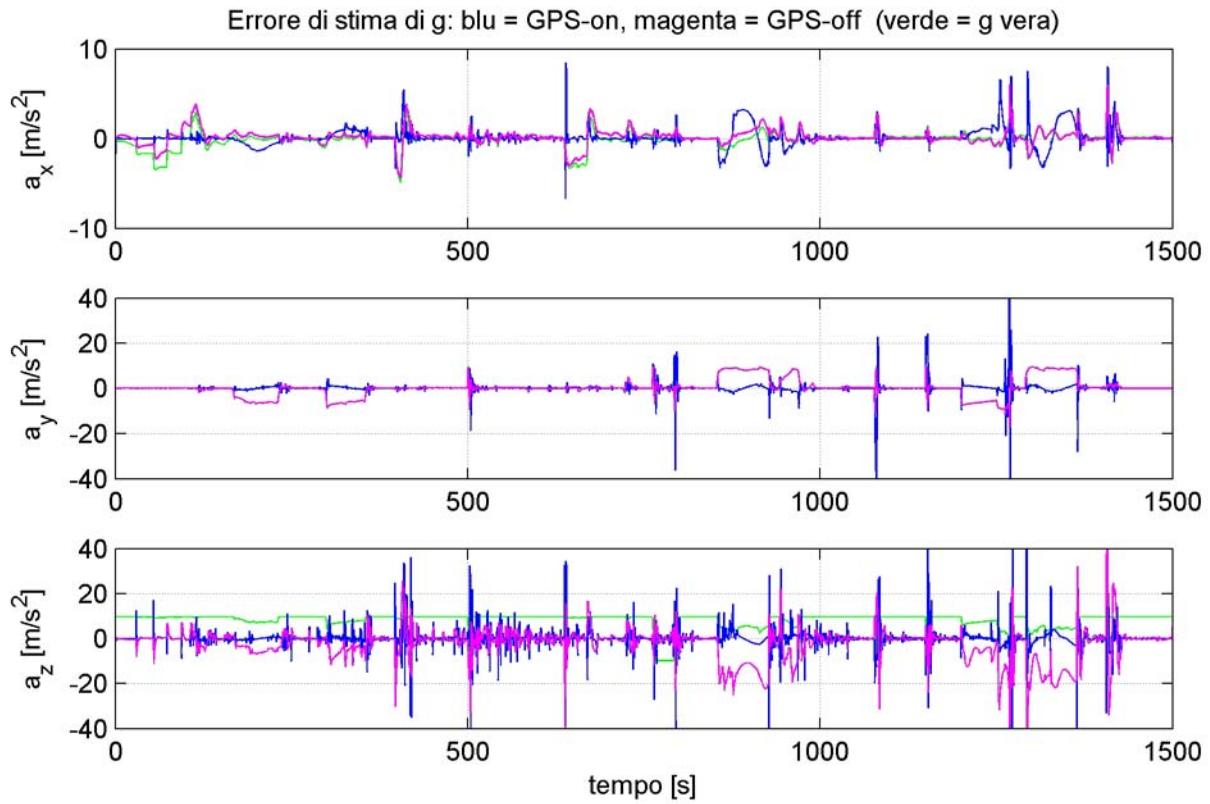


Figura 5.10 Confronto degli errori di stima dell'accelerazione di gravità nei casi di GPS attivo e disattivo.

5.7 Misura dell'assetto

Per “misura” dell’assetto si intende la sua determinazione applicando un metodo indipendente dall’integrazione delle velocità angolari, ottenendo dei valori da fornire al filtro di Kalman in qualità di “misure”, la cui elaborazione consente di correggere le stime degli stati del sistema.

Al paragrafo precedente si è visto come stimare il vettore gravità in Assi Corpo, $\hat{\mathbf{g}}^B$, mediante le misure degli accelerometri, la velocità del GPS e le misure dei giroscopi. I magnetometri consentono di misurare direttamente il vettore campo magnetico terrestre in Assi Corpo, $\tilde{\mathbf{B}}_e^B$. Se questi due vettori sono noti anche in Assi Verticali Locali è possibile risalire all’orientamento degli Assi Corpo rispetto agli Assi Verticali Locali stessi, cioè all’assetto del velivolo. Il vettore gravità in Assi Verticali Locali è per definizione allineato con l’asse Z della terna, $\mathbf{g}^{VL} = [0 \ 0 \ g]^T$. Il campo magnetico terrestre in Assi Verticali Locali, \mathbf{B}_e^{VL} , si può stimare in ogni punto della Terra mediante il *World Magnetic Model (WMM)*, i cui dati di input, posizione e data, sono forniti dal ricevitore GPS. Gli elementi per determinare l’assetto sono quindi tutti disponibili.

La misura dell’assetto viene compiuta dal blocco *Attitude Heading Measurement*, il cui schema è rappresentato in Figura 5.11. Gli ingressi sono la stima dell’accelerazione di gravità in Assi Corpo, le misure dei magnetometri, la posizione fornita dal GPS per dare l’input al *WMM*, l’assetto indicato dall’AHRS in termini di quaternione per disporre di una stima dell’assetto e due variabili di controllo, $GNenb$ e $MSenb$, che attivano gli *Enabled Subsystems* interni. Le uscite sono l’assetto misurato espresso in termini di quaternione e di angoli di Eulero.

L’assetto viene determinato selettivamente da uno dei due blocchi *Gauss-Newton* o *Master-Slave*, i quali applicano metodi differenti che vengono descritti di seguito. Nella trattazione vengono anche spiegate le ragioni della scelta di applicare due metodi.

5.7.1 Metodo di Gauss-Newton

La determinazione dell’assetto mediante il metodo di Gauss-Newton si basa sulla risoluzione di un problema ai minimi quadrati mediante l’algoritmo iterativo di Gauss-Newton. Un esempio di applicazione di questo metodo è riportato in [9], con dettagli diversi rispetto a quanto fatto in questo lavoro.

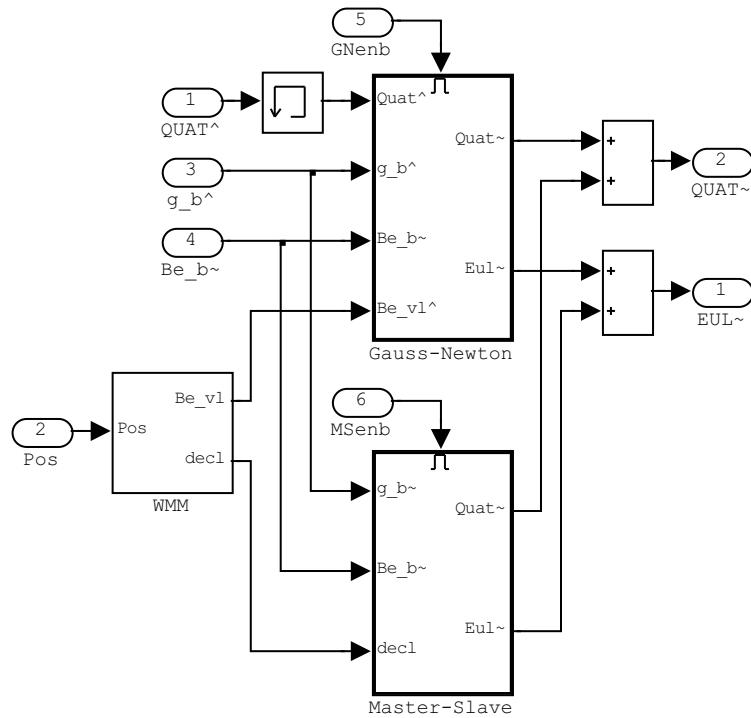


Figura 5.11 Blocco Attitude Heading Measurement.

Il problema si impone ponendo l'obiettivo di determinare la migliore matrice di trasformazione dagli Assi Corpo agli Assi Verticali Locali basandosi sulle misure, affette da errore, del vettore gravità e del campo magnetico terrestre in Assi Corpo, e sulla conoscenza di tali vettori in Assi Verticali Locali. Una volta determinata tale matrice, dalle sue componenti si ricavano gli angoli di assetto. Se in Assi Corpo si conoscessero con esattezza sia il vettore gravità che il campo magnetico terrestre, posto che anche la loro rappresentazione in Assi Verticali Locali fosse priva di errori, la matrice di rotazione che trasforma esattamente un vettore fra le due terne trasforma esattamente anche l'altro. Le grandezze note in Assi Corpo sono invece affette da errore, come lo è la stima del campo magnetico terrestre in Assi Verticali Locali, e le matrici di rotazione che trasformano esattamente ciascun vettore fra le due terne non coincidono fra loro: si cerca allora la matrice di trasformazione di miglior compromesso per la quale sia minima la somma dei quadrati degli errori calcolati fra i vettori noti in Assi Verticali Locali ed i rispettivi ruotati con tale matrice dagli Assi Corpo.

In [9] la funzione di errore che definisce il problema viene formulata in Assi Verticali Locali e fa uso di tutte le componenti del vettore gravità e del vettore campo magnetico. In questo lavoro il problema è stato impostato in Assi Corpo per poter escludere dal calcolo la componente g_z della stima del vettore gravità, che come visto al paragrafo 5.6.1 presenta errori importanti. La stima di g_z , purtroppo, può essere affetta da errori tali da invertirne il

segno, con una conseguente introduzione di importanti errori negli angoli di rollio e di imbardata. Questo problema è inevitabile quando si applica il metodo Master-Slave, descritto più avanti, in quanto la stima di g_z è fondamentale nella determinazione dell'angolo di rollio.

Per i dettagli sugli effetti dell'errore di stima di g_z si rimanda alla seconda parte del paragrafo successivo, dove vengono riportati e commentati i risultati di determinazione dell'assetto mediante i due metodi.

Di seguito viene presentata la formulazione analitica del problema.

Sia E la funzione di errore definita come:

$$E = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{M} \mathbf{y}_{vl} - \mathbf{y}_b)^T (\mathbf{M} \mathbf{y}_{vl} - \mathbf{y}_b) \quad (5.60)$$

dove \mathbf{y}_{vl} è il vettore di sei elementi costituito dai vettori noti dell'accelerazione di gravità e del campo magnetico in Assi Verticali Locali, mentre \mathbf{y}_b è il vettore di cinque elementi composto dalle componenti x ed y della stima del vettore gravità in Assi Corpo e dalla misura dei magnetometri, sempre in Assi Corpo:

$$\mathbf{y}_{vl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ B_{eN} \\ B_{eE} \\ B_{eD} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_b = \begin{bmatrix} \hat{g}_x \\ \hat{g}_y \\ \tilde{B}_{ex} \\ \tilde{B}_{ey} \\ \tilde{B}_{ez} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

La matrice \mathbf{M} , di dimensioni (5x6), trasforma il vettore \mathbf{y}_{vl} dagli Assi Verticali Locali agli Assi Corpo ed è così costituita:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{VL2B}([1,2],:) & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{VL2B} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

dove \mathbf{R}_{VL2B} è la matrice di trasformazione (2.20) da Assi Verticali Locali ad Assi Corpo per i vettori, espressa in termini di quaternione. La notazione $\mathbf{R}_{VL2B}([1,2],:)$ sta ad indicare le prime due righe e tutte le colonne della matrice.

Nella funzione di errore E , le variabili sono le componenti del quaternione che compaiono nella matrice \mathbf{M} . Minimizzando la funzione di errore si determina il quaternione che descrive l'assetto. L'espressione da calcolare iterativamente, che costituisce il metodo di Gauss-Newton, è la seguente:

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k - [\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{q}}_k) \mathbf{J}(\hat{\mathbf{q}}_k)]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{q}}_k) \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{q}}_k) \quad (5.63)$$

dove $\hat{\mathbf{q}}_k$ è la stima del quaternione al passo k e \mathbf{J} è la matrice Jacobiana definita come:

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{q}}_k) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\hat{\mathbf{q}}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_0} \Big|_{\hat{\mathbf{q}}_k} \mathbf{y}_{vl} & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \Big|_{\hat{\mathbf{q}}_k} \mathbf{y}_{vl} & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2} \Big|_{\hat{\mathbf{q}}_k} \mathbf{y}_{vl} & \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_3} \Big|_{\hat{\mathbf{q}}_k} \mathbf{y}_{vl} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Il primo passo dell'iterazione va eseguito con un valore iniziale $\hat{\mathbf{q}}_0$ che è bene che sia vicino alla soluzione del problema, quindi si prende il valore fornito in uscita dall'AHRS. Le iterazioni vengono interrotte quando i residui delle componenti dei quaternioni di due passi consecutivi sono inferiori ad una certa soglia, che in questo lavoro è stata impostata a 0.01. Dati gli errori nelle componenti di \mathbf{y}_b , non si può fissare un valore di soglia inferiore perché la soluzione oscillerebbe indefiniteamente intorno al valore di convergenza con residui sempre più alti della soglia impostata.

In Figura 5.12 è rappresentato il cuore del blocco *Gauss-Newton*, la parte che implementa il calcolo ricorsivo dell'espressione (5.63) mediante un ciclo *while*. Si può osservare che nell'aggiornamento della stima del quaternione è stato introdotto un coefficiente di rilassamento pari a 0.5 per ridurre l'insorgenza di problemi come la convergenza del metodo ad una soluzione non corretta.

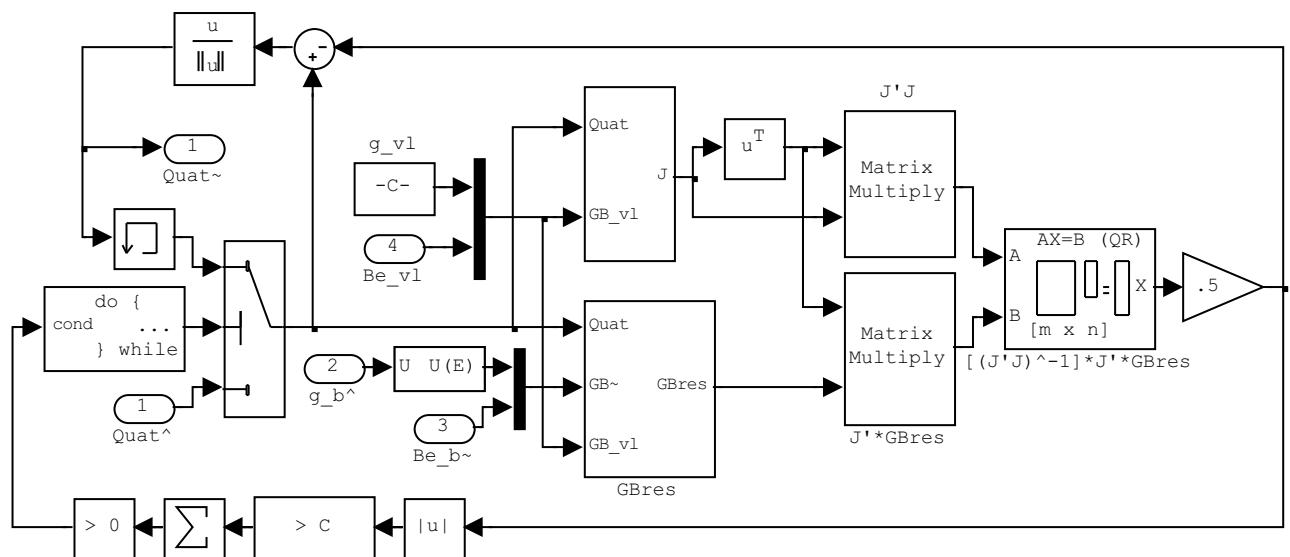


Figura 5.12 Parte fondamentale del blocco *Gauss-Newton*.

5.7.2 Metodo Master-Slave

Il metodo Master-Slave è stato così chiamato per via della priorità data alla stima dell'accelerazione di gravità rispetto alla misura del campo magnetico nel determinare l'assetto del velivolo. Dalla stima del vettore gravità vengono determinati gli angoli di beccheggio e di rollio, indipendentemente dalla misura del campo magnetico, per cui si può dire che il vettore $\hat{\mathbf{g}}^B$ sia il *Master*. Successivamente, sulla base degli angoli di assetto appena determinati, si impiega la misura del campo magnetico per determinare l'angolo di prua, per cui si può dire che $\tilde{\mathbf{B}}_e^B$ sia lo *Slave*. In Figura 5.13 è rappresentato lo schema del blocco in cui è implementato questo metodo.

Gli angoli di beccheggio e rollio vengono determinati nel modo seguente. Le relazioni che legano le componenti del vettore gravità in Assi Corpo agli angoli di Eulero sono:

$$\hat{\mathbf{g}}^B = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{VL2B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \vartheta \\ g \cos \vartheta \sin \varphi \\ g \cos \vartheta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

da cui:

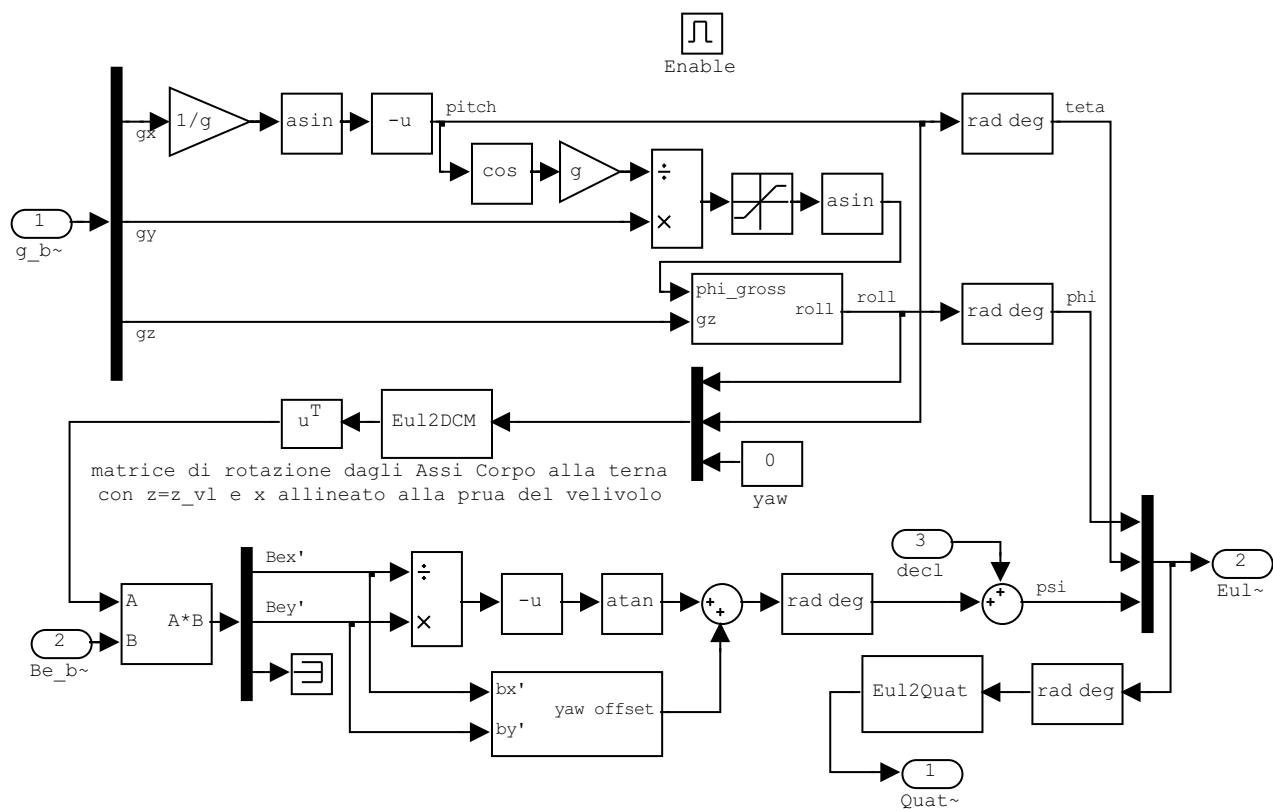


Figura 5.13 Blocco Master-Slave.

$$\vartheta = -\arcsin \frac{g_x}{g} \quad (5.66)$$

L'angolo di rollio si può determinare in modi diversi. Si è visto al paragrafo 5.6.1 che la stima della componente z del vettore gravità è affetta da errori consistenti, per cui è meglio determinare l'angolo φ evitando di coinvolgere direttamente la quantità g_z . Dall'espressione della componente g_y , noto ϑ , sia ha:

$$\varphi^* = \arcsin \frac{g_y}{g \cos \vartheta} \quad (5.67)$$

Questa relazione fornisce risultati entro l'intervallo $[-\pi/2, +\pi/2]$ e non si possono distinguere le situazioni con angoli di rollio maggiori di 90° . La determinazione di φ si completa elaborando il risultato della (5.67) con un offset in base ai segni di g_y e g_z , come indicato in Tabella 5.1, per ottenere il valore dell'angolo di rollio entro l'intervallo $[-\pi, +\pi]$.

L'angolo di prua si determina nel seguente modo. Mediante gli angoli di beccheggio e di rollio appena determinati, la misura dei magnetometri si ruota su una terna di riferimento intermedia T' avente l'asse Z' coincidente con l'asse Z_{VL} degli Assi Verticali Locali (quindi piano $X'Y'$ orizzontale) ed asse X' allineato con la prua del velivolo. Le componenti sul piano orizzontale delle misure dei magnetometri, insieme alla conoscenza dell'angolo di declinazione magnetica D , consentono di calcolare l'angolo di imbardata. La rotazione dagli Assi Verticali Locali alla terna intermedia T' si effettua mediante la matrice di rotazione (2.7) in cui si pone $\psi = 0$, ottenendo la matrice di rotazione $\mathbf{R}_{B2T'}$ con cui si calcola:

$$\mathbf{B}_e^{T'} = \mathbf{R}_{B2T'} \mathbf{B}_e^B \quad (5.68)$$

segno		
g_z	g_y	$\varphi =$
+	+	φ^*
+	-	φ^*
-	+	$\pi - \varphi^*$
-	-	$-(\pi + \varphi^*)$

Tabella 5.1 Elaborazione per la determinazione dell'angolo di rollio.

Il vettore sulla terna T' è legato al vettore sugli Assi Verticali Locali dalla (2.1) che rappresenta una rotazione singola intorno all'asse Z di un angolo ψ . Se il campo magnetico terrestre avesse angolo di declinazione nullo, quindi $B_{eEast} = 0$, le componenti di \mathbf{B}_e^T sul piano orizzontale sarebbero legate al vettore in Assi Verticali Locali dalle seguenti relazioni dovute alla (2.1):

$$\begin{bmatrix} B_{ex'} \\ B_{ey'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\psi} B_{eNorth} \\ -\sin \bar{\psi} B_{eNorth} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

da cui:

$$\bar{\psi}^* = \arctan -\frac{B_{ey'}}{B_{ex'}} \quad (5.70)$$

Come per l'angolo di rollio, anche in questo caso si ottengono risultati compresi entro l'intervallo $[-\pi/2, +\pi/2]$ e per ottenere il valore corretto di $\bar{\psi}$ va sommato un offset al risultato della (5.70) come indicato in Tabella 5.2. L'angolo $\bar{\psi}$ costituisce la prua magnetica del velivolo.

Per ottenere l'angolo di imbardata effettivo ψ basta sommare l'angolo di declinazione magnetica D alla prua magnetica:

$$\psi = \bar{\psi} + D \quad (5.71)$$

L'angolo di declinazione magnetica si ottiene dal *World Magnetic Model*.

segno		
$B_{ex'}$	$B_{ey'}$	$\bar{\psi} =$
+	+	$\bar{\psi}^*$
+	-	$\bar{\psi}^*$
-	+	$\bar{\psi}^* - \pi$
-	-	$\bar{\psi}^* + \pi$

Tabella 5.2 Elaborazione per la determinazione dell'angolo intermedio di imbardata $\bar{\psi}$ (prua magnetica).

RISULTATI

In Figura 5.14 e Figura 5.15 sono riportati degli esempi di errori di misura dell'assetto per i due metodi nei casi di GPS attivo e disattivo, ottenuti dalla simulazione condotta con la Sequenza di Sviluppo. Per entrambi i metodi gli errori sono generalmente minori nel caso di GPS attivo, specialmente durante le virate, per conseguenza diretta della diversa accuratezza di stima dell'accelerazione di gravità.

Nei risultati del metodo Master-Slave si possono notare dei picchi di errore nell'angolo di rollio e corrispondentemente nell'angolo di imbardata. Essi sono dovuti agli errori di stima della componente g_z dell'accelerazione di gravità in Assi Corpo, che è necessaria nella determinazione dell'angolo di rollio per distinguere i diversi casi riportati in Tabella 5.1. In certe situazioni tale errore è abbastanza grande da sbagliare il segno della componente di accelerazione di gravità, in particolar modo quando il velivolo è in virata, sia per le maggiori accelerazioni coinvolte che per il più basso valore della componente della gravità lungo l'asse z . L'errore che si verifica in questo modo sull'angolo di rollio produce a sua volta l'errore nell'angolo di imbardata.

Un altro aspetto sfavorevole del metodo Master-Slave consiste nel fatto che le misure dei magnetometri vengono usate solamente per determinare la prua del velivolo, in un certo senso ignorando una parte delle informazioni che esse contengono. Le informazioni trascurate possono risultare particolarmente utili quando il velivolo compie delle manovre, situazioni in cui la stima della gravità peggiora. In queste circostanze le misure del campo magnetico non si degradano quanto la stima dell'accelerazione di gravità e per ottenere migliori risultati dovrebbero ricevere un peso maggiore.

Il metodo di Gauss-Newton consente di ottenere risultati migliori rispetto al metodo Master-Slave. Esso usa tutta l'informazione delle misure dei magnetometri dando lo stesso peso a tutte le misure elaborate. Non si verificano i picchi di errore come nell'altro caso perché la causa di tali errori è stata rimossa, eliminando dalle misure la componente g_z del vettore gravità stimato.

Purtroppo il metodo di Gauss-Newton può non convergere alla soluzione corretta quando il quaternione iniziale con cui si fanno partire le iterazioni non è abbastanza vicino al valore vero, per questo non si possono usare valori iniziali di assetto generici e tale metodo non può essere usato da solo nella realizzazione del sistema. Ad esempio nell'allineamento iniziale non si dispone a priori di una stima dell'assetto, ed in questa situazione un risultato scorretto

da parte del metodo di Gauss-Newton provocherebbe la divergenza del sistema già all'accensione.

In Figura 5.16 e in Figura 5.17 vengono confrontati i risultati ottenuti con i due metodi nei casi di GPS disattivo ed attivo. Si nota che il metodo di Gauss-Newton rimuove i picchi di errore presenti nel metodo Master-Slave e che le stime dell'angolo di rollio sono migliori, in particolare nelle condizioni di GPS disattivo.

Quando le accelerazioni dovute al moto sono basse il metodo Master-Slave fornisce risultati sempre affidabili, per questo viene usato nella fase di Allineamento e per il *Reset* dell'assetto, situazioni in cui le accelerazioni del velivolo sono quasi assenti ed è indispensabile disporre di misure dell'assetto attendibili. In tutte le altre situazioni di funzionamento viene applicato il metodo di Gauss-Newton.

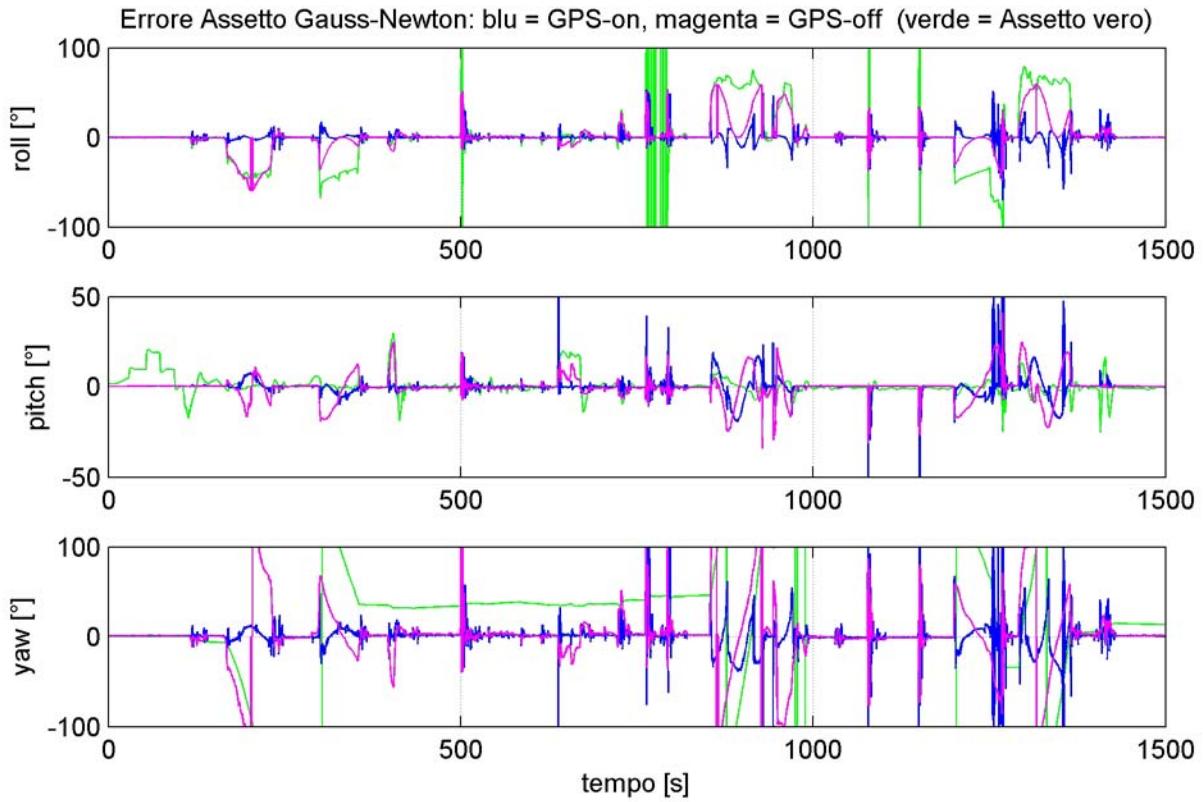


Figura 5.14 Errori di misura dell'assetto applicando il metodo di Gauss-Newton.

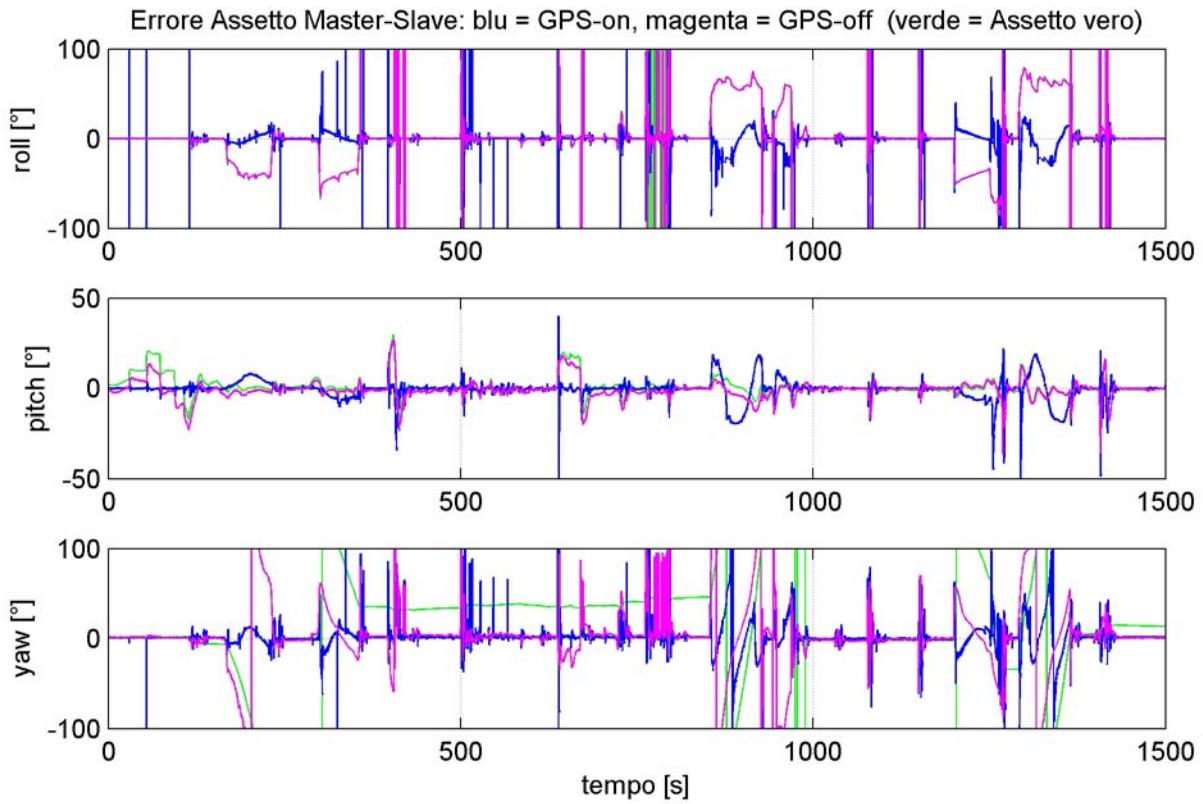


Figura 5.15 Errori di misura dell'assetto applicando il metodo Master-Slave.

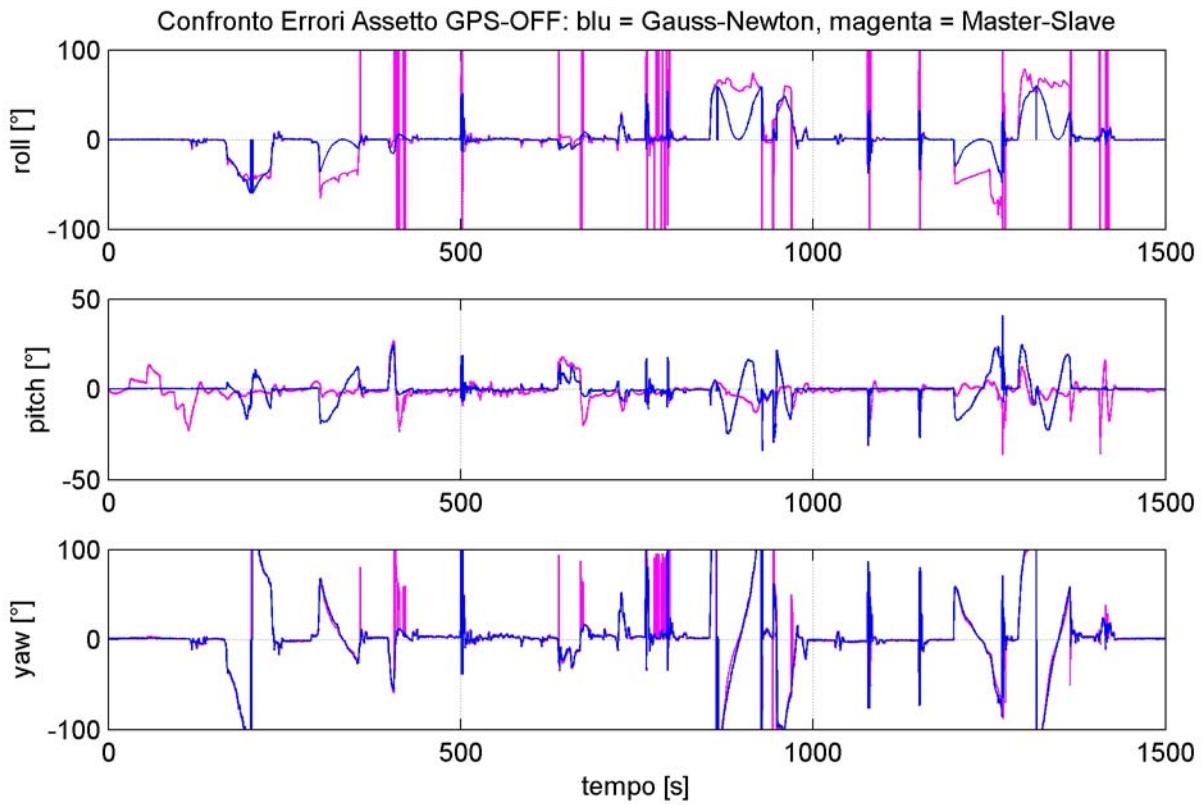


Figura 5.16 Confronto degli errori di misura dell'assetto dei metodi Gauss-Newton e Master-Slave (GPS-OFF).

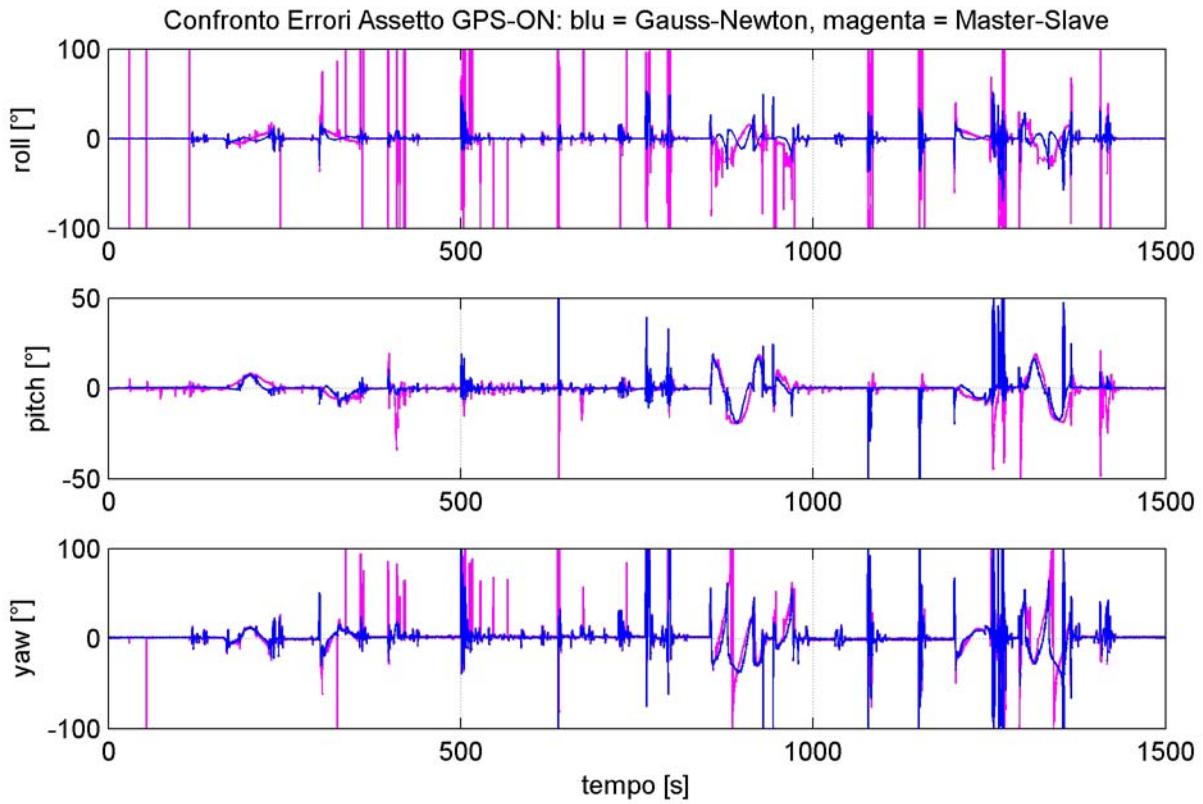


Figura 5.17 Confronto degli errori di misura dell'assetto dei metodi Gauss-Newton e Master-Slave (GPS-ON).

5.8 Filtro di Kalman

Il filtro di Kalman si inserisce nel processo di stima riepilogato sommariamente al paragrafo 5.2.6 effettuando le stime degli errori degli stati ad opportuni intervalli di tempo. Esso, realizzato nella forma discreta, si applica al modello indicato al paragrafo 5.2.5.

Si richiamano brevemente gli elementi fondamentali del filtro per questa applicazione specifica. Gli stati stimati sono le quattro componenti di errore del quaternione ed i tre errori nella determinazione dei *Bias* dei giroscopi, all'istante t_k di esecuzione del filtro:

$$\delta \mathbf{x}_{ak} = [\delta q_0(t_k) \quad \delta q_1(t_k) \quad \delta q_2(t_k) \quad \delta q_3(t_k) \quad \delta b_1(t_k) \quad \delta b_2(t_k) \quad \delta b_3(t_k)]^T \quad (5.72)$$

Le misure elaborate sono la differenza fra l'assetto misurato e quello stimato, espressi in termini di quaternione, come dettato dalla (5.45):

$$\delta \mathbf{z}_k = [\delta \tilde{q}_0(t_k) \quad \delta \tilde{q}_1(t_k) \quad \delta \tilde{q}_2(t_k) \quad \delta \tilde{q}_3(t_k)]^T \quad (5.73)$$

$$\delta \tilde{q}_i = \tilde{q}_i - \hat{q}_i \quad (5.74)$$

Il filtro esegue le operazioni di stima degli errori degli stati agli istanti t_k , descritte al paragrafo 2.8.3 e riportate schematicamente in Figura 5.18, nella quale volutamente sono state omesse le operazioni svolte in altri blocchi necessarie a completare il processo di stima.

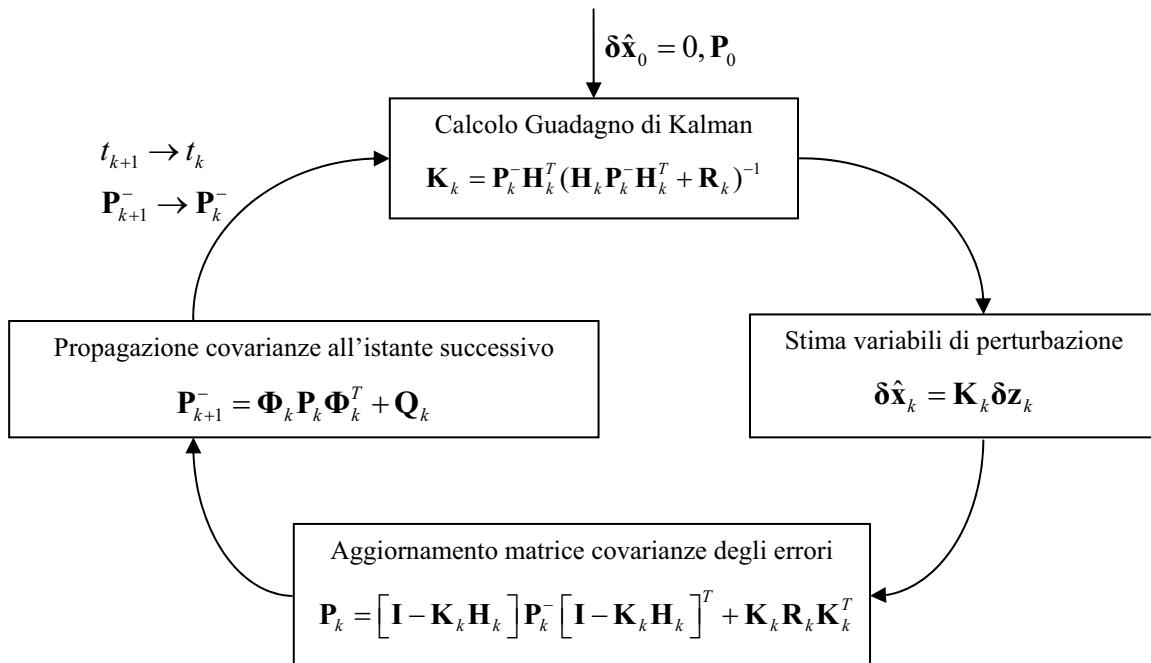


Figura 5.18 Schema delle operazioni eseguite nel blocco del filtro, che rappresentano solo una parte del processo di stima degli stati.

La necessità di effettuare la stima degli errori dell'assetto è presto giustificata. Le misure dei giroscopi considerati in questo lavoro sono affette da errori rilevanti che determinano un rapido aumento degli errori nel calcolo dell'assetto: senza effettuare una sistematica correzione delle uscite dell'AHRS, esse diventerebbero completamente errate ed inutili nell'arco di pochi minuti di funzionamento.

Il filtro è stato realizzato per stimare anche gli errori di *Bias* dei giroscopi nel tentativo di rimuoverli dalle misure, in quanto hanno un peso importante nell'accrescimento degli errori nel processo di integrazione delle velocità angolari determinando dei contributi che aumentano progressivamente nel tempo. Una buona parte dell'errore di *Bias* dei sensori cambia in modo casuale da un'accensione del sistema alla successiva, per cui non è possibile tenerne conto se non lo si determina volta per volta. Può accadere, inoltre, che durante il funzionamento si verifichino eventi bruschi ed accidentali che provocano la variazione, anche consistente, dell'errore di *Bias*: in questi casi la capacità del sistema di rilevare e correggere la variazione di *Bias* permette di eliminare o limitare le possibili conseguenze negative.

In Figura 5.19 è rappresentato lo schema del blocco *Filter*. Al suo interno vengono calcolate le matrici del sistema discreto equivalente e viene eseguito il filtro di Kalman. L'esecuzione dei vari blocchi è controllata dal segnale di trigger, *trg*, le cui caratteristiche vengono descritte al paragrafo 5.13.

Fino ad ora è stata data per scontata la scelta di non fornire al filtro le misure dirette dei sensori ma di elaborarle per determinare una “misura” dell'assetto. Questo approccio ha due vantaggi: il numero di misure nel filtro di Kalman è limitato alle quattro componenti di errore del quaternione e le relazioni fra gli stati e le misure sono lineari, in particolare sono banali perché si misurano gli stati del sistema. Questo rende meno pesanti le operazioni per eseguire il filtro e richiede complessivamente minori risorse di calcolo per il funzionamento del sistema. Nel caso che si fossero fornite al filtro le misure degli accelerometri e dei magnetometri, invece, queste andavano correlate alle rispettive quantità note in Assi Verticali Locali mediante sei relazioni non lineari in funzione delle componenti del quaternione: tali relazioni, oltre ad essere maggiori in numero, andavano linearizzate ad ogni esecuzione del filtro. In entrambi i casi, nella condizione di GPS attivo, va calcolata la stima dell'accelerazione del velivolo.

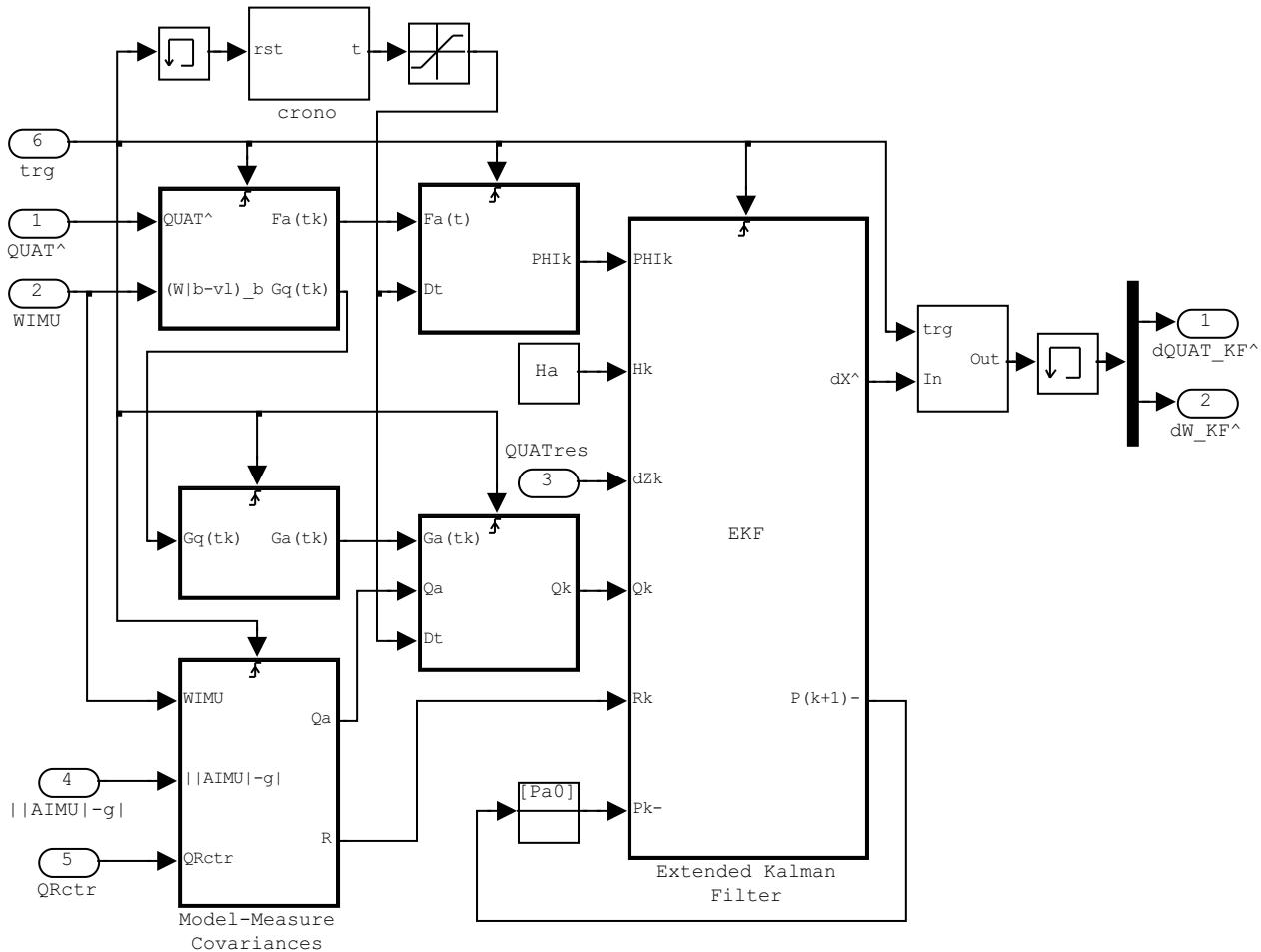


Figura 5.19 Blocco Filter.

Si è visto in precedenza che le misure dell’assetto presentano degli errori la cui entità dipende dalle accelerazioni sviluppate nel moto del velivolo. Per ottimizzare le prestazioni del sistema si fa in modo che il filtro dia un peso maggiore alle misure dell’assetto quando ci si aspetta che esse siano affette da un basso tasso di errore e, viceversa, ne tenga poco conto quando è probabile che siano fortemente corrotte. Questo meccanismo si realizza facendo variare le covarianze dei rumori di misura nella (5.28) in funzione di due grandezze che si ritengono rappresentative del modo in cui le manovre compiute dal velivolo degradano la misura dell’assetto, che sono:

- $|\mathbf{A}_{\text{IMU}}| - g|$, il valore assoluto della differenza fra i moduli della misura degli accelerometri e dell’accelerazione di gravità;
- r , la velocità angolare di imbardata misurata dal giroscopio allineato con l’asse z_b degli Assi Corpo.

All’aumentare delle covarianze dei rumori di misura, le misure ricevono un peso progressivamente minore. La trattazione di questo argomento viene completata al paragrafo

5.9 parlando delle modalità di funzionamento del sistema, in cui vengono forniti i dettagli sui valori assegnati alle covarianze dei rumori nel blocco *Model-Measure Covariances* di Figura 5.19.

Alla prima esecuzione del filtro va inizializzata la matrice delle covarianze degli errori di stima, \mathbf{P}_{a_0} . Le covarianze vengono poste tutte ad un valore arbitrariamente alto pari a 10^{10} , per indicare al filtro che i valori iniziali assegnati agli stati sono assolutamente inaccurati e va dato un grande peso alla misura.

Il filtro viene eseguito ad intervalli di tempo di un secondo ad eccezione di quando si effettua il *Reject* delle misure (paragrafo 5.11). L'intervallo di tempo di un secondo è stato fissato su base concettuale e col supporto dei risultati delle simulazioni. Da un lato l'esecuzione frequente del filtro risulta onerosa dal punto di vista computazionale, dall'altro eseguire il filtro troppo di rado lascia sviluppare gli errori dell'assetto e fornisce stime meno accurate degli errori del sistema perché si basa su un modello discreto approssimato sempre meno valido all'aumentare dell'intervallo di tempo. Da una serie di simulazioni si è osservato che l'esecuzione del filtro ad intervalli di tempo inferiori al secondo produce solo lievi miglioramenti delle prestazioni mentre adottando intervalli di tempo di alcuni secondi le prestazioni peggiorano progressivamente.

L'implementazione in forma Estesa del filtro di Kalman implica la configurazione *feedback* del sistema. Come si vede nello schema generale di Figura 5.2 le stime degli errori di assetto e di *Bias* vengono inviate ai blocchi di compensazione e di calcolo dell'assetto per essere inserite nei calcoli.

In Figura 5.20 e Figura 5.21 sono riportati i risultati delle stime dell'assetto e dei *Bias* sulla Sequenza di Sviluppo. Le impostazioni in questa simulazione sono di GPS attivo e di *Reset* automatico dell'assetto disattivo. Le stime dell'assetto sono buone, infatti gli errori rimangono sempre bassi, mentre non si può affermare la stessa cosa per le stime dei *Bias* che appaiono poco sensibili alle variazioni dei *Bias* veri. La velocità di stima dei *Bias* è regolata dalla covarianza *RWCov* nella matrice \mathbf{Q}_a (5.27), più alto è il suo valore e più veloce e sensibile risulta la stima. Adottare valori di *RWCov* troppo alti comporta lo svantaggio di provocare forti oscillazioni delle stime anche quando i *Bias* non manifestano intense variazioni come in questo esempio, il quale è da considerarsi un evento eccezionale, con la conseguenza di influire negativamente sulle prestazioni del sistema.

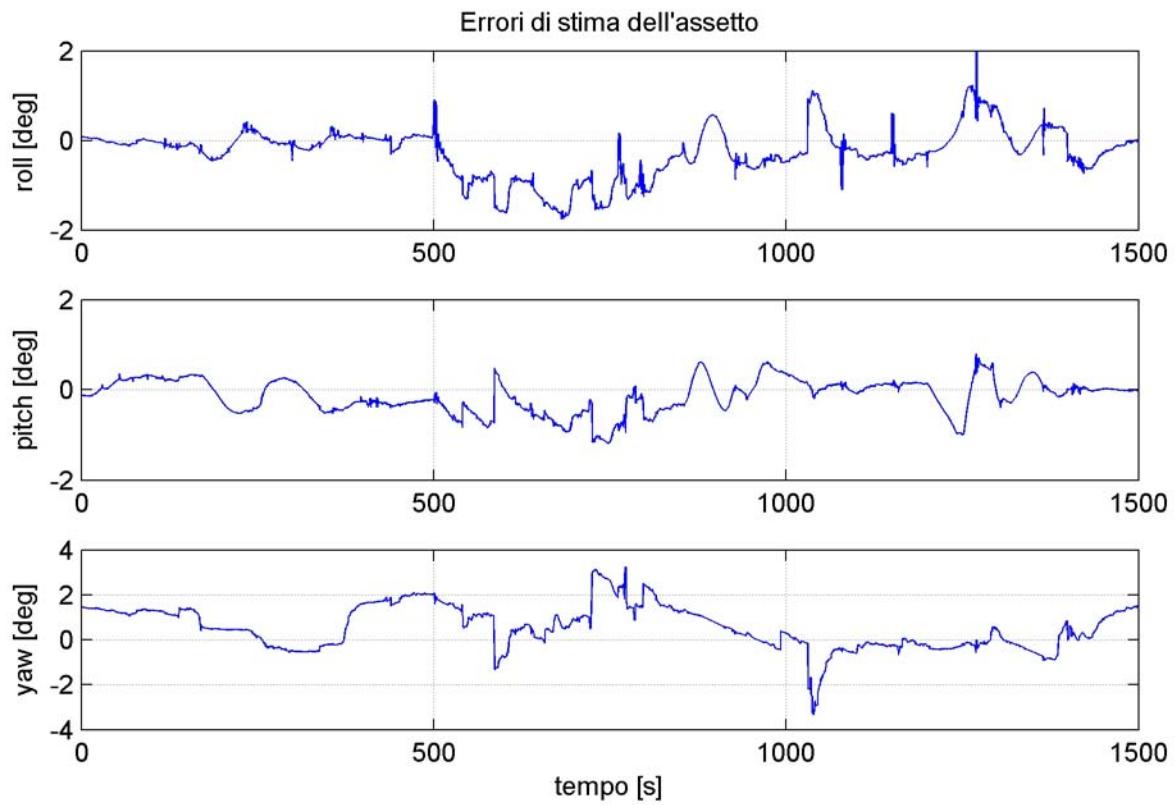


Figura 5.20 Risultati di stima dell'assetto sulla Sequenza di Sviluppo.

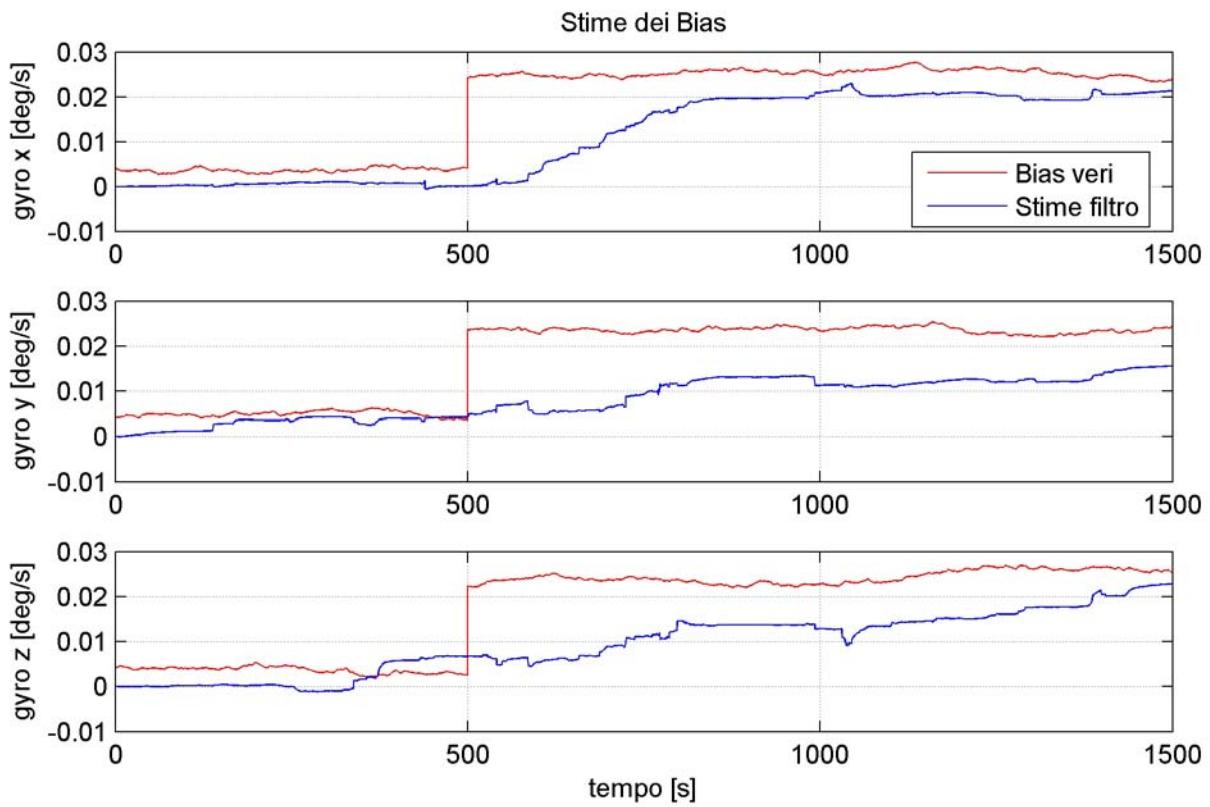


Figura 5.21 Risultati di stima degli errori di *Bias* dei giroscopi sulla Sequenza di Sviluppo.

Il valore di $RWCov$ impostato attualmente costituisce un buon compromesso fra i casi di intense variazioni dei *Bias* ed i casi in cui tali variazioni siano minime. Anticipando i risultati dei paragrafi 6.2.1 e 7.3.2, inoltre, si può dire che le prestazioni di stima dell'assetto non variano apprezzabilmente anche se le stime dei *Bias* si discostano leggermente dall'andamento di Figura 5.21, sia che esse migliorino o che peggiorino. Al paragrafo 7.3.2 sono riportati degli esempi in cui si mostra esplicitamente l'effetto della variazione di $RWCov$ sulla Sequenza di Sviluppo e vengono fatti ulteriori commenti a riguardo.

5.9 Modalità di funzionamento – Covarianze del modello

Durante il funzionamento del sistema si presentano delle situazioni che hanno caratteristiche diverse. Nella fase di accensione devono essere compiute rapidamente le stime dei valori iniziali dell'assetto e dei *Bias* dei giroscopi per rendere pronto l'AHRS all'uso. Durante il volo l'accuratezza delle misure dell'assetto dipende dalla disponibilità dei dati del GPS, con i quali si può effettuare la stima delle accelerazioni del velivolo. Per affrontare efficacemente le diverse situazioni sono state definite tre modalità di funzionamento, per ciascuna delle quali i parametri del filtro sono assegnati in modo mirato per le condizioni che si presentano. Esse sono:

- Modalità di Allineamento;
- Modalità con GPS attivo;
- Modalità con GPS disattivo.

L'Allineamento viene trattato al paragrafo 5.10. Qui ci si limita a dire che i parametri del filtro sono stati impostati per dare molto peso alle misure dell'assetto e per rendere veloce la stima dei *Bias*. I valori delle covarianze sono stati determinati come descritto al capitolo 6 e sono riportati in Tabella 5.3.

Nelle modalità di funzionamento con GPS attivo e disattivo le covarianze dei rumori di misura vengono assegnate secondo la relazione seguente:

$$R_{ij} = \begin{cases} K \cdot f(\mathbf{A}_{\text{IMU}}) \cdot f(r) = QuatCOV \cdot 10^{\sqrt{KA \cdot \|\mathbf{A}_{\text{IMU}}\| - g}} \cdot (baseR)^r & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.75)$$

dove i coefficienti KA e $baseR$ vengono assegnati diversamente nei due casi. Nella formulazione di questa relazione è stata introdotta la dipendenza dal modulo della misura degli accelerometri e dalla velocità angolare di imbardata perché sono indicativi dell'effetto

del moto del velivolo sulla degradazione della misura dell'assetto. Se la misura degli accelerometri ha un modulo diverso dall'accelerazione di gravità significa che il velivolo è soggetto ad accelerazioni, delle quali non si distinguono le caratteristiche ma indicano l'insorgenza di difficoltà nella determinazione del Riferimento Verticale. La misura della velocità di imbardata rileva l'effettuazione di una virata, a meno che essa non avvenga ad angoli di rollio molto forti, dando informazioni sul tipo di manovra eseguita per valutare il peso delle accelerazioni sugli errori di misura dell'assetto. L'accuratezza del Riferimento Verticale, infatti, dipende dalla stima di \mathbf{g} sul piano $X_B Y_B$ del velivolo, per cui le accelerazioni che si sviluppano su tale piano creano problemi: nelle virate, a differenza delle richiamate, c'è una notevole componente di accelerazione lungo Y_B , per questo la velocità angolare di imbardata indica l'insorgenza di difficoltà nella determinazione dell'angolo di rollio; nei due casi la componente di accelerazione lungo X_B , causata dalla variazione di incidenza per sviluppare maggior portanza, è equivalente.

Le relazioni adottate per i termini $f(\mathbf{A}_{\text{IMU}})$ e $f(r)$ sono state stabilite osservando la correlazione qualitativa fra gli andamenti di $\|\mathbf{A}_{\text{IMU}} - \mathbf{g}\|, r$ con gli errori di determinazione dell'assetto e attraverso simulazioni preliminari dell'AHRS in cui, con la Sequenza di Sviluppo, è stata valutata per tentativi l'entità dell'aumento della covarianza da assegnare in corrispondenza di un certo livello di errori nella misura dell'assetto, mediante l'impiego di *Lookup Table*.

La differenza fra i casi di GPS attivo e disattivo sta nella capacità di stimare le componenti di accelerazione del moto sul piano $X_B Y_B$, ed a questo è legata la scelta dei parametri KA e $baseR$ che determinano l'entità dei termini $f(\mathbf{A}_{\text{IMU}})$ e $f(r)$ nei due casi. Il loro andamento è rappresentato in Figura 5.22.

Quando il velivolo ha un moto rettilineo uniforme la misura dell'assetto è accurata e la disponibilità dei dati del GPS è ininfluente perché l'accelerazione da stimare è nulla, per questo in tale situazione è sensato attribuire lo stesso peso alle misure assegnando lo stesso valore del parametro *QuatCOV* alle due modalità di funzionamento (si noti che $\|\mathbf{A}_{\text{IMU}} - \mathbf{g}\| = 0, r = 0 \rightarrow R_{ii} = QuatCOV$).

Il procedimento seguito per assegnare i valori delle covarianze di processo e di misura è descritto al capitolo 6. I valori assegnati nelle tre modalità di funzionamento sono riportati in Tabella 5.3.

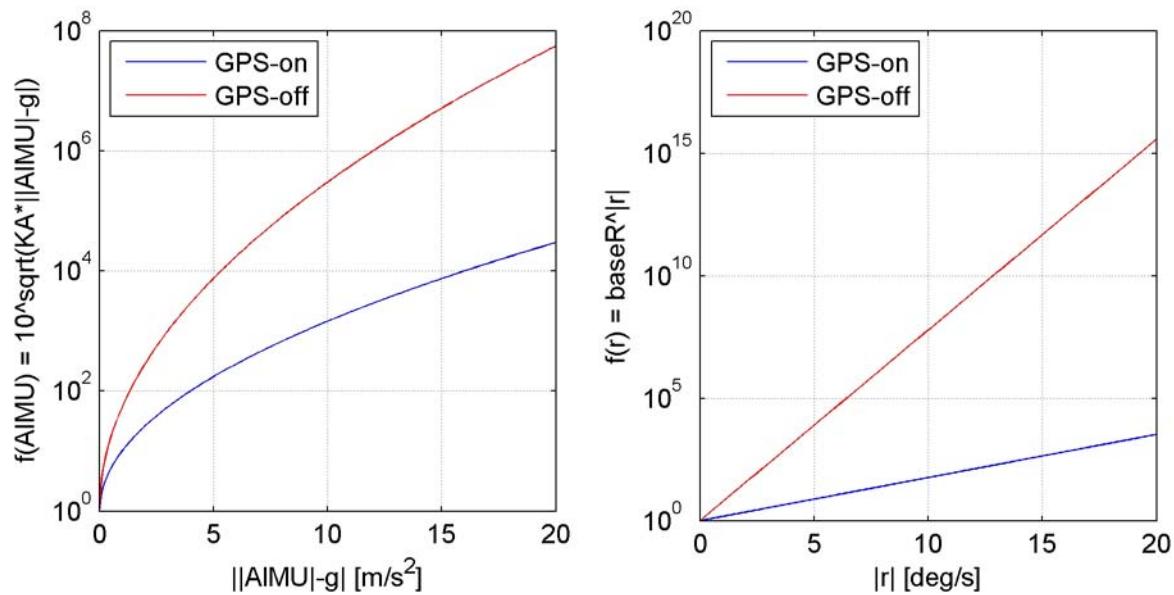


Figura 5.22 Grafici dei termini che assegnano le covarianze degli errori di misura.

In Figura 5.23 è rappresentato lo schema del blocco *Model-Measure Covariances*, in cui vengono assegnate le matrici delle covarianze a seconda della modalità di funzionamento, la quale viene specificata dal segnale *QRctr*.

5.10 Allineamento

L’Allineamento è un’operazione che si esegue all’accensione del sistema per effettuare una rapida stima dell’assetto del velivolo e degli errori di *Bias* dei giroscopi, costituendo una procedura di avvio che prepara l’AHRS all’impiego nelle condizioni operative per le quali è destinato. La determinazione dell’assetto di partenza è indispensabile per assegnare la condizione iniziale di integrazione delle velocità angolari nel calcolo dell’assetto, mentre la

Parametri	Modalità di funzionamento		
	Allineamento	GPS attivo	GPS disattivo
Matrice Q:			
GyrWNCOV	$(0.1/60)^2$	$(0.1/60)^2$	$(0.1/60)^2$
RWCOV	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}
Matrice R:			
QuatCOV	10^{-9}	10^{-2}	10^{-2}
KA	0	1	3
baseR	1	1.5	6

Tabella 5.3 Dati che definiscono le matrici delle covarianze **Q** ed **R** nelle tre modalità di funzionamento.

stima iniziale degli errori di *Bias* è utile per avere fin da subito delle buone prestazioni.

Per rendere veloce l’Allineamento è necessario poter misurare accuratamente l’assetto e si devono adottare degli accorgimenti per informare il sistema che le misure a disposizione sono affidabili. La misura accurata dell’assetto si ottiene richiedendo che il velivolo rimanga immobile per tutta la durata dell’operazione, in modo che gli accelerometri misurino esclusivamente l’accelerazione di gravità fornendo una misura attendibile di essa. Per informare il sistema che in questa fase le misure sono affidabili si fa funzionare il filtro di Kalman nella modalità di Allineamento (paragrafo 5.9), nella quale le misure dell’assetto ricevono un elevato peso mediante l’opportuna assegnazione dei parametri del filtro.

L’operazione di Allineamento è stata realizzata nel modo seguente. All’accensione del sistema le stime dei *Bias* dei giroscopi vengono inizializzate a zero mentre la stima dell’assetto viene assegnata mediante un’operazione di *Reset* al valore indicato dalla prima misura dell’assetto. Il filtro di Kalman viene avviato automaticamente in modalità di Allineamento e si lascia funzionare per un certo tempo, durante il quale le correzioni alle stime saranno molto sensibili agli scostamenti dell’assetto calcolato dalle sue misure. La stima dell’assetto subirà verosimilmente piccole correzioni per via del *Reset* iniziale che gli avrà assegnato un valore con buona probabilità accurato, mentre lo stesso non si può dire per

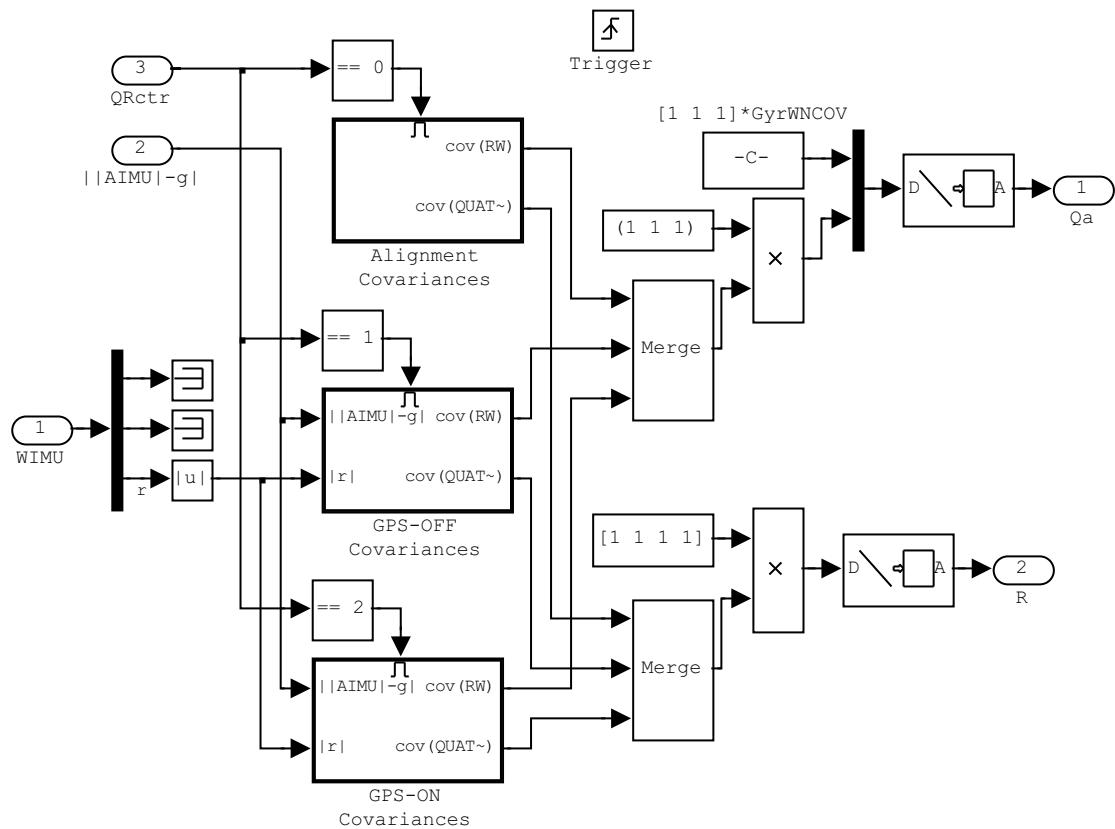


Figura 5.23 Blocco *Model-Measure Covariances*.

le stime dei *Bias* perché l'entità di tali errori è sconosciuta. Durante la fase di Allineamento non viene consentito il *Reject* delle misure (funzione descritta al paragrafo successivo) perché potrebbe pregiudicare l'esito dell'operazione. La fase di Allineamento viene terminata dopo che sia trascorso un tempo prestabilito e si passa automaticamente ad una delle altre due modalità di funzionamento a seconda della disponibilità delle misure del GPS: la modalità con GPS attivo o la modalità con GPS disattivo.

In Figura 5.24 e Figura 5.25 sono riportati gli andamenti delle stime degli stati durante una simulazione con la Sequenza di Allineamento, in cui si esegue l'operazione di Allineamento per i primi 300 secondi. In questo esempio gli errori di *Bias* dei giroscopi sono stati volutamente esagerati ponendoli ad un valore pari a dieci volte la deviazione standard del *Long Term Bias Stability*. Si può vedere che l'assetto ha fin da subito un piccolo errore di stima, questo grazie al *Reset* iniziale. La stima dell'angolo di imbardata converge ad un valore con errore non nullo, questo non dipende dal procedimento applicato ma dall'errore nella misura dell'assetto causato dal non trascurabile errore di disallineamento dei magnetometri. Si ricorda che in questa situazione la misura dell'assetto viene effettuata col metodo Master-Slave, il quale usa le misure dei magnetometri solo per determinare la prua del velivolo, quindi gli errori di disallineamento di questi sensori si manifestano solo nella stima dell'angolo di imbardata. Dopo 300 secondi si passa ad una delle modalità di funzionamento con GPS attivo o con GPS disattivo: si può notare che l'andamento delle stime degli stati diventa uniforme e questo è una conseguenza del minor peso dato alle misure dell'assetto, le quali sono affette dal rumore di misura degli accelerometri e dei magnetometri e finché ricevono molto peso trasmettono questo rumore alle stime degli stati. Le stime degli errori di *Bias* convergono in un tempo che dipende poco dall'entità di tali errori, infatti alcuni test condotti con diversi valori dei *Bias* hanno mostrato tempi di convergenza paragonabili e mai inferiori a 100 secondi. Un modo per rendere molto più rapida la convergenza delle stime dei *Bias* consiste nel modificare l'equazione delle misure nel modello del sistema, introducendo le misure aggiuntive delle velocità angolari che si sa essere nulle per il requisito di immobilità del velivolo. Questa soluzione è stata sperimentata ed ha mostrato tempi di convergenza di solo pochi secondi, ma non è stata implementata nel sistema finale per non aumentarne la complessità.

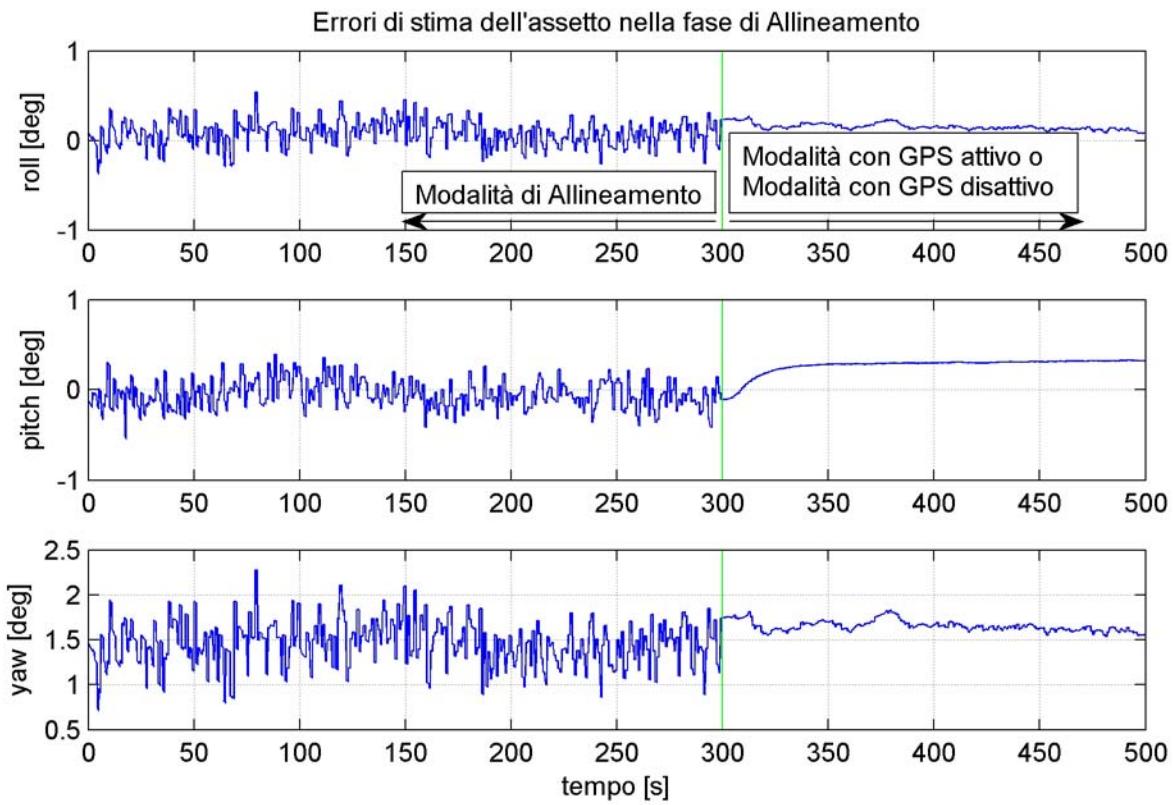


Figura 5.24 Esempio di errori di stima dell'assetto nella fase di Allineamento.

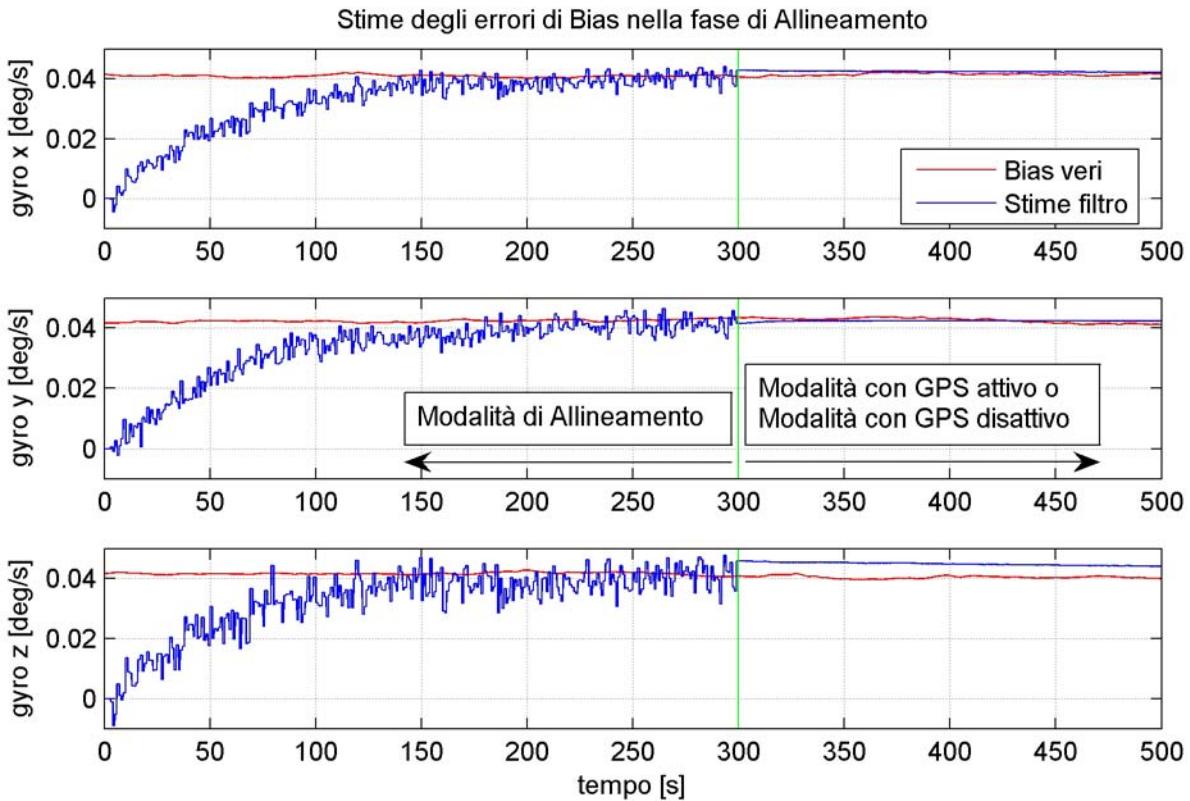


Figura 5.25 Esempio di stime degli errori di *Bias* dei giroscopi nella fase di Allineamento.

La scelta di effettuare un *Reset* per inizializzare l'assetto, all'avvio dell'Allineamento, è stata fatta principalmente per uniformare i tempi di convergenza delle stime dei *Bias*. Se non si effettua il *Reset* iniziale, le stime dell'assetto all'avvio del sistema vanno assegnate arbitrariamente, in particolare ponendole tutte uguali a zero. Quando l'assetto vero non è prossimo a quello fissato, alla prima esecuzione del filtro di Kalman i residui sono molto grandi e così pure i feedback degli errori. Per le stime degli angoli di assetto non ci sono problemi perché i feedback sono corretti ed esse convergono ai valori di regime in pochissime iterazioni del filtro, mentre le stime degli errori di *Bias* possono subire forti variazioni iniziali che poi, per essere corrette, richiedono di prolungare la durata dell'Allineamento.

Non è stata sviluppata una procedura per riconoscere la convergenza delle stime degli stati ad un valore costante e, per questo motivo, il termine della procedura di Allineamento viene stabilito assegnando una durata fissa all'operazione, che come si può vedere dalle figure (esse rappresentano un caso estremo) può essere limitata a tre minuti. Le impostazioni dei parametri del filtro per la modalità di Allineamento sono tali da conferire la massima velocità di stima dei *Bias*, per cui aumentando ulteriormente il peso delle misure ed aumentando l'intensità dei Random Walk che modellano gli errori di *Bias* non si ottiene alcun miglioramento.

5.11 Reject delle misure

Il *Reject* delle misure è una funzione pensata per migliorare le prestazioni del sistema evitando che vengano elaborate delle misure che in base a qualche criterio risultano non valide. Il sistema è realizzato in modo che il filtro venga eseguito, in condizioni normali, ad intervalli di tempo di un secondo, e la misura dell'assetto viene compiuta nel momento in cui deve avvenire l'esecuzione. Prima di essere elaborata, la misura viene analizzata per verificare se sono verificati i criteri di validità. Nel caso in cui la misura vada scartata, l'esecuzione del filtro viene ritardata fino all'istante in cui, ripetendo la misura senza pause, essa torna a rispettare il criterio di validità.

I criteri definiti per stabilire se una misura sia valida sono due. Di uno si è parlato nella descrizione generale del sistema e riguarda la differenza fra gli angoli di assetto stimati attualmente dal sistema e quelli indicati dalla misura: nel caso in cui la differenza di uno solo degli angoli di assetto supera una certa soglia la misura si ritiene da scartare. Nell'ipotesi che l'errore non sia nell'assetto calcolato, una grande differenza fra gli angoli di assetto calcolati e quelli misurati si verifica nei seguenti casi:

- Il velivolo è soggetto ad accelerazioni che provocano errori consistenti nella determinazione dell'accelerazione di gravità e quindi nella misura dell'assetto;
- Il metodo di Gauss-Newton, applicato in tutte le fasi di funzionamento normale del sistema, per qualche circostanza particolare non converge alla soluzione corretta di assetto.

Relativamente al primo caso, il filtro è già realizzato per dare meno peso alle misure quando i parametri $\|\mathbf{A}_{\text{IMU}}| - g|$ ed r indicano una situazione di scarsa attendibilità della stima del Riferimento Verticale, ma la funzione di *Reject* è comunque utile per mettere al riparo da eventuali situazioni impreviste in cui si attribuisca un peso troppo elevato ad una misura in realtà affetta da grandi errori. Il secondo caso è quello che desta maggiori preoccupazioni perché rappresenta un punto critico del sistema, in grado di far divergere la stima dell'assetto qualora le soluzioni fornite dal metodo di Gauss-Newton fossero continuamente scorrette per un periodo di tempo troppo lungo. Tale metodo non crea problemi quando il punto di partenza delle equazioni iterative è sufficientemente vicino alla soluzione corretta e di fatto in tutte le simulazioni eseguite non si è mai verificato il temuto problema, ma testando il metodo con punti di partenza generici i casi di risultati scorretti sono stati molti. Per questa evenienza il *Reject* delle misure risulta molto efficace qualora il metodo di Gauss-Newton fallisse in occasioni isolate.

E' importante notare che l'applicazione di questo criterio può risultare pericoloso perché si assume che le stime dell'assetto siano sempre accurate, basandosi su di esse per giudicare la bontà delle misure. Qualora si verificasse il caso contrario, per cui la stima di anche solo un angolo di assetto fosse fortemente errata e la misura fosse corretta, nell'incapacità di riconoscere la situazione il sistema inizierebbe a scartare indefiniteamente le misure compromettendo in modo incontrollabile il suo funzionamento. Il limite fissato per i residui degli angoli di assetto oltre il quale applicare il *Reject* è di 20 gradi, ritenuto di buon compromesso fra garantire un'efficace esclusione delle misure affette da grandi errori e limitare il rischio di divergenza delle stime a causa di un temporaneo aumento dell'errore in uno degli angoli di assetto.

L'altro criterio per stabilire se la misura sia valida è stato introdotto per via dell'impiego dei quaternioni. La misura fornita al filtro è la (5.37), cioè il residuo dell'assetto espresso in termini di quaternione. La rappresentazione di un dato assetto non è univoca perché essa è data sia da un quaternione che dal suo opposto. I due quaternioni che vanno a formare il residuo detto sopra hanno origini diverse, uno viene calcolato per integrazione delle equazioni

differenziali che legano le componenti del quaternione alle velocità angolari in Assi Corpo mentre l'altro viene calcolato dal metodo di Gauss-Newton o convertito dagli angoli di Eulero con le relazioni (2.24), a seconda di quale metodo di misura dell'assetto sia stato applicato. In certe occasioni può accadere che una o più componenti del residuo dei quaternioni assuma valori assoluti maggiori dell'unità, nonostante ciascun quaternione abbia modulo unitario. Questo fatto è potenzialmente pericoloso ed in certe simulazioni ha provocato delle forti ed improvvise variazioni degli errori di stima degli stati del sistema. Per ovviare al problema si è pensato, nel caso che una delle componenti del residuo abbia valore assoluto maggiore dell'unità, di invertire il segno di uno dei due quaternioni. Se anche dopo questa operazione almeno una componente del residuo risulta di modulo maggiore di uno, la misura viene scartata. Monitorando le simulazioni eseguite, si è comunque visto che le situazioni in cui si verificano queste circostanze sono rare e l'applicazione di questo tipo di intervento avviene sporadicamente.

Nel ritardare l'esecuzione del filtro non è stato fissato un limite di tempo. Nel caso il *Reject* delle misure si protragga a lungo ed il tempo dall'ultima esecuzione del filtro superi una certa soglia, si adotta un accorgimento per evitare che alla prima misura ritenuta valida vengano compiute delle stime degli errori molto grandi e scorrette che invece di migliorare le prestazioni del sistema le peggiorano. Il problema consiste nel fatto che il modello discreto su cui il filtro si basa viene calcolato dall'approssimazione lineare continua tempo variante del sistema calcolata all'istante in cui il filtro va eseguito, secondo il metodo indicato al paragrafo 2.6 per i sistemi lineari a parametri costanti. Il modello discreto così ottenuto non è in grado di rappresentare correttamente il comportamento del sistema in un intervallo di tempo molto lungo, per cui si stabilisce un valore massimo dell'intervallo di tempo Δt da considerare nei calcoli delle matrici del sistema discreto equivalente in modo che i termini che le costituiscono non siano troppo grandi e le stime degli errori effettuate dal filtro abbiano un'ampiezza limitata. Il valore massimo fissato per Δt è di 10 secondi, ritenuto un valore adeguato per lo scopo prefissato senza che questo accorgimento interferisca di frequente con la normale dinamica del filtro.

Un esempio di confronto fra i risultati ottenuti effettuando il *Reject* ed i risultati senza *Reject* sono riportati in Figura 5.26 e Figura 5.27. La simulazione è condotta con la Sequenza di Sviluppo ed i risultati in blu sono gli stessi del paragrafo 5.8. Nella simulazione senza *Reject*, la funzione è stata disattivata solo relativamente al criterio applicato ai residui degli angoli di assetto. Sebbene questi risultati, riguardando un singolo caso, siano scarsamente significativi, in questo esempio si nota che le prestazioni con *Reject* attivo sono lievemente

migliori che con *Reject* disattivo e la stessa tendenza si è manifestata valutando il comportamento su una base più ampia di test condotti sulle Sequenze di Valutazione. Si fa notare che gli errori nella stima dell'assetto non dipendono solo dall'effetto diretto che il *Reject* ha sui feedback degli errori di assetto ma dipendono anche dai diversi errori di stima dei *Bias*, i quali rientrano nell'integrazione delle velocità angolari.

5.12 Reset dell'assetto

Questa è una funzione per la quale l'assetto stimato viene posto uguale alla misura di esso qualora si ritenga che gli errori presenti nella misura dell'assetto siano trascurabili. L'obiettivo di questa funzione è di fornire al sistema delle informazioni "certe" sull'assetto ad un dato momento per eliminare eventuali errori accumulati fino ad allora e non corretti dal filtro di Kalman.

Il criterio per stabilire se ad un certo istante possano essere effettuate delle misure accurate dell'assetto consiste nell'osservare i moduli delle misure dei sensori inerziali, per riconoscere le situazioni in cui il moto del velivolo sia con buona approssimazione di volo rettilineo uniforme. Precisamente si verifica se:

$$\left\| \mathbf{a}_{\text{IMU}} - g \right\| < a_{th}, \quad \left\| \boldsymbol{\omega}_{\text{IMU}} \right\| < \omega_{th} \quad (5.76)$$

dove i valori di soglia a_{th} e ω_{th} sono opportunamente piccoli. Se tali condizioni sono rispettate si può assumere di essere in volo rettilineo uniforme, situazione in cui la misura del vettore gravità è accuratamente eseguita con gli accelerometri. I valori di soglia fissati sono $a_{th} = 0.005 \text{ m/s}^2$, $\omega_{th} = 0.05^\circ/\text{s}$, scelti in prima approssimazione mediante test sulla Sequenza di Sviluppo in modo da ridurre al minimo gli errori nell'assetto di *Reset* senza impedire l'attivazione della funzione.

La misura dell'assetto per effettuare il *Reset* viene effettuata col metodo Master-Slave per merito della sua affidabilità nelle situazioni in cui le accelerazioni del velivolo sono basse o assenti, senza necessitare di informazioni iniziali sull'assetto come accade per il metodo di Gauss-Newton. Sempre per motivi di affidabilità, inoltre, la misura del vettore gravità usata per tale scopo viene effettuata esclusivamente dalle misure degli accelerometri, ignorando la stima dell'accelerazione del velivolo che si può calcolare quando il GPS è attivo.

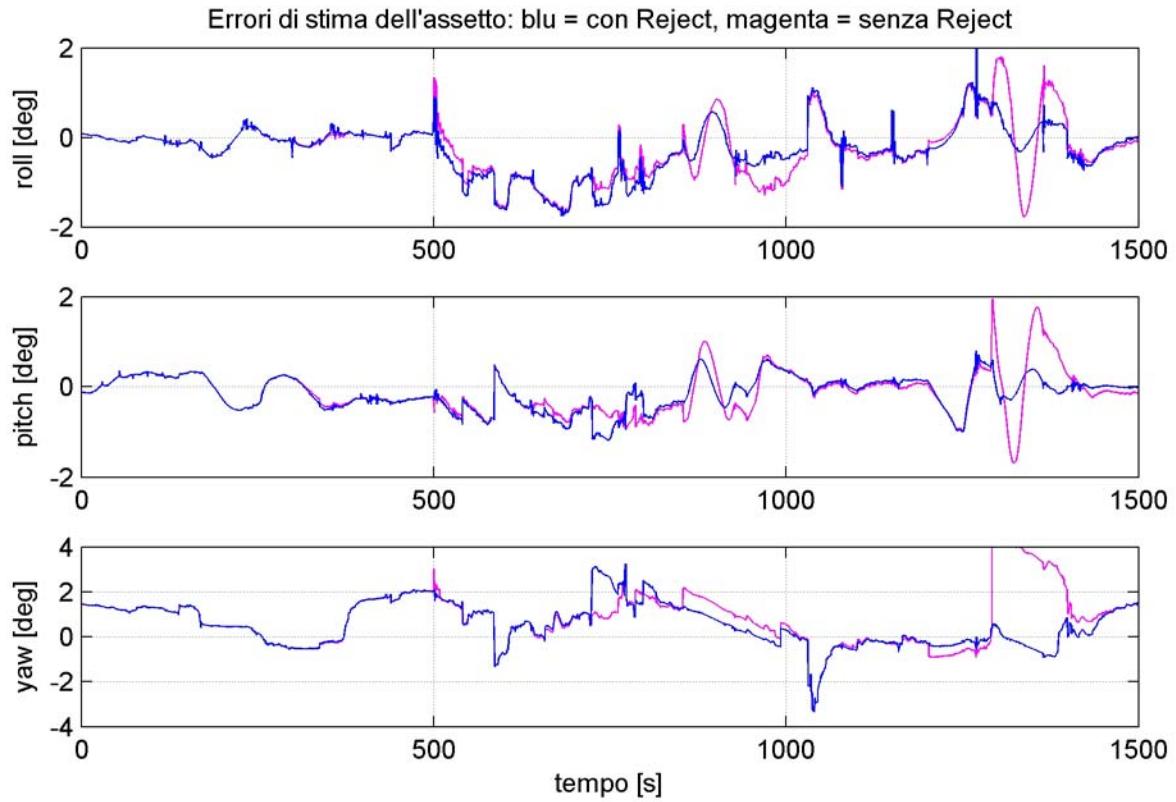


Figura 5.26 Confronto degli errori di assetto ottenuti con e senza *Reject* nella Sequenza di Sviluppo.

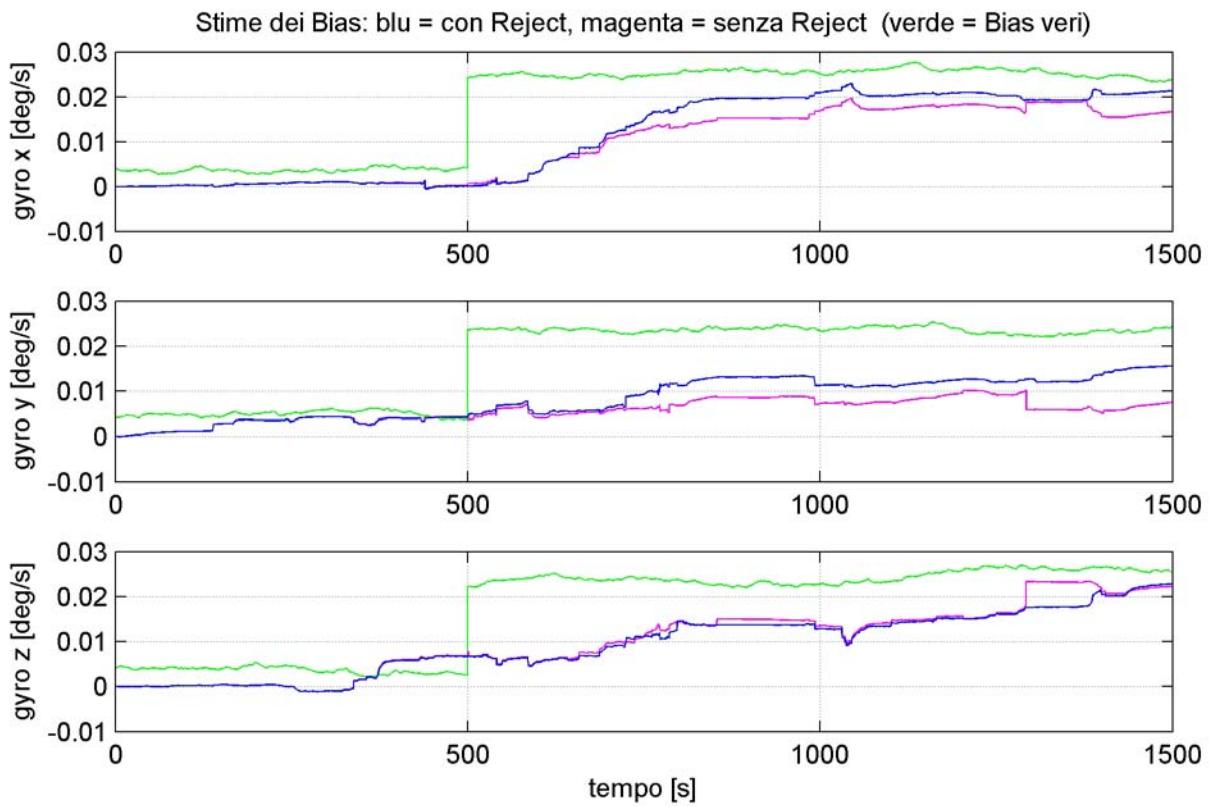


Figura 5.27 Confronto delle stime dei *Bias* ottenute con e senza *Reject* nella Sequenza di Sviluppo.

Quando si effettua il *Reset* viene fatto ripartire il calcolo dell'assetto dalle nuove condizioni iniziali rappresentate dalle misure. Visto che l'operazione di *Reset* interferisce con il normale funzionamento del sistema alterando l'evoluzione degli errori dell'assetto su cui si basano le correzioni delle stime dei *Bias* dei giroscopi, si preferisce cautelativamente ignorare il primo feedback effettuato dal filtro dopo l'avvenuto *Reset*.

La funzione di *Reset* è stata realizzata prevedendo diverse modalità d'uso:

- *Reset* Manuale, comandato dall'utente tramite l'interruttore *A&H MANUAL RESET* di Figura 5.2;
- *Reset* Automatico, che avviene con una certa logica ed è attivabile o disattivabile tramite l'interruttore *ALLOW A&H AUTO-RESET*.

Il *Reset* Manuale consente all'utente di decidere ad un certo momento di resettare l'assetto alle misure effettuate col metodo Master-Slave senza che debbano essere rispettate le condizioni (5.76). Il *Reset* Automatico avviene quando sono verificate le (5.76) senza intervento da parte dell'utente ed è tale che due *Reset* successivi siano separati da un intervallo di tempo minimo, questo per evitare che nelle fasi di volo approssimativamente rettilineo uniforme il metodo di stima dell'assetto basato sul filtro venga soppiantato da una successione di *Reset* consecutivi, a scapito in particolar modo della stima degli errori di *Bias*. L'intervallo di tempo minimo fra due *Reset* consecutivi è stato fissato a 50 secondi.

In Figura 5.28 e Figura 5.29 sono riportati i risultati delle simulazioni condotte con la Sequenza di Sviluppo nei casi di funzione di *Reset* attiva e disattiva. Nel grafico degli errori di assetto gli istanti di *Reset* sono segnalati dai tratteggi verticali. Si può osservare che la funzione di *Reset* non ha effetti favorevoli perché generalmente gli errori nell'assetto misurato sono maggiori degli errori di stima del filtro. L'assetto di *Reset* risulta sensibile agli errori di misura dei sensori, fra i quali in particolare il *Bias*, il disallineamento ed il rumore, dando errori che in queste condizioni di simulazione non sono trascurabili. La funzione di *Reset* può risultare efficace nei sistemi con errori di stima maggiori o in condizioni in cui la misura dell'assetto possa essere effettuata in modo migliore. Gli effetti sulle stime dei *Bias* di Figura 5.29 non si possono ritenere rivelatori di qualche tendenza particolare.

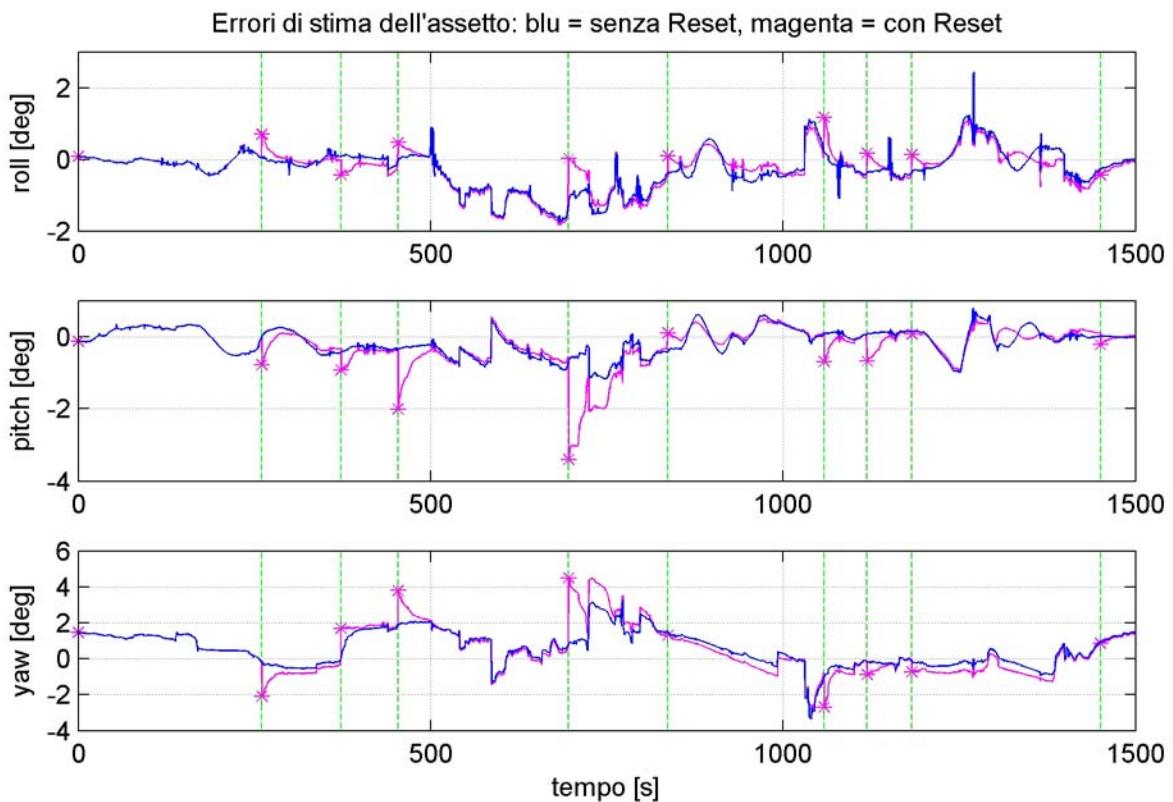


Figura 5.28 Confronto degli errori di assetto ottenuti con e senza *Reset* nella Sequenza di Sviluppo (tratteggi verticali = istanti di *Reset*).

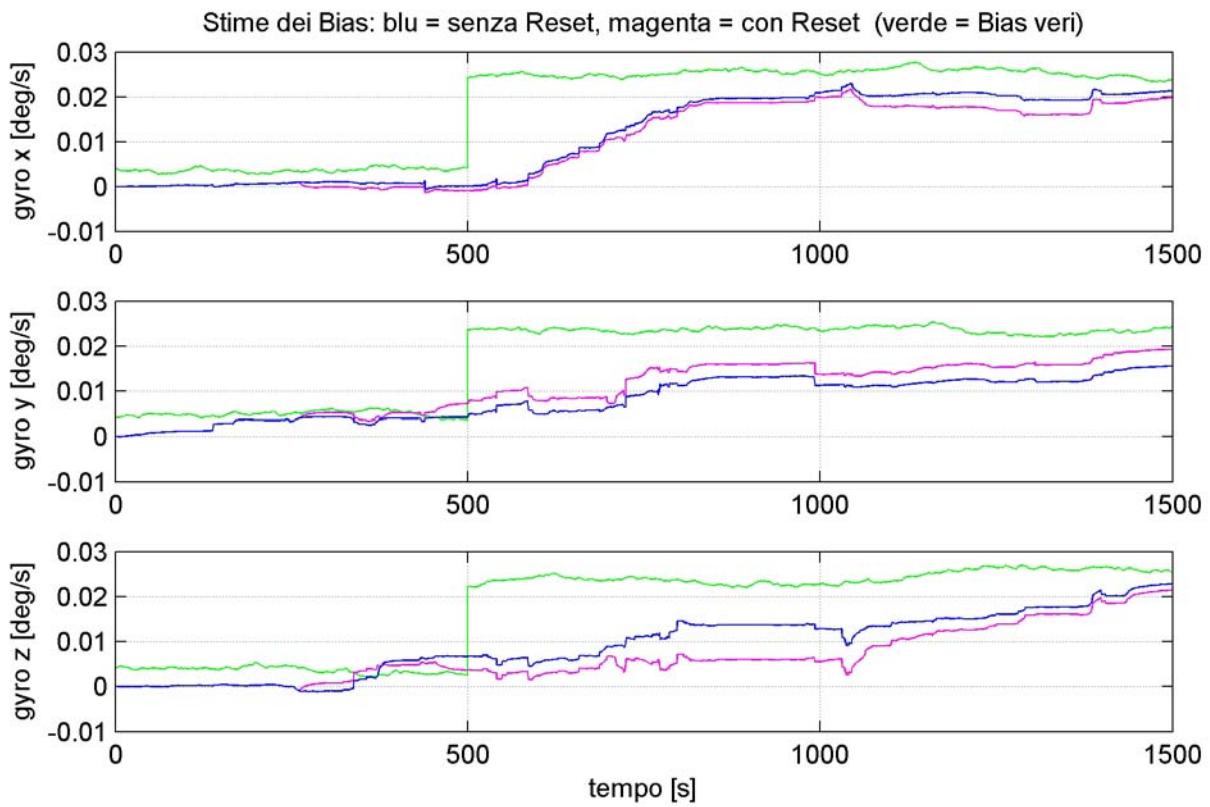


Figura 5.29 Confronto delle stime dei *Bias* ottenute con e senza *Reset* nella Sequenza di Sviluppo.

5.13 Unità di Controllo

L'Unità di Controllo, il cui schema è rappresentato in Figura 5.30, gestisce il funzionamento del sistema svolgendo due categorie di operazioni:

- Controlla l'attivazione di diversi blocchi del sistema affinché eseguano solo al momento necessario le operazioni per cui sono stati realizzati, ai fini dell'ottimizzazione dell'impiego delle risorse di calcolo;
- Attua la logica di funzionamento sviluppata dando corpo alle funzioni di *Reject*, *Reset*, *Allineamento*, controllando le modalità di funzionamento e acquisendo le impostazioni selezionate dall'utente.

La parte alta dello schema di Figura 5.30 realizza le funzioni di *Reset* e di *Allineamento*, la parte centrale controlla le modalità di funzionamento e attiva al momento opportuno i blocchi adibiti alle misure dell'assetto, la parte bassa comanda l'esecuzione del filtro e realizza la funzione di *Reject*.

A parte l'Unità di Controllo, nel sistema sono presenti dei blocchi sempre attivi che sono i sensori, la compensazione, il calcolo dell'assetto e la stima del Riferimento Verticale. I sensori, la compensazione ed il calcolo dell'assetto sono indispensabili per fornire le uscite dell'AHRS con continuità, mentre il blocco di stima del vettore gravità serve a poter monitorare in ogni momento il verificarsi delle condizioni per effettuare il *Reset*. L'attivazione di tutti gli altri blocchi è gestita dall'Unità di Controllo.

La descrizione dell'Unità di Controllo deve iniziare dal blocco *MasterTRG*, il quale temporizza il sistema. Questo blocco ha il ruolo di “richiedere” le esecuzioni del filtro, le quali poi avvengono nel rispetto delle condizioni di *Reject* e possono quindi essere ritardate rispetto al momento della richiesta. Il segnale generato dal blocco *MasterTRG* assume, a riposo, il valore zero (stato logico *False*), e passa al valore uno (stato logico *True*) per la durata di un passo di simulazione nel momento in cui deve essere richiesta l'esecuzione del filtro. Le transizioni ai valori unitari avvengono con periodo $TKF = 1\text{sec}$.

Quando l'uscita del blocco *MasterTRG* assume il valore unitario, nella linea a valle di esso è presente un meccanismo che genera un segnale logico *True* fino a quando il filtro non viene eseguito, dopo di ché torna allo stato *False*. Questo segnale funziona da interruttore generale per la sezione centrale dell'Unità di Controllo che gestisce l'attivazione dei blocchi adibiti alla misura dell'assetto e rende efficaci i controlli della funzione di *Reject*, che da

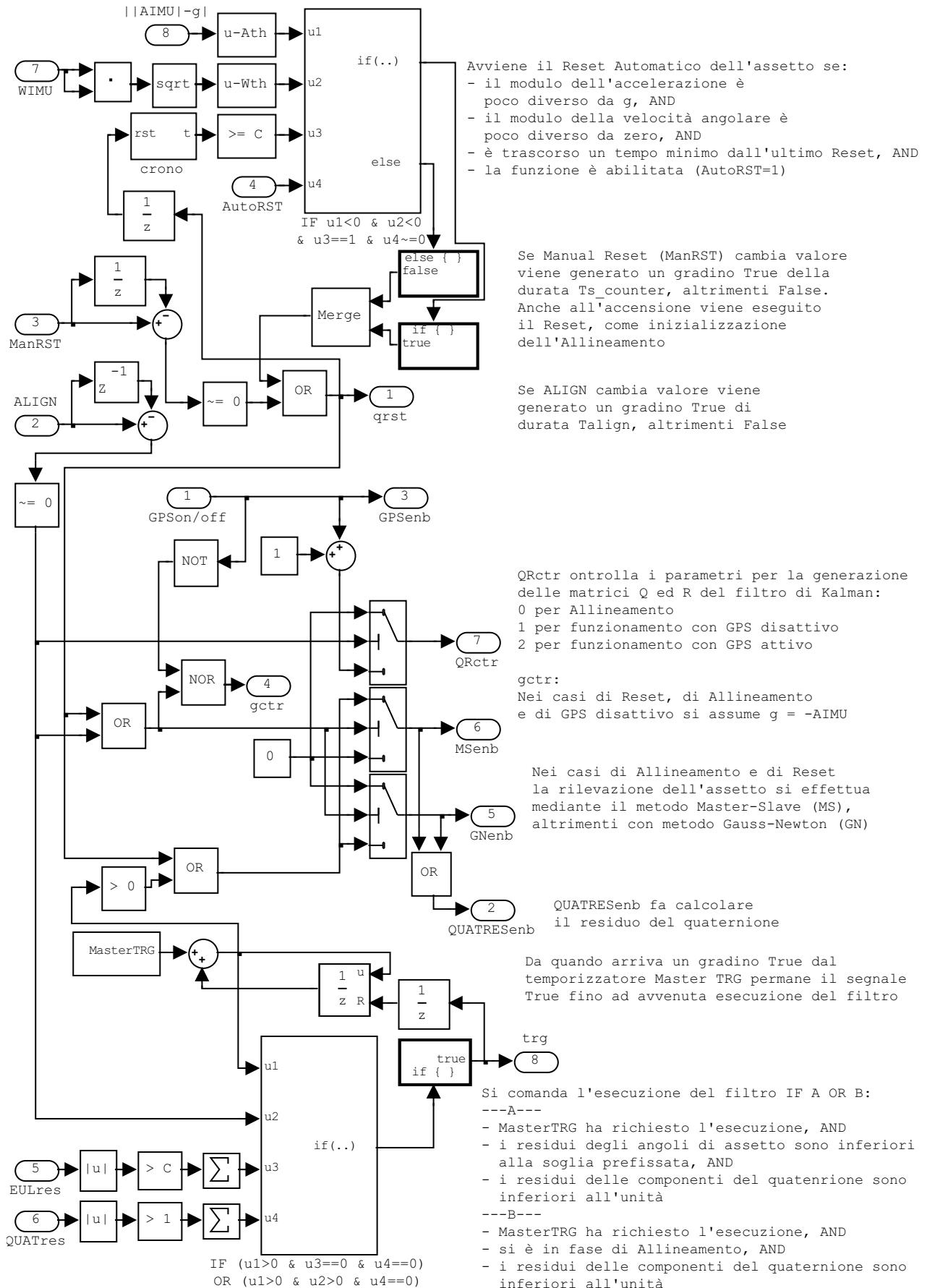


Figura 5.30 Blocco Control Unit.

questo momento consentiranno l'esecuzione del filtro solo quando saranno soddisfatti i criteri perché questo avvenga.

L'ingresso *GPS on-off*, che può assumere i valori zero ed uno, serve a simulare la disponibilità delle misure del GPS. Esso viene impostato dall'utente mediante l'interruttore manuale *GPS ON/OFF* di Figura 5.2. Questo ingresso ha due funzioni: attiva o disattiva il blocco che simula il GPS e serve a determinare la modalità di funzionamento da impostare. Nelle reali condizioni di funzionamento del sistema il segnale della disponibilità delle misure del GPS sarà gestito dallo stesso ricevitore GPS.

Sulla base della modalità di funzionamento, mediante le uscite *GNenb* e *MSenb* viene attivato uno dei due metodi di misura dell'assetto, e tramite l'uscita *QRctr* viene inviata l'informazione della modalità di funzionamento corrente al blocco che assegna le covarianze del modello.

Quando uno dei due metodi di misura dell'assetto è attivo, tramite l'uscita *QUATRESenb* viene attivata l'operazione di calcolo del residuo del quaternione per acquisire il risultato, attraverso l'ingresso *QUATres*, nella sezione di verifica dei requisiti della funzione di *Reject*. Per semplicità di implementazione i residui dell'assetto espresso mediante gli angoli di Eulero vengono calcolati continuamente, anche quando non sono necessari, e sono forniti all'Unità di Controllo mediante l'ingresso *EULres*.

Come detto, il blocco *Vertical Reference* è sempre attivo. Attraverso l'uscita *gctr* si controlla il funzionamento di tale blocco in modo che la stima dell'accelerazione del velivolo venga impiegata per stimare il vettore gravità solo nella modalità di funzionamento con GPS attivo, mentre nelle modalità di GPS disattivo, di Allineamento e nel caso che venga eseguito il *Reset* dell'assetto, la stima del vettore gravità deve essere effettuata solo con le misure degli accelerometri.

La funzione di *Reject* è realizzata mediante la condizione logica del blocco *IF* nella parte bassa dello schema dell'Unità di Controllo, dove gli ingressi *QUATres* e *EULres* vengono sottoposti a verifica e consentono l'esecuzione del filtro solo al momento che la misura viene ritenuta valida, altrimenti si continua ad effettuare le misure ed a confrontarle con i risultati del calcolo dell'assetto.

Il comando di Allineamento viene impartito automaticamente all'accensione del sistema dal piccolo meccanismo realizzato nella parte alta dello schema dell'Unità di Controllo. Tale meccanismo offre la possibilità, tramite l'ingresso *ALIGN*, di comandare una nuova esecuzione dell'Allineamento in qualsiasi momento variando il valore posto nell'ingresso

mediante l'interruttore manuale *REALIGN* di Figura 5.2. Il segnale che comanda l'Allineamento determina anche la modalità di funzionamento, il modo in cui rilevare il Riferimento Verticale e quale metodo di misura dell'assetto adottare. In fase di Allineamento, data la natura della funzione, non viene consentito il *Reject* delle misure.

L'uscita *trg* è quella che definitivamente comanda l'esecuzione del filtro. Il segnale in uscita da *trg* ha le stesse caratteristiche del segnale *MasterTRG*, solo che la transizione al valore unitario avviene quando sono verificate tutte le condizioni affinché l'esecuzione del filtro avvenga.

Il controllo della funzione di *Reset* non interagisce con la logica di esecuzione del filtro. L'ingresso *AutoRST* attiva la funzione di *Reset* Automatico, l'ingresso *ManRST* fa eseguire un singolo *Reset* all'istante in cui il comando viene impartito indipendentemente dal soddisfacimento delle condizioni che servono a determinare l'accuratezza della misura dell'assetto. I valori degli ingressi *AutoRST* e *ManRST* vengono assegnati mediante gli interruttori manuali *ALLOW A&H AUTO-RESET* e *A&H MANUAL RESET* di Figura 5.2. Il meccanismo che regola il segnale di *Reset* manuale è tale da impartire un comando di *Reset* all'accensione del sistema, utile come inizializzazione dell'assetto per l'operazione di Allineamento. Il segnale di *Reset* controlla i valori delle uscite *gctr*, *GNenb* e *MSenb* per specificare il modo in cui va eseguita la misura dell'assetto. L'uscita *qrst* presenta un segnale con le stesse caratteristiche di *trg* e *MasterTRG*, effettuando la transizione al valore unitario nel momento in cui va realizzato il *Reset* per la durata pari al passo di simulazione.

Per concludere si fa presente che tutti gli interruttori manuali del sistema sono azionabili sia prima di avviare il sistema che durante il suo funzionamento.

5.14 Altri blocchi

Nella precedente trattazione non sono stati descritti esplicitamente due blocchi del sistema: *QUATres* e *QUATRST*.

Come si è avuto modo di accennare, il blocco *QUATres* calcola il residuo dei quaternioni usato come misura per il filtro di Kalman, come correzione dell'assetto nella funzione di *Reset* e come dato da analizzare per la funzione di *Reject*. All'interno di questo blocco viene eseguito il primo controllo dei moduli delle componenti del residuo, di cui si è parlato al paragrafo 5.11, e se uno di essi risulta maggiore di uno viene invertito il segno di uno dei quaternioni e si ripete il calcolo del residuo. La parte restante della verifica della condizione di *Reject* relativa ai residui del quaternione viene eseguita all'interno dell'Unità di Controllo.

Il blocco *QUATRST* non contiene altro che uno switch. Quando non viene comandato il Reset, l'uscita del blocco è posta a zero ed il meccanismo di correzione degli angoli di assetto nel blocco *Attitude Heading Calculation* rimane inattivo. Quando si esegue il Reset, all'ingresso del blocco *QUATRST* vengono fornite le correzioni da apportare all'assetto ed il segnale *qrst* le fa passare all'uscita per il tempo che *qrst* assume il valore unitario: in questa situazione si attiva automaticamente il meccanismo di correzione dell'assetto ed il *Reset* viene effettuato.

6 Tuning del filtro

Il *Tuning* è un'operazione che consente di fissare i parametri che regolano il funzionamento di un sistema sulla base di criteri appositamente stabiliti. Un modo di eseguire il *Tuning* è quello di condurre un'analisi Monte Carlo su una serie di situazioni di funzionamento preparate per l'occorrenza, sufficientemente ampia da essere rappresentativa della reale casistica delle condizioni in cui il sistema deve operare. Questo approccio si applica eseguendo le simulazioni del sistema in tutte le situazioni di funzionamento previste con diverse combinazioni di parametri, collezionando i risultati e stabilendo quale set di parametri soddisfa al meglio i criteri di scelta.

In questo lavoro il funzionamento dell'AHRS dipende da due gruppi di parametri: le covarianze nelle matrici **Q** ed **R** del modello, le quali determinano il funzionamento del filtro di Kalman e per questo si possono indicare anche come *parametri del filtro*, ed altri parametri da cui dipende il funzionamento generale del sistema o di qualche sua funzione specifica che, per citarne alcuni, sono la frequenza di esecuzione del filtro, l'intervallo di tempo assegnato alla derivata discreta della velocità del GPS, la soglia di *Reject* degli angoli di assetto e le soglie delle misure inerziali nella funzione di Reset. Spesso gli intervalli di valori ammissibili per i parametri del sistema sono stretti e dettati da ragioni concettuali, in questi casi il *Tuning* può servire ad effettuare una scelta fine dei loro valori. Per i parametri del filtro questa cosa generalmente non vale, la conoscenza delle covarianze del modello è spesso limitata ad alcuni termini dei rumori di processo e l'operazione di *Tuning* acquisisce un ruolo di una certa importanza.

Le manovre di riferimento a disposizione in questo lavoro, per effettuare le simulazioni del sistema in condizioni operative diverse, sono poche ed insufficienti a rappresentare il quadro completo delle possibili situazioni di funzionamento. Mediante esse non è possibile condurre un *Tuning* valido, ma qualcosa è stato fatto ugualmente. Mentre i parametri generali del sistema, quelli facenti parte del secondo gruppo indicato sopra, sono stati assegnati prevalentemente su base concettuale cercando nelle simulazioni solo le conferme alle aspettative sul funzionamento del sistema, i parametri del filtro sono stati assegnati

ricercando, mediante le tecniche di analisi del *Tuning*, gli intervalli di valori sicuramente da scartare in quanto responsabili di cattive caratteristiche di funzionamento del sistema nelle poche manovre disponibili. In questo modo, restringendo il campo dei valori accettabili dei parametri del filtro, la scelta finale è stata condotta preferendo i valori centrali degli intervalli e comunque secondo il senso critico. In questo modo si è potuta fissare una valida configurazione del sistema nel contesto di questo lavoro che può essere anche considerata come punto di partenza per ulteriori sviluppi.

Di seguito viene descritto il criterio che ha guidato il *Tuning* del filtro ed il procedimento che ha portato all'individuazione degli intervalli dei parametri accettabili e quindi a fissare i valori riportati in Tabella 5.3 di pagina 129.

6.1 Criterio di Tuning

La scelta dei parametri del filtro viene condotta sulle Sequenze di *Tuning* (paragrafo 4.2.3) valutando le seguenti caratteristiche di errore degli angoli di assetto, determinate complessivamente sulle 60 sequenze di ingresso:

- Errore medio;
- Errore RMS;
- Errore massimo.

Il fine dell'analisi è quello di escludere le combinazioni di parametri che generano grandi errori, per eseguire la scelta dei valori finali di Tabella 5.3 rimanendo mediamente al centro degli intervalli dei valori accettabili. Nella fase di *Tuning* le funzioni di *Reject* e di *Reset* vengono disabilitate.

6.2 Procedimento applicato

I parametri del filtro da determinare sono (paragrafi 5.2.4 e 5.9):

- $GyrWNCOV$, covarianza del rumore bianco che modella il rumore di misura dei giroscopi;
- $RWCOV$, covarianza del rumore bianco nel processo di Wiener che modella gli errori di *Bias* dei giroscopi;
- $QuatCOV$, covarianze dei rumori bianchi che modellano gli errori di misura dell'assetto nel caso di volo rettilineo uniforme;

- KA , parametro da cui dipende l'aumento delle covarianze dei rumori di misura in funzione dell'intensità delle accelerazioni dovute alle manovre del velivolo;
- $baseR$, parametro da cui dipende l'aumento delle covarianze dei rumori di misura in funzione della velocità di imbardata del velivolo.

Questi parametri sono da assegnare per ciascuna modalità di funzionamento. La maggior parte del lavoro di analisi è stato condotto per la modalità con GPS attivo, mentre per le altre due modalità di funzionamento i parametri sono stati assegnati soprattutto per via concettuale sulla base dei risultati del caso con GPS attivo e col supporto di poche simulazioni mirate.

6.2.1 Modalità con GPS attivo

Il parametro $GyrWNCOV$ si assegna sulla base della densità spettrale del rumore di misura del giroscopio simulato in questo sistema, che è l'unico dato disponibile. In realtà $GyrWNCOV$, come è tipico fare, dovrebbe essere fissato ad un valore più alto per mettere in conto anche i termini di errore di misura non modellati, ma in questo lavoro non è importante farlo, per il seguente motivo. Questo parametro è l'unico ad essere assegnato sulla base di informazioni quantitative sui componenti del sistema, mentre gli altri vengono individuati secondo il processo di *Tuning*: il comportamento del filtro non dipende dal valore assoluto dei vari parametri ma dai loro rapporti, per cui fissare il valore di uno solo dei parametri non pregiudica il risultato (i valori assoluti dei parametri influiscono sulle covarianze degli errori di stima calcolate dal filtro, ma se non si è interessati ad esse non fa alcuna differenza).

PRIMO PASSO

Una prima indagine sulla sensibilità del sistema alle impostazioni dei parametri del filtro è stata condotta sulla Sequenza di Sviluppo al fine di delineare un quadro iniziale della situazione. I parametri KA e $baseR$ sono stati fissati ai valori $KA = 0$ e $baseR = 1$ per rendere costante la covarianza dei rumori di misura, rendendola insensibile alle manovre nell'applicazione della legge (5.75), al fine di condurre un'analisi per grandi linee sull'effetto dei parametri principali del filtro. I parametri $RWCOV$ e $QuatCOV$ sono stati fatti variare di un ordine di grandezza alla volta entro intervalli estremamente ampi, eseguendo le simulazioni del sistema per tutte le loro combinazioni. Dai risultati è emerso che i valori dei parametri per i quali il funzionamento dell'AHRS è accettabile rispettano le seguenti condizioni:

$$QuatCOV \in [10^{-3}; 10^2] \quad (6.1)$$

$$\frac{QuatCOV}{RWCOV} \in [10^4; 10^7] \quad (6.2)$$

Se come valore di primo tentativo si considera $QuatCOV = 1$, per $RWCOV$ si può fissare il valore iniziale 10^{-5} .

SECONDO PASSO

Dopo la prima constatazione del comportamento del sistema in funzione dei parametri del filtro, nella fase successiva è stata analizzata la sensibilità alle variazioni di KA e $baseR$, basando le analisi sulle Sequenze di *Tuning*. Tali parametri sono stati fatti variare entro gli intervalli $KA \in [0.1; 5]$ e $baseR \in [1.1; 10]$, facendo assumere ai termini $f(\mathbf{A}_{IMU})$ e $f(r)$ della relazione (5.75) gli andamenti rappresentati in Figura 6.1.

Nell'analisi è stato fatto variare anche il parametro $QuatCOV \in [10^{-5}; 1]$ per due motivi: uno è di evitare di considerare covarianze degli errori di misura che assumono valori solo nella parte alta dell'intervallo accettabile definito dalle (6.1) e (6.2) (si sta considerando $RWCOV = 10^{-5}$), l'altro è di analizzare il comportamento del sistema quando, in presenza di peso variabile delle misure, nei casi di volo rettilineo si attribuisce ad esse un peso maggiore rispetto a quanto stabilito nella precedente indagine.

Si fa notare che per i valori più alti di KA e $baseR$ la covarianza di misura raggiunge

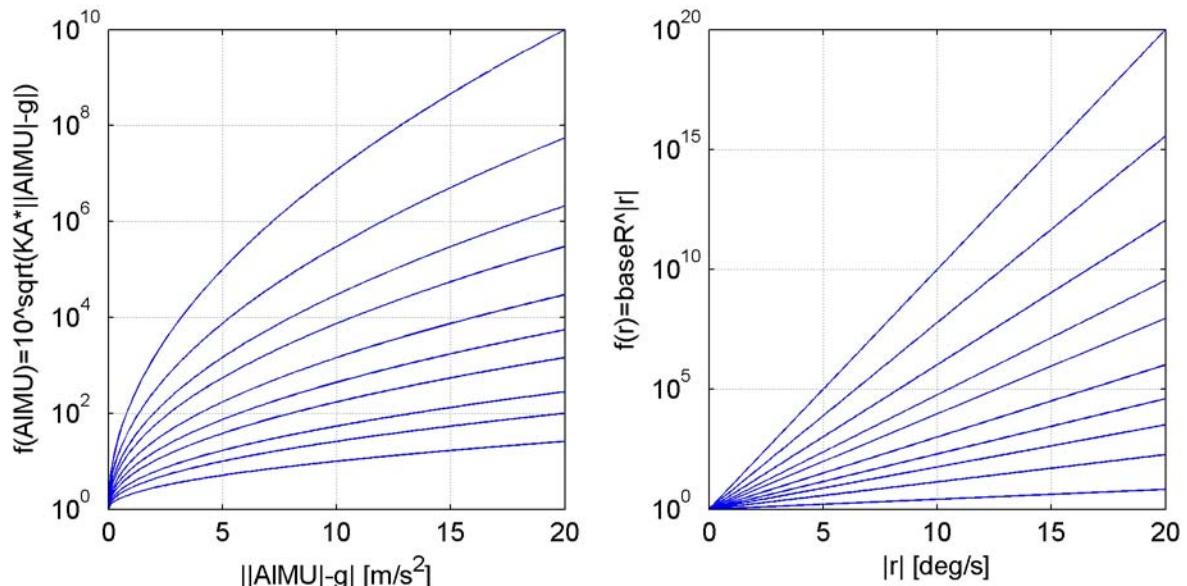


Figura 6.1 Curve considerate nel *Tuning* per la variazione della covarianza di misura.

livelli molto elevati per piccoli valori di $\|\mathbf{A}_{\text{IMU}}| - g|$ ed $|r|$, attribuendo un peso praticamente nullo alle misure dell'assetto: questa evenienza è stata inclusa nell'analisi perché è equivalente a disattivare il filtro quando le manovre raggiungono una certa intensità, potendo così testare l'efficacia di una simile soluzione.

I risultati ottenuti sono stati cattivi in linea generale per le configurazioni con valori estremi di QuatCOV , mentre per i valori $\text{QuatCOV} \in (10^{-3}; 10^{-1})$ non si è manifestata una netta differenza fra le varie configurazioni di KA e $baseR$ ad eccezione di alcune combinazioni limite (entrambi i parametri molto alti o molto bassi).

Per i valori di KA e $baseR$ si è deciso in via cautelativa di assegnare dei valori non troppo bassi, ponendo $KA=1$ e $baseR=1.5$. Il valore di riferimento di QuatCOV è stato assunto pari a 10^{-2} , che appare il più sensato nella condizione di peso variabile delle misure, nei limiti dell'analisi svolta.

TERZO PASSO

Come ultima verifica è stato fatto variare il parametro $RWCOV \in [10^{-7}; 10^{-3}]$ nelle simulazioni con le Sequenze di *Tuning* avendo fissato $KA=1$, $baseR=1.5$ e $\text{QuatCOV}=10^{-2}$. L'intervallo con i risultati migliori ed equivalenti fra loro è stato $RWCOV \in (10^{-6}; 10^{-4})$, con un peggioramento al di fuori di esso. Questo suggerisce di mantenere il valore di partenza $RWCOV=10^{-5}$ ed indica che inibendo la stima dei *Bias*, mediante l'assegnazione di bassi valori di $RWCOV$, le prestazioni peggiorano. In altre parole questi risultati affermano che la stima dei *Bias* è certamente efficace per migliorare le prestazioni quando tali errori subiscono le variazioni simulate nelle Sequenze di *Tuning*.

6.2.2 Modalità con GPS disattivo

Si è visto che nel caso di GPS disattivo l'accuratezza delle misure cambia solo quando sono presenti le accelerazioni dovute al moto, specialmente in caso di virata. Per questo motivo, rispetto alle scelte per la modalità con GPS attivo, è logico modificare solo i parametri KA e $baseR$, in modo che fra le due modalità di funzionamento ci sia una differenza di peso delle misure solo quando vengono rilevate delle manovre. Appare sensato anche tenere particolarmente in considerazione la velocità angolare di imbardata, visto che indica l'esecuzione delle virate a meno che tali manovre non vengano eseguite ad angoli di

rollio molto accentuati. Nel caso di virate molto strette eseguite a forti angoli di rollio, la misura della velocità di imbardata è bassa ma le accelerazioni sono elevate, quindi tale situazione non viene sottovalutata dal sistema perché viene messa adeguatamente in considerazione dal termine $f(\mathbf{A}_{\text{IMU}})$.

Da un'analisi condotta assegnando i parametri della modalità con GPS attivo e facendo variare KA e $baseR$ come in precedenza (Figura 6.1) si è visto che anche in questo caso non c'è una spiccata sensibilità ai valori di questi ultimi. I valori fissati sono stati $KA = 3$ e $baseR = 6$, dove è il secondo parametro a distinguere in modo particolare le due modalità di funzionamento.

6.2.3 Modalità di Allineamento

Nella modalità di Allineamento sono state condotte solo alcune simulazioni sulla Sequenza di Allineamento alla ricerca della combinazione di parametri che rendesse la stima dei *Bias* più veloce possibile. I parametri KA e $baseR$ sono stati fissati rispettivamente pari a zero ed uno per ottenere un valore costante della covarianza dei rumori di misura nell'applicazione della relazione (5.75), impostazione adatta alla situazione di assenza di accelerazioni durante l'Allineamento. Procedendo per tentativi, il parametro $RWCov$ è stato aumentato e $QuatCOV$ è stato diminuito allo scopo di aumentare la velocità di correzione degli errori di *Bias* fino a quando i cambiamenti non hanno più generato effetti. Si ricorda che aumentare $RWCov$ rende più intenso il processo Random Walk e quindi rende più sensibile la stima dei *Bias*. I valori assegnati ai parametri sono $RWCov = 10^{-4}$ e $QuatCOV = 10^{-9}$.

7 Risultati

In questo capitolo vengono riportati e commentati i risultati di una serie di simulazioni di funzionamento del sistema. Inizialmente vengono presentate le prestazioni calcolate sulle Sequenze di Valutazione nei casi caratterizzati da diverse combinazioni di GPS disponibile o non disponibile, di attivazione o disattivazione delle funzioni di *Reject* e di *Reset*, di determinazione della misura dell'assetto mediante il metodo di Gauss-Newton o mediante il metodo Master-Slave e di applicazione o meno della logica di funzionamento che varia il peso delle misure in funzione della severità delle manovre. Vengono anche proposti i risultati di simulazioni nella situazione in cui venga impedita la stima degli errori di *Bias*. Successivamente vengono presentati degli esempi di funzionamento per apprezzare graficamente il livello di accuratezza delle stime effettuate in singole simulazioni, mostrando il comportamento del sistema sulle tre manovre di riferimento e l'effetto, che merita una nota, della variazione della sensibilità di stima dei *Bias* dei giroscopi.

7.1 Prestazioni

Le prestazioni del sistema sono valutate sulla base degli errori di stima dell'assetto nelle simulazioni eseguite con le Sequenze di Valutazione, mediante i seguenti parametri di prestazione:

- Errore RMS;
- Errore medio;
- Errore massimo.

In Tabella 7.1 sono riportate le prestazioni sommarie di alcuni AHRS presenti sul mercato, tratte dalle brochure informative reperibili nei siti internet dei produttori. Questi dati, anche se non direttamente confrontabili con i risultati presentati di seguito, sono utili per avere un'idea delle capacità degli attuali AHRS in funzione della loro tecnologia.

AHRS	Caratteristiche	Prestazioni Assetto (°)			Note
		Roll	Pitch	Yaw	
Crossbow AHRS500	Sensori MEMS. Non si avvale di dati esterni GPS o Dati Aria (TAS). Certificato FAA.	± 2.5	± 2.5	± 2	Accuratezza rilevata nelle condizioni di test prescritte da: Pitch & Roll FAA TSO C4c Yaw FAA TSO C6d
Rockwell Collins AHRS-3000	Sensori MEMS. Si avvale di Dati Aria (TAS). Certificato FAA.	± 0.5 ± 1	± 0.5 ± 1	± 1 ± 2	Accuratezza 2 sigma: - in condizioni statiche - in manovra
Honeywell AH-2100 Super AHRS	Accelerometri MEMS a ciclo chiuso, Giroscopi RLG (Ring Laser Gyro). Non si avvale di dati esterni GPS o Dati Aria (TAS). Certificato FAA.	± 0.15	± 0.15	± 1	Accuratezza 2 sigma in condizioni dinamiche

Tabella 7.1 Prestazioni di AHRS presenti sul mercato (dati tratti dalle brochure informative).

In Tabella 7.2 sono riportati i risultati nei casi di funzionamento con GPS attivo e disattivo, specificando le prestazioni parziali su ogni manovra di riferimento ed i risultati globali sull'intero gruppo di Sequenze di Valutazione. In queste simulazioni il *Reject* delle misure è attivo ed il *Reset* dell'assetto è disattivo. Limitatamente alle poche manovre di riferimento a disposizione, i dati rivelano delle buone prestazioni generali del sistema, con risultati di stima dell'angolo di imbardata leggermente peggiori di quelli degli angoli di beccheggio e di rollio. Nel caso di GPS disattivo si nota che le prestazioni sono lievemente inferiori rispetto al caso con GPS attivo, ma rimangono comunque molto buone.

7.2 Efficacia delle soluzioni

Al fine di valutare l'efficacia delle varie soluzioni adottate per ridurre gli errori di stima dell'assetto, in Tabella 7.3 sono riportate le prestazioni del sistema con impostazioni diverse, che riguardano:

- GPS attivo o disattivo;
- Applicazione o meno della logica di funzionamento che fa attribuire un peso variabile alle misure dell'assetto in funzione della severità delle manovre;
- Determinazione della misura dell'assetto mediante il metodo di Gauss-Newton o mediante il metodo Master-Slave;

- Attivazione o disattivazione delle funzioni di *Reset* e di *Reject*.

I valori degli errori RMS degli angoli di assetto sono rappresentati graficamente nelle successive figure, al fine di agevolare il confronto dei risultati.

In Figura 7.1 la prima cosa che si può notare è l'efficacia della logica di funzionamento secondo la quale il peso delle misure varia in funzione della severità delle manovre (logica qui indicata con PVM - Peso Variabile delle Misure): nel caso di GPS disattivo il miglioramento delle prestazioni è molto marcato e anche con GPS attivo, seppur minore, il miglioramento è evidente. Si nota poi che la disponibilità del GPS fa molta differenza nelle prestazioni nel caso in cui la logica PVM non venga applicata, mentre nel caso contrario ha un effetto decisamente minore. Questi risultati da un lato indicano che la presenza del GPS di per sé è utile per migliorare le prestazioni in modo abbastanza marcato, e dall'altro che la tecnica di diminuire il peso delle misure durante le manovre è molto efficace per sopperire all'eventuale assenza del GPS ed alla degradazione delle misure stesse che in ogni caso si verifica durante le manovre intense. Grazie all'applicazione della logica di funzionamento PVM, in mancanza del GPS si hanno solo limitate diminuzioni delle prestazioni rispetto al caso con GPS disponibile.

Input Seq.(*)	Errore RMS (°)			Errore Medio (°)			Errore Massimo (°)		
	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw
GPS-ON:									
A	0.369	0.426	1.09	0.037	0.014	0.111	2.51	2.16	6.47
B	0.491	0.151	0.919	0.209	0.158	0.364	1.99	1.17	5.66
C	1.04	0.639	1.13	0.320	0.413	0.248	2.66	3.03	4.06
TOT	0.482	0.417	1.07	0.102	0.092	0.167	2.66	3.03	6.47
GPS-OFF:									
A	0.622	0.497	1.21	0.152	0.121	0.268	2.87	2.04	6.51
B	1.11	0.212	1.99	0.296	0.064	0.531	3.77	1.84	8.74
C	0.573	0.409	0.954	0.441	0.155	0.930	2.62	2.11	5.06
TOT	0.684	0.441	1.28	0.214	0.117	0.400	3.77	2.11	8.74
(*) Legenda:									
A,B,C: Risultati parziali sulle Sequenze di Valutazione relative alle singole manovre di riferimento									
A – ManvTest4									
B – LightTurbulence_leveled									
C – HighTurbulence_leveled									
TOT: Risultati globali sulle Sequenze di Valutazione									

Tabella 7.2 Prestazioni sulle Sequenze di Valutazione nei casi di GPS attivo e disattivo.

I risultati riportati in Figura 7.2 riguardano le stesse situazioni della figura precedente ma con l'attivazione della funzione di *Reject*. La scala del grafico è stata posta uguale a quella della precedente figura per apprezzare meglio le differenze. Si osserva che il *Reject* ha fortemente migliorato le prestazioni nel caso di GPS disattivo e di logica PVM non applicata, agendo in modo simile a tale logica. Negli altri casi ha generato un modesto miglioramento generale delle prestazioni, maggiormente nel caso di GPS disattivo.

In Figura 7.3 si possono apprezzare i lievi miglioramenti delle prestazioni che derivano dall'uso del metodo di Gauss-Newton invece del metodo Master-Slave. Dalla Figura 7.4, che riporta i risultati nelle stesse condizioni della figura precedente ma con la funzione di *Reject* attiva, si osserva nuovamente che tale funzione introduce dei generali miglioramenti delle prestazioni.

Riguardo all'efficacia della funzione di *Reset*, dall'unica simulazione condotta sulle

GPS	P.V.M.	Impostazioni		Errore RMS (°)			Errore Medio (°)			Errore Massimo (°)		
		G-N	Reject	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw
		•		2.47	1.89	5.15	0.147	0.256	3.26	18.4	18.1	19.5
•		•		0.924	0.981	2.29	0.272	0.043	0.266	5.15	7.71	18.3
•		•	•	0.651	0.561	1.37	0.141	0.139	0.272	3.40	3.67	8.38
•		•	•	0.438	0.450	0.836	0.138	0.059	0.207	3.13	2.87	4.76
•		•	•	0.711	0.523	1.59	0.210	0.040	0.503	3.77	2.75	8.74
•		•	•	0.578	0.502	1.49	0.244	0.069	0.613	5.04	2.72	7.83
•		•	•	0.684	0.441	1.28	0.214	0.117	0.400	3.77	2.11	8.74
•		•	•	0.482	0.417	1.07	0.102	0.092	0.167	2.66	3.03	6.47
•		•	•	0.495	0.494	1.11	0.102	0.025	0.169	2.66	3.70	6.36
•		•		0.731	1.02	1.63	0.121	0.359	0.499	4.14	7.09	9.54
•		•		0.789	0.640	1.47	0.004	0.116	0.256	7.93	6.39	6.38
•		•	•	0.737	0.950	1.46	0.124	0.400	0.437	4.14	5.61	9.55
•		•		0.542	0.293	1.09	0.022	0.105	0.203	3.37	2.21	5.88

Legenda:

- P.V.M.: Peso Variabile delle Misure
- G-N: metodo di Gauss-Newton (se non attivo viene usato il metodo Master-Slave)

Tabella 7.3 Confronto delle prestazioni sulle Sequenze di Valutazione con diverse impostazioni del sistema.

Sequenze di Valutazione con *Reset* attivo, i cui dati sono riportati in Tabella 7.3, si osserva che tale funzione non porta vantaggi. Come si è già avuto modo di osservare nella fase di sviluppo, occasione nella quale sono stati forniti i risultati della simulazione su una sola sequenza di ingresso, il motivo dell’assenza di miglioramenti delle prestazioni è dovuto al fatto che gli errori dei valori di assetto a cui si re-inizializza l’integrazione delle velocità angolari sono comparabili agli errori di stima del sistema.

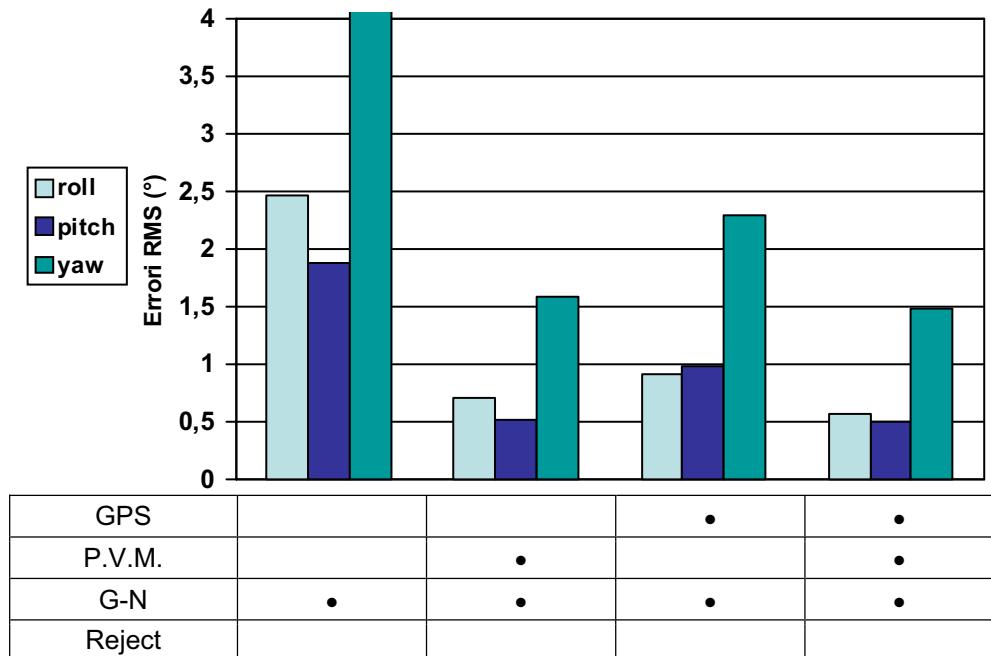


Figura 7.1 Effetti del GPS e del Peso Variabile delle Misure, senza *Reject*.

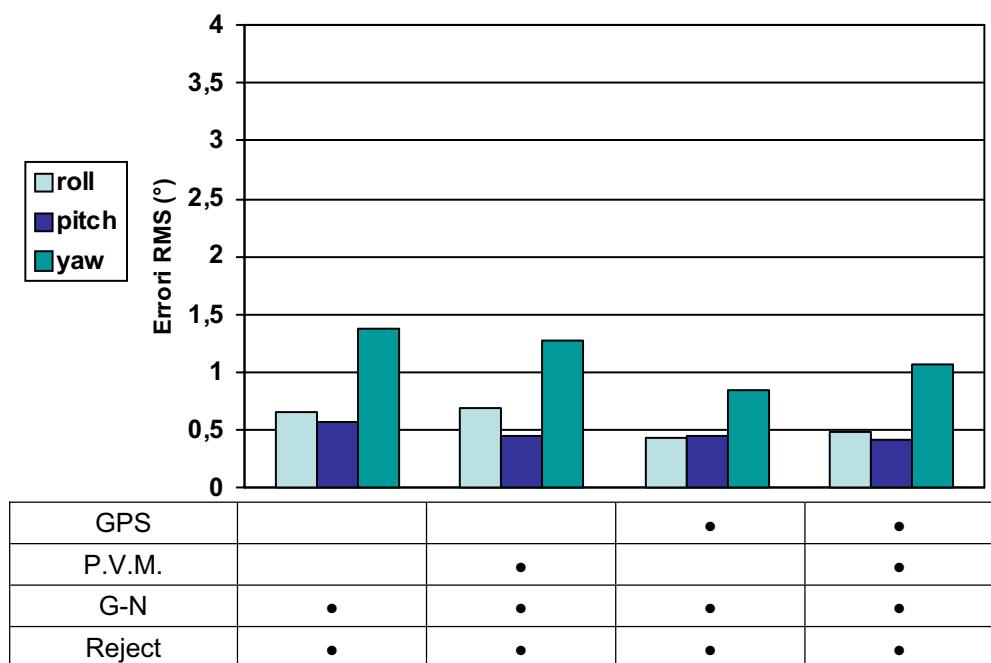


Figura 7.2 Effetti del GPS e del Peso Variabile delle Misure, con *Reject*.

Per valutare l'utilità della stima dei *Bias* sono state calcolate le prestazioni sulle Sequenze di Valutazione e sulle Sequenze di Tuning nei casi in cui tale stima venga consentita o impedita. Le Sequenze di Valutazione rappresentano delle normali condizioni di esercizio, intendendo delle situazioni in cui i *Bias* non subiscono forti variazioni durante il funzionamento. Le Sequenze di Tuning, invece, presentano delle variazioni casuali ed improvvise dei *Bias* (paragrafo 4.2.3), rappresentando delle condizioni di riferimento per analizzare il comportamento del sistema nelle rare circostanze in cui un evento accidentale

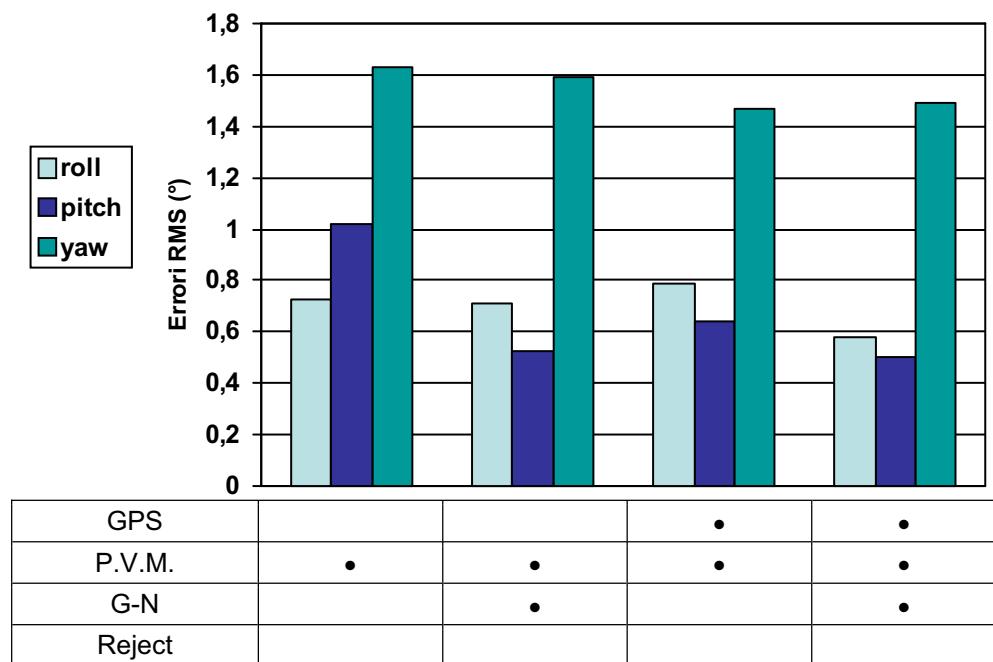


Figura 7.3 Effetti del GPS e del metodo di misura dell'assetto, senza *Reject*.

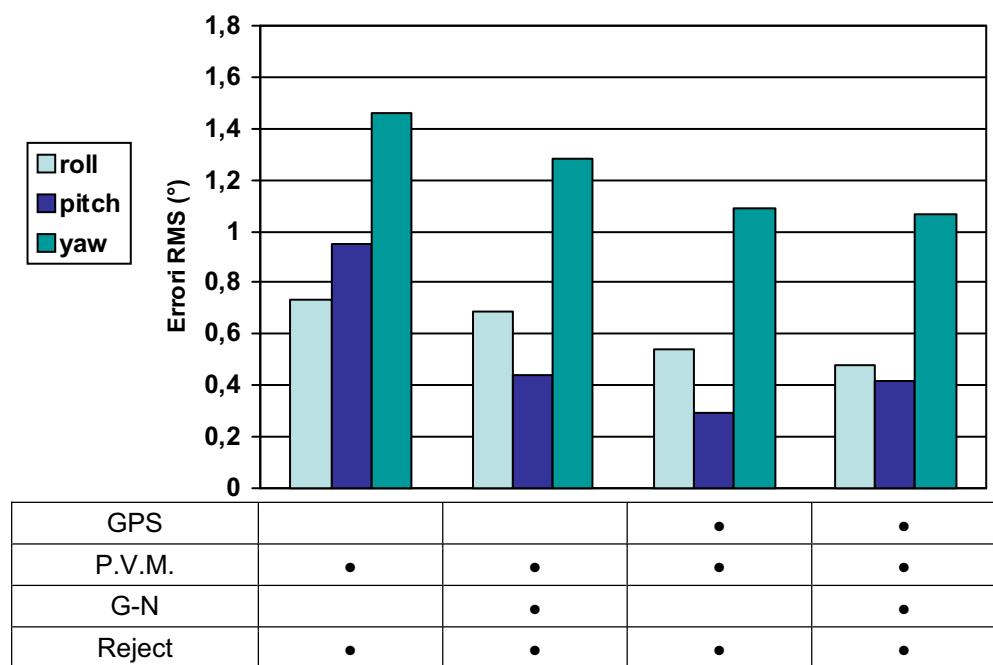


Figura 7.4 Effetti del GPS e del metodo di misura dell'assetto, con *Reject*

provoca la brusca variazione di questi termini di errore di misura. Le simulazioni sono state condotte considerando il GPS disponibile. I risultati sono riportati in Tabella 7.4 ed i valori degli errori RMS sono rappresentati graficamente in Figura 7.5. Come si può osservare, le prestazioni sulle Sequenze di Valutazione sono praticamente indipendenti dall'effettuazione delle stime dei *Bias*. Questo fatto ha due significati. Da un lato i risultati dicono che, per la qualità dei giroscopi simulati in questo sistema, la soluzione sviluppata per realizzare l'AHRS non trae vantaggio dalla stima dei *Bias* nelle normali condizioni di esercizio. Dall'altro lato la stessa informazione permette di affermare che la stima dei *Bias* non penalizza le prestazioni in condizioni normali, mentre dai risultati sulle Sequenze di Tuning è ben visibile il vantaggio che deriva dall'effettuare tali stime. Si può notare, inoltre, che sulle Sequenze di Tuning le prestazioni peggiorano. Questi dati consentono di affermare che la stima dei *Bias* dei giroscopi è efficace per migliorare le prestazioni del sistema.

Per ottenere i suddetti risultati, la stima dei *Bias* dei giroscopi è stata impedita scollegando la linea di feedback che dal filtro va al blocco della compensazione dei sensori inerziali (Figura 5.2), lasciando inalterati tutti i parametri del sistema per non introdurre ulteriori modifiche. A tal proposito si fa notare che la variazione del parametro *RWCov*, che influenza direttamente sulla sensibilità delle stime dei *Bias*, modifica anche la sensibilità delle stime degli errori di assetto. Questa constatazione è stata fatta variando il valore di *RWCov* in una serie di simulazione eseguite con la linea di feedback dei *Bias* scollegata: le prestazioni di stima dell'assetto sono risultate differenti, segno che le misure fornite al filtro hanno ricevuto un peso diverso per effettuare la stima dell'assetto (non effettuando il feedback dei *Bias*, le velocità angolari integrate nelle equazioni di assetto nei vari casi sono risultate sempre le stesse e non potevano influire nella variazione dei risultati). Quanto detto giustifica il modo in cui è stata impedita la stima dei *Bias*, mentre ponendo *RWCov* ad un valore

Input Seq.(*)	Stime Bias	Errore RMS (°)			Errore Medio (°)			Errore Massimo (°)		
		Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw	Roll	Pitch	Yaw
VAL	si	0.482	0.417	1.07	0.102	0.092	0.167	2.66	3.03	6.47
VAL	no	0.466	0.379	0.986	0.052	0.048	0.084	2.76	2.72	6.17
TUN	si	0.708	0.660	1.47	0.130	0.128	0.325	7.11	6.98	12.6
TUN	no	0.862	0.782	1.87	0.077	0.096	0.476	7.81	7.61	15.7

(*) Legenda:
 - VAL: Sequenze di Valutazione
 - TUN: Sequenze di Tuning

Tabella 7.4 Confronto delle prestazioni sulle Sequenze di Valutazione e sulle Sequenze di Tuning, con e senza stime dei *Bias*.

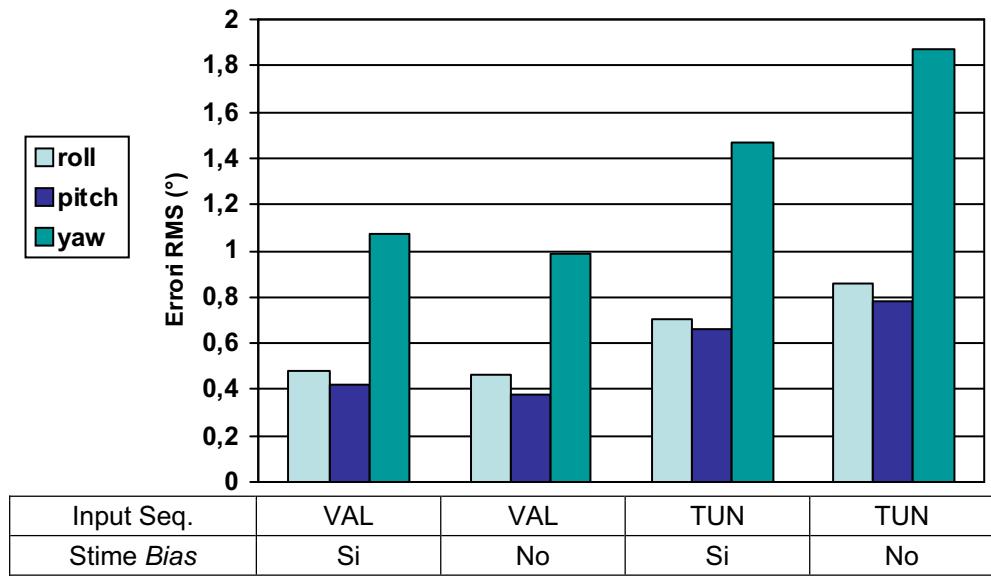


Figura 7.5 Confronto degli errori RMS sulle Sequenze di Valutazione e sulle Sequenze di Tuning, con e senza stime dei *Bias*.

arbitrariamente piccolo avrebbe inibito la stima dei *Bias* ma avrebbe anche condizionato le stime degli errori di assetto, rendendo non significativi i risultati.

7.3 Esempi di funzionamento

7.3.1 Esempi sulle tre manovre di riferimento

Da Figura 7.6 a Figura 7.11 vengono presentate le simulazioni del sistema su tre sequenze di ingresso tratte dalle Sequenze di Valutazione, una per ogni manovra di riferimento, scelte in modo che i risultati su di esse siano rappresentativi del comportamento medio del sistema sulla relativa manovra. Tale scelta è stata effettuata confrontando le prestazioni sulle singole sequenze con le prestazioni parziali di Tabella 7.2, individuando la sequenza i cui errori RMS dell'assetto sono più vicini a quelli di tabella.

7.3.2 Confronto di diverse sensibilità di stima dei *Bias*

Vengono messi a confronto i risultati di simulazioni condotte assegnando al parametro *RWCov* i valori $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$, facendo quindi variare la sensibilità della stima dei *Bias*. Si considerano due sequenze di ingresso, la Sequenza di Sviluppo ed una sequenza derivata da essa eliminando la variazione a gradino dei *Bias* dei giroscopi che avviene al tempo $t = 500$ sec, mentre per il resto coincidono. Il GPS è impostato come attivo. Si fa notare che i valori scelti per *RWCov* sono il valore centrale e gli estremi dell'intervallo che l'analisi di *Tuning* ha indicato per conseguire buone prestazioni nelle Sequenze di *Tuning*. Il valore

$RWCOV = 10^{-5}$ è anche quello fissato per il sistema ed ha prodotto il primo esempio di funzionamento presentato al paragrafo 5.8, che qui viene riproposto.

In Figura 7.12 e Figura 7.13 sono riportati i risultati delle simulazioni con la Sequenza di Sviluppo. Si nota che la capacità di inseguire il *Bias* vero migliora all'aumentare di $RWCOV$, anche se il valore $RWCOV = 10^{-4}$ rende la stima troppo sensibile e comporta delle frequenti oscillazioni poco soddisfacenti. Nonostante le diverse accuratezze di stima dei *Bias*, in tutti i casi le prestazioni di stima dell'assetto sono equivalenti, in accordo con quanto ha mostrato in modo generale l'analisi di *Tuning*.

I risultati di Figura 7.14 e Figura 7.15 mostrano il funzionamento con l'altra sequenza di ingresso, nella quale non si verifica la variazione a gradino dei *Bias*. In questo caso è evidente come la stima troppo sensibile dei *Bias*, ottenuta ponendo $RWCOV = 10^{-4}$, provochi delle sfavorevoli oscillazioni dei *Bias* stimati, le quali possono ritenersi responsabili dei maggiori errori nella stima dell'assetto in questa specifica simulazione.

Questi esempi non possono ritenersi rappresentativi delle generali condizioni di funzionamento del sistema ma non smentiscono che la scelta di $RWCOV = 10^{-5}$, effettuata in fase di *Tuning*, costituisce un buon compromesso fra la capacità di far fronte a variazioni brusche ed accidentali dei *Bias* e le migliori prestazioni quando tale situazione non si verifica.

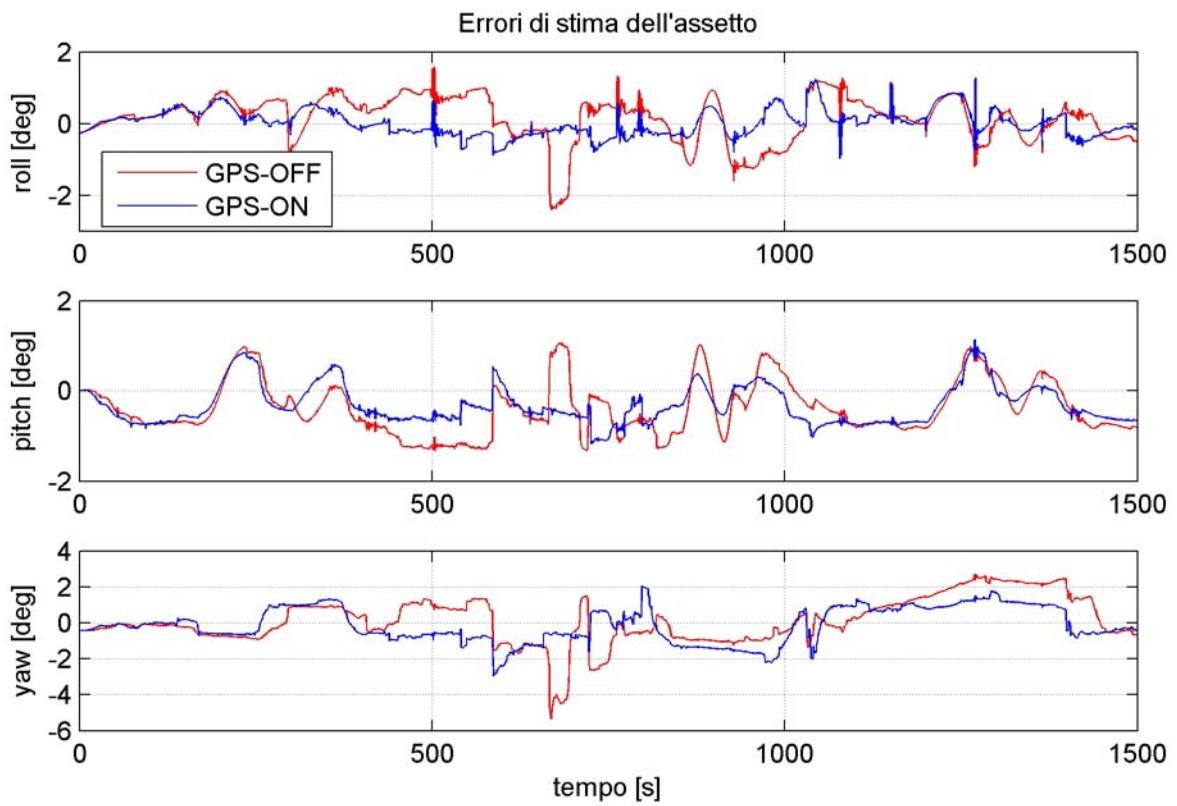


Figura 7.6 Risultati di stima dell'assetto su una realizzazione della manovra ManvTEST4.

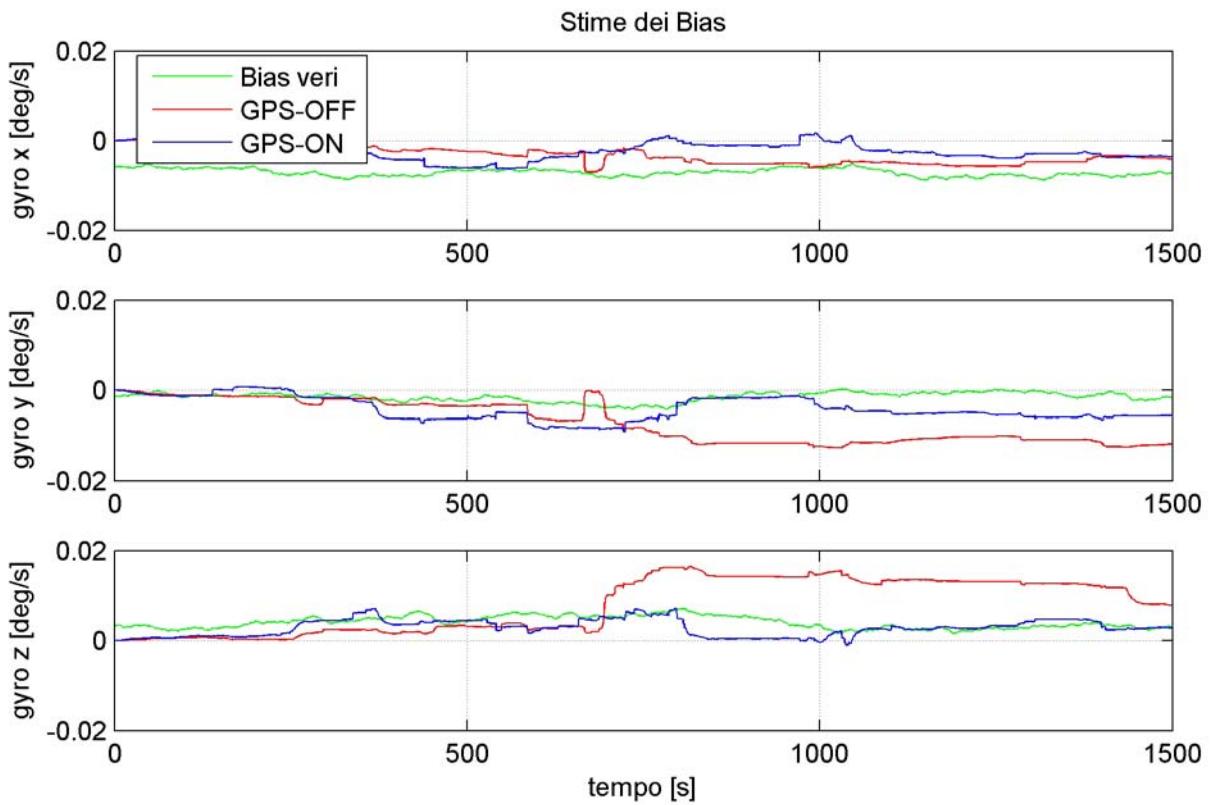


Figura 7.7 Risultati di stima degli errori di *Bias* su una realizzazione della manovra ManvTEST4.

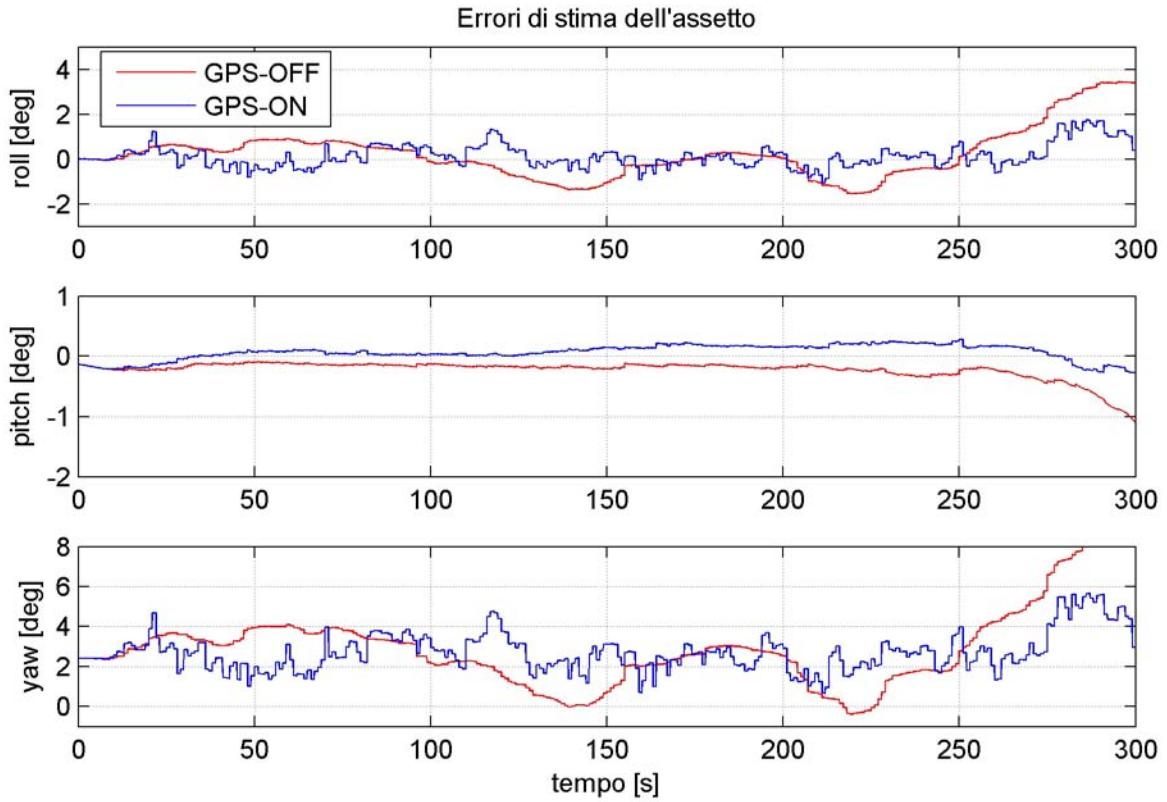


Figura 7.8 Risultati di stima dell'assetto su una realizzazione della manovra LightTurbulence_leveled.

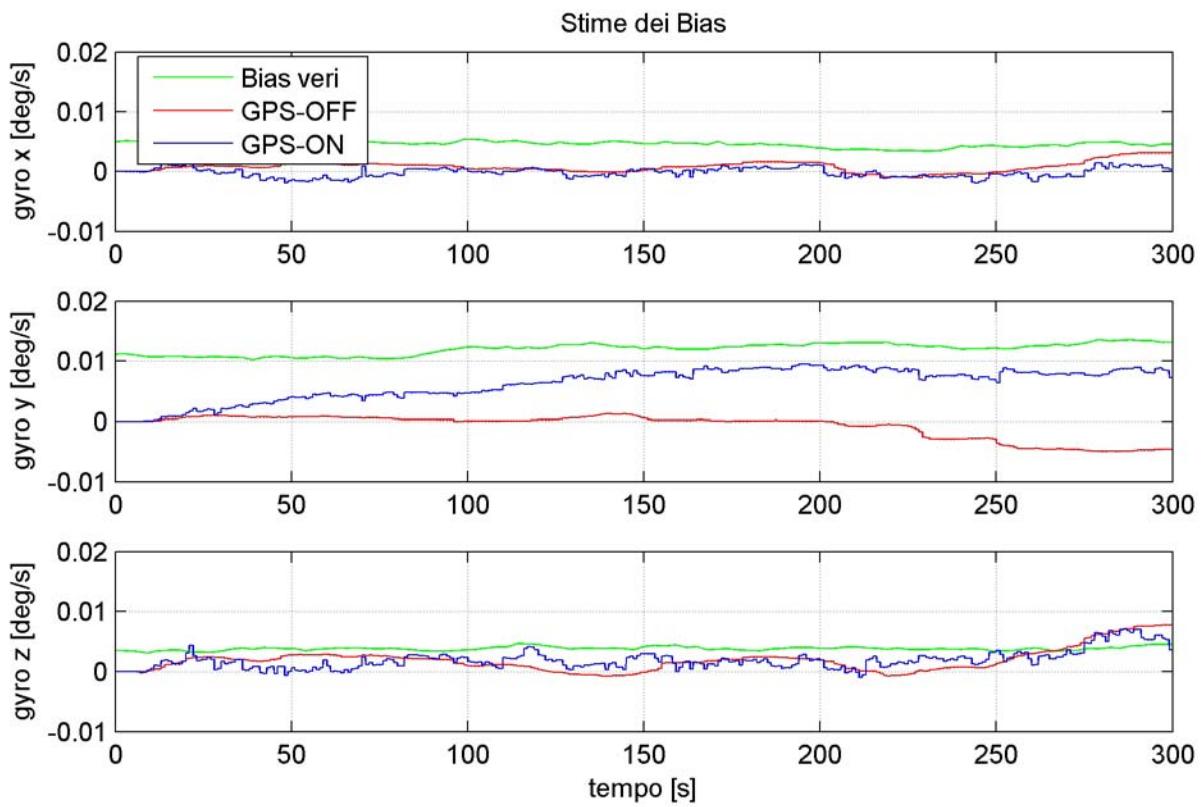


Figura 7.9 Risultati di stima degli errori di *Bias* su una realizzazione della manovra LightTurbulence_leveled.

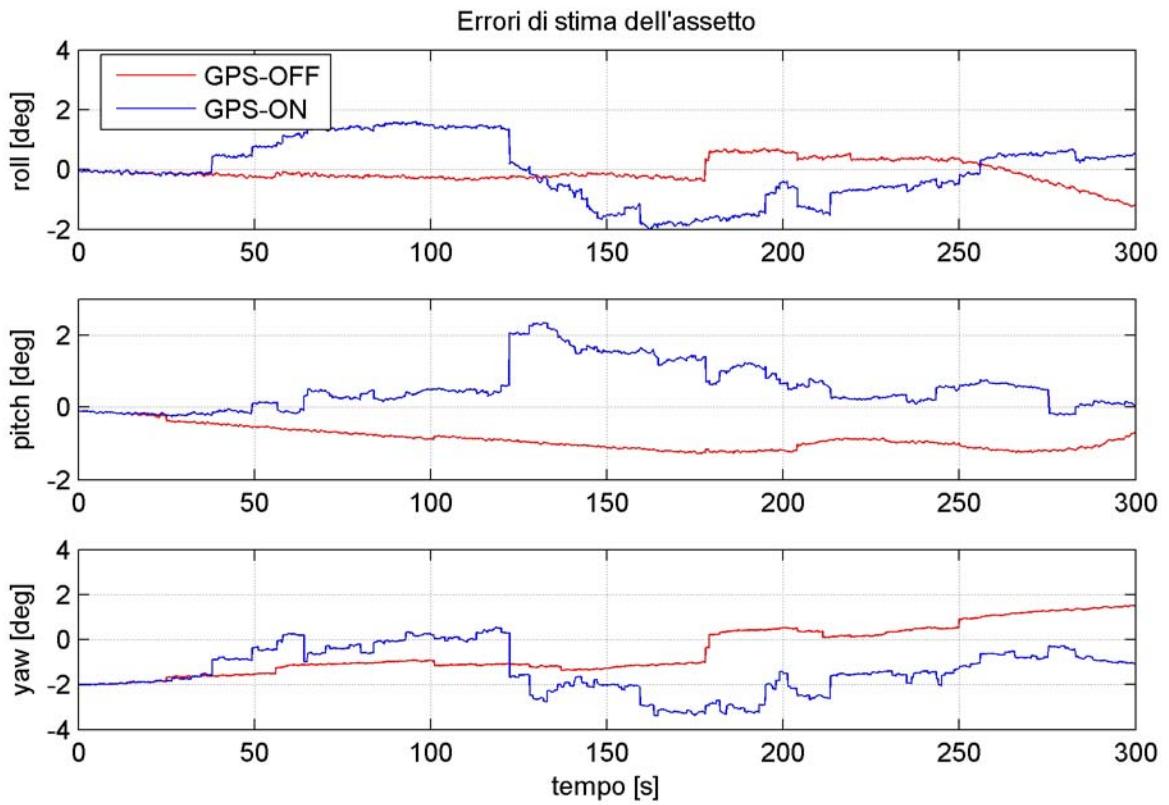


Figura 7.10 Risultati di stima dell'assetto su una realizzazione della manovra HighTurbulence_leveled.

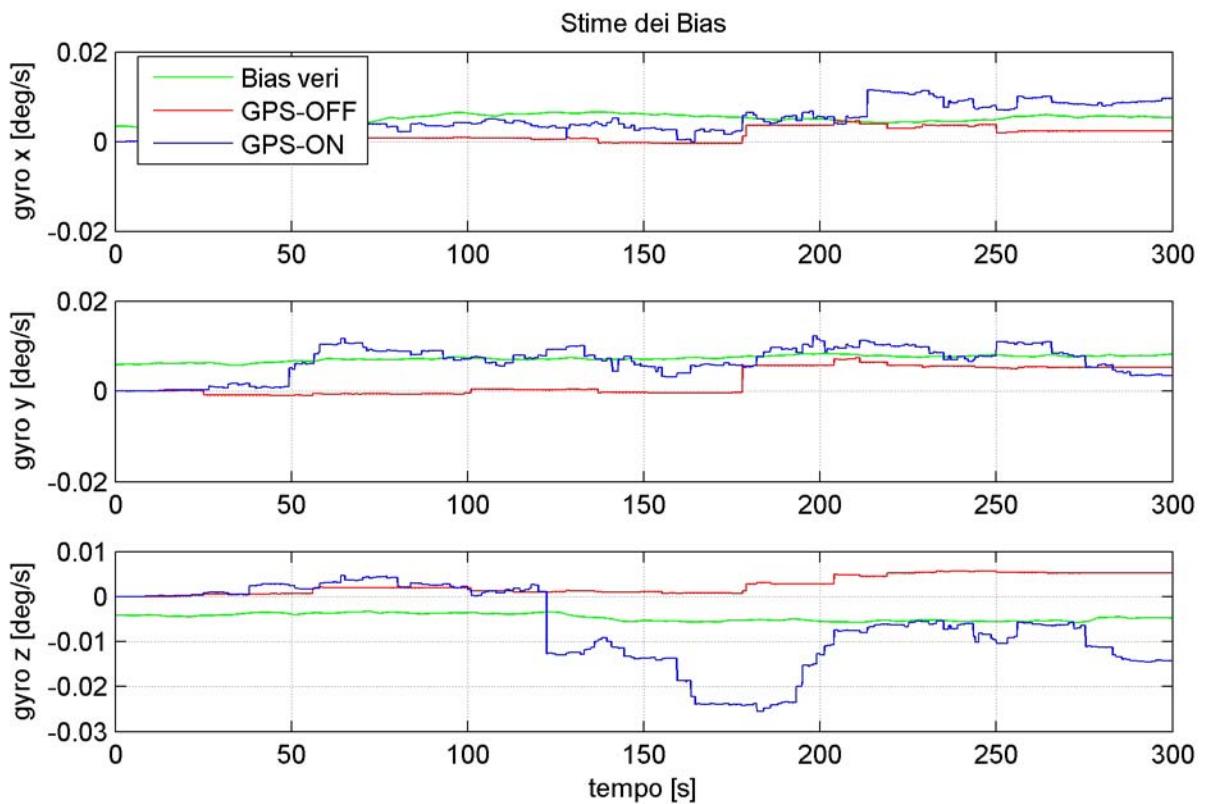


Figura 7.11 Risultati di stima degli errori di *Bias* su una realizzazione della manovra HighTurbulence_leveled.

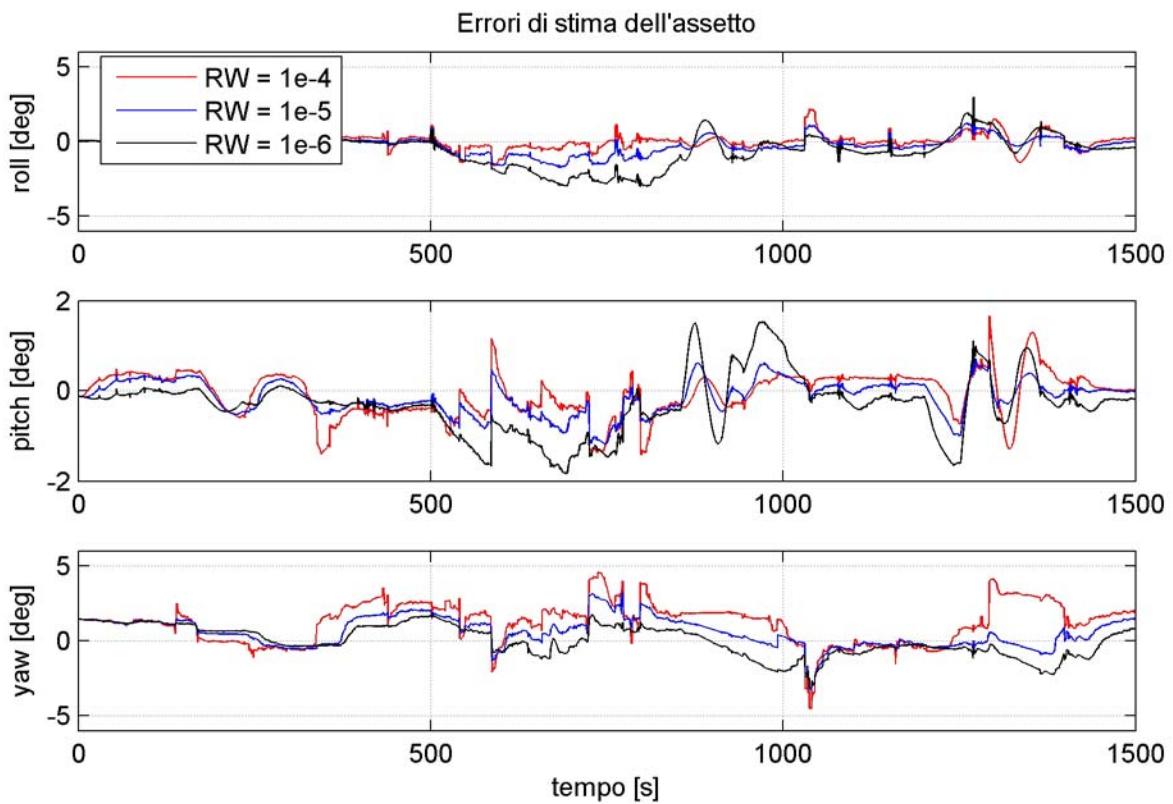


Figura 7.12 Risultati di stima dell'assetto sulla Sequenza di Sviluppo per diversi valori di $RWCov$.

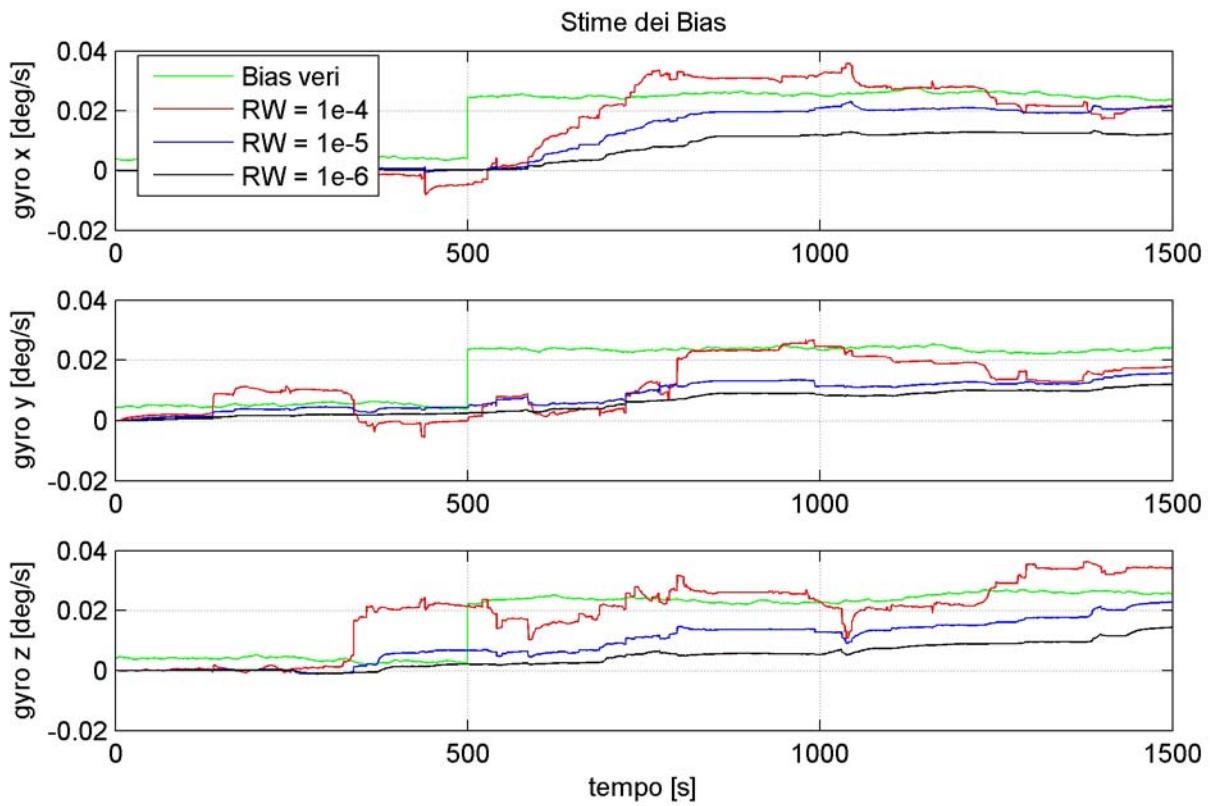


Figura 7.13 Risultati di stima degli errori di *Bias* sulla Sequenza di Sviluppo per diversi valori di $RWCov$.

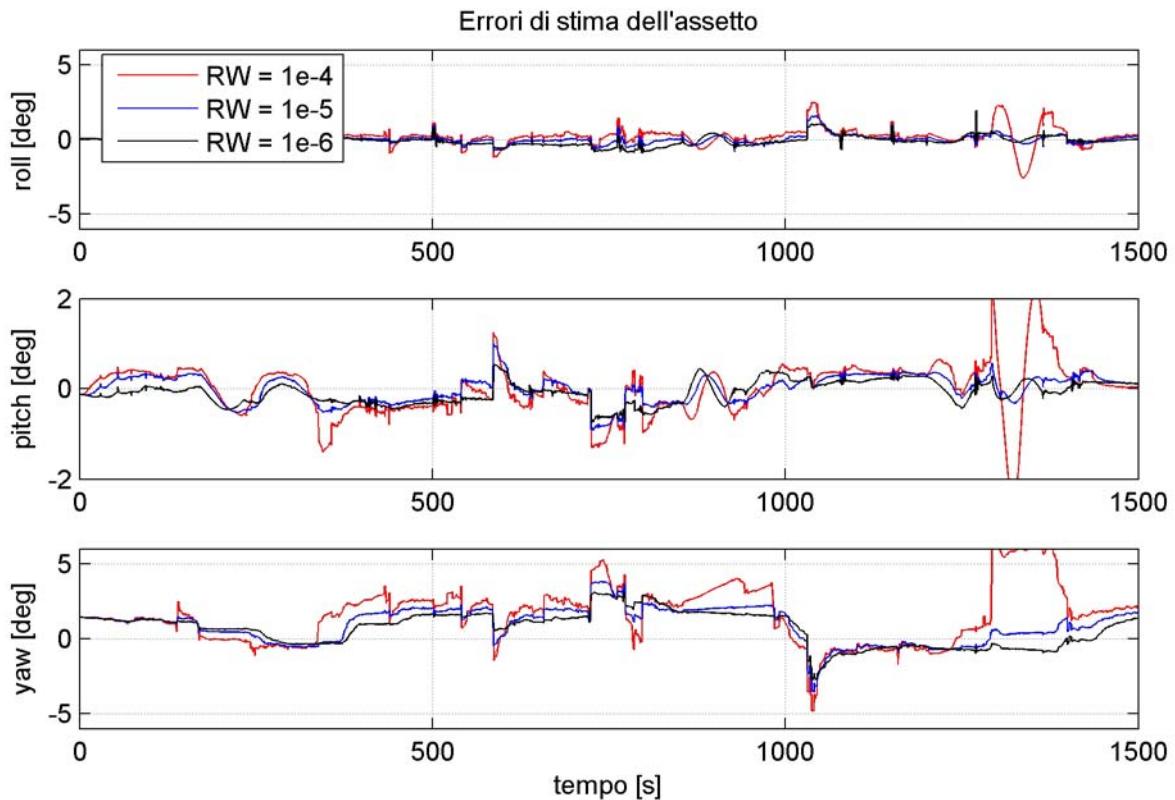


Figura 7.14 Risultati di stima dell'assetto sulla sequenza derivata da quella di Sviluppo, senza variazione a gradino dei *Bias* dei giroscopi, per diversi valori di *RWCov*.

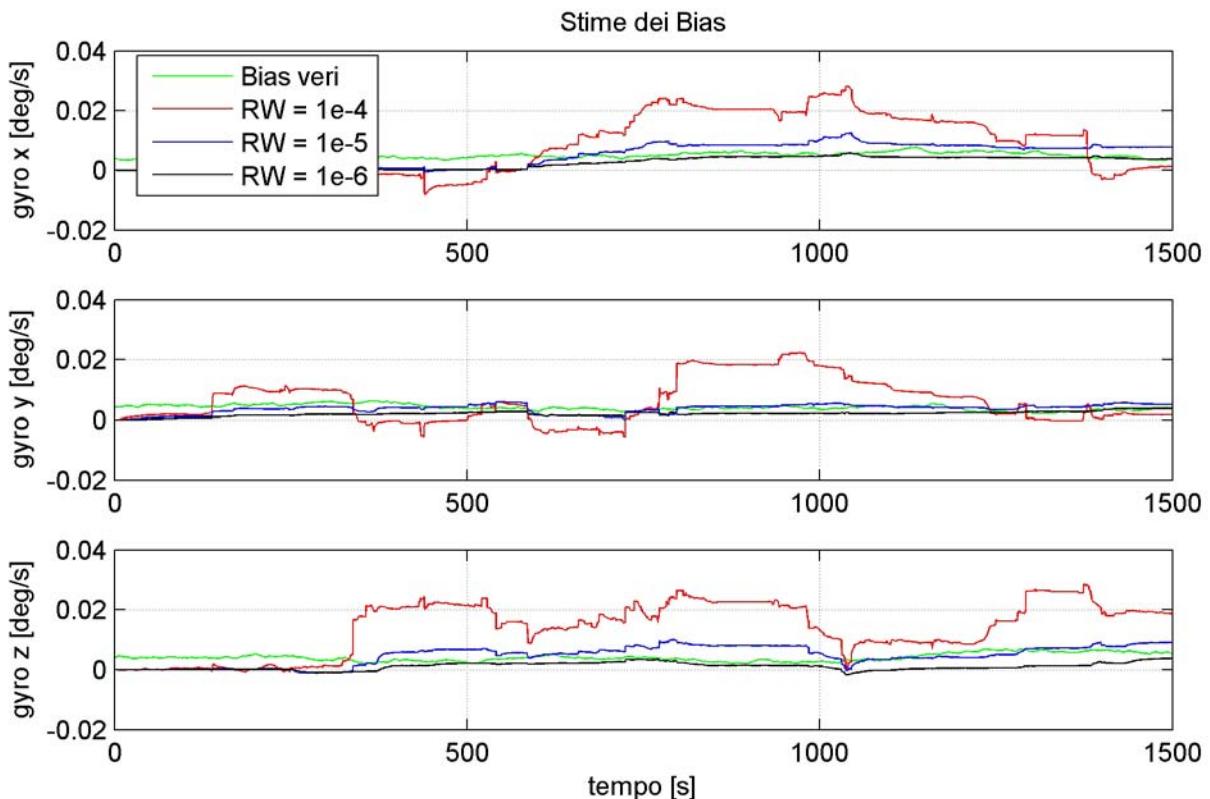


Figura 7.15 Risultati di stima degli errori di *Bias* sequenza derivata da quella di Sviluppo, senza variazione a gradino dei *Bias* dei giroscopi, per diversi valori di *RWCov*

8 Conclusioni e sviluppi futuri

8.1 Conclusioni

Nei limiti delle simulazioni svolte il sistema sviluppato si è dimostrato in grado di conseguire delle prestazioni di livello elevato. Quasi tutte le tecniche adottate per limitare gli errori di determinazione dell'assetto si sono rivelate efficaci.

La stima degli errori di *Bias* dei giroscopi, relativamente alla qualità dei sensori inerziali considerati, si è rivelata utile in particolare nelle rare ed accidentali circostanze in cui si verificano delle grandi ed improvvise variazioni dei *Bias* durante il funzionamento del sistema. Nelle normali condizioni di esercizio l'entità degli errori di *Bias* dei giroscopi considerati non è tale da penalizzare le prestazioni nel caso in cui non venga implementata la loro stima nel filtro di Kalman. Si fa notare, comunque, che la stima dei *Bias* si rivelerrebbe molto più efficace di quanto sia risultato in questo lavoro qualora venissero impiegati giroscopi di qualità inferiore a quelli considerati.

L'uso del GPS per stimare l'accelerazione del velivolo ha permesso una rilevazione più accurata del vettore gravità ed un conseguente miglioramento della misura dell'assetto. Gli effetti positivi sulle prestazioni del sistema sono presenti ma risaltano poco per via della logica di funzionamento che riduce il peso delle misure in funzione della severità delle manovre, la quale evita la severa degradazione delle stime dell'assetto che si avrebbe quando le misure del GPS non sono disponibili, come hanno mostrato le simulazioni condotte. I risultati migliori di stima dell'accelerazione del velivolo si hanno per la componente lungo l'asse *y* solidale al velivolo.

Il metodo di Gauss-Newton ha permesso di ottenere dei miglioramenti nella misura dell'assetto rispetto al metodo classico ed ha determinato un leggero aumento delle prestazioni, in particolare quando il GPS non è disponibile, ma presenta dei problemi che non consentono di fare a meno dell'altro metodo.

Relativamente al metodo classico, ci sono momenti in cui i risultati di misura dell'assetto sono gravemente errati. Nella determinazione dell'angolo di rollio, infatti, è indispensabile

avvalersi del segno della stima della componente z del vettore gravità in Assi Corpo, \hat{g}_z^B , per distinguere le situazioni di volo diritto ($|\varphi| < 90^\circ$) dalle situazioni di volo rovescio ($|\varphi| > 90^\circ$).

In certi istanti \hat{g}_z^B presenta picchi di errore talmente ampi da avere il segno sbagliato, provocando forti errori nella determinazione dell'angolo di rollio che poi si riflettono nella determinazione dell'angolo di imbardata. Questo problema non interessa il metodo di Gauss-Newton perché in esso è stata appositamente ignorata la componente \hat{g}_z^B per la determinazione dell'assetto. Oltre a risolvere questo problema, il metodo di Gauss-Newton fornisce delle misure più accurate dell'angolo di rollio, in particolar modo quando il GPS è disattivo. Per quanto riguarda gli angoli di beccheggio e di imbardata, invece, se non si considerano gli errori provocati nel metodo classico dai picchi di errore in \hat{g}_z^B , non si può affermare che l'accuratezza del metodo di Gauss-Newton sia superiore a quella del metodo classico.

Il metodo di Gauss-Newton è iterativo ed ha il problema di dover essere inizializzato con un valore dell'assetto che non sia troppo lontano da quello vero, altrimenti è possibile che la soluzione non converga al valore di assetto corretto, rischiando di ottenere una misura priva di senso. A causa di questo problema il metodo di Gauss-Newton non può essere impiegato come unica tecnica per determinare la misura dell'assetto perché ci sono circostanze in cui non si dispone di un valore iniziale approssimativo dell'assetto. Il metodo classico, invece, in condizioni statiche è molto affidabile e l'accuratezza nella determinazione dell'assetto in tali situazioni è equivalente a quella del metodo di Gauss-Newton. Questo consente di usare il metodo classico per compensare le carenze del metodo di Gauss-Newton nelle circostanze in cui il valore iniziale di assetto sia sconosciuto, come all'avvio del sistema.

La logica di funzionamento secondo la quale i parametri del filtro variano in tempo reale in funzione della severità delle manovre, applicata al fine di stimare gli errori degli stati del sistema dando un peso diverso alle misure dell'assetto per tenere conto del loro livello di accuratezza, è risultata estremamente efficace. I risultati delle simulazioni hanno mostrato che questa tecnica rende le prestazioni molto meno sensibili alla disponibilità del GPS, nonostante esso migliori la misura dell'assetto. L'applicazione di questa logica di funzionamento, insieme alla determinazione dell'assetto mediante il metodo di Gauss-Newton, ha portato le prestazioni del sistema a livelli quasi equivalenti nelle due situazioni di GPS non disponibile e di GPS disponibile, nel primo caso con un netto abbattimento degli errori di stima dell'assetto e nel secondo caso con un miglioramento meno marcato ma sempre evidente.

La funzione di *Reject* delle misure ha prodotto dei generali modesti miglioramenti delle prestazioni, con un’eccezione decisamente positiva: nel caso particolare in cui non venga applicata la logica di funzionamento che fa variare il peso delle misure in funzione delle manovre, il *Reject* è in grado di ridurre notevolmente gli errori di stima dell’assetto, costituendo in tal caso una tecnica estremamente efficace che può quasi sostituire la logica di funzionamento suddetta. L’uso della funzione di *Reject* implica dei rischi. Questa funzione può provocare la divergenza del sistema perché il criterio per stabilire se una misura sia da scartare si basa sul confronto della misura stessa con le uscite dell’AHRS e sull’ipotesi che queste ultime siano sempre sufficientemente accurate: quando la misura di un solo angolo di assetto presenta una differenza superiore ad un valore di soglia rispetto all’angolo di assetto stimato dal sistema, le misure dell’assetto vengono scartate. Se ad un certo momento le uscite del sistema dovessero presentare degli errori importanti, però, cadrebbe l’ipotesi su cui si regge il criterio di *reject* e potrebbero venire erroneamente ed indefiniteamente scartate delle misure accurate, ottenendo un comportamento imprevedibile del sistema ed al limite la divergenza delle stime.

La funzione di *Reset* dell’assetto, nelle condizioni attuali, non ha prodotto cambiamenti delle prestazioni del sistema perché l’accuratezza delle misure da cui si re-inizializza il calcolo dell’assetto al momento del *Reset* è equivalente all’accuratezza delle uscite del sistema. In sostanza, quando viene rilevata la condizione per eseguire il *Reset*, l’integrazione delle velocità angolari viene fatta ripartire da valori di angoli di assetto che hanno errori dello stesso livello di quelli già presenti nelle uscite dell’AHRS.

8.2 Sviluppi futuri

Il sistema può essere ulteriormente sviluppato curando i seguenti aspetti.

Per migliorare la validità delle simulazioni:

1. Modellare la variazione del campo gravitazionale terrestre nei dati delle manovre di riferimento. Attualmente nelle manovre di riferimento il valore dell’accelerazione di gravità è costante e non è possibile valutare l’effetto sulle prestazioni provocato dalla stessa approssimazione fatta nell’algoritmo di elaborazione dati dell’AHRS.
2. Modellare l’errore tipico del *World Magnetic Model* nei dati delle manovre di riferimento. Questo intervento è opportuno perché il *World Magnetic Model* è attualmente impiegato sia per generare i dati del campo magnetico terrestre nelle manovre di riferimento, che per prevedere il campo magnetico terrestre nella

posizione del velivolo nell'algoritmo di elaborazione dati dell'AHRS. In questo modo, nelle simulazioni, gli errori commessi dal sistema legati all'uso delle informazioni provenienti dalla rilevazione del campo magnetico terrestre dipendono ottimisticamente dai soli errori di misura dei magnetometri, omettendo gli errori di previsione del *World Magnetic Model*. Si fa presente che per migliorare la validità delle simulazioni non è necessario aumentare l'accuratezza dei dati di campo magnetico terrestre nelle manovre di riferimento ma è solo necessario modellare l'andamento tipico dell'errore del *World Magnetic Model*.

3. Affinare il modello di errore della velocità del GPS perché da esso dipendono in modo importante gli errori legati al calcolo della derivata discreta per determinare l'accelerazione longitudinale del velivolo, nella stima dell'accelerazione del moto. L'attuale modello potrebbe essere troppo cautelativo.

Per migliorare le prestazioni del sistema:

4. Individuare una tecnica di pre-elaborazione delle misure dei sensori per trarre da esse le massime informazioni con cui effettuare una più accurata misura dell'assetto. Attualmente le misure dei sensori vengono considerate solo all'istante di esecuzione del filtro, perdendo tutte le informazioni fornite da esse negli altri momenti.
5. Sulla base del punto precedente individuare un modo per fornire una misura dell'assetto più accurata con cui effettuare il *Reset*.
6. Considerare un maggior numero di manovre di riferimento per descrivere in modo più completo le condizioni di esercizio del sistema e per dare la possibilità di evidenziare eventuali problematiche che non si sono ancora manifestate.

Per apportare migliorie generali al sistema:

7. Sviluppare un metodo per rilevare automaticamente la convergenza degli stati del sistema al valore di regime, nella fase di Allineamento. Attualmente l'operazione di Allineamento, attivata automaticamente all'accensione del sistema, viene eseguita per un tempo fissato pari a tre minuti per dare il tempo agli stati del sistema di convergere.
8. Sviluppare ulteriormente l'operazione di Allineamento affinché sia possibile eseguirla anche mentre il velivolo è in movimento sulla pista o mentre è in volo. Attualmente per eseguire l'Allineamento è richiesto che il velivolo rimanga immobile.

9. Data la presenza del GPS, arricchire le funzioni del sistema in modo da fornire informazioni accurate e ad alta frequenza di posizione e velocità. Lo sviluppo di queste funzioni richiede l'aumento del numero di stati nel filtro di Kalman per la necessità di stimare gli errori di posizione e di velocità e permette, inoltre, di stimare gli errori di *Bias* degli accelerometri.

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Eugenio Denti, il Prof. Roberto Galatolo e l'Ing. Francesco Schettini per tutta l'attenzione che hanno dedicato a questo lavoro, per i loro preziosi consigli e per la disponibilità che hanno sempre avuto nei miei confronti.

Ringrazio la mia famiglia per avermi dato la possibilità di raggiungere anche questo traguardo, per averlo atteso con pazienza e per tutto il bene che ho ricevuto.

Ringrazio tutti gli amici che hanno lasciato un segno indelebile durante questi anni di vita universitaria. Grazie ad Andrea Rimondi, Alberto Tarroni e Vincenzo Ferracci, per tutti gli anni di stimolante convivenza trascorsi insieme e per la bella amicizia che ne è nata. Grazie a Federico Buffetti, per i momenti piacevoli e spensierati che abbiamo passato insieme. Grazie a Massimiliano Cartolano, per essere stato un solido appoggio oltre che un amico. Grazie a Mauro Frosoni, Daniela, Mario e Gianna, per la magica esperienza con le ali che abbiamo vissuto insieme e per avermi sempre accolto con affetto. Grazie a Marco del Dotto e Luca Giraldi, per l'entusiasmo con cui abbiamo condiviso i nostri interessi. Grazie ad Andrea Palla, Gianni Cantone ed Enzo Peroni, le prime persone che mi hanno fatto sentire a casa lontano dalla mia terra e mi hanno insegnato un nuovo modo di fare modellismo. Grazie a Gianni Cuccioletta, un amico che ha creduto in me più di chiunque altro.

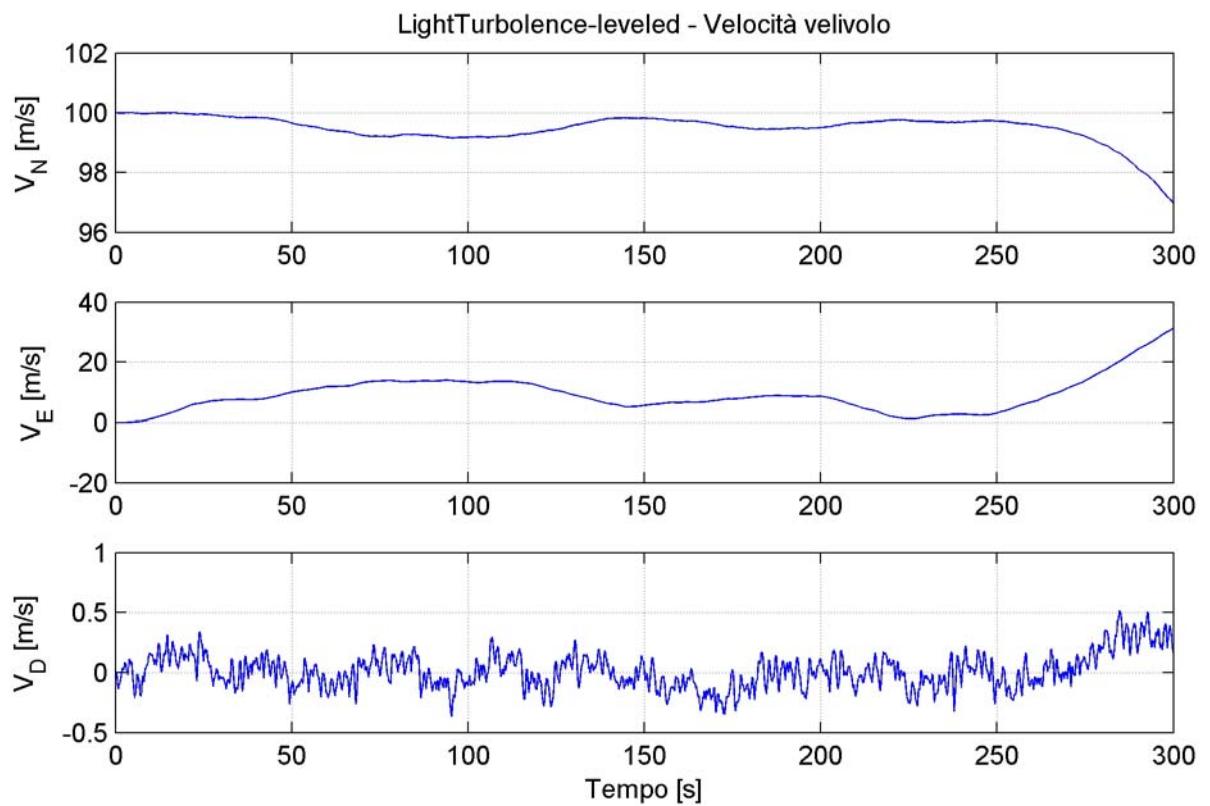
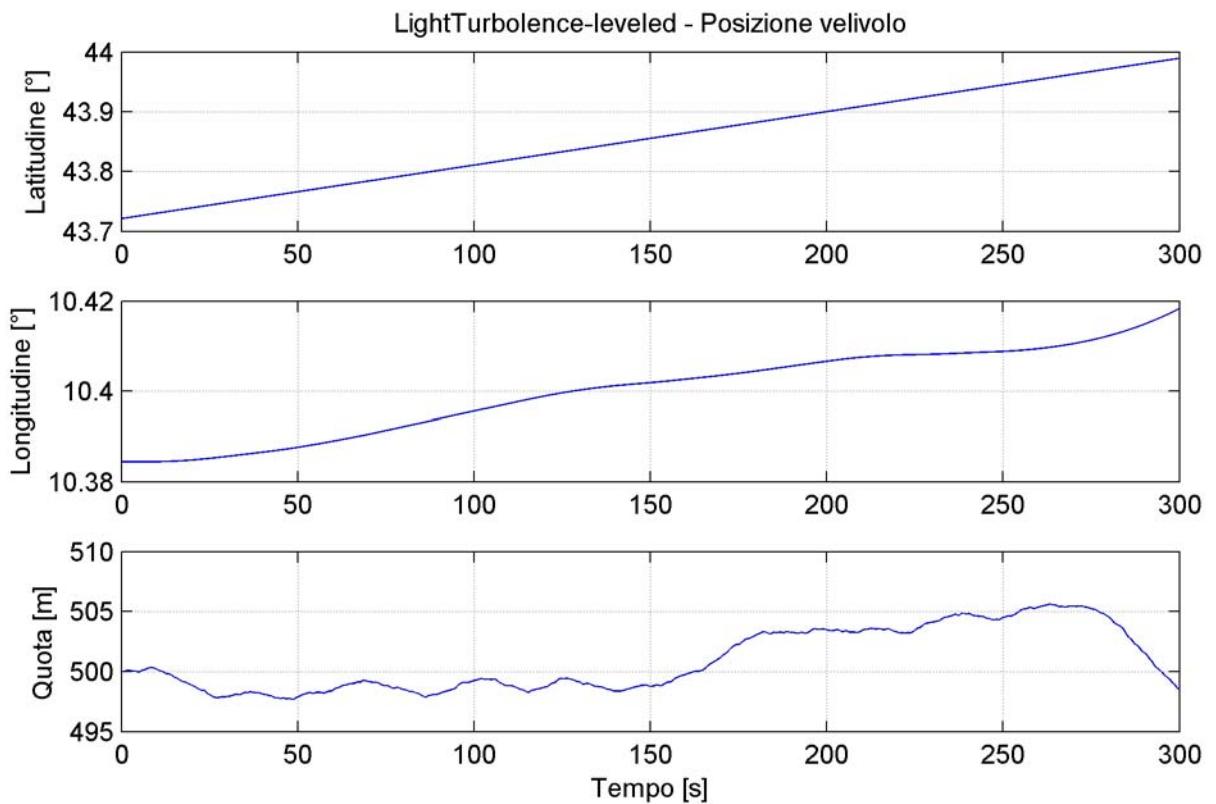
Grazie a Martina.

Bibliografia

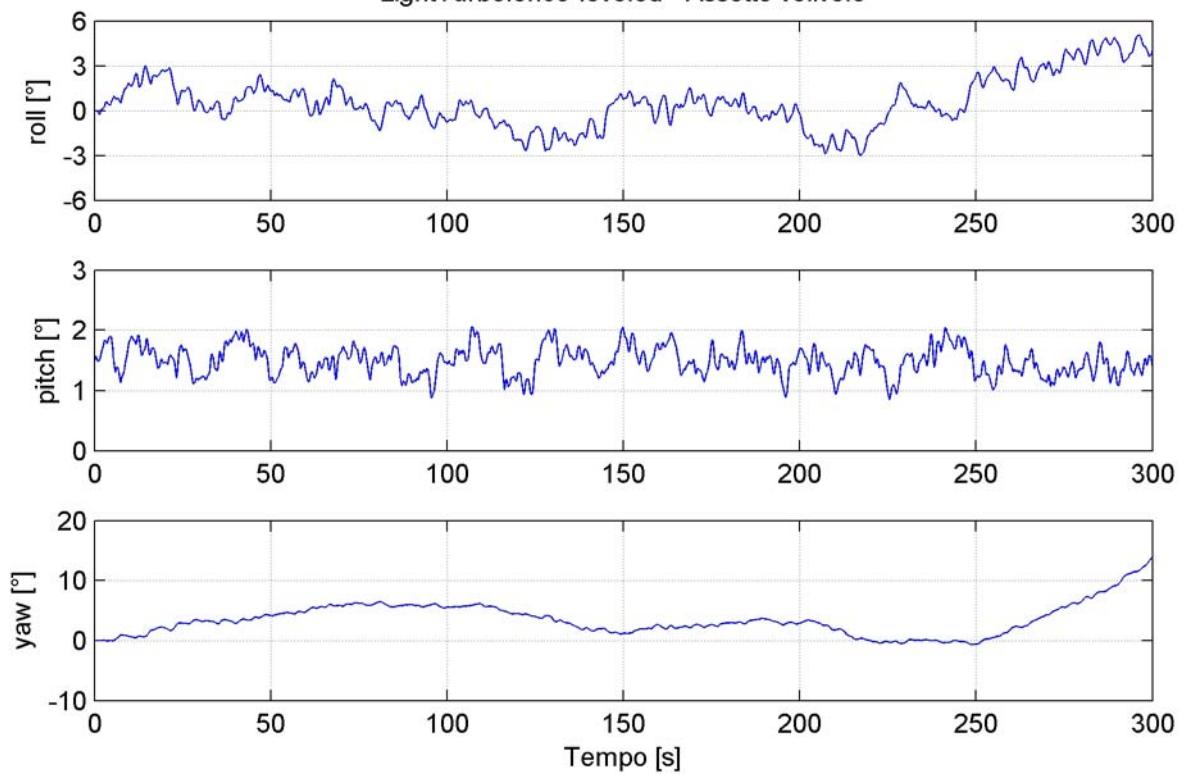
- [1] Brown, R.G., Hwang, P.Y.C., "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", Second Edition, John Wiley & Sons, 1992.
- [2] Maybeck, P.S., "Stochastic Models, Estimation, and Control: Volume 1", Academic Press, 1979.
- [3] Maybeck, P.S., "Stochastic Models, Estimation, and Control: Volume 2", Academic Press, 1982.
- [4] Farrell, J., Barth, M., "The Global Positioning System and Inertial Navigation", McGraw-Hill, 1999.
- [5] Grewal, M.S., Weill, L.R. and Andrews, A.P., "Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration", John Wiley & Sons, 2001.
- [6] Lawrence, A., "Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance, and Control", Second Edition, Springer, 1998.
- [7] Parkinson, B.W., Spilker, J.J., "Global Positioning System: Theory and Applications Volume 1", Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [8] Parkinson, B.W., Spilker, J.J., "Global Positioning System: Theory and Applications Volume 2", Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 164, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [9] Marins, J.L., Yun, X., Bachmann, E.R., McGhee, R.B. and Zyda, M.J., "n Extended Kalman Filter for Quaternion-Based Orientation Estimation Using MARG Sensors", International Conference on Intelligent Robots and Systems, Maui, Hawaii, USA, Oct. 29 – Nov. 03, 2001.

- [10] Yuchnovicz, D., Burgess, M. and Hammers, W., “An Assessment of Technical and Production Risks of Candidate Low-Cost Attitude/Heading Reference Systems (AHRS)”, NASA/CR-1999-209096, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, Virginia, February 1999.
- [11] Stevens, B.L., Lewis, F.L., “Aircraft Control and Simulation”, Second Edition, John Wiley & Sons, 2003.
- [12] McLean, S., Macmillan, S., Maus, S., Lesur, V., Thomson, A. and Dater, D., “The US/UK World Magnetic Model for 2005-2010”, NOAA Technical Report NESDIS/NGDC-1, December 2004.
- [13] Casarosa, C., “Meccanica del Volo”, edizione Plus – Pisa, 2004.
- [14] Honeywell Sensotec, “Frequently Asked Questions”, documento pdf reperito al link http://content.honeywell.com/sensing/sensotec/pdf/FAQ_092003.pdf
- [15] Bernstein, J., “An Overview of MEMS Inertial Sensing Technology”, Corning-IntelliSense Corp., February 2003. Articolo reperito come file pdf dal sito internet www.sensorsmag.com
- [16] Honeywell, “Honeywell Tactical Inertial Measurement Units (IMU)”, brochure informativa reperita al link http://www51.honeywell.com/aero/common/documents/myaerospacecatalog-documents/Missiles-Munitions/Honeywell_Tactical_Inertial_Measurement_Units.pdf
- [17] Honeywell, “HG1900 MEMS IMU”, brochure del prodotto reperibile sul sito del produttore www.honeywell.com
- [18] Honeywell, “Three-Axis *Strapdown* Magnetometer HMR-2300r”, descrizione tecnica del prodotto su file pdf reperito al link <http://www.ssec.honeywell.com/magnetic/datasheets/hmr2300r.pdf>

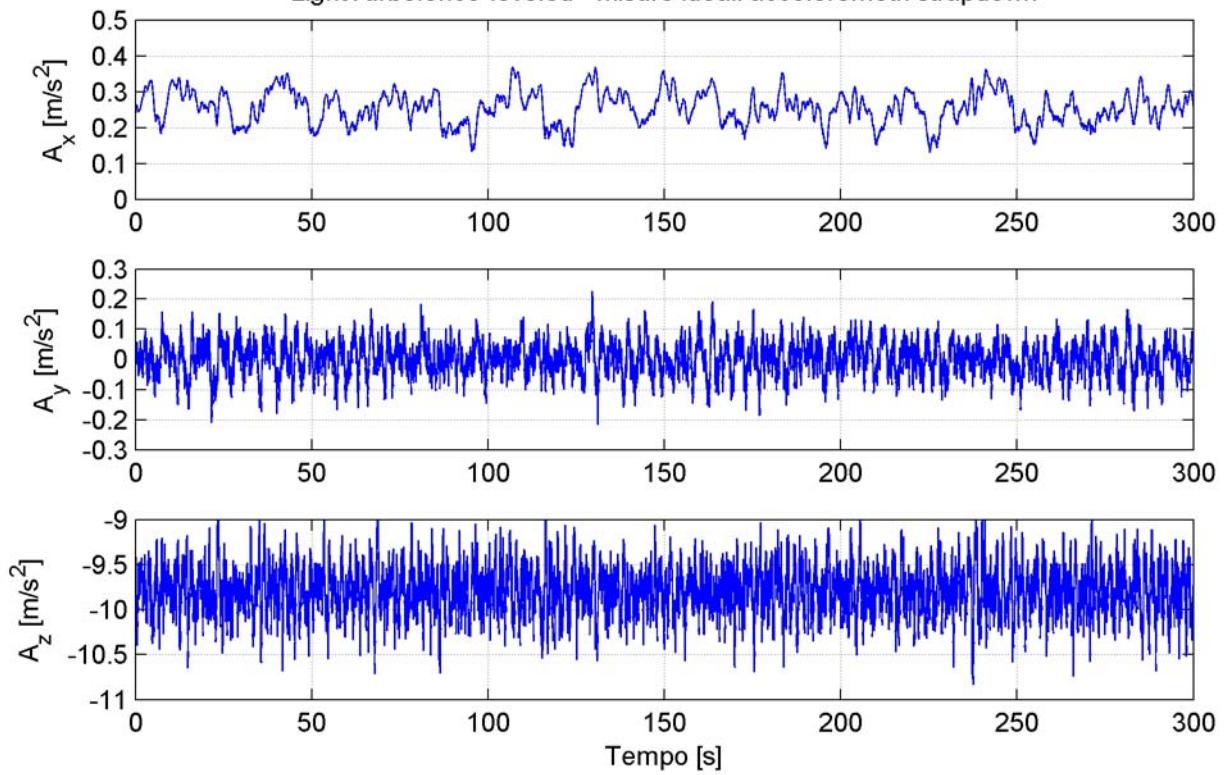
APPENDICE A Manovra LightTurbulence_leveled

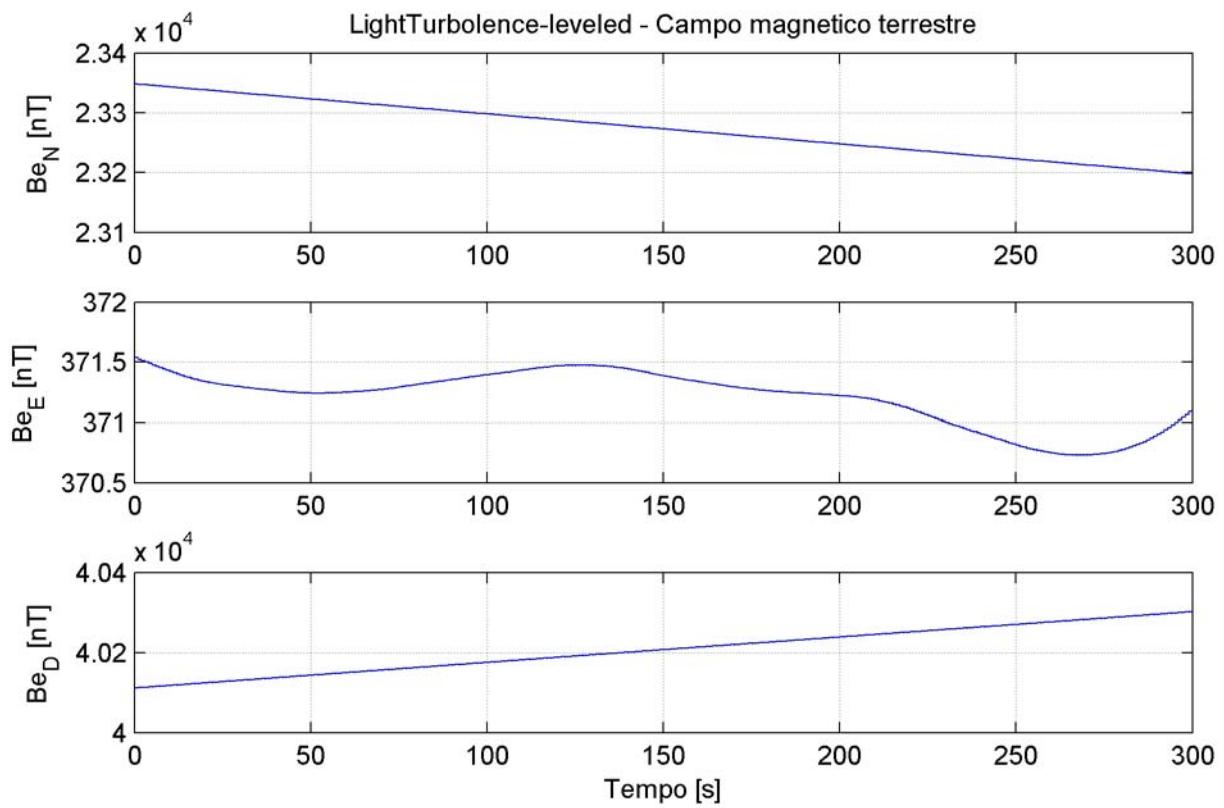
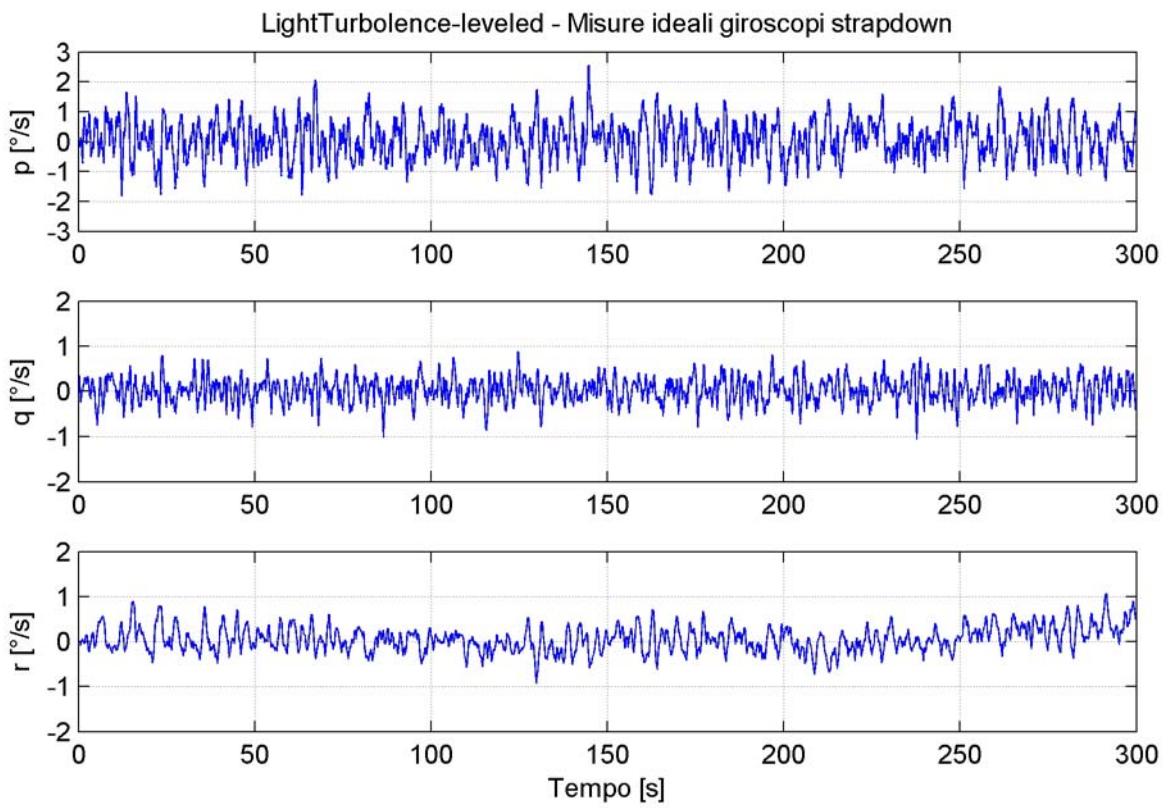


LightTurbulence-leveled - Assetto velivolo

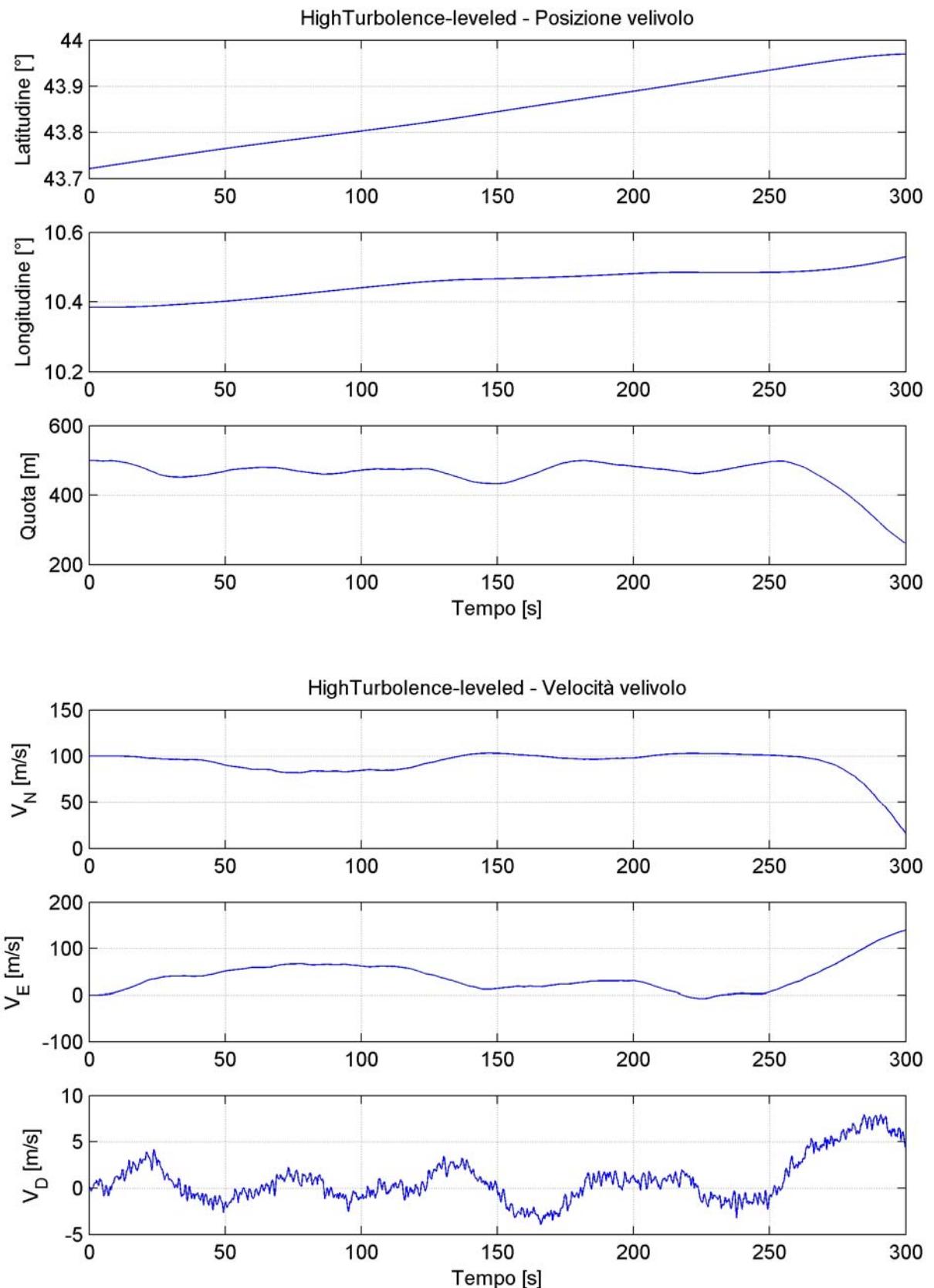


LightTurbulence-leveled - Misure ideali accelerometri strapdown

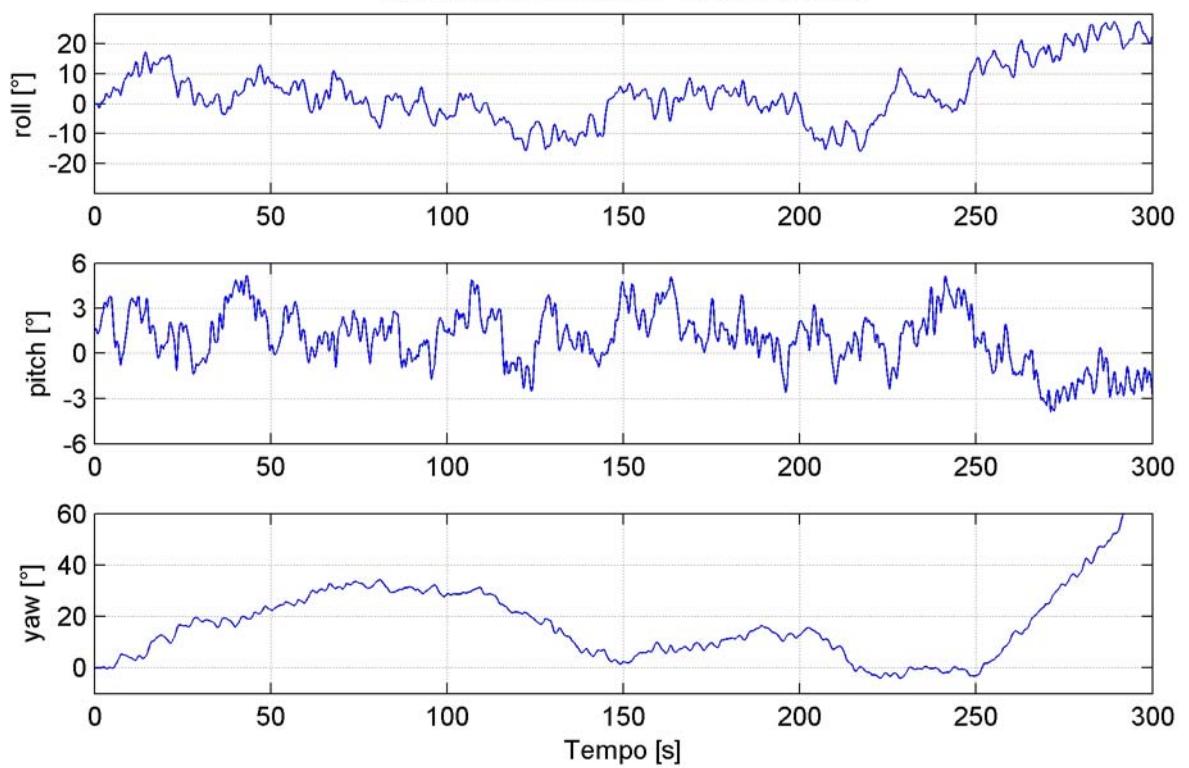




APPENDICE B Manovra HighTurbulence_leveled



HighTurbulence-leveled - Assetto velivolo



HighTurbulence-leveled - Misure ideali accelerometri strapdown

