

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/255628968>

# SVILUPPO E IMPLEMENTAZIONE DI ALGORITMI PER LA NAVIGAZIONE INERZIALE ASSISTITA

## Article

---

CITATION

1

---

READS

381

## 1 author:



[Noemi Emanuela Cazzaniga](#)

Politecnico di Milano

20 PUBLICATIONS 43 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

All content following this page was uploaded by [Noemi Emanuela Cazzaniga](#) on 19 June 2014.

The user has requested enhancement of the downloaded file. All in-text references [underlined in blue](#) are added to the original document and are linked to publications on ResearchGate, letting you access and read them immediately.

# SVILUPPO E IMPLEMENTAZIONE DI ALGORITMI PER LA NAVIGAZIONE INERZIALE ASSISTITA

Noemi Emanuela Cazzaniga<sup>a</sup>

<sup>a</sup> DIAR - sez. Rilevamento, Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano - noemi.cazzaniga@polimi.it

**KEY WORDS:** INS/GPS, MMV, filtro di Kalman, stima batch, denoising, navigazione

## ABSTRACT:

L'utilizzo di sistemi di navigazione INS/GPS ha visto un forte incremento negli ultimi anni per il notevole sviluppo tecnologico e la riduzione dei costi della strumentazione, oltre che per le evoluzioni degli algoritmi di trattamento integrato dei dati. Nel lavoro di tesi si è deciso di affrontare tutti i principali aspetti della navigazione inerziale: lo studio delle caratteristiche e dei principi di funzionamento dei sistemi di navigazione inerziale e dei sensori inerziali; il trattamento delle misure inerziali, in particolare la riduzione degli errori e del rumore; lo sviluppo e la soluzione delle equazioni di navigazione per la stima di posizione e assetto; l'analisi e lo sviluppo delle modalità di integrazione di dati inerziali e GPS; lo studio delle procedure di allineamento iniziale. Infine è stato implementato un software di trattamento dati per la navigazione INS/GPS e sono state eseguite alcune prove con il duplice scopo di validare gli algoritmi sviluppati e di analizzare i risultati ottenibili per mezzo di due sistemi inerziali a basso costo.

## INTRODUZIONE

L'utilizzo di sistemi INS/GPS ha subito un forte incremento, a causa del notevole sviluppo tecnologico dei sensori, delle accresciute potenzialità di calcolo, della riduzione dei costi della strumentazione e delle evoluzioni nelle metodologie di trattamento integrato dei dati. I sistemi INS/GPS sono ormai impiegati in vari settori del rilevamento, soprattutto nella scansione laser da aereo e nelle applicazioni fotogrammetriche, aeree e terrestri, ma le applicazioni sono in continua crescita.

Nel presente articolo si presentano brevemente tutti i principali aspetti della navigazione inerziale: dopo una rapida descrizione dei principi base della navigazione e della strumentazione inerziale nella sezione 1, nella seconda sezione si entra nel merito della definizione e della soluzione degli algoritmi della navigazione inerziale autonoma, così come sviluppati durante il lavoro di tesi. A differenza di quanto viene fatto usualmente nelle applicazioni di rilevamento, le equazioni sono state risolte in modo analitico e non numerico. Nella sezione 3, dopo una breve descrizione dei più diffusi metodi di integrazione dei dati inerziali e GPS, si presenta la procedura sviluppata in questo lavoro. A tale metodologia sono stati applicati due diversi algoritmi statistici: il filtro di Kalman e l'innovativa soluzione geodetica (batch). Si accenna inoltre alle procedure ricorsive di analisi dell'affidabilità della stima. Successivamente, nella sezione 4, viene introdotto il problema dell'allineamento iniziale e si presentano due diverse modalità sviluppate in questa tesi, una di autoallineamento e una di allineamento esterno. Nella sezione 5 si presentano alcune procedure utili a ridurre nelle misure inerziali il rumore accidentale (filtro FIR e wavelet denoising) e sistematico. Infine, dopo una rapida presentazione del programma per l'elaborazione dei dati INS/GPS realizzato, nella sezione 6 si presentano i risultati di alcune prove, eseguite utilizzando le misure di due diversi sistemi inerziali e per mezzo di una simulazione numerica.

Questa ricerca si innesta in un progetto più ampio che prevede la realizzazione di un veicolo rilevatore (MMV) sperimentale: per tale motivo nella trattazione si farà spesso riferimento alle applicazioni terrestri.

## 1. LA NAVIGAZIONE INERZIALE

### 1.1 Introduzione

La *navigazione inerziale* è il procedimento tramite il quale le misure di un insieme di sensori inerziali (usualmente giroscopi e accelerometri) sono utilizzate per determinare la posizione e l'assetto del veicolo su cui sono installati, in un sistema di riferimento (sdr) noto.

I giroscopi forniscono misure di velocità di rotazione, mentre gli accelerometri misurano le accelerazioni, entrambe rispetto a un sdr inerziale. Tali quantità sono spesso espresse in un sdr solidale al sensore (body).

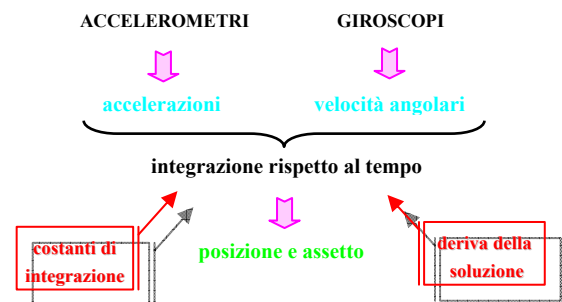


Figura 1. Schema logico della navigazione inerziale

Le misure fornite dai giroscopi sono utilizzate per determinare l'assetto del sdr body rispetto al sdr in cui si effettuerà la navigazione: è così possibile esprimere le misure degli accelerometri in questo sdr ed integrarle nel tempo per ottenere posizione e velocità. I sistemi di navigazione inerziale (INS) richiedono la conoscenza di posizione e assetto all'inizio della navigazione, che sono poi le costanti di integrazione. Poiché un INS integra le equazioni differenziali del moto contenenti le misure inerziali, gli errori sistematici comportano errori di velocità e posizione che aumentano con il tempo di integrazione. Perciò gli INS più diffusi non sono in grado di effettuare navigazione autonoma.

ma di precisione per periodi di tempo “lunghi” e quindi sono spesso associati ad altri strumenti di natura diversa. Si parla in questo caso di *navigazione integrata o assistita*. Attualmente il sistema di *aiding* più usato nelle applicazioni outdoor è il GPS e il sistema integrato viene indicato con INS/GPS (o IMU/GPS).

## 1.2 I sensori inerziali

Il giroscopio misura la velocità angolare attorno al suo asse di input rispetto a un sdr inerziale. È possibile identificare due macro-classi di questi sensori: (*elettro*)*meccanici* e *ottici*. Sono meccanici i giroscopi le cui misure si basano sul momento angolare di una massa in rapida rotazione oppure sull'effetto di Coriolis agente su una massa vibrante, mentre quelli ottici si basano sul principio di Sagnac. I giroscopi elettro-meccanici si dividono a loro volta in sensori convenzionali, giroscopi a vibrazione e MEMS (Micro-Electro-Mechanical System). I giroscopi ottici invece si distinguono in due tipologie: il ring laser gyroscope (RLG) e il fiber optic gyroscope (FOG).

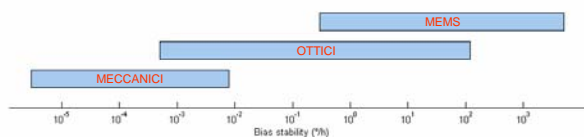


Figura 2. Prestazioni dei giroscopi

Gli accelerometri misurano le accelerazioni agenti su una massa di prova e possono essere distinti in sensori meccanici o a vibrazione. I primi si basano sullo spostamento di una massa di prova, mentre i secondi sfruttano le variazioni della frequenza di oscillazione di una o più masse di prova. Di entrambi esistono anche le versioni miniaturizzate MEMS.

L'accelerazione totale sulla massa è data dalla somma algebrica dell'accelerazione prodotta dalle forze e dall'accelerazione gravitazionale. Un accelerometro in caduta libera ha quindi output nullo, mentre un accelerometro in quiete indica un'accelerazione pari a  $1g$  diretta verso l'alto. Poiché quindi l'accelerazione misurata contiene anche la gravità, è necessario conoscere e rimuovere questa componente.

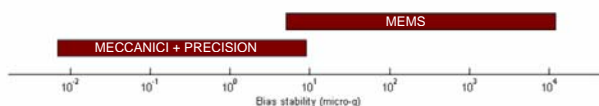


Figura 3. Prestazioni degli accelerometri

I sensori inerziali sono soggetti a diversi errori. Nelle misure inerziali è sempre presente una *bias*, pari al segnale fornito in output con input nullo. Nel caso dei giroscopi viene denominato *drift* (o *drift rate*). Lo *scale factor* invece è dato dal rapporto tra la variazione del segnale in output e quella dell'input. Lo scale factor non è un errore, ma il suo valore è noto solo con una certa precisione, pertanto un errore nella sua stima comporta un errore residuo nell'output. Esistono anche altri errori, specifici dei diversi sensori. Ogni errore presenta una o più componenti costanti o ripetibili, variazioni indotte dalla temperatura, variazioni *run-to-run* (tra due serie accensione-spegnimento) e variazioni *in-run* (entro la medesima accensione). Le prestazioni dei sensori inerziali dipendono in modo sostanziale dalla capacità di compensare gli errori sistematici. I sensori inerziali sono sottoposti a test per valutare i parametri d'errore e calibrare l'output in varie condizioni ambientali. La calibrazione si effettua confrontando l'output del sensore con l'input imposto, noto.

## 1.3 I sistemi inerziali

Un *sistema di navigazione inerziale* (INS) è costituito dai sensori inerziali e da un calcolatore che stima posizione e assetto. La configurazione considerata in questa tesi prevede la disposizione di una terna di giroscopi e una di accelerometri lungo gli assi di un sistema cartesiano ortogonale. L'insieme dei sensori inerziali è detto *IMU* (*Inertial Measurement Unit*).

L'implementazione di un IMU può essere effettuata in due modi fondamentali. Si può realizzare una piattaforma stabilizzata, su cui sono montati i sensori inerziali meccanicamente isolati rispetto al moto rotatorio del veicolo (sistemi *gimbaled*), oppure è possibile installare i sensori rigidamente vincolati al veicolo, così da percepirne l'intera dinamica: le relazioni tra il sdr body, il sdr in cui si vuole esprimere la navigazione e il sdr inerziale devono essere mantenute in modo analitico. Sistemi inerziali di questo secondo tipo, detti *strapdown*, sono oggi i più diffusi: ad essi si è fatto riferimento in questa tesi.

I sistemi strapdown possono essere classificati sulla base delle loro prestazioni in modalità di navigazione autonoma:

1. *Strategic grade*: errore di posizionamento inferiore ai 30 m/h, drift rate dei giroscopi inferiore a  $0.0001^\circ/h$  e bias degli accelerometri dell'ordine del  $\mu g$ ;
2. *Navigation grade*: errore di posizionamento fino a 3-4 km/h, drift rate dei giroscopi dell'ordine di  $10^{-2}^\circ/h$  e bias degli accelerometri tra 50-100  $\mu g$ ;
3. *Tactical grade*: errore di posizionamento fino a 20-40 km/h, drift rate dei giroscopi  $1-10^\circ/h$ , e bias degli accelerometri tra 100-1000  $\mu g$ ;

Esistono inoltre sistemi inerziali con prestazioni inferiori, denominati *low accuracy INS*, che non rientrano in questa classificazione: sono normalmente utilizzati solo in modalità assistita.

## 2. LE EQUAZIONI DI NAVIGAZIONE

La navigazione inerziale si basa essenzialmente sull'integrazione di accelerazioni misurate nel tempo. Dal punto di vista matematico questo implica la soluzione di un sistema di equazioni differenziali che lega le accelerazioni misurate con le derivate seconde della posizione, le cosiddette *equazioni di navigazione*. In un sistema inerziale strapdown, inoltre, le accelerazioni misurate sono espresse in un sistema di riferimento incognito, il sistema body, che varia nel tempo. È quindi necessario in via preliminare stimare la rotazione tra il sistema body e un sistema noto, per riportarvi le accelerazioni prima di effettuare l'integrazione. La sua determinazione prevede la soluzione di un ulteriore sistema di equazioni differenziali.

Inoltre occorre precisare in quale sistema di riferimento e di coordinate si vogliono esprimere le equazioni: a seconda della scelta si avrà maggior semplicità nell'esprimere le quantità misurate, la gravità o la posizione e l'assetto del veicolo, e i due sistemi di equazioni, quello relativo alle accelerazioni e quello delle velocità angolari, possono non essere risolvibili in modo disaccoppiato. In un sdr inerziale le relazioni differenziali assumono una forma particolarmente semplice, ma è più complesso esprimere i parametri di posizione e gli angoli di assetto, per i quali la formulazione più conveniente è nel sistema cartografico o in un sistema tangente locale. La scelta di un sistema tangente locale, invece, porta ad una espressione particolarmente complessa per esprimere i valori osservati dell'accelerazione. Si è quindi deciso di risolvere le equazioni in un sistema Earth Centered – Earth Fixed (ECEF), e di portarsi in un secondo tempo in un sistema locale NED per esprimere gli angoli di assetto. In questo caso i due sistemi di equazioni possono essere risolti in modo disaccoppiato.

Le equazioni di navigazione possono essere scritte in due forme principali: come equazioni differenziali delle quantità osservate oppure come equazioni differenziali alle variazioni (variazionali). La discussione viene qui confinata solo alle prime. A differenza di quanto fatto abitualmente nelle applicazioni di rilevamento, la soluzione delle equazioni differenziali è stata ricavata analiticamente invece che numericamente.

## 2.1 Le equazioni in un sdr ECEF

Dati due sdr generici,  $A$  stazionario e  $B$  in moto rotatorio relativo rispetto ad  $A$ , sotto l'ipotesi di angoli piccoli si ha:

$$\dot{\mathbf{R}}_B^A = -\boldsymbol{\Omega}_{BA}^A \mathbf{R}_B^A = \mathbf{R}_B^A \boldsymbol{\Omega}_{AB}^B$$

dove  $\boldsymbol{\Omega}_{AB}^B = (\boldsymbol{\omega}_{AB}^B \times)$  è la matrice emisimmetrica del vettore delle velocità angolari del sdr  $B$  rispetto ad  $A$ , espresse in  $B$ . È possibile esprimere questa relazione anche in termini del quaternion  $q_B^A$ , in questo caso assume una forma lineare:

$$\dot{q}_B^A = \frac{1}{2} q_B^A \boldsymbol{\omega}_{AB}^B = \frac{1}{2} \mathbf{A} q_B^A = \mathbf{B} q_B^A \quad (1)$$

dove  $\boldsymbol{\omega}_{AB}^B = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega}_{AB}^B \end{bmatrix}^T$  è la forma quaternion del vettore velocità angolare.

La derivata temporale di  $\mathbf{R}_B^A$  può anche essere definita in termini di velocità di rotazione angolare di due sistemi  $A$  e  $B$  rispetto a un sdr inerziale ' $i$ '. Derivando infatti la relazione

$$\mathbf{R}_B^A = \mathbf{R}_i^A \mathbf{R}_i^B$$

si ricava

$$\dot{\mathbf{R}}_B^A = \mathbf{R}_B^A (\boldsymbol{\omega}_{iB}^B \times) - (\boldsymbol{\omega}_{iA}^A \times) \mathbf{R}_B^A \quad (2)$$

Nel caso di un sdr geocentrico ECEF ' $e$ ', sia il sdr body ' $b$ ' sia il sdr di navigazione sono in movimento rispetto al sdr inerziale. Dalla (2) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_b^e = \mathbf{R}_b^e (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_e^e \times) \mathbf{R}_b^e.$$

Risolto questo sistema di equazioni differenziali, quindi, si possono ruotare le accelerazioni nel sistema ECEF:

$$\mathbf{a}_{oe} = \mathbf{R}_b^e \mathbf{a}_{ob} \quad (3)$$

Il moto di trascinamento terrestre è un moto rotatorio uniforme, per cui è possibile scrivere in termini vettoriali:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{g} \quad (4)$$

dove  $\vec{a}_a$  è l'accelerazione rispetto al sdr assoluto,  $\vec{a}_r$  l'accelerazione rispetto al sdr relativo,  $\vec{r}$  la posizione nel sdr relativo,  $\vec{v}_r$  la velocità nello stesso sdr,  $\vec{\omega}_e$  la velocità di rotazione della Terra e  $\vec{g}$  la gravità. Questa relazione può essere letta nel seguente modo: l'accelerazione percepita dagli accelerometri è data dalla forza specifica a cui è soggetto il veicolo più un termine di accelerazione di trascinamento (forza apparente centrifuga) più l'accelerazione di Coriolis e la gravità.

In questo caso, il sdr assoluto è rappresentato dal sdr inerziale, scelto in modo tale da coincidere all'istante di tempo iniziale con il sistema WGS84, che rappresenta il sdr mobile.

Applicando la (4) alle misure inerziali quindi si ha

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{oe} - \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}_e) - 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_e - \vec{g}_e$$

che può essere espressa in forma matriciale come

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{a}_{oe} - 2\boldsymbol{\Omega}_e \dot{\mathbf{x}}_e - \boldsymbol{\Omega}_e^2 \mathbf{x}_e - \mathbf{g}_e \quad (5)$$

L'approssimazione del campo gravitazionale con il campo di gravità normale, trascurando l'anomalia di gravità (Heiskanen et al, 1990), è solitamente sufficiente per le applicazioni terrestri. Perciò invece dell'accelerazione gravitazionale e di quella centrifuga, nella (5) si considera un unico termine di gravità:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{oe} - 2\boldsymbol{\Omega}_e \dot{\mathbf{x}}_e - \mathbf{g}_e \quad (6)$$

## 2.2 La soluzione ottenuta

Per stimare la soluzione delle equazioni di navigazione possono essere impiegati metodi di integrazione numerica. Attualmente sono diventati molto comuni negli algoritmi di navigazione e in alcuni casi sono l'unica strada percorribile. Nell'ambito della navigazione inerziale sono utilizzati in modo prevalente i metodi di Runge-Kutta.

In questa tesi invece si è preferito ricavare una soluzione analitica. Infatti una soluzione analitica, quando è possibile, fornisce una formula pronta all'uso e rigorosa, a parità di ipotesi iniziali, e permette di studiare l'andamento della soluzione. Inoltre non si hanno problemi legati all'errore di troncamento e nel caso dei giroscopi non è richiesta l'ortonormalizzazione della matrice di rotazione ottenuta, come accade invece con la soluzione numerica. Di contro però la soluzione è di più complessa derivazione. Viene di seguito presentata la soluzione sviluppata.

**Determinazione dell'assetto:** In primo luogo è possibile notare che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{R}_b^e = \mathbf{R}_i^e \mathbf{R}_b^i \quad (7)$$

e che  $\mathbf{R}_i^e$  è nota, in quanto funzione dell'istante di tempo  $t$  considerato e della velocità di rotazione terrestre costante  $\boldsymbol{\omega}_e$ .

È possibile quindi ricavare la rotazione  $\mathbf{R}_b^e$  in due passaggi: in primo luogo si stima la matrice  $\mathbf{R}_b^i$  e si utilizza in seguito la (7).

Per ottenere la matrice  $\mathbf{R}_b^i$  bisogna risolvere l'equazione differenziale, ottenibile dalla (1):

$$\dot{q}_b^i = \mathbf{B} q_b^i \quad (8)$$

dove il quaternion rappresenta la rotazione da sdr body a inerziale e  $\mathbf{B}$  è funzione delle velocità angolari misurate  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ . Introduciamo l'ipotesi che le componenti di  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  siano costanti nell'intervallo di integrazione. L'ipotesi è accettabile se tale intervallo, che si pone pari all'intervallo di campionamento, è abbastanza "piccolo" in funzione della dinamica prevista. Per le applicazioni terrestri si ritiene sufficiente una frequenza dell'ordine del centinaio di Hz. Sotto quest'ipotesi il sistema (8) può essere risolto come un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

La soluzione generale del sistema (8) è:

$$\begin{cases} q_1 = s \cos(s') u_1 + \sin(s') u_2 + \omega_2 \sin(s') u_3 - \omega_2 \cos(s') u_4 \\ q_2 = -\omega_1 \sin(s') u_1 + \omega_1 \cos(s') u_2 + \omega_3 \sin(s') u_3 - \omega_3 \cos(s') u_4 \\ q_3 = -\omega_2 \sin(s') u_1 + \omega_2 \cos(s') u_2 + s \cos(s') u_3 + \sin(s') u_4 \\ q_4 = -\omega_3 \sin(s') u_1 + \omega_3 \cos(s') u_2 - \omega_1 \sin(s') u_3 + \omega_1 \cos(s') u_4 \end{cases}$$

dove si è posto per semplicità:  $s = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  e  $s' = \frac{s}{2} t$ .

Le costanti  $u_i$  si ricavano imponendo le condizioni iniziali.

Grazie alla soluzione ottenuta, è possibile ruotare le accelerazioni misurate nel sistema ECEF:

$$\mathbf{a}_{oe} = \mathbf{R}_i^e \mathbf{R}_b^i \mathbf{a}_{ob} = \mathbf{R}_b^e \mathbf{a}_{ob} \quad (9)$$

da cui si stima la posizione usando le equazioni di navigazione.

A partire dalle posizioni si può ricavare la matrice di rotazione tra il sistema body e il sistema locale ' $L$ ', così da ottenere l'assetto del veicolo per mezzo della relazione

$$\mathbf{R}_b^L = \mathbf{R}_e^L \mathbf{R}_b^e \quad (10)$$

Dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_b^L$  è infine possibile estrarre gli angoli di assetto nella sequenza voluta.

**Determinazione della posizione del veicolo:** Date le accelerazioni osservate  $\mathbf{a}_{ob}$ , essendo stata ricavata la trasformazione, è possibile ruotare il vettore dal sdr body, in cui è espresso, al sdr WGS84 tramite la relazione (9).  $\mathbf{a}_{oe}$  sono forze specifiche misurate dagli accelerometri espresse in WGS84 non depurate dell'accelerazione di Coriolis e del campo gravitazionale.

Dalla (6) si ottiene il sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_e \dot{y} = a_x + g_x = f_x \\ \ddot{y} + 2\omega_e \dot{x} = a_y + g_y = f_y \\ \ddot{z} = a_z + g_z = f_z \end{cases}$$

con  $\mathbf{a}_{oe} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ . Si introduce l'ipotesi che le forze specifiche misurate siano costanti. Ciò è accettabile a patto di scegliere un intervallo di campionamento sufficientemente piccolo rispetto alla dinamica del sistema, analogamente a quanto fatto nel caso dei giroscopi. Lo stesso si ipotizza per le componenti di  $\mathbf{g}_e = (g_x \ g_y \ g_z)^T$ .

Imponendo le condizioni iniziali e rinominando

$$\Phi_1 = 0.5\Phi_3 / \omega_e$$

$$\Phi_2 = 0.5(\Phi_4 - 1) / \omega_e$$

$$\Phi_3 = \sin(2\omega_e \Delta t)$$

$$\Phi_4 = \cos(2\omega_e \Delta t)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Phi_1 v_{x,0} - \Phi_2 v_{y,0} - \frac{\Phi_2}{2\omega_e} f_x + \frac{\Delta t - \Phi_1}{2\omega_e} f_y \\ y = y_0 + \Phi_2 v_{x,0} + \Phi_1 v_{y,0} + \frac{\Phi_1 - \Delta t}{2\omega_e} f_x - \frac{\Phi_2}{2\omega_e} f_y \\ z = z_0 + v_{z,0} \Delta t + f_z \frac{\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

Riassumendo, la soluzione sviluppata prevede i seguenti passi:

1. si ricava la matrice  $\mathbf{R}_b^i$  risolvendo la relazione (8);
2. si ricava tramite la (7) la matrice  $\mathbf{R}_b^e$ ;
3. risolvendo le equazioni di navigazione (6) si ricavano le posizioni e le velocità in coordinate cartesiane geocentriche WGS84;
4. per mezzo della (9), a partire dalle forze specifiche fornite dagli accelerometri  $\mathbf{a}_{ob}$ , si ricava il vettore  $\mathbf{a}_{oe}$  a cui è associata la matrice di covarianza ricavata propagando opportunamente la matrice di covarianza delle osservazioni;
5. infine, per ricavare l'assetto, in primo luogo si ricava la matrice di rotazione  $\mathbf{R}_e^L$  tra sdr WGS84 e sdr locale, a partire dalle coordinate  $x, y, z$ , e poi si ricava la matrice di rotazione tra sdr body e sdr locale tramite la (10), da cui si possono estrarre gli angoli d'assetto nella forma voluta.

### 3. L'ALLINEAMENTO INIZIALE

L'utilizzo delle equazioni di navigazione è vincolato alla conoscenza dei valori delle condizioni iniziali del problema, vale a dire posizione, velocità e assetto, prima di iniziare la navigazione vera e propria. Se il sistema parte da una condizione stazionaria rispetto alla superficie terrestre, si può considerare nota la velocità iniziale, altrimenti bisogna ricorrere a un'informazione esterna. È quindi necessario stimare il vettore tra il punto rispetto a cui sono espresse le misure inerziali e quello in cui sono forniti i valori iniziali. Inoltre, è necessario inizializzare l'assetto del sensore IMU. L'allineamento consiste nel determi-

nare la rotazione tra il sdr della piattaforma e il sdr in cui vengono effettuati i calcoli. L'accuratezza di questa informazione influenza pesantemente le prestazioni del sistema inerziale.

I metodi di allineamento di un INS possono essere suddivisi in procedure di autoallineamento e allineamento esterno. In questa tesi sono state sviluppate una procedura di allineamento esterno e una di autoallineamento. Nel primo caso si è ricavato un semplice trasferimento dell'allineamento a partire dalle misure di tre antenne GPS dislocate sopra il tettuccio di un veicolo. La matrice di rotazione dal sdr ECEF al sdr individuato dalle tre antenne (veicolo) può infatti essere ricavata come matrice dei coseni direttori degli assi del sdr veicolo rispetto al sdr ECEF, con la relativa precisione di stima. Questo metodo può essere sia statico sia cinematico, richiede un'accurata calibrazione geometrica preventiva tra il sdr veicolo e il sdr della piattaforma inerziale e la sua precisione è limitata dall'accuratezza del GPS. Nel secondo caso invece si propone una procedura rigorosa per la fase di *coarse self-alignment*. Si tratta di una metodologia statica, che richiede un sistema inerziale preciso e non sfrutta l'uso di GPS o altri strumenti esterni. Se l'INS è di precisione sufficiente, come noto, può autoallinearsi in modalità statica, sfruttando la direzione della gravità e quella dell'asse di rotazione terrestre. Normalmente il processo di autoallineamento è diviso in due fasi, il *coarse alignment*, che fornisce i valori di prima approssimazione delle condizioni iniziali, e una successiva di *fine alignment*, che affina la stima, tenendo in conto anche di bias ed errori sistematici non compensati. L'obiettivo del *coarse alignment* è determinare i coseni direttori della rotazione dal body frame al WGS84-frame,  $\mathbf{R}_b^e$ , usando unicamente gli output di accelerometri e giroscopi.

Si consideri un vettore ortogonale  $\mathbf{c}^e$ , noto, così definito:

$$\mathbf{c}^e = \mathbf{g}^e \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^e$$

Si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{c}^b = \mathbf{R}_b^e \mathbf{c}^e = -\mathbf{a}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b.$$

È possibile quindi scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^b & \boldsymbol{\omega}_{ib}^b & -\mathbf{a}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} = \mathbf{R}_b^e \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^e & \boldsymbol{\omega}_{ie}^e & \mathbf{c}^e \end{bmatrix} \quad (11)$$

Di solito, il problema viene risolto ipotizzando che non ci siano errori di accelerometri e giroscopi:

$$\mathbf{R}_b^e = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{a}^b & \boldsymbol{\omega}_{ib}^b & -\mathbf{a}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^e & \boldsymbol{\omega}_{ie}^e & \mathbf{c}^e \end{bmatrix}^{-1} \right)^T$$

e solitamente bisogna ricorrere all'ortonormalizzazione della soluzione. Il metodo non fornisce informazioni sull'accuratezza, né applica pesi appropriati alle grandezze.

In questa tesi invece si è preferito risolvere la rotazione in modo esatto. Si noti infatti che la (11) può essere riscritta come

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{g}^e & \boldsymbol{\omega}_{ie}^e & \mathbf{c}^e \end{bmatrix} - \mathbf{R}_b^e \begin{bmatrix} \mathbf{a}^b & \boldsymbol{\omega}_{ib}^b & -\mathbf{a}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} = \mathbf{v} \quad (12)$$

a causa degli errori di misura, dove  $\mathbf{v}$  sono gli scarti.

Si ponga  $\mathbf{R}_b^e \leftrightarrow \mathbf{q}$ . Si indichino inoltre genericamente con  $r_i$  una serie di misure dei giroscopi e degli accelerometri e la loro combinazione, e con  $s$  le quantità corrispondenti in un sistema earth fixed  $\mathbf{g}^e, \boldsymbol{\omega}_{ie}^e, \mathbf{c}^e$ . Il sistema (12), quindi, considerando tutti gli istanti di misura, può essere riscritto come un insieme di equazioni del tipo:

$$s - \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{q}} = v_i \text{ ossia } s\mathbf{q} - \mathbf{q}r_i = v_i, \mathbf{q} = \mathbf{w}_i.$$

Per minimizzare gli scarti, è sufficiente imporre (Sansò, 1973):

$$\min \sum_i \bar{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i + \lambda (\|\mathbf{q}\|^2 - 1)$$

dove  $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange, da cui si ottiene

$$\sum_i s\mathbf{q}r_i = -\mu \mathbf{q} \quad (13)$$

con  $\mu = 0.5(\lambda + \|s\|^2 + \|r_i\|^2)$

Sviluppando i prodotti nella (13), si ottiene un'espressione della forma:

$$\mathbf{A}q = \lambda q$$

da cui risulta evidente che  $\lambda$  e  $q$  sono rispettivamente un autovettore e un autovettore della matrice simmetrica  $\mathbf{A}$ , che è funzione dei dati  $r_i$  e  $s_i$ . Per scegliere l'autovettore corretto, volendo minimizzare lo scarto quadratico medio si può scrivere

$$\min \sum_i \|s - qr_i\bar{q}\|^2 = \min \left\{ \sum_i \|s\|^2 + \sum_i \|r_i\|^2 - 2 \sum_i [s(qr_i\bar{q})] \right\} \quad (14)$$

Per minimizzare la (14) bisogna massimizzare  $\sum_i \bar{s}qr_i\bar{q}$ , quindi

la soluzione è fornita dal massimo autovalore.

Questa modalità di stima considera il noise, risolve in modo esatto la rotazione e non richiede l'ortonormalizzazione a posteriori della matrice ottenuta. L'accuratezza della soluzione ottenuta è determinata dalla precisione delle misure e dalla risoluzione dell'output dello strumento. Inoltre la procedura di *coarse alignment* fornisce una rapida stima che, a causa dei bias residui, ha piccole differenze rispetto all'allineamento ideale, causate in parte da errori sistematici che non possono essere calibrati in laboratorio. L'allineamento può essere affinato se si hanno informazioni esterne che permettono di stimare gli errori sistematici degli strumenti, disaccoppiando gli errori dei sensori dagli errori di orientamento con appropriate manovre del veicolo (*fine alignment*) (Jekeli, 2001).

#### 4. ALGORITMI DI INTEGRAZIONE IMU/GPS

La deriva della soluzione di navigazione è governata principalmente dalla qualità dei sensori inerziali impiegati, dall'accuratezza dell'allineamento iniziale e dalla dinamica della traiettoria. Poiché gli INS a "basso costo" più diffusi non sono in grado di effettuare navigazione di precisione in modalità autonoma per periodi di tempo lunghi, vengono spesso associati a strumenti di natura diversa che "assistono" la navigazione inerziale. I sistemi di navigazione integrati sfruttano sensori indipendenti e con caratteristiche complementari; per cui uno strumento fornisce stime con un'elevata accuratezza di breve termine, mentre l'altro fornisce una maggiore stabilità di lungo termine. Negli ultimi due decenni ha preso sempre più piede l'associazione IMU/GPS poiché i sistemi strapdown e il GPS hanno caratteristiche fortemente complementari.

L'integrazione di dati provenienti da sensori differenti richiede l'utilizzo di metodi statistici appropriati. A farla da padrone nei sistemi INS/GPS è il filtro di Kalman, perché è ricorsivo e può essere applicato in tempo reale. Nelle applicazioni post-processate, al Kalman filtering viene spesso associato il Kalman smoothing. Non è però l'unica strada possibile. In questa tesi è stata applicata anche la *soluzione batch*, o *geodetica* (Sansò, 2006).

##### 4.1 Il filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è uno strumento statistico che permette di stimare variabili, anche non misurabili, a partire da valori misurati di alcune grandezze ad esse legate. Si basa su alcune ipotesi fondamentali, quali la dipendenza dello stato attuale del sistema solo dallo stato al tempo precedente (processo markoviano del primo ordine) e la linearità di tale dipendenza.

Per applicare il filtro di Kalman è necessario determinare due relazioni: l'equazione di stato e quella di misura. L'equazione di stato esprime la relazione tra i parametri di stato di due epoche successive e rappresenta il modello matematico scelto per

descrivere il fenomeno che si sta analizzando. L'equazione di misura invece lega il valore dei parametri alle misure di grandezze ad essi legate. Entrambe le equazioni devono essere lineari. È possibile verificare che la soluzione delle equazioni differenziali ottenuta in questa tesi soddisfa questo requisito.

Il filtro di Kalman si divide in due parti: la prima, il *filtering*, permette di determinare la miglior stima dei parametri alla corrente epoca sfruttando le misure fino all'epoca attuale; la seconda, detta *smoothing*, permette di determinare la miglior stima dei parametri delle epoche precedenti tenendo conto di tutte le misure fino all'ultima epoca. Gli stimatori sono ottimali nel senso di Wiener – Kolmogorov, hanno minima varianza e sono distribuiti normalmente. L'ottimalità tuttavia è garantita solo finché le assunzioni fatte nel modello sono valide. Per garantire la stabilità del filtro di Kalman è richiesto unicamente che siano soddisfatte le condizioni di osservabilità e controllabilità. Principale vantaggio del metodo consiste nel fatto che le dimensioni delle matrici coinvolte nel calcolo della stima dipendono solamente dalle misure e dai parametri dell'epoca attuale e al più di quella successiva.

##### 4.2 La stima batch o geodetica

Il trattamento dei dati raccolti in modalità cinematica è di solito effettuato con il filtro di Kalman soprattutto per l'insostenibile carico numerico implicato dall'applicazione di altre soluzioni.

Recentemente (Sansò, 2006), è stato proposto un approccio alternativo, che prende il nome di *soluzione geodetica* o *batch*, che consiste fondamentalmente nell'applicazione del classico algoritmo dei minimi quadrati, implementato in modo da ridurre notevolmente il carico numerico. Infatti, costruendo apposite matrici, è possibile riscrivere l'insieme delle equazioni di stato e delle equazioni di misura per tutti i tempi come

$$\mathbf{MD}^{-1}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{e} = \mathbf{y}$$

Questo approccio tiene conto di tutte le osservazioni in un unico passo e stima in una sola volta tutti i parametri di tutti gli istanti di misura. In questo modo il problema si riduce a trovare una stima a minimi quadrati, in cui la matrice normale è in banda a blocchi, con ampiezza di banda pari al doppio della dimensione del vettore  $\mathbf{x}_i$ . Come noto (Bencioli et al, 1984), questo problema può essere efficacemente risolto utilizzando la decomposizione di Cholesky. L'algoritmo può essere ulteriormente ottimizzato, tenendo conto della natura in banda delle matrici, risolvendo in modo esatto il sistema normale. Nel caso invece della matrice di varianza covarianza, l'inversa di una matrice in banda è in generale una matrice piena. Il lemma di Erisman-Tinney però garantisce che i termini disposti all'interno della banda di una matrice inversa possono essere ricavati senza che siano noti i termini della stessa all'esterno della banda. Si ricavano quindi le correlazioni tra un insieme di parametri e i parametri dell'istante immediatamente precedente o successivo. Tali termini di correlazione non sono ricavabili per mezzo del filtro di Kalman.

##### 4.3 Le architetture di integrazione INS/GPS

Normalmente, l'INS funge da sistema di navigazione primario e calcola lo stato di navigazione con elevata frequenza mentre il GPS è usato quando le sue misure sono disponibili e soddisfano determinate condizioni. Quando i dati GPS non sono disponibili o sono troppo inaccurati, l'INS continua il suo funzionamento in modalità autonoma. Perciò le stime di posizione e assetto sono sempre disponibili ad alta frequenza indipendentemente dalla disponibilità del segnale di *aiding*. Solitamente le misure GPS quando disponibili dominano le stime di navigazione,

mentre quelle IMU “lasciano” il rumore del GPS. Ne consegue che l'accuratezza di navigazione non è dipendente in modo critico dalla qualità dell'IMU finché è disponibile il segnale GPS. Esistono diverse “architetture” di integrazione. Con perdite del segnale GPS di breve durata è la scelta dell'architettura che influenza maggiormente la soluzione, mentre per lunghi periodi la qualità della navigazione dipende dalla qualità dell'IMU.

Le architetture di integrazione INS/GPS possono essere classificate come:

1. *uncoupled*: le stime GPS sono usate semplicemente per “reinizializzare” posizione e velocità dell'INS a intervalli regolari di tempo.
2. *loosely coupled*: le elaborazioni dei dati sono disposte in cascata: prima si ha un filtro GPS che fornisce posizioni e velocità. Si valutano poi le differenze tra la stima GPS e quella INS e si stimano gli errori dell'INS. Questi sono poi usati per correggere la soluzione inerziale tramite le equazioni variazionali. Servono almeno quattro satelliti in vista per avere una soluzione integrata.
3. *tightly coupled*: le misure di *pseudorange* e *pseudorange rate* fornite dai GPS sono confrontate con le stime di queste quantità generate a partire dalle misure inerziali. Le differenze forniscono le stime degli errori dell'INS. È sufficiente anche un solo satellite in vista.
4. *deeply coupled o ultra-tightly coupled*: in fase di sviluppo negli ultimi anni, combina il tracciamento del segnale GPS e l'integrazione INS/GPS in un unico filtro di Kalman. Richiede una configurazione apposita del ricevitore integrato: i GPS non usano *tracking loop* separati, ma i segnali vengono tracciati insieme, così che il tracciamento di ogni segnale può trarre beneficio dagli altri e dai dati inerziali. Si fa normalmente uso anche della componente Doppler del segnale GPS.

La modalità di integrazione sviluppata in questo lavoro può essere assimilata a una procedura *loosely coupled*, pur discostandosi dal classico approccio “a cascata”, che prevede un pre-filtraggio dei dati GPS. Di solito infatti vengono integrate nel filtro di Kalman le differenze della stima dei due sistemi, in questo caso invece si usano come osservazioni le misure inerziali grezze e le stime di posizione e di assetto ricavate da GPS.

#### 4.4 L'integrazione dati sviluppata

La definizione della soluzione integrata non presenta sostanziali differenze nel momento in cui si applica il filtro di Kalman oppure la stima batch, in quanto questa seconda possibilità prevede semplicemente una “riorganizzazione” delle equazioni di stato e di misura. Per determinare la soluzione è quindi necessario unicamente ricavare le equazioni di stato e di misura del filtro di Kalman, che sono di seguito riassunte.

**Gli algoritmi per la stima integrata degli angoli:** Per quanto riguarda le equazioni di stato si considera la soluzione della (8) discretizzata nel tempo. Poiché è stata fatta l'ipotesi che le velocità di rotazione sono delle costanti di campo nell'intervallo di integrazione, si ha inoltre

$$\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_{k-1} \quad (15)$$

e quindi si può porre  $\boldsymbol{\omega}_k = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1|k-1}$ . È possibile aggiungere nelle equazioni di stato anche le (15) che legano le velocità angolari all'epoca  $k$  con quelle all'epoca  $k-1$ , in modo da filtrare anche le velocità angolari: questa operazione taglia il rumore ad alta frequenza presente nelle misure e fornisce gli  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1|k-1}$ .

Le equazioni di stato del filtro dei dati dei giroscopi sono:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t_k, t_{k-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k-1} \\ \boldsymbol{\omega}_{k-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{g,k} \quad (16)$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_{g,k}$  è l'errore di stato, a media nulla e con matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{\varepsilon,g}$  nota, mentre

$$\mathbf{F}(t_k, t_{k-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_q(t_k, t_{k-1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{F}_q(t_k, t_{k-1})$  è la matrice di transizione, ricavata dalla soluzione della (8).

Le equazioni di misura, con sole misure IMU, sono:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{g,k} \quad (17)$$

dove  $\boldsymbol{\omega}_{m,k}$  sono le velocità misurate dai giroscopi all'epoca  $k$ ;  $\mathbf{e}_{g,k}$  l'errore di misura, ipotizzato a media nulla e avente matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{e,g}$  nota.

In presenza di dati GPS invece le equazioni di misura diventano:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{m,k} \\ \boldsymbol{\omega}_{m,k} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{7 \times 7} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix} + \mathbf{e}'_{g,k} \quad (18)$$

#### Gli algoritmi per la stima integrata di posizione e velocità:

Le equazioni di stato si ricavano a partire dalla soluzione delle equazioni di navigazione, discretizzata nel tempo in modo da legare le posizioni e le velocità all'epoca  $k$  con quelle all'epoca  $k-1$ . Ad esse, analogamente a quanto fatto nel caso dei giroscopi, si aggiungono le equazioni che legano le accelerazioni all'epoca  $k$  a quelle riferite all'epoca  $k-1$ :

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{k-1}.$$

Si può quindi porre  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}_{k-1|k-1}$ , come per i giroscopi; anche le componenti dell'accelerazione di gravità proiettate in un sistema geocentrico sono ipotizzate costanti di campo.

Le equazioni di stato complete assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t_k, t_{k-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{v}_{k-1} \\ \mathbf{a}_{k-1} \end{bmatrix} + \mathbf{d}(t_k, t_{k-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{a,k} \quad (19)$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_{a,k}$  rappresenta l'errore di stato, ipotizzato a media nulla e avente matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{\varepsilon,a}$  nota.

Le equazioni di misura, in corrispondenza degli istanti  $t_k$  in cui sono fornite solo le misure IMU, sono date da:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{a,k} \quad (20)$$

dove  $\mathbf{e}_{a,k}$  rappresenta l'errore di misura mentre  $\mathbf{a}_{m,k} = \mathbf{a}_{oe}$ .

In presenza di dati GPS, le equazioni di misura diventano:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} + \mathbf{e}'_{a,k} \quad (21)$$

dove  $\mathbf{e}'_{a,k}$  rappresenta l'errore di misura, ipotizzato a media nulla e avente matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{e'a,k}$  nota.

Riassumendo, la procedura si articola nelle seguenti fasi:

1. utilizzando le sole posizioni GPS, si ricava la trasformazione tra il sdr body e un sdr inerziale;
2. si applicano le (16) e (17) alle velocità angolari misurate dai giroscopi e, quando disponibili, la (18) con i quaternioni sti-



mati con i GPS: si ricava la matrice di rotazione  $\mathbf{R}_b^i$  da sdr body a sdr inerziale e da questa la  $\mathbf{R}_b^e$  da sdr body a WGS84;

3. si utilizza la matrice  $\mathbf{R}_b^e$  per ruotare le forze specifiche misurate dal sdr body in cui sono fornite al sdr WGS84;
4. si applicano le (19) e (20), o (21), alle forze specifiche fornite dagli accelerometri integrate alle misure di posizione GPS e si ricavano le posizioni e le velocità;
5. ricavata la matrice di rotazione tra sdr body e locale NED dai valori di posizione, si calcolano gli angoli di assetto.

#### 4.5 L'affidabilità della stima

Di estrema importanza in tutte le applicazioni di navigazione è l'identificazione di outliers o variazioni nel modello. Nel caso della soluzione geodetica, l'implementazione di un test per la reiezione degli outlier è semplice ed è stato ampiamente affrontato in letteratura. Risulta peraltro piuttosto oneroso perché una volta effettuata la reiezione degli outlier è necessario ricompensare tutte le misure. Per il filtro di Kalman, invece, è possibile scrivere dei test statistici che possono identificare il problema in tempo reale senza ripetere l'intera sequenza di calcolo. Nella tesi è stato considerato il metodo (Teunissen et al, 1989), che è un test semplice, non implica un appesantimento dell'operazione di filtraggio ed è adatto anche al tempo reale.

### 5. IL TRATTAMENTO DEL RUMORE

I dati inerziali, come tutte le misure reali, sono costituiti sia da una componente di segnale sia da una di rumore. La presenza di quest'ultima comporta un degrado nella stima.

La componente sistematica del rumore causa la deriva della stima finale nel tempo. L'eliminazione del bias dal segnale può avvenire in due modi: è possibile effettuare la sua stima all'interno di un filtro di Kalman, aumentando la dimensione degli stati del sistema, oppure è possibile eliminare la componente sistematica dell'errore prima di effettuare il calcolo. Solitamente vengono utilizzati entrambi gli approcci. Bias e scale factor stimati dalla calibrazione sono applicati al segnale grezzo. In seguito però è necessario affinare la stima, per tener conto delle inevitabili variazioni intercorse dopo la calibrazione e delle componenti *run-to-run*. In questa tesi si è scelto di effettuare una stima del bias dei giroscopi prima dell'operazione di integrazione con i dati GPS in condizioni di quiete con un polinomio che rappresenta la variazione del bias. L'interpolazione può essere effettuata nel tempo o in funzione della temperatura.

Il rumore bianco nelle misure invece comporta, per l'integrazione delle misure, un *random walk* nelle grandezze stimate. La componente accidentale, però, non è sempre assimilabile a rumore bianco: a volte presenta una o più frequenze dominanti. Ciò è dovuto alla non completa accidentalità delle cause: si pensi ad esempio alle vibrazioni del mezzo. È possibile ridurre il disturbo accidentale solo nella banda di segnale in cui non è presente la componente dovuta al movimento, tramite un filtro FIR passa-basso oppure una procedura di *wavelet denoising*.

#### 5.1 I filtri FIR

L'output di un filtro numerico  $y(k)$ , in un sistema invariante, è proporzionale all'input  $x(k)$  convoluto con la sua risposta impulsiva:

$$y(k) = h(k) * x(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k-l)x(l)$$

La trasformata  $z$  di  $y(n)$  è quindi legata alla trasformata  $z$  di  $x(k)$ :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n+1} z^{-n}}{a_1 + a_2 z^{-1} + \dots + a_{m+1} z^{-m}} X(z)$$

dove  $H(z)$  è detta *funzione di trasferimento del filtro*. Se  $m = 0$ , il filtro è a *risposta impulsiva finita (FIR)*. Posto  $a_1 = 1$ , con condizioni iniziali nulle, si ha

$$y(k) = b_1 x(k) + b_2 x(k-1) + \dots + b_{n+1} x(k-n)$$

da calcolarsi in modo ricorsivo a partire da  $y(1)$ .

Applicando un filtro FIR passa-basso si ha sempre una distorsione, o di ampiezza o di fase. La scelta del filtro da applicare può essere legata alle distorsioni indotte. Si può ottenere uno sfasamento lineare: così risulta semplice correggere la distorsione. Per realizzare un filtro lineare e invariante a distorsione di fase nulla si possono processare i dati inerziali prima nel corretto ordine temporale e poi invertendo l'asse dei tempi. Ciò è utile per mantenere la sincronizzazione con altri sensori.

#### 5.2 Il wavelet denoising

Per  $p \geq 0$  e per ogni valore reale di  $s \neq 0$ , si definisce *wavelet*

$$\psi_{s,p}(t) \equiv |s|^{-a} \psi\left(\frac{t-p}{s}\right)$$

la versione traslata e scalata di una funzione  $\psi$ , detta *wavelet madre*. Le wavelet hanno uno spettro di tipo passa-banda; inoltre la wavelet madre è una funzione a media nulla e quindi deve essere "oscillatoria".  $p$  trasla;  $s$  scala orizzontalmente la funzione  $\psi$ . È possibile mettere in corrispondenza  $s$  con il concetto di frequenza del segnale. Si può intuire infatti che se  $s$  è elevato si ha una wavelet con una oscillazione più lunga e quindi una pseudo-frequenza bassa e viceversa. La trasformata wavelet continua di  $f(t)$  è:

$$W(s, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{\psi_{s,p}(t)} dt \quad (\text{ } \overline{\phantom{x}} \text{ complesso coniugato})$$

e permette la decomposizione o *analisi*. Il calcolo viene normalmente eseguito facendo variare in modo discreto i parametri  $s$  e  $p$ , ottenendo una serie di *coefficienti wavelet*, che forniscono la decomposizione wavelet del segnale. Fissato  $s$ , le wavelet rappresentano un particolare livello di descrizione nel segnale; al diminuire di  $s$  le wavelet diventano sempre più piccole e aumenta il livello di descrizione del segnale.

Se le wavelet sono assimilabili a una base ortonormale, il segnale può essere ricostruito sommando le funzioni base pesate con i coefficienti della propria trasformata wavelet:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(j, k) \psi_{j,k}(t)$$

Dalla teoria di Fourier, un insieme di wavelet a diversi fattori di scala può essere visto come un insieme di filtri passa-banda di diversa dimensione e posizione nello spettro. Questi filtri possono essere costruiti in modo da separare lo spettro in bande di frequenza. Solitamente lo spettro del segnale viene diviso in due parti (la scelta del valore di soglia si effettua utilizzando appositi algoritmi): una parte passa-basso e una passa-alto. I coefficienti a scala bassa contengono le informazioni di dettaglio (alta frequenza) e quelli a scala bassa le informazioni a bassa frequenza (approssimazione). Iterando questa procedura si ottiene la decomposizione multilivello, in cui ad ogni passo vengono decomposte solo le componenti a scala alta in modo da separare il rumore (che si ipotizza ad alta frequenza) dal segnale. Se si effettua la sintesi, ovvero la ricostruzione del segnale originario a partire dai coefficienti, utilizzando solo quelli di



scala alta, si ottiene un segnale “filtrato” nelle alte frequenze. La ricostruzione del segnale, per mezzo della sintesi delle sole componenti ad alta scala ottenute per ogni livello, comporta una riduzione del rumore sempre più accentuata all’aumentare del livello di decomposizione. La scelta del livello di decomposizione è operazione delicata, perché non è esplicitamente riconducibile alle frequenze come nel caso dei filtri FIR.

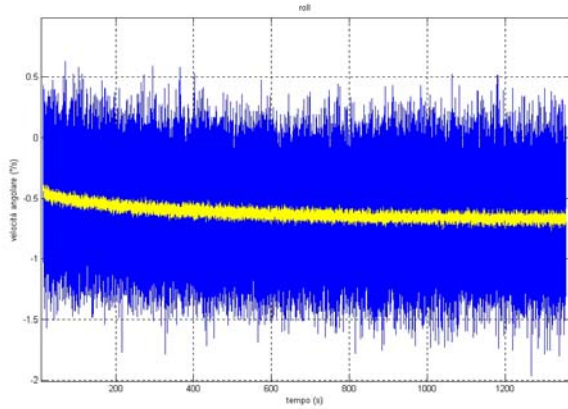


Figura 4. Esempio di denoising: in blu il segnale originale misurato, in giallo il segnale depurato con decomposizione wavelet di Haar arrestata all’ordine 4.

Si può applicare questa procedura anche a un segnale non stazionario, potendo anche identificare a posteriori l’istante in cui il comportamento è cambiato (per esempio sono comparse nuove frequenze), cosa impossibile da fare utilizzando la classica trasformata di Fourier.

Le frequenze del rumore possono ricadere nella zona dello spettro in cui è presente anche il segnale che si vuole depurare. Il denoising elimina le componenti di alta frequenza del rumore, ma può esercitare la sua influenza anche sulla deriva, in particolare sulla componente di random walk delle stime, ma la scelta di una decomposizione di livello troppo elevato può andare a intaccare anche la parte di spettro in cui è presente il segnale, modificandone in modo non trascurabile l’ampiezza.

## 6. LE PROVE EFFETTUATE

### 6.1 Il software realizzato

In questa tesi sono state sviluppate varie *function* MATLAB® per svolgere le procedure di elaborazione presentate ed è stato implementato un software di elaborazione IMU/GPS in post-processing: *GINO: GPS/IMU Navigation and Orientation*. Implementato con un’interfaccia grafica *user-friendly* per l’utilizzo anche da parte di utenti non specializzati, nella sua versione principale effettua l’integrazione IMU/GPS per mezzo del filtro di Kalman e in una seconda versione sfrutta la soluzione batch.

L’applicativo presuppone l’impiego di tre antenne GPS e le posizioni GPS devono essere preventivamente calcolate per mezzo di un software commerciale. La posizione del veicolo si ottiene dalla loro media, mentre la matrice di rotazione dai coseni direttori. Le posizioni GPS sono inoltre utilizzate per la stima della matrice di rotazione tra il sdr WGS84 e il sdr body. Poiché in generale il campionamento delle tre antenne non avrà stime fixed e cycle slip sincroni, l’algoritmo identifica gli istanti in cui sono note simultaneamente le tre posizioni delle antenne. Le soluzioni di posizione, velocità e assetto stimate per ogni istante vengono salvate in due file.

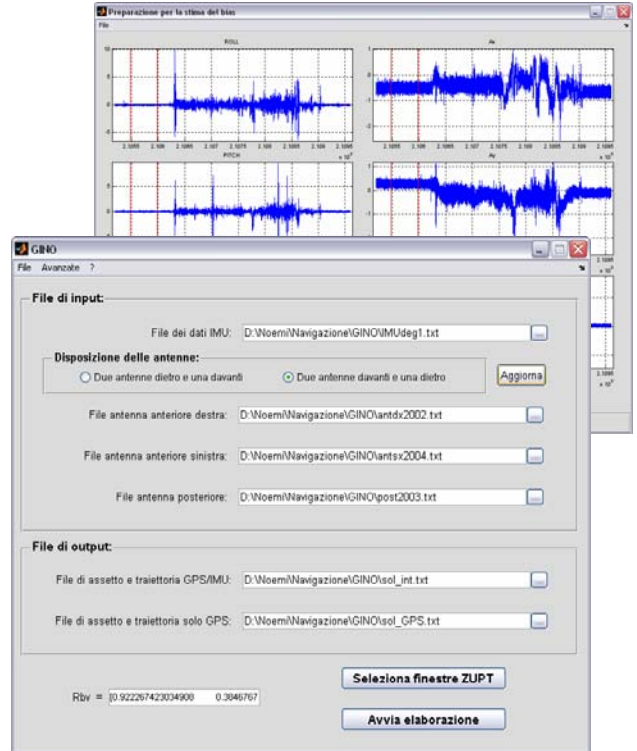


Figura 5. Il programma GINO

La procedura di riduzione del rumore è stata implementata in un tool all’interno del programma con un’interfaccia grafica, che permette di selezionare le finestre temporali in cui il veicolo è stato fermo. È possibile selezionare il metodo per la riduzione del noise (*FIR filter denoising* con finestra tipo *moving average* oppure *wavelet denoising*). La regressione dei dati per la stima della componente sistematica è effettuata ai minimi quadrati.

### 6.2 Gli strumenti utilizzati e la loro calibrazione

Nelle prove sono stati utilizzati due IMU. L’IMU400CC-100 della Crossbow è uno strumento MEMS *low accuracy*. Fornisce in output velocità angolari e accelerazioni corrette in parte degli effetti di temperatura, non-linearità e disallineamento degli assi. L’IMU HG1700 della Honeywell è un IMU *tactical grade*, parte di un sistema di navigazione Applanix POS/LV. In output fornisce *incremental angle* e *incremental velocity* espressi in *pulses*, compensati per gli effetti termici. Non sono stati forniti né la sigla della versione né il foglio di calibrazione.

In primo luogo è necessario effettuare la *calibrazione* del sistema. In linea teorica, se l’IMU è livellato sulle sei facce, ciascun asse del *body-frame* punta in una direzione nota ed è possibile stimare i bias e i fattori di scala. Si consideri, ad esempio, l’accelerometro lungo l’asse z allineato con la verticale. Dette  $A_{z(down)}$  e  $A_{z(up)}$  le medie dell’output rispettivamente quando l’asse z è rivolto verso il basso e verso l’alto, si ha

$$A_{z(up)} = b_{az} - (1 + s_{az})g$$

$$A_{z(down)} = b_{az} + (1 + s_{az})g$$

da cui si ricavano bias e scale factor degli accelerometri.

Per i giroscopi, posto l’asse z lungo la verticale, si ha:

$$\Omega_{z(up)} = b_{gz} + (1 + s_{gz})\omega_e \sin\varphi$$

$$\Omega_{z(down)} = b_{gz} - (1 + s_{gz})\omega_e \sin\varphi$$

Il bias e lo scale factor così ottenuti non coincidono con quelli definiti nel §1.2, perché stimati a partire da valori pretrattati. Possono invece essere interpretati come un affinamento della stima di bias e scale factor. Tale test, applicato all'IMU400CC, non permette la stima dello scale factor dei giroscopi, perché i sensori sono di precisione troppo limitata e la velocità di rotazione terrestre è nascosta in un rumore di fondo troppo elevato. Nel caso invece dell'IMU Honeywell, poiché i dati sono forniti in *pulses*, si è posto

$$A[m/s^2] = (A[pulses] - b[pulses]) \cdot s[m/s^2 / pulses]$$

$$\Omega[^\circ/s] = (\Omega[pulses] - b[pulses]) \cdot s[^\circ/s / pulses]$$

da cui si stimano bias e scale factor, come definiti nel §1.2.

La stima di queste quantità si è rivelata solo parzialmente sufficiente, a causa delle variazioni termiche, dell'instabilità del treppiede topografico e dei disallineamenti fisici. Gli errori residui non sono rilevabili a partire dai parametri statistici di stima, come varianza o rms. Ciò non ha permesso di utilizzare i dati accelerometrici nelle prove di navigazione INS autonoma.

### 6.3 Le prove in laboratorio

Per valutare le prestazioni del software implementato e del sensore a disposizione, sono state effettuate una serie di prove preliminari con il solo IMU400CC sia statiche che cinematiche, con assetto noto, di durata variabile da 3 a circa 23 minuti. L'elaborazione ha previsto: wavelet denoising; eliminazione del bias, stimato in funzione della temperatura; filtro di Kalman.

A titolo di esempio è riportato in fig. 6 il risultato di una prova statica, della durata di 23 minuti circa. Gli angoli di assetto stimati, nella realtà costanti, derivano nel tempo con un andamento lineare, a cui si sovrappone un *random walk*, dovuto alla presenza di rumore bianco residuo nelle misure.

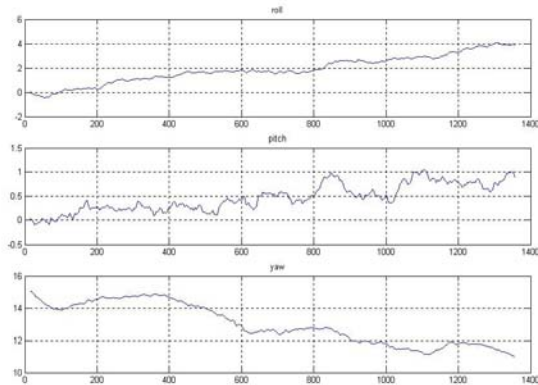


Figura 6. Risultati dell'elaborazione dei soli dati IMU in termini di assetto: in ascissa è riportato il tempo in secondi, in ordinata gli angoli espressi in gradi

La deriva degli angoli è risultata pari a circa  $0.16^\circ/\text{min}$ . Nel caso del pitch, invece, la deriva è risultata sempre molto inferiore al valore ottenuto dagli altri due assi e pari a circa  $0.045^\circ/\text{min}$ .

### 6.4 Le prove su strada

Sono state effettuate diverse prove su strada che forniscono informazioni utili riguardo al comportamento della stima inerziale autonoma in presenza dei disturbi legati al movimento del mezzo e alle sue vibrazioni e permettono di studiare il comportamento della soluzione integrata IMU/GPS.

Per integrare dati reali, in funzione dello scopo della missione, dell'accuratezza di georeferenziazione richiesta e delle caratteristiche dei sensori, è richiesta un'accurata calibrazione geometrica preliminare tra i vari sdr e la sincronizzazione temporale.

Per quanto riguarda la calibrazione geometrica le difficoltà sono legate alla precisione ottenibile dalle metodologie classiche. La limitata qualità degli IMU utilizzati vincola l'utilizzo degli spigoli del case come riferimento per gli angoli. La precisione della stima di questa matrice di rotazione è meno rilevante se si vogliono effettuare solo stime d'assetto, ma è essenziale nelle misure accelerometriche, perché anche un piccolo angolo residuo porta a proiettare male la gravità, la cui entità è ragguardevole. Altrimenti è possibile implementare una procedura che, sfruttando la deriva del sensore in condizioni di quiete, identifichi l'angolo residuo e quindi aggiorni la matrice di calibrazione.

**Il veicolo rilevatore dell'Università di Parma:** Il MMV del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Parma è dotato di due telecamere fotogrammetriche, tre GPS (ricevitori SR530 e antenne AT502 Leica) e l'IMU400CC. Le antenne sono state disposte in diverse configurazioni nei vari esperimenti, per cui è stato necessario stimare ogni volta la calibrazione geometrica tra IMU e GPS.

I problemi per ottenere la sincronizzazione dell'IMU400CC con il GPS sono notevoli: non accetta segnali in input, per cui non può ricevere il *pps* (*pulse per second*) dal GPS. Ai dati associa un'informazione di tempo legata in termini relativi alla precisione del counter interno (equivalente a quella di un orologio su PC) e dipende in termini assoluti dall'ora dell'orologio del PC che raccoglie i dati. Tale precisione non è sufficiente e quindi si è adottato un metodo empirico di massimizzazione della correlazione tra le stime IMU e quelle GPS.

Per quanto riguarda la stima di assetto effettuata con i soli GPS, le distanze non elevate tra le antenne e la precisione relativa della posizione, non garantiscono una soluzione di elevata precisione: si può stimare dell'ordine di  $0.5-1^\circ$  in roll, di  $0.2-0.4^\circ$  per pitch e yaw. Durante un rilievo, inoltre, è stata riscontrata la presenza di outliers nelle stime GPS, con salti in altimetria pari anche a 2 m, in corrispondenza di variazioni di configurazione satellitare, anche con soluzione *fixed*.

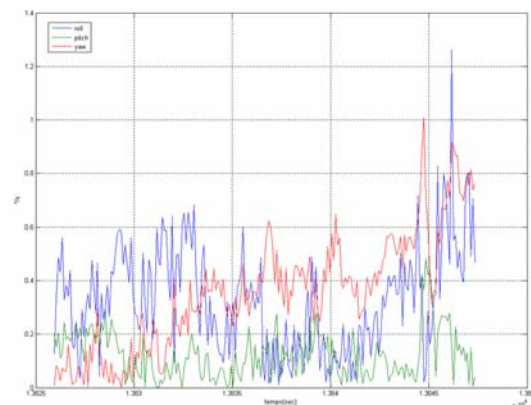


Figura 7. Differenze di angoli stimati da GPS e da IMU

Il confronto tra le soluzioni solo IMU e quelle solo GPS evidenzia lo stesso comportamento già rilevato in laboratorio. Per cui il rumore introdotto dalle vibrazioni del motore, in modo assai marcato e con alcuni picchi di frequenza dello spettro, non aumenta la deriva della soluzione. In fig. 7 sono riportate a titolo di esempio le differenze nelle stime degli angoli tra i due strumenti durante una breve prova. Le variazioni sono accentua-

te, perché le stime GPS hanno un rumore di breve termine elevato. Dopo il primo periodo di misura in cui la deriva del sensore è sommersa nel rumore di alta frequenza GPS, si vede più chiaramente la deriva della stima INS. Il rumore delle misure GPS di breve periodo è una componente di disturbo importante quando si vuole effettuare l'integrazione con l'IMU, in cui invece questa componente è minore. Essa viene in buona parte eliminata quando le stime GPS entrano nel filtro di Kalman. Le soluzioni integrate IMU/GPS appaiono invece molto simili a un'interpolazione della soluzione GPS. Infatti il GPS domina la stima in generale, quando è presente, probabilmente per la valutazione spesso ottimistica della matrice di covarianza di stima.

**VARIS:** L'Università di Parma ha collaborato con la ditta Sitemco Informatica di Bologna, nell'ambito di un progetto di trasferimento tecnologico della Regione Emilia Romagna per la realizzazione di un veicolo rilevatore. VARIS (Veicolo ad Alto Rendimento per il Sistema Informativo Stradale), è dotato di quattro telecamere fotogrammetriche, due antenne GPS Trimble, un sensore inerziale HG1700 Honeywell e il sistema di navigazione POS/LV 220 Applanix.

È stata effettuata una prova installando sul MMV, in aggiunta alla strumentazione esistente, le tre antenne GPS Leica. Per la sincronizzazione si è sfruttato il software Applanix e i dati sono riferiti al tempo GPS. I risultati sono stati confrontati con la soluzione ottenuta per mezzo del software Applanix PosPac®. Il percorso di prova è stato effettuato ripetendo semplicemente in andata e ritorno (con inversione ad U della marcia) uno dei viali del Campus di Parma. Lungo il percorso erano distribuiti alcuni dossi rallentatori, il che ha permesso di studiare l'andamento della soluzione con variazioni repentine di pitch. L'algoritmo si è dimostrato affidabile anche in questi casi, che quindi non compromettono la qualità della soluzione.

Il sensore ha nel caso dei giroscopi una deriva limitata, che si può quantificare nell'ordine di circa  $0.07^\circ/\text{min}$ .

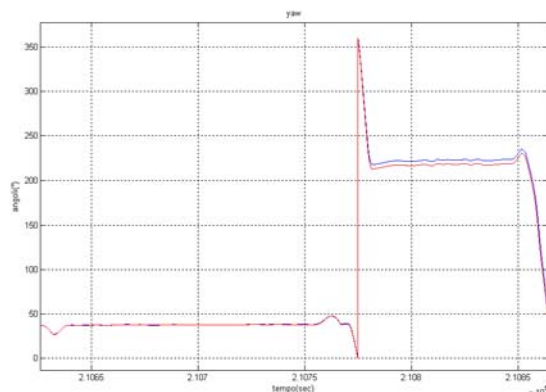


Figura 8. Risultati di una prova su strada: in blu è riportata la soluzione ottenuta simulando la perdita del segnale GPS, in rosso la soluzione IMU/GPS

Come si può vedere in fig. 8, l'esecuzione di curve strette nell'inversione ad U, associata alla limitata affidabilità della stima dello scale factor legata alla procedura di calibrazione seguita, comporta una "traslazione" nella soluzione. In particolare, nel caso riportato in fig. 8, una delle ultime curve ha comportato una differenza dell'angolo azimutale di circa  $9^\circ$ .

### 6.5 La simulazione

Per validare l'algoritmo di integrazione delle accelerazioni, sono stati simulati i dati accelerometrici di un IMU *navigation*

*grade*. A partire dalle posizioni note di una traiettoria percorsa a velocità media di circa 50 km/h, sono stati simulati i dati degli accelerometri già espressi in un sdr ECEF. Il rumore accidentale è limitato e i dati presentano talvolta degli *outlier*.

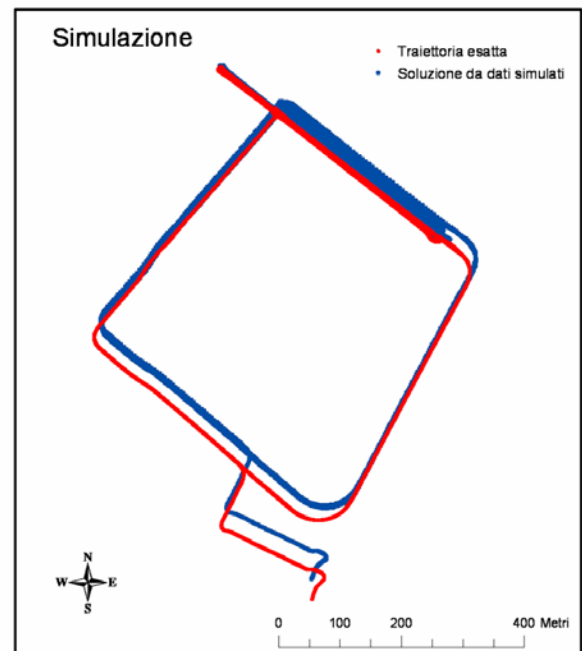


Figura 9. Risultati ottenuti integrando i dati della simulazione

In fig. 9, in rosso è rappresentata la traiettoria di origine, mentre in blu quella ricavata a partire dai dati simulati. L'effetto degli outlier nelle misure inerziali consiste in una traslazione della soluzione, che poi, per la natura integrativa della stima, in assenza di stime GPS, viene mantenuta nel resto del rilievo.

### 6.6 Confronto tra filtro di Kalman e soluzione batch

Sono state eseguite alcune prove preliminari per confrontare le prestazioni dei due diversi algoritmi implementati nel software GINO, integrando i dati di giroscopi e IMU di un rilievo con le due modalità. Le stime ottenute sono risultate comparabili. Invece le matrici di covarianza sono più realistiche nel caso della stima batch, poiché a differenza del filtro di Kalman tengono conto delle principali correlazioni temporali tra le stime. Il tempo di elaborazione è inoltre molto inferiore con la procedura batch. La stima di Kalman permette (in linea teorica) di elaborare un rilievo di durata illimitata, mentre la stima batch permette di elaborare rilievi di durata inferiore alle 5h consecutive. Questa soluzione quindi presenta elevate potenzialità per le applicazioni nel rilevamento cinematico del territorio.

## CONCLUSIONI

L'utilizzo di sensori inerziali integrati con GPS sta assumendo un ruolo sempre più importante nelle varie discipline del rilevamento e le applicazioni sono destinate a crescere ulteriormente nel prossimo futuro a causa dell'enorme sviluppo tecnologico e del sostanziale abbattimento dei costi, passato e previsto, a cui è soggetta questa strumentazione. Oggetto della tesi qui brevemente presentata è stato lo sviluppo di metodologie per effettuare la navigazione inerziale sia autonoma sia assistita da GPS. Per realizzare ciò sono stati affrontati tutti i principali aspetti della navigazione inerziale: lo studio delle caratteristiche e dei

principi di funzionamento dei sistemi di navigazione inerziale e dei sensori inerziali; il trattamento delle misure inerziali, in particolare la riduzione degli errori e del rumore; lo sviluppo e la soluzione delle equazioni di navigazione per la stima di posizione e assetto; l'analisi e lo sviluppo delle modalità di integrazione di dati inerziali e GPS; lo studio delle procedure di allineamento iniziale. Infine è stato implementato un software di trattamento dati per la navigazione INS/GPS e sono state eseguite alcune prove con il duplice scopo di validare gli algoritmi sviluppati e di analizzare i risultati ottenibili per mezzo di due sistemi inerziali a basso costo. Si noti infine che quanto realizzato è stato pensato per applicazioni di navigazione terrestre, ma gli algoritmi sviluppati sono applicabili a qualunque altro mezzo, con il solo vincolo della post-elaborazione dei dati.

Gli sviluppi possibili di quanto affrontato nel lavoro qui esposto sono numerosi, a causa della vastità dell'argomento trattato. Oltre alla realizzazione di un sistema di sincronizzazione più efficace tra le varie componenti del sistema di navigazione assistita, IMU e GPS, in modo da associare ciascuna osservazione a un riferimento temporale univoco, problema solo accennato in questa tesi, tra gli sviluppi di maggior utilità si indica la riduzione del numero di antenne GPS necessarie all'integrazione con i dati IMU, introducendo l'accoppiamento delle equazioni dei dati giroscopici con quelle dei dati accelerometrici.

Indubbiamente una delle sfide più interessanti è lo studio di procedure robuste per la rilevazione automatica degli outlier, uno degli aspetti più delicati della navigazione inerziale. Le tecniche attualmente utilizzate infatti non sempre sono in grado di evidenziare la presenza di anomalie o, se le evidenziano, spesso non sono in grado di identificare il particolare sensore che le genera, soprattutto nel caso in cui sia stato mal modellizzato un effetto sistematico. Le principali difficoltà in questo caso consistono nella definizione di un modello matematico di tipo adattivo, eventualmente ricorrendo a un filtro di tale tipo, comunque riconfigurabile nel caso in cui si abbia una *fault detection*.

Infine, si indica tra le tematiche di maggior interesse nel campo della ricerca la definizione di un sistema integrato in grado di sfruttare anche le informazioni delle camere fotogrammetriche, spesso presenti nei MMV. Tale soluzione, troppo onerosa in termini di carico computazionale attualmente per essere realizzata "a tappeto" per tutta la durata del rilievo, potrebbe essere utile nei casi di perdita del segnale GPS per un periodo di tempo consistente. In ogni caso, l'interfacciamento della componente fotogrammetrica con le misure inerziali e le stime GPS può risultare di grande utilità nell'identificazione di un problema nei dati di navigazione e nell'isolamento del particolare sensore che lo ha generato. La sua individuazione infatti non è in generale possibile in modalità automatica se si hanno a disposizione solo IMU e GPS.

## Ringraziamenti

Desidero ringraziare il prof. A. Manzino del Politecnico di Torino e la ditta Siteco Informatica di Bologna, per aver gentilmente messo a disposizione la strumentazione usata nelle prove.

## BIBLIOGRAFIA

B. Benciolini, L. Mussio, 'Algoritmi "esatti" per la soluzione di grandi sistemi', in 'Ricerche di Geodesia, Topografia e Fotogrammetria - n.4', CLUP, Milano, 1984.

R. G. Brown, P. Y. C. Hwang, 'Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering', terza ed., Wiley Interscience ed., New York, 1997.

K. Britting, 'Inertial navigation system analysis', Wiley Interscience, New York, 1971.

N. E. Cazzaniga, G. Forlani, 'Integrazione di dati INS/GPS', 8ª Conferenza Nazionale ASITA, Roma, 2004.

N. E. Cazzaniga, G. Forlani, 'La riduzione dei disturbi nelle misure INS', 9ª Conferenza Nazionale ASITA, Catania, 2005.

N. E. Cazzaniga, G. Forlani, L. Pinto, 'Confronto fra misure di assetto con GPS e con giroscopi', 9ª Conferenza Nazionale ASITA, Catania, 2005.

N. E. Cazzaniga, G. Forlani, L. Pinto, 'Esperienze di navigazione geodetica in una rete di SP GPS per l'orientamento diretto di fotogrammi', 10ª Conferenza Nazionale ASITA, Bolzano, 2006.

C. Jekeli, 'Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications', Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

G. Kaiser, 'A friendly guide to wavelets', Birkhäuser, Boston, 1994.

A. Lawrence, 'Modern Inertial Technology - Navigation, Guidance, and Control', Second Edition, Springer, 1998.

A. M. Manzino, 'Introduzione all'uso del filtro di Kalman in Geodesia', Bollettino della SIFET, n.2, 2003, pp. 63-101.

W. A. Heiskanen, H. Moritz, 'Physical Geodesy', Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, reprint 1990.

P. J. G. Teunissen, M. A. Salzmann, 'A Recursive Slippage Test for Use in State-Space Filtering', Manuscripta Geodaetica, vol.14, n.6, 1989, pp. 383-390.

F. Sansò, 'An Exact Solution of the Roto-Translation Problem', Photogrammetria, vol.29, 1973, pp. 203-216.

F. Sansò, 'Navigazione geodetica e rilevamento cinematico', Polipress, Milano, 2006.

P. G. Savage, 'Strapdown System Computational Elements', NATO Research and Technology Organisation Lecture Series 232, Advances in Navigation Sensors and Integration Technology, Londra, 2004, pp. 3.1-3.28.

G. T. Schmidt, 'INS/GPS Technology Trends', NATO Research and Technology Organisation Lecture Series 232, Advances in Navigation Sensors and Integration Technology, Londra, 2004, pp. 1.1-1.16.

G. T. Schmidt, R. E. Phillips, 'INS/GPS Integration Architectures', NATO Research and Technology Organisation Lecture Series 232, Advances in Navigation Sensors and Integration Technology, Londra, 2004, pp. 5.1-5.17.

G. Strang, K. Borre, 'Linear Algebra, Geodesy, and GPS', Cambridge Press, Wellesley, 1997.

D. H. Titterton, J.L. Weston, 'Strapdown Inertial Navigation Technology', Second Edition, Reston, VA: AIAA, UK: Institution of Electrical Engineers, 2004.