

Smoothing Splines

Vito Simone Lacatena 747810

1. Introduzione

Prima di discutere della struttura dell'algoritmo di smoothing splines, occorre introdurre dei concetti utili alla discussione del metodo, partendo dal definire il problema della regressione.

1.1 Il problema della regressione

In generale un problema di regressione ha l'obiettivo di stimare un modello che descriva una relazione tra una **variabile di risposta** Y e un insieme di **variabili predittive** X_1, \dots, X_p .

1.2 Regressione Lineare

Il più semplice modello di regressione è il modello di **regressione lineare** in cui si assume una relazione lineare tra una singola variabile predittiva X e la variabile di risposta, tale funzione lineare viene approssimata come segue: Y

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

I parametri β_0 e β_1 sono sconosciuti e vanno stimati utilizzando i dati, il termine ϵ è un termine di errore con media 0.

L'obiettivo è determinare le stime $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, dove $\hat{\beta}_0$ è l'intercetta e $\hat{\beta}_1$ è la pendenza della retta che dovrebbe passare il più vicino possibile alle osservazioni (Figura 1).

Per determinare il valore ottimale di questi parametri è possibile utilizzare diversi metodi, il più comune è il criterio dei **minimi quadrati**, ovvero scegliere le stime dei parametri $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ in modo da minimizzare la **somma dei residui al quadrato** definita come :

$$RSS = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$$

La regressione lineare standard ha dei *limiti in termini di capacità predittiva*, dato che necessita dell'assunzione di linearità, e se la vera funzione non risulta lineare i risultati ottenuti saranno molto distanti da quelli reali, poiché il presupposto di linearità è molto spesso un'approssimazione scarsa del problema reale.

1.3 Regressione Polinomiale

Il modello di regressione polinomiale estende il modello di regressione lineare attraverso l'aggiunta di ulteriori predittori ottenuti ciascuna delle variabili originali ad una potenza.

Formalmente, dato il modello lineare classico:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

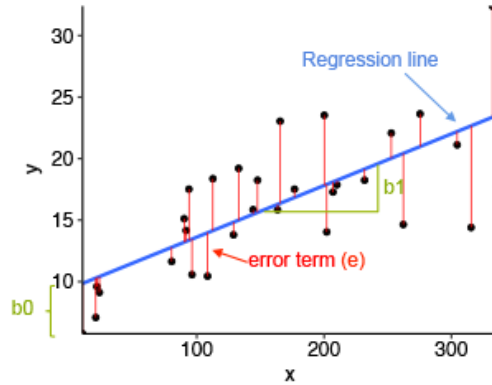


Figure 1: Regressione Lineare

esso viene esteso con la seguente forma polinomiale:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_d x_i^d + \epsilon_i$$

In questo modo è possibile ottenere curve non lineari. Non è tuttavia consigliabile utilizzare polinomi di grado troppo elevato poichè la curva diventerebbe troppo flessibile, nella maggior parte delle applicazioni è infatti suggeribile non andare oltre al grado 3 o 4.

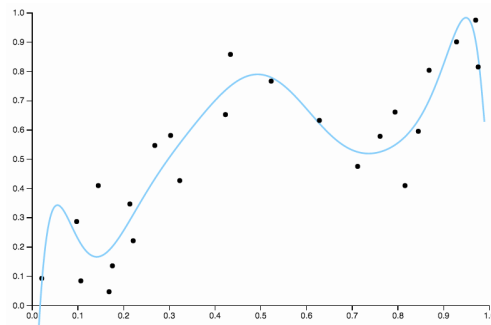


Figure 2: Regressione Polinomiale

1.4 Funzioni a gradino

In alcune applicazioni, anche la regressione polinomiale può essere considerata limitata, tale limite è dato dalla loro natura globale: *determinare dei coefficienti per ottenere una specifica forma funzionale in una regione può far sì che la funzione assuma una forma troppo irregolare in regioni distanti.*

Un modo per superare questo limite è quello di utilizzare delle **funzioni a gradino**.

Tali funzioni dividono l'intervallo dei valori in K bins distinti creando un insieme di valori di soglia (detti anche **cutpoints**) c_1, c_2, \dots, c_k e per ogni bin si va ad adattare una funzione costante, avremo quindi una funzione costante a tratti:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 C_1(x_i) + \beta_2 C_2(x_i) + \dots + \beta_k C_k(x_i) + \epsilon_i$$

dove C_j con $j = 1 \dots k$ è una funzione che assume valore 1 se $c_{j-1} < x_i < c_j$ altrimenti 0.

1.5 Funzioni base

I modelli di regressione polinomiale e funzioni a scalini sono casi particolari di un framework generico di funzioni base, in cui si va ad adattare il seguente modello:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \dots + \beta_k b_k(x_i) + \epsilon_i$$

dove $b_j(\cdot)$ sono funzioni base scelte in anticipo.

Questo significa che è possibile rivedere i casi precedenti come istanze di questo generico modello, ovvero:

- regressione polinomiale : $b_j(x_i) = x_i^j$;
- funzioni a scalini : $b_j(x_i) = C_j(x_i)$;

1.6 Regressione polinomiale a tratti e Spline

Esiste una classe di funzioni base che estende l'approccio che di regressione polinomiale e la regressione costante a tratti.

Idea: Invece di adattare un polinomio di grado elevato su l'intero intervallo dei valori della variabile predittrice X , si potrebbe pensare di utilizzare una funzione polinomiale a tratti, dividendo il dominio di X in intervalli contigui e rappresentando f con un polinomio di grado inferiore separato in ogni intervallo.

Tale approccio è chiamato **regressione polinomiale a tratti**.

Esempio: Se si considerano polinomi di terzo grado e si divide l'intervallo originale X sul punto c , avremmo due cubiche con differenti coefficienti:

$$y_i = \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \epsilon_i & \text{se } x_i < c \\ \beta_{02} + \beta_{12}x_i + \beta_{22}x_i^2 + \beta_{32}x_i^3 + \epsilon_i & \text{se } x_i \geq c \end{cases}$$

In questo caso si adatteranno due diversi polinomi con i propri coefficienti, il punto c dell'intervallo in cui si passa da un polinomio ad un altro è chiamato **nodo** (o **knot**).

Osservazione: con K nodi si avranno $K + 1$ polinomi.

I **gradi di libertà** per questo esempio sono 8, per gradi di libertà si intende il numero di parametri liberi (come il numero dei coefficienti in una funzione polinomiale), nell'esempio precedente il numero di gradi di libertà è quattro per ogni polinomio (poichè di grado 3), quindi in tutto otto.

1.6.1 Vincoli di continuità

Per avere una curva che non sia troppo flessibile e non appaia discontinua nel passaggio da un intervallo all'altro è importante aggiungere tre vincoli: la **funzione deve essere continua** e la **derivata prima e seconda dei polinomi a tratti devono essere continue**, in questo modo non solo il polinomio a tratti sarà continuo ma sarà anche smussato (Figura 3).

Ad ogni vincolo il numero di gradi di libertà si riduce di 1, in questo modo i gradi libertà del polinomio di grado 3 visto prima si riducono a 5.

1.6.2 Spline

Una **spline di ordine** d con nodi c_j , $j = 1, \dots, K$ è un polinomio a tratti di ordine d avente derivate continue sino all'ordine $d - 1$.

Le spline più utilizzate sono le **spline cubiche**, con K nodi utilizzano $K + 4$ gradi di libertà e sono due volte differenziabile nell'intero intervallo X . Questo tipo di spline sono popolari perchè risulta difficile all'occhio umano individuare una discontinuità ai nodi.

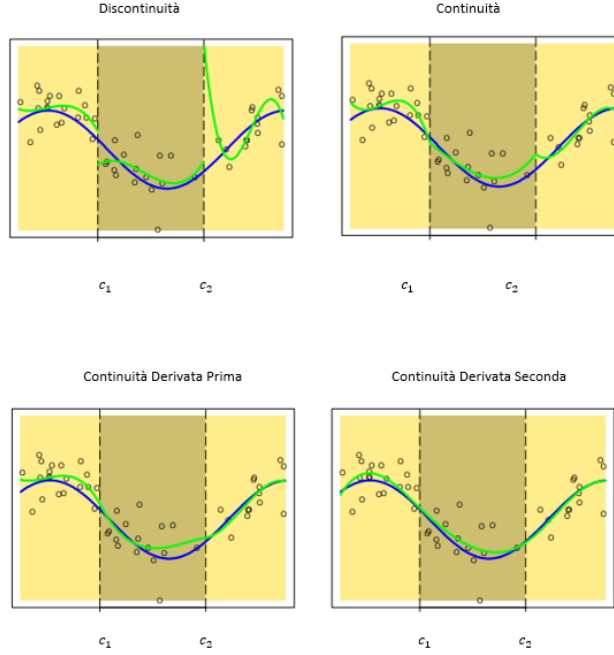


Figure 3: Differenze con diversi livelli di continuità

1.6.3 Basi della Spline

Una regressione spline può essere rappresentata in termini di basi di funzioni.

Caso semplice: regressione spline lineare con grado $d = 1$ e $K = 1$ nodi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \epsilon_i$$

dove $b_1(x) = x$ e successivamente si usano funzioni base troncate

$$h(x, c) = (x - c)_+ = \begin{cases} (x - c) & \text{se } x > c \\ 0 & \text{se } x \leq c \end{cases}$$

Se $x_i \leq c$ allora $(x_i - c)_+ = 0$ e $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$

Se $x_i > c$ allora $(x_i - c)_+ = (x_i - c)$ e $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 (x_i - c) + \epsilon_i$

Caso generale: regressione spline di grado d e K nodi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \beta_K b_K(x_i) + \beta_{K+1} b_{K+1}(x_i) + \dots + \beta_{K+d} b_{K+d}(x_i) + \epsilon_i$$

le funzioni base sono

$$x, x^2, \dots, x^d, h(x, c_1), \dots, h(x, c_K)$$

dove in questo caso

$$h(x, c) = (x - c)_+^d = (x - c)^d \text{ se } x > c \text{ altrimenti } 0.$$

1.6.4 Splines cubiche naturali

Le Spline di grado superiore ad secondo mostrano un'elevata variabilità agli estremi dell'intervallo.

Le **spline naturale** risolvono questo problema, e permettono di produrre stime più stabili agli estremi dell'intervallo, aggiungendo un ulteriore vincolo che impone che la funzione sia lineare agli estremi dei nodi, con l'aggiunta di questo vincolo si liberano in tutto 4 gradi di libertà.

1.6.5 La scelta del numero e della posizione dei nodi

Un metodo obiettivo per determinare il numero e la posizione dei nodi consiste nell'utilizzare la cross-validation in cui si effettuano più iterazioni utilizzando una parte dei dati per adattare la spline con un determinato numero K di nodi e i dati non visti rimanenti sono utilizzati per fare la previsione, si calcola una somma dei quadrati dei residui complessiva per avere una misura di valutazione. La procedura può essere effettuata più volte per diversi valori di K e scegliere il modello che ha fornito un risultato di RSS più piccolo.

1.6.6 Vantaggi rispetto alla regressione polinomiale

Le spline di regressione permettono di ottenere risultati superiori rispetto a quelli della regressione polinomiale, perché a differenza dei polinomi che per produrre una curva flessibile deve utilizzare un alto grado, le spline ottengono flessibilità aumentando il numero dei nodi ma mantenendo un grado basso, producendo in questo modo stime più stabili permettendo di posizionare più nodi (quindi più flessibilità) in regioni in cui la funzione da stimare tende a cambiare rapidamente e meno nodi in regioni in cui la funzione è più stabile.

2. Smoothing Splines

2.1 Panoramica

Si consideri il problema di trovare la funzione $f(x)$ tale che minimizzi la **somma dei quadrati dei residui**

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

In assenza di alcun vincolo si potrebbe ottenere un RSS pari a zero scegliendo la funzione f che interpola perfettamente tutti i punti y_i , tuttavia la curva di regressione risulterebbe troppo flessibile.

Occorre quindi e il modo di smussare la funzione, modificando la RSS da minimizzare nella seguente forma:

$$RSS(f, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int f''(t)^2 dt$$

La funzione f è definita **smoothing spline**.

Le smoothing splines sono una tecnica molto utilizzata nella **regressione non parametrica**, dove a differenza dei metodi parametrici non si fa alcuna assunzione sulla forma di f ma si cerca una stima di questa funzione sconosciuta che si avvicini il più possibile alle osservazioni senza risultare né troppo approssimativa né, nel caso opposto, troppo irregolare.

La prima parte di RSS definisce una misura di distanza dai dati mentre la seconda parte definisce una **termine penalità** che va a penalizzare la variabilità della funzione f , la quantità $\lambda \int f''(t)^2 dt$ è quindi una misura del cambiamento globale nella funzione $f'(t)$

- se f è smussata $\int f'(t)$ sarà costante e $\int f''(t)$ avrà un valore molto piccolo;
- se f è irregolare $\int f'(t)$ sarà molto variabile e $\int f''(t)$ avrà un valore molto grande;

Il parametro λ è un **parametro di smoothing** che porterà f ad essere smussata, il parametro assume valori compresi in $(0, \infty)$:

- Con valore $\lambda = 0$ i suoi effetti sono nulli e quindi la funzione assumerà un comportamento molto irregolare;
- con $\lambda = \infty$ la funzione sarà una linea retta che passa il più vicino possibile ai dati.

Quindi grandi valori di λ producono curve smussate, mentre piccoli valori di questo parametro producono curve più irregolari.

Occorre notare che all'aumentare del valore di λ da 0 a ∞ il numero di gradi di libertà decresce da n a 2, il parametro di regolarizzazione λ controlla l'irregolarità della spline e quindi anche i gradi di libertà effettivi.

La funzione $f(x)$ che **minimizza la RSS** è una **spline cubica naturale** avente nodi ad ogni punto x_1, \dots, x_n , ovvero è un polinomio cubico a tratti con nodi a valori distinti di X , derivate prime e seconde continue ad ogni nodo, ed inoltre è lineare nelle regioni al di fuori dei nodi estremi.

Il vettore n -dimensionale \hat{f}_λ contenenti i valori adattati ai dati di training x_1, \dots, x_n , nonchè soluzione di $RSS(f, \lambda)$ per un determinato valore di λ può essere quindi scritto nella seguente forma :

$$\hat{f}_\lambda = S_\lambda y$$

Questo perchè, riscrivendo la spline cubica naturale in termini delle sue funzioni base :

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \theta_j N_j(x)$$

Dove N_j denota la j -esima funzione base n -dimensionale della spline cubica naturale, e θ_j è un generico parametro.

Si può così riscrivere il criterio di minimizzazione nella seguente forma:

$$RSS(f, \lambda) = (y - N\theta)^T (y - N\theta) + \lambda \theta^T \Omega_n \theta$$

Con $N_{i,j} = N_j(x_i)$ e $\{\Omega_n\}_{j,k} = \int N_j''(t) N_k''(t) dt$

Il vettore \hat{f}_λ può essere quindi calcolato come:

$$\hat{f}_\lambda = N(N^T N + \lambda \Omega_n)^{-1} N^T y$$

definendo:

$$S_\lambda = N(N^T N + \lambda \Omega_n)^{-1} N^T$$

Si ha che:

$$\hat{f}_\lambda = S_\lambda y$$

La matrice di dimensione $n \times n$ S_λ è nota come **matrice di smoothing**.

2.2 Proprietà della Matrice di Smoothing

La matrice di smoothing:

- è una matrice quadrata $n \times n$ simmetrica di rango n
- è semi-definita positiva, ovvero $\forall x \neq 0 \quad x S_\lambda x \geq 0$

Dato che S_λ è simmetrica e semidefinita postiva, essa ammette una **eigendecomposition**.

Assumendo che N sia invertibile (ovvero esiste una matrice N^{-1} tale che il prodotto matriciale tra le due restituisce la matrice identità), la matrice di smoothing può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= N(N^T N + \lambda \Omega_N)^{-1} N^T \\ &= N(N^T N + \lambda(N^T N^{-T})\Omega_N(N^{-1}N))^{-1} N^T \\ &= N[N^T(N + \lambda N^{-T})\Omega_N(N^{-1}N)]^{-1} N^T \\ &= NN^{-1}(I + \lambda N^{-T}\Omega_N N^{-1})^{-1} N^{-T} N^T \\ &= (I + \lambda K)^{-1} \end{aligned}$$

Dove $K = N^{-T}\Omega_N N^{-1}$ è una **matrice di penalità**.

La decomposizione della matrice in termini dei suoi autovalori e autovettori è quindi la seguente:

$$S_\lambda = \sum_{k=1}^N \rho_k(\lambda) u_k u_k^T$$

Con

$$\rho_k(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda d_k}$$

Dove d_k è il k -esimo autovalore di K .

La **somma degli elementi diagonali della matrice di smoothing** corrisponde al **numero dei gradi di libertà** della smoothing spline.

$$df_\lambda = \text{trace}(S_\lambda)$$

2.3 Selezione automatica dei parametri di smoothing

In generale i parametri di smoothing da stimare per la regressione spline sono:

- il grado delle spline;
- il numero e la posizione dei nodi.

Nel caso delle smoothing splines si avrà un solo parametro λ da stimare, poichè:

- Il grado della spline è fissato a 3 e
- I nodi della spline corrispondono alle osservazioni distinte;

Dato un fissato numero di gradi di libertà è possibile ricavare il valore di λ , questo perchè dato che $df_\lambda = \text{trace}(S_\lambda)$ è monotona in λ e possibile invertire la relazione.

Uno dei metodi per valutare la scelta del parametro λ è la **Cross-Validation**, in particolare la **Leave-One-Out (LOOCV)** che consiste nell'adattare il modello su $N-1$ osservazioni e effettuare una predizione sull'unica osservazione non vista. Questa procedura viene eseguita per N volte.

L'errore di **Cross-Validation Leave One Out** è calcolato come segue:

$$RSS_{CV}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left(y_i - \hat{f}_\lambda^{(-i)}(x_i) \right)^2$$

Dove la notazione $\hat{f}_\lambda^{(-i)}$ indica la funzione smoothing spline adattata su tutti i dati di training tranne che su x_i .

Si può dimostrare che questo errore può essere calcolato in modo efficiente utilizzando la seguente formula:

$$RSS_{CV}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left(y_i - \hat{f}_{\lambda}^{(-i)}(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - \hat{f}_{\lambda}(x_i)}{1 - \{S_{\lambda}\}_{ii}} \right]^2$$

In questa formula:

- il termine \hat{f}_{λ} indica la funzione spline adattata a *tutte* le osservazioni (anche x_i) e valutata in x_i
- $\{S_{\lambda}\}_{ii}$ l'elemento diagonale i-esimo della matrice S_{λ} .

Questa formula afferma che è possibile calcolare in modo rapido ciascuno degli **adattamenti leave one out** utilizzando solo la funzione adattata a tutte le osservazioni.

La LOOCV può essere interpretata come una somma dei residui quadrati *pesata* con $w_i = \frac{1}{(1 - \{S_{\lambda}\}_{ii})^2}$, dato che $\{S_{\lambda}\}_{ii}$ è diverso per ogni osservazione, il criterio dà un peso diverso ad ogni osservazione. Un miglioramento della LOOCV è la Generalized Cross-Validation (GCV) che permette di equilibrare il peso delle diverse osservazioni, questo criterio trova il valore di λ che minimizza

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}_{\lambda}(x_i))^2}{(1 - \text{trace}(S_{\lambda})/n)^2}$$

2.4 Compromesso Bias-Varianza

Il compromesso bias-varianza è una proprietà specifica di tutti i modelli di apprendimento automatico (supervisionati), che impone un compromesso tra la “flessibilità” del modello e il comportamento su dati non visti.

La **varianza** si riferisce alla *variazione del valore della funzione stimata \hat{f} al variare dei dati di training* che vengono utilizzati, se un metodo presenta una varianza elevata allora piccole variazioni nei dati di training possono portare a grandi variazioni in \hat{f} .

Il **bias** si riferisce alla *distorsione introdotta approssimando un problema complesso con un modello più semplice*.

Occorre definire un compromesso tra bias e varianza poichè al crescere dell'una, decrescerà l'altra.

La scelta del valore di df_{λ} ha effetto sul bias e sulla varianza in quanto:

- valori **troppo bassi** di df_{λ} provocano un **alto bias** e una **bassa varianza** e la funzione andrebbe in **underfitting** dato che il modello sarà troppo semplice;
- valori **troppo alti** di df_{λ} provocano un **basso bias** ma un **alta varianza** e la funzione andrebbe in **overfitting** dato che il modello sarà troppo flessibile;

Dato che $\hat{f}_{\lambda} = S_{\lambda}y$, si ha che:

- $Cov(\hat{f}) = S_{\lambda}Cov(y)S_{\lambda}^T = S_{\lambda}S_{\lambda}^T$ (Gli elementi diagonali sono le varianze puntuali al punto x_i)
- $Bias(\hat{f}) = f - E[\hat{f}] = f - S_{\lambda}f$

dove f è il vettore (sconosciuto) delle valutazioni della vera f nei punti di training X .

2.5 Caso Multidimensionale

Sino ad ora si è considerato il caso unidimensionale del metodo delle smoothing splines, ma tale approccio può essere generalizzato anche per un numero superiore di dimensioni. Data la coppia y_i, x_i , con $y_i \in \mathbb{R}$ e $x_i \in \mathbb{R}^d$, e una funzione di regressione d-dimensionale $f(x)$, si consideri il seguente problema:

$$\min_f \sum_{i=1}^N \{y_i - f(x_i)\}^2 + \lambda J[f]$$

dove J è una funzione di penalità appropriata per stabilizzare una funzione f in \mathbb{R}^d . Esempio in \mathbb{R}^2 :

$$J[f] = \int \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2.$$

Utilizzando per l'ottimizzazione questa penalità si ottiene una superficie bidimensionale smussata, nota come **spline a superficie sottile** (thin-plate spline). Condivide molte proprietà con la smoothing spline unidimensionale.

- Per $\lambda \rightarrow 0$ si ottiene come soluzione una funzione di interpolazione;
- Per $\lambda \rightarrow \infty$ la soluzione converge al piano dei minimi quadrati;

Per valori intermedi, la soluzione può essere rappresentata come un **espansione lineare delle funzioni base**. La soluzione ha la forma

$$f(x) = \beta_0 + \beta^T x + \sum_{j=1}^T a_j h_j(x) w$$

Dove $h_j = \|x - x_j\|^2 \log \|x - x_j\|$ sono **funzioni base radiali**. I coefficienti si determinano sostituendo la $f(x)$ in

$$\min_f \sum_{i=1}^N \{y_i - f(x_i)\}^2 + \lambda J[f]$$

In generale si può rappresentare $f \in \mathbb{R}^d$ come una espansione di qualsiasi grande insieme di funzioni base, e controllare la complessità applicando un regolarizzatore come quello visto precedentemente.

Per esempio se si considera il caso di $X \in \mathbb{R}^2$ si ha :

- Una base di funzioni $h_{11}(X_1), \dots, h_{1K_1}(X_1)$ per rappresentare la funzione di coordinate X_1
- Una base di funzioni $h_{21}(X_2), \dots, h_{2K_2}(X_2)$ per rappresentare la funzione di coordinate X_2

Una funzione di coordinate $f(X_1, X_2)$ può essere rappresentata in termini del prodotto delle basi delle due funzioni su X_1 e X_2 :

$$f(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \theta_{ij} h_{1i}(X_1) h_{2j}(X_2)$$

Si può quindi costruire una base di una funzione spline multidimensionale dai prodotti di tutte le coppie di basi di funzioni di ogni smoothing-spline univariata

3. Implementazioni in R

R è un linguaggio e ambiente di programmazione nato negli anni 90 per usi statistici . R è oggi molto diffuso, grazie alla flessibilità della sintassi, alla sua natura modulare e la sempre più vasta comunità che ne supporta lo sviluppo. R rappresenta oggi un framework in grado di acquisire moli di dati dalle più disparate sorgenti, offrendo strumenti per una loro analisi immediata ed efficiente.

Sono presenti due principali implementazioni della smoothing spline in R, in due package distinti:

- la funzione **smooth.spline** nel package **stats**;
- la funzione **ss** nel package **npreg**;

3.1 Funzione `smooth.spline`

Gli argomenti in input alla funzione `smooth.spline` sono i seguenti:

Argomento	Descrizione
x	Vettore di valori della variabile predittiva
y	Vettore di valori della variabile di risposta
w	Vettore di pesi della stessa dimensione di x (opzionale), di default è un vettore di 1
df	Numero dei gradi di libertà desiderati. Più alto è il numero, più flessibile sarà la curva adattata, il valore è compreso essere compreso tra 1 e il numero di punti distinti in x
spar	Parametro di smoothing, se specificato il parametro λ Può essere spee una funzione monotona di spar
lambda	Può essere specificato direttamente al posto di spar o df
cv	Booleano, se impostato a TRUE viene utilizzata la cross-validation di Tipo Leave-One-Out (LOOCV) altrimenti se FALSE la Generalized Cross-Validation (GCV). Viene usato per il calcolo dei parametri di smoothing solo quando sia spar che df non sono specificati è anche se vengono specificati è comunque usato per determinare cv.crit nel risultato. Impostando questo argomento su NA si salta la valutazione
all.knots	Se TRUE utilizza tutti i punti distinti come nodi, se FALSE usa un sottoinsieme di questi punti
nknots	Può essere settato come il numero o un criterio che restituisce il numero di nodi (funziona solo se all.knots = FALSE)
keep.data	Booleano che specifica se i dati di input devono essere mantenuti nel risultato. Se TRUE (come per default), i valori adattati e i residui sono disponibili dal risultato
df.offset	Permette di aumentare i gradi di libertà di df.offset nel criterio GCV.
penalty	Coefficiente della penalità per i gradi di libertà nel criterio GCV.
control.spar	Lista opzionale con i componenti nominati che controllano la ricerca della radice quando il parametro di smoothing spar è calcolato.
tol	Soglia di tolleranza per l'uguaglianza o l'unicità dei valori x. I valori sono suddivisi in intervalli di dimensione tol e i valori che cadono nello stesso intervallo sono considerati uguali. Deve essere strettamente positivo (e finito)
keep.stuff	Argomento booleano sperimentale che indica se il risultato deve tenere extra dai calcoli interni. Dovrebbe permettere di ricostruire la matrice X e altro.

I componenti più importanti presenti nell'oggetto restituito dalla funzione `smooth.spline` sono i seguenti:

- **x** : i valori distinti di x;
- **y** : i valori adattati corrispondenti a x;
- **w**: i pesi utilizzati ai valori unici di x;
- **cv.crit**: punteggio della cross-validation effettuata a seconda di cv. Il punteggio CV è spesso chiamato "PRESS", per 'PREdiction Sum of Squares';
- **pen.crit** : il criterio penalizzato, ovvero la somma (ponderata) dei quadrati residui (RSS);
- **df** : gradi di libertà utilizzati.;
- **lambda** : il valore di λ ;
- **fit**: Lista di oggetti quali la sequenza dei nodi, il numero di coefficienti, e i loro valori, valore minimo e il range di valori di x;

3.2 Funzione ss

La funzione `ss` è ispirata alla funzione `smooth.spline` del package stats, in aggiunta a `smooth.splin`:

- Invece dell'argomento cv dispone di `method` permettendo di scegliere tra otti diversi metodi (GCV, OCV, GACV, ACV, REML, ML, AIC) per selezionare il parametro di smoothing;
- Permette di definire tre tipi di spline(linear, cubic,quintic);

- permette di definire un vincolo di periodicità
- permette di specificare i valori dei nodi

GLi argomenti `x,y,w,df,spar,lambda,all.knots,nknots,keep.data,df.offset,penalty,control.spar` sono gli stessi ritrovati in `smooth.spline`. Di seguito verranno descritti gli argomenti presenti in `ss` e non presenti in `smooth.spline`.

Argomento	Descrizione
<code>method</code>	Metodo per selezionare il parametro di smoothing. Ignorato se viene fornito <code>spar</code> o <code>lambda</code> .
<code>m</code>	Il valore predefinito è <code>m = 2</code> , che è una spline di smoothing cubica. Imposta <code>m = 1</code> per uno spline lineare o <code>m = 3</code> per uno spline quintico
<code>periodic</code>	Se <code>TRUE</code> , la funzione stimata $f(x)$ è costretta ad essere periodica
<code>knots</code>	Vettore dei valori dei nodi per la spline. I valori dovrebbero essere singoli e all'interno dell'intervallo dei valori <code>x</code> (per evitare un warning).
<code>bernoulli</code>	Se <code>TRUE</code> , vengono utilizzati polinomi di Bernoulli scalati per le funzioni di base e di penalizzazione. Se <code>FALSE</code> , produce la definizione "classica" di una spline di smoothing.

4. Esempio: Graduate Admission

4.1 Dataset

Vediamo ora un esempio pratico utilizzando come dataset di riferimento **Graduate Admission** (link: <https://www.kaggle.com/mohansacharya/graduate-admissions>). Il dataset è stato creato per la previsione delle ammissioni dei laureati, contiene diverse variabili considerate importanti durante l'applicazione per i programmi di master. Le feature incluse sono:

- **GRE Scores** (General Test Score)
- **TOEFL Scores** (Test Of English as a Foreign Language)
- **University Rating** (su 5)
- **Statement of Purpose (SOP)** e **Letter of Recommendation Strength (LOR)** (su 5)
- **Undergraduate GPA** (Grade Point Average) (su 10)
- **Research Experience** (booleano)
- **Chance of Admit** (da 0 a 1)

Questo dataset ha lo scopo di aiutare gli studenti nella selezione delle università con i loro profili. Il risultato previsto dà loro un'idea delle loro possibilità per una particolare università.

Utilizzando il Dataset è possibile effettuare un task di regressione utilizzando le variabili predittive fornite (punteggio GRE, punteggio TOEFL, rating universitario, ecc.) per determinare la relazione tra i punteggi ottenuti e la probabilità di ammissione di un nuovo candidato, valutando quindi quanto questi test siano importanti per la probabilità di essere ammessi.

Caricamento del dataset

```
data <- read.csv(file = './data/admission.csv', sep=',')

head(data, 20)
```

```
##      ID GRE.Score TOEFL.Score University.Rating SOP LOR CGPA Research
## 1     1      337       118              4 4.5 4.5 9.65         1
## 2     2      324       107              4 4.0 4.5 8.87         1
```

## 3	3	316	104	3 3.0 3.5 8.00	1
## 4	4	322	110	3 3.5 2.5 8.67	1
## 5	5	314	103	2 2.0 3.0 8.21	0
## 6	6	330	115	5 4.5 3.0 9.34	1
## 7	7	321	109	3 3.0 4.0 8.20	1
## 8	8	308	101	2 3.0 4.0 7.90	0
## 9	9	302	102	1 2.0 1.5 8.00	0
## 10	10	323	108	3 3.5 3.0 8.60	0
## 11	11	325	106	3 3.5 4.0 8.40	1
## 12	12	327	111	4 4.0 4.5 9.00	1
## 13	13	328	112	4 4.0 4.5 9.10	1
## 14	14	307	109	3 4.0 3.0 8.00	1
## 15	15	311	104	3 3.5 2.0 8.20	1
## 16	16	314	105	3 3.5 2.5 8.30	0
## 17	17	317	107	3 4.0 3.0 8.70	0
## 18	18	319	106	3 4.0 3.0 8.00	1
## 19	19	318	110	3 4.0 3.0 8.80	0
## 20	20	303	102	3 3.5 3.0 8.50	0
##	Chance.of.Admit				
## 1		0.92			
## 2		0.76			
## 3		0.72			
## 4		0.80			
## 5		0.65			
## 6		0.90			
## 7		0.75			
## 8		0.68			
## 9		0.50			
## 10		0.45			
## 11		0.52			
## 12		0.84			
## 13		0.78			
## 14		0.62			
## 15		0.61			
## 16		0.54			
## 17		0.66			
## 18		0.65			
## 19		0.63			
## 20		0.62			

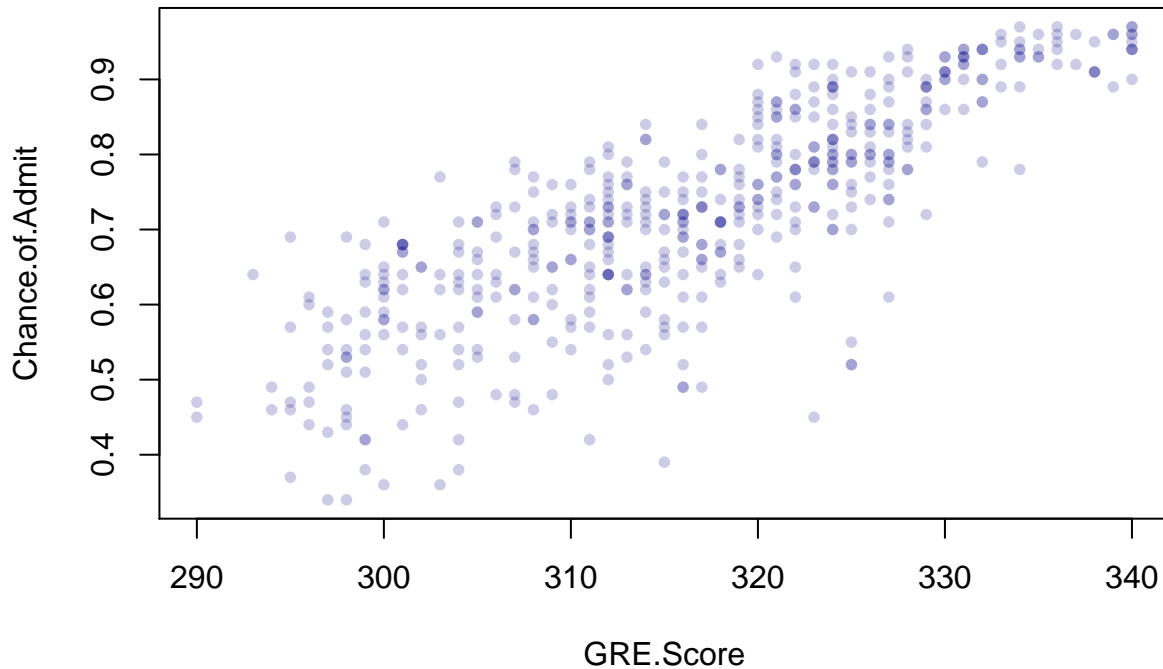
Di seguito verranno mostrate diverse applicazioni della smoothing spline utilizzando come variabile di risposta la variabile **Chance.of.Admit**, e un'unica variabile predittiva, scelta tra le variabili numeriche del dataset.

Variabile Predittiva: GRE Score

Considero come variabile predittiva il punteggio GRE, plottando i valori di **Chance.of.Admit** per diversi valori della variabile **GRE Score**.

```
library(scales)
xlabel = 'GRE.Score'
ylabel = 'Chance.of.Admit'
x <- data$GRE.Score
y <- data$Chance.of.Admit
```

```
plot(x,y,xlab = xlabel,ylab = ylabel,type = "p",col=alpha('darkblue', 0.2),pch =16,cex=0.8)
```



4.2 Casi Estremi

Impostando il parametro **df** dei gradi di libertà con $df = n$ (numero di osservazioni uniche) e $df = 2$ si ottengono i casi estremi.

Si ricorda che al crescere del valore di λ il numero di gradi di libertà decresce, la funzione *smooth.spline* determina automaticamente a quali valori di λ corrispondono i gradi di libertà impostati e adatta la funzione in base ai parametri specificati.

```
n = length(unique(x))

spline_A <- smooth.spline(x,y,df = 2,all.knots = TRUE)
spline_B <- smooth.spline(x,y,df = n,all.knots = TRUE)

print(spline_A)

## Call:
## smooth.spline(x = x, y = y, df = 2, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= 1.49996 lambda= 4366.614 (34 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 2.000185
## Penalized Criterion (RSS): 0.4564486
## GCV: 0.006880627
```

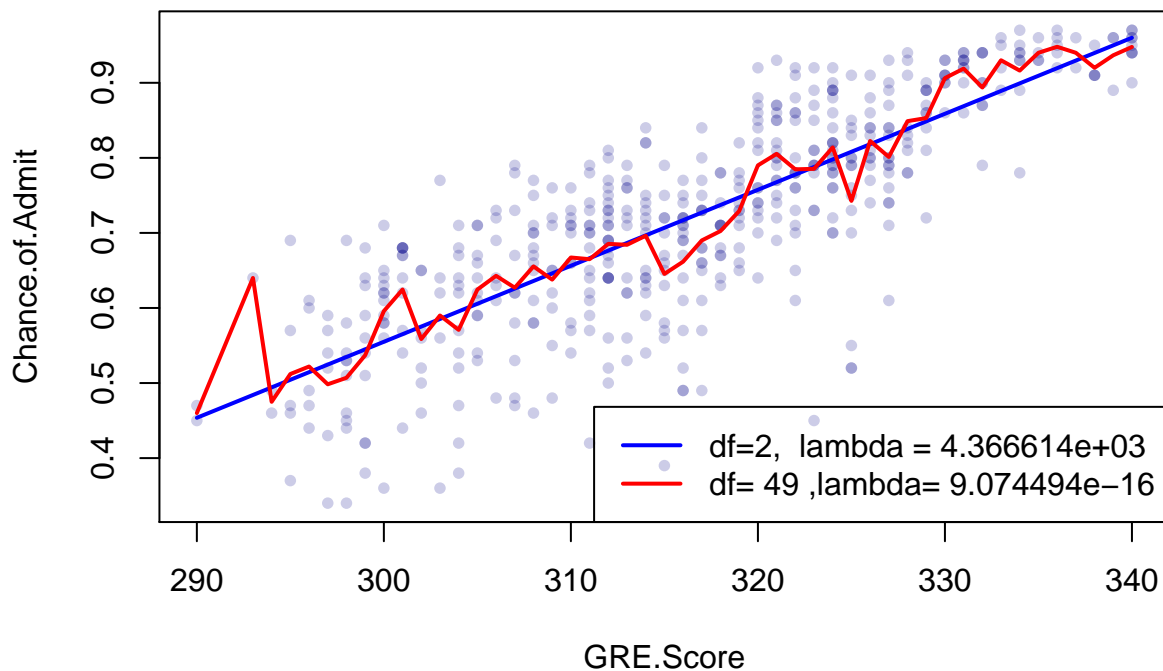
Specificando un numero di gradi di libertà pari a 2 si ottenuto un valore di $\lambda = 4366.614$, la somma dei residui al quadrato *RSS* con questa funzione è di circa 0.456

```
print(spline_B)
```

```
## Call:
## smooth.spline(x = x, y = y, df = n, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= -1.085928 lambda= 9.074494e-16 (27 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 49
## Penalized Criterion (RSS): 2.808197e-20
## GCV: 0.007267405
```

Specificando un numero di gradi di libertà pari al numero di osservazioni distinte, si ottenuto un valore di λ vicino allo zero, la somma dei residui al quadrato RSS con questa funzione è anch'essa vicino allo zero in quanto si sarà ottenuta una curva che passa perfettamente per i punti di training ma sarà troppo flessibile.

```
plot(x,y,xlab = xlabel,ylab = ylabel,type = "p",col=alpha('darkblue', 0.2),pch =16,cex=0.8)
lines(spline_A,lwd=2,col="blue")
lines(spline_B,lwd=2,col="red")
legend("bottomright", c(paste("df=2, ", 'lambda', "=", format(spline_A$lambda,scientific = TRUE)),paste("df=49, ", 'lambda', "=", format(spline_B$lambda,scientific = TRUE))),col=c("blue","red"),lty=1)
```



Dal grafico si può notare infatti che con un numero di gradi di libertà di 2 il parametro λ assume un valore molto alto, la curva risultante sarà quindi una retta, al contrario con un numero di gradi di libertà pari al numero di osservazioni il parametro λ avrà un valore vicino a 0 e la curva risultante sarà molto irregolare.

4.3 Addattare la smoothing spline con la cross-validation

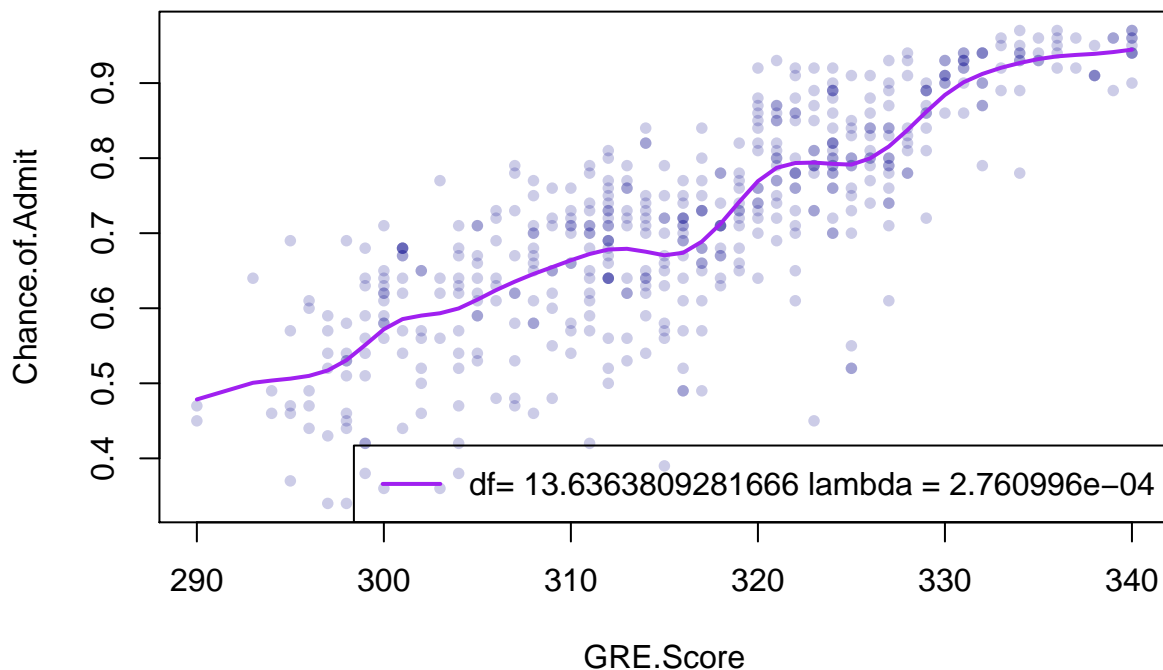
Vediamo di adattare la smoothing spline stimando i parametri di λ e di df in modo da ottenere un risultato ottimale.

Richiamando la funzione `smooth.spline` non specificando nessuno dei parametri quali `lambda`, `df` e `spar`, la funzione effettuerà automaticamente una cross validation per stimare i parametri di smoothing.

```
GRE_fit <- smooth.spline(x, y, all.knots = TRUE)
GRE_fit

## Call:
## smooth.spline(x = x, y = y, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= 0.5034762 lambda= 0.0002760996 (10 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 13.63638
## Penalized Criterion (RSS): 0.191392
## GCV: 0.006653546

plot(x,y,xlab = xlabel,ylab = ylabel,type = "p",col=alpha('darkblue', 0.2),pch =16,cex=0.8)
lines(GRE_fit,lwd=2,col="purple")
legend("bottomright",paste("df=",GRE_fit$df, ',lambda', "=",format(GRE_fit$lambda,scientific = TRUE)),col="purple",lty=1)
```



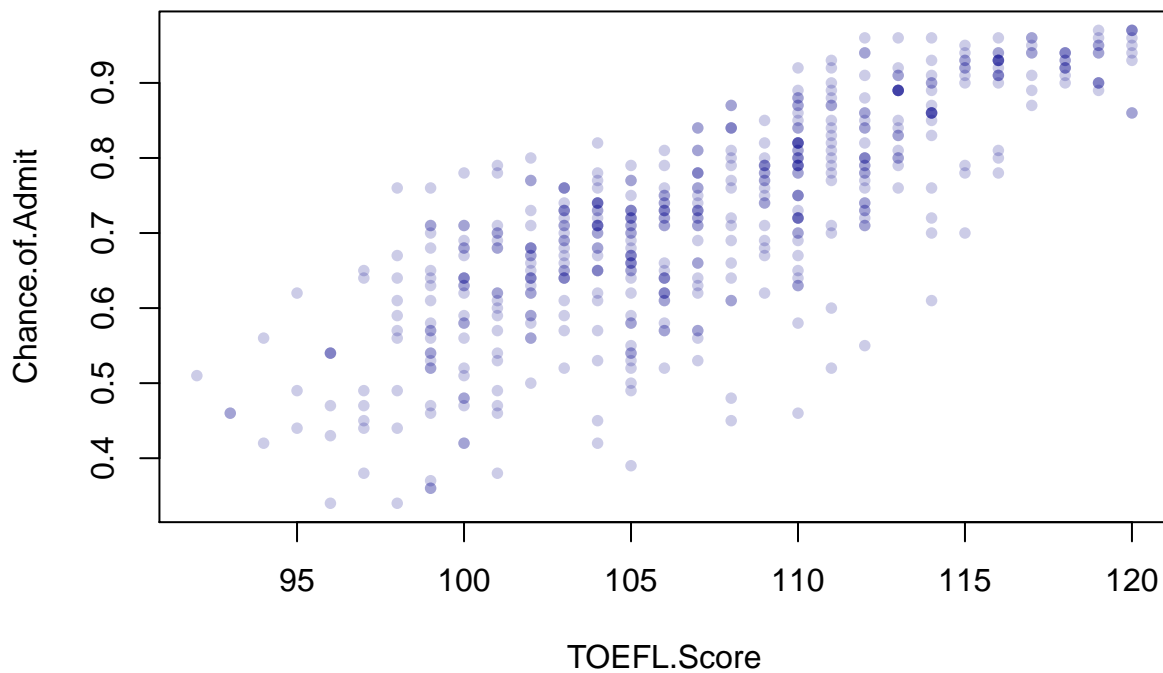
I parametri di smoothing ottenuti sono quelli che minimizzano l'errore di cross-validation. La smoothing spline adattata è la curva visualizzata nel grafico che minimizza la RSS ed assume una forma smussata.

4.3 Altre variabili del dataset

Variabile Predittiva: TOEFL Score

Vediamo che risultati si ottengono utilizzando come variabile predittiva il TOEFL Score per predire la probabilità di ammissione.

```
xlabel <- 'TOEFL.Score'
ylabel <- 'Chance.of.Admit'
x <- data$TOEFL.Score
y <- data$Chance.of.Admit
plot(x,y,xlab = xlabel,ylab = ylabel,type = "p",col=alpha('darkblue', 0.2),pch =16,cex=0.8)
```



```
TOEFL_fit <- smooth.spline(x, y,all.knots = TRUE)
print(TOEFL_fit)
```

```
## Call:
```

```
## smooth.spline(x = x, y = y, all.knots = TRUE)
```

```
##
```

```
## Smoothing Parameter spar= 1.499891 lambda= 41200.14 (28 iterations)
```

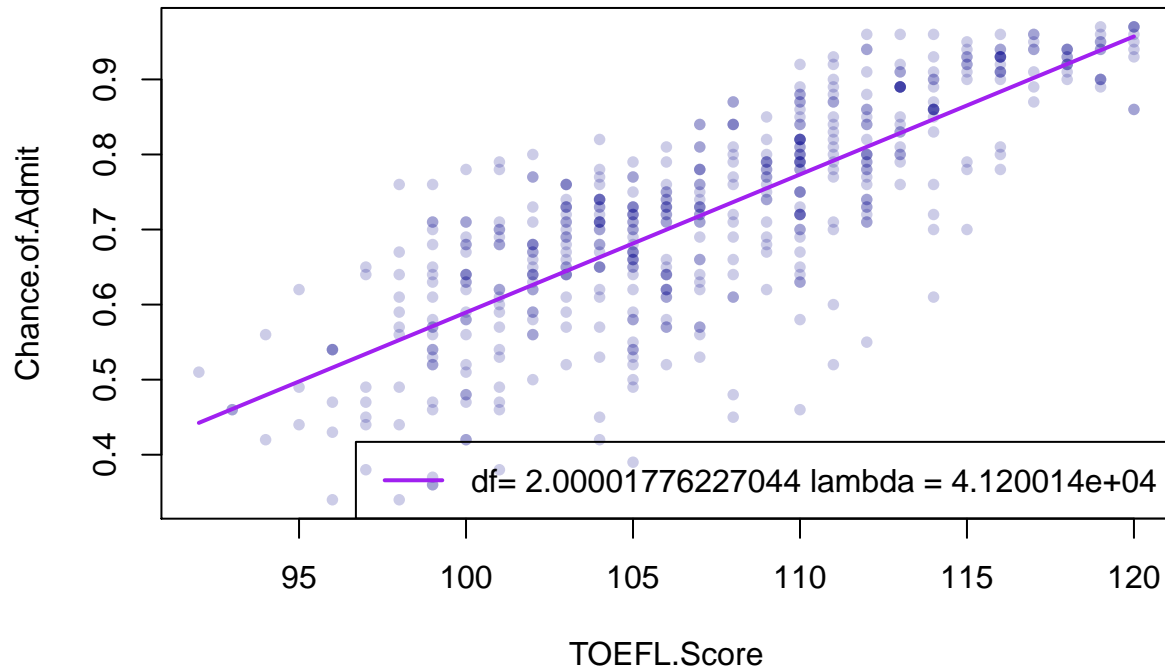
```
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 2.000018
```

```
## Penalized Criterion (RSS): 0.1849276
```

```
## GCV: 0.007462693
```

```
plot(x,y,xlab = xlabel,ylab = ylabel,type = "p",col=alpha('darkblue', 0.2),pch =16,cex=0.8)
lines(TOEFL_fit,lwd=2,col="purple")
```

```
legend("bottomright",paste("df=",TOEFL_fit$df , 'lambda',"=",format(TOEFL_fit$lambda,scientific = TRUE))
```



In questo caso la smoothing spline risulta lineare.

Variabile Predittiva: CGPA

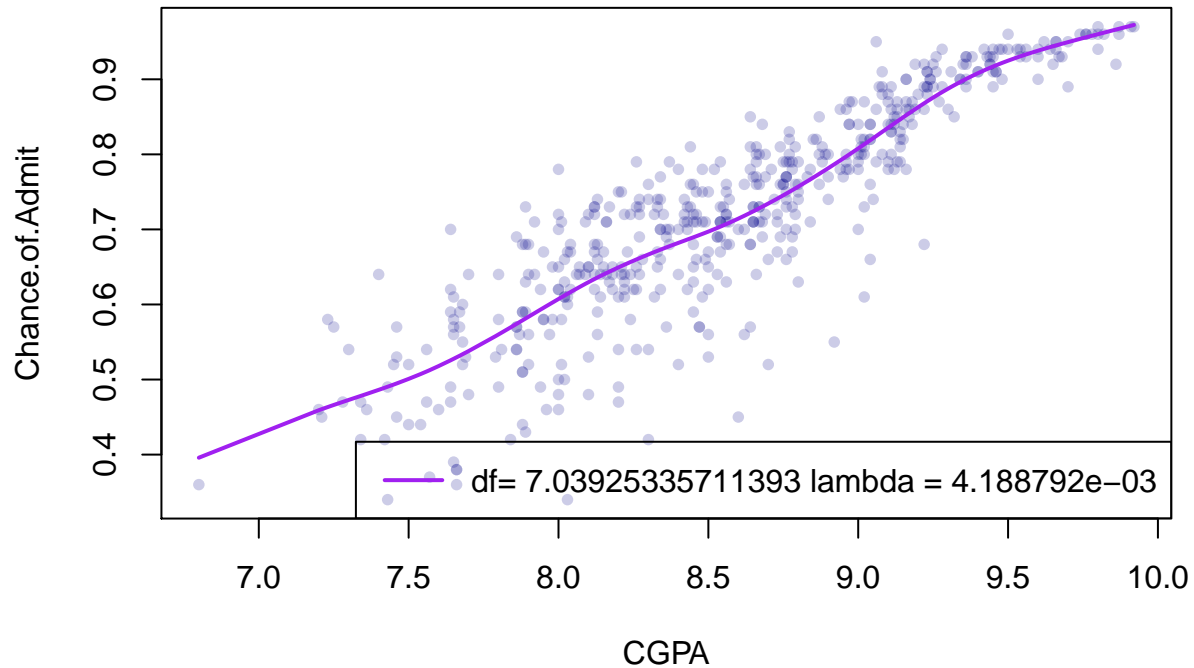
```
plot(x= data$CGPA,
     y= data$Chance.of.Admit,
     xlab = 'CGPA',
     ylab = 'Chance.of.Admit',
     type = "p",
     col=alpha('darkblue', 0.2),
     pch =16,cex=0.8)

fit <- smooth.spline(x=data$CGPA,
                    y= data$Chance.of.Admit,
                    all.knots = TRUE)

print(fit)
```

```
## Call:
## smooth.spline(x = data$CGPA, y = data$Chance.of.Admit, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= 1.045079 lambda= 0.004188792 (12 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 7.039253
## Penalized Criterion (RSS): 0.7811333
## GCV: 0.004370443
```

```
lines(fit,lwd=2,col="purple")
legend("bottomright",paste("df=",fit$df , 'lambda',"=",format(fit$lambda,scientific = TRUE)),col="purple")
```



Variabile Predittiva: LOR

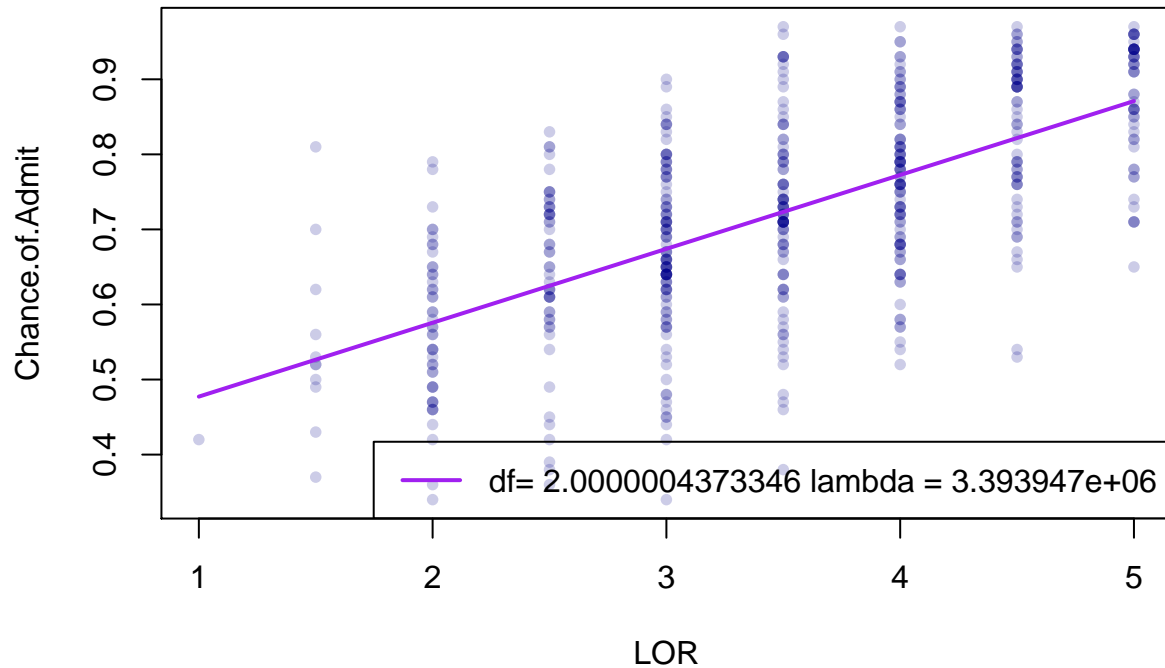
```
plot(x= data$LOR,
     y= data$Chance.of.Admit,
     xlab = 'LOR',
     ylab = 'Chance.of.Admit',
     type = "p",
     col=alpha('darkblue', 0.2),
     pch =16,cex=0.8)

fit <- smooth.spline(x=data$LOR,
                     y= data$Chance.of.Admit,
                     all.knots = TRUE)

print(fit)
```

```
## Call:
## smooth.spline(x = data$LOR, y = data$Chance.of.Admit, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= 1.469608 lambda= 3393947 (27 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 2
## Penalized Criterion (RSS): 0.04061662
## GCV: 0.01169389
```

```
lines(fit,lwd=2,col="purple")
legend("bottomright",paste("df=",fit$df , 'lambda',"=",format(fit$lambda,scientific = TRUE)),col="purple")
```



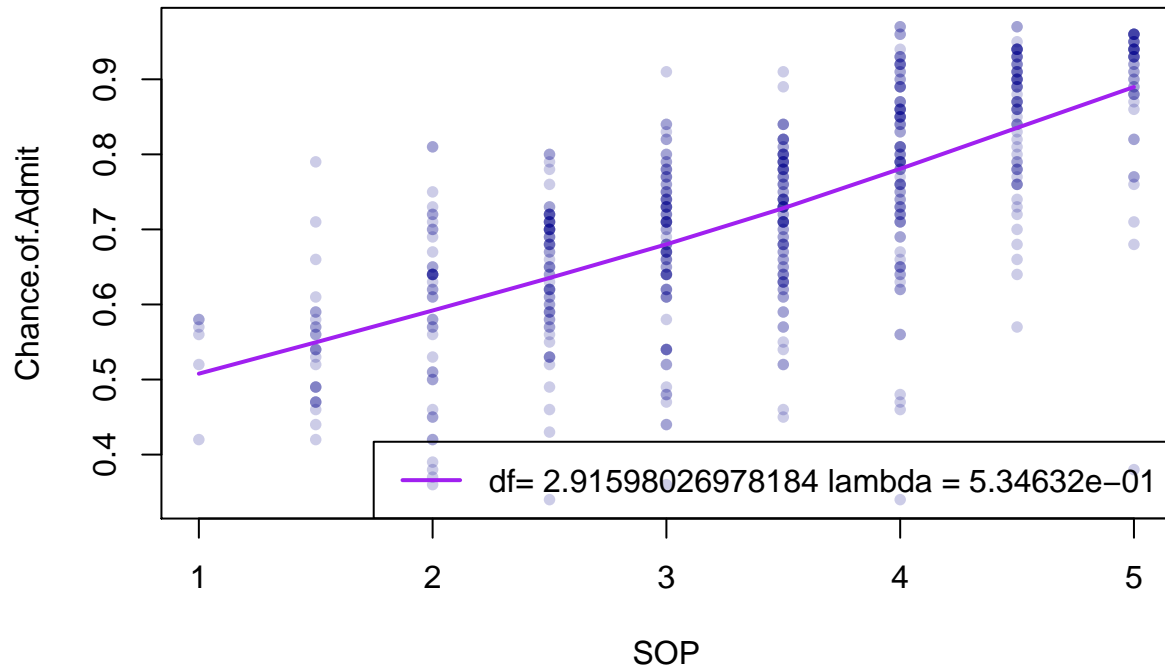
Variabile Predittiva: SOP

```
plot(x= data$SOP,
     y= data$Chance.of.Admit,
     xlab = 'SOP',
     ylab = 'Chance.of.Admit',
     type = "p",
     col=alpha('darkblue', 0.2),
     pch =16,cex=0.8)
```

```
fit <- smooth.spline(x=data$SOP,
                     y= data$Chance.of.Admit,
                     all.knots = TRUE)
print(fit)
```

```
## Call:
## smooth.spline(x = data$SOP, y = data$Chance.of.Admit, all.knots = TRUE)
##
## Smoothing Parameter spar= 0.5281232 lambda= 0.534632 (11 iterations)
## Equivalent Degrees of Freedom (Df): 2.91598
## Penalized Criterion (RSS): 0.05065631
## GCV: 0.01062274
```

```
lines(fit,lwd=2,col="purple")
legend("bottomright",paste("df=",fit$df , 'lambda', "=",format(fit$lambda,scientific = TRUE)),col="purple")
```



5. Conclusioni

In conclusione le smoothing splines sono un ottimo strumento appartenente alla famiglia di metodi non parametrici, rispetto all'utilizzo di approcci più limitati come la regressione lineare o polinomiale. È stato mostrato un esempio di applicazione sul Dataset Graduation con i seguenti risultati:

X	df	λ	RSS
GRE	13.63638	0.0002760996	0.191392
TOEFL	2	41200.14	0.1849276
CGPA	7	0.004188792	0.7811333
LOR	2	3393947	0.04061662
SOP	3	0.534632	0.05065631