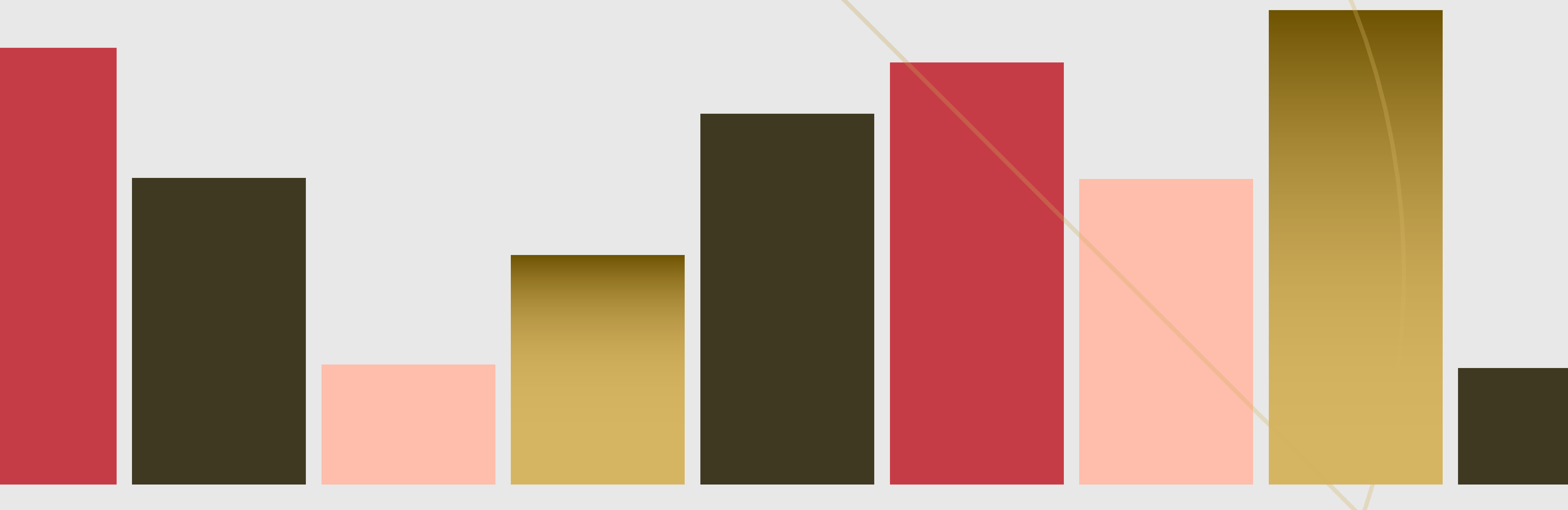


LEZIONE 27-09-2022

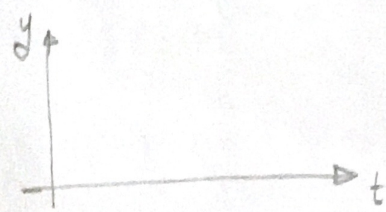
NOTE
~~TEAMS~~
SCRIPT
HOMEWORK

] TEAMS

ROSS - SHELDON . PROB E STATISTICA PER L'INGEGNERIA E LE SCIENZE

DATI ⟶ RACCOLTA + ANALISI

- → TIME SERIES
  ORDINAMENTO DATO DAL TEMPO
  - COME ANALIZZO IL DATO PER PREVEDERE CIO' CHE ACCADE DOMANI CON CERTA PROB ??



- → CROSS SECTIONAL DATASETS
  - IL TEMPO NON HA RUOLO
  - SU BASE DI CERTO CAMPIONE APPLICO INFERENZA STATISTICA E OTTENGO RISULTATO

DATASETS + MISURE SU DI ESSI

$\boxed{\text{CALCOLO PROB}}$

PREVISIONI SUL DATO

↑

STATISTICA DESCRITTIVA ⟶ STATISTICA INFERENZIALE

↓

ES. MEDIA ~~CAMPIONARIA~~ EMPIRICA

$x_1, \dots, x_n$

~~ME~~ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ ⟶ MEDIA CAMPIONARIA $\frac{1}{n}\sum_{k} X_k$ (STATISTICA)

CON X_k = VAR ALEATORIE

~~STATISTICHE~~
~~DESCRITTIVE~~

DATA SETS

STATISTICHE SUI DATA SETS

DEF. UN DATA SET $(x_k)_{k=1}^{n} \equiv \underline{X}$ CON $x_k \in \mathbb{R}^M$ OVVERO UN INSIEME DI VALORI APPARTENENTI AD UN CERTO SPAZIO ~~EUCLIDEO~~ REALE EUCLIDEO M-DIMENSIONALE.

ES. DATO UN OGGETTO POSSO DESCRIVERLO ASSOCIANDOGLI UN CERTO VETTORE CHE ME NE DESCRIVE LE CARATTERISTICHE.

SE $M=1 \rightarrow$ DATA SET REALE

DEF. LA LUNGHEZZA DEL DATASET E' n, OVVERO IL NUM DI PUNTI CHE LO COMPONE.

DEF. SERIE STORICA E' UN DATA SET ORDINATO DAL TEMPO

$(x_t)_{t \in T}^{n}$ CON T = INSIEME DEI TEMPI
CON $x_t \in \mathbb{R}^n$

L'ORDINE DI RACCOLTA E' IMPORTANTE.

UN DATA SET NORMALE E' INVARIANTE CON LO SHUFFLE: SE RIMESCOLO NON HO VARIAZIONE IN CIO' CHE OTTENGO (CHE POSSO DEDURRE).

$$(x_k)_{k=1}^{n} \equiv (x_1, x_2 \dots x_k) \equiv \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{M1} & x_{M2} & & x_{Mn} \end{pmatrix}$$

(x_k) → PUNTO DEL DATASET

$x_i \in \mathbb{R}^M$ → x_i ~~è~~ E' UN VETTORE COLONNA

DEF. $X_{\{\}}$ ~~...~~ = INSIEME DEI VALORI DEL DATASET X OVVERO SENZA RIPETIZIONI (SE IN X HO VAL RIPETUTI IN $X_{\{\}}$ ~~...~~ LI HO UNA VOLTA)

DEF. $X_{()}$ = DATASET ORDINATO (PER DATASET REALE) SONO I PUNTI DEL DATASET ORDINATI IN CRESCITA ANCHE CON RIPETIZIONI

LEZIONE 29-09-2022 | PROVA A LIBRI APERTI

~~MODA~~

INSIEME DEI VALORI $\rightarrow$ OGNI PUNTO 1 E 1 SOLA VOLTA

FREQUENZA. QUANTI ELEM DEL DS ORIGINALE FIGURANO IN ORIGINARIO?

$$f_j \xrightarrow{} \{ k \in \mathbb{N} \text{ TC } x_k = x_j \text{ CON } x_j \in \mathbb{X} \text{ E } x_k \in \mathbb{X}_{\{\}} \}$$

QUANTE VOLTE x_j E' ~~#~~ NEL DS

FREQ RELATIVA $\quad v_j = \dfrac{f_j}{n = |\mathbb{X}|}$

DATASET SIMMETRICO. DETTO x_0 IL CENTRO DI SIMMETRIA

$$\mathbb{X}^{(0)} = \{ x_k - x_0 \quad \forall x_k \in \mathbb{X} \}$$

E ...

MODA. ELEMENTO DI $\mathbb{X}$ A FREQ MAGGIORE.

$$x_{MO} = x_i \in \mathbb{X} \text{ TC } f_i = \max_j \{ f_j \text{ TC } x_j \in \mathbb{X} \}$$

x_{MO} NON ~~E'~~ SEMPRE UNICO!!

CE NE ~~POLES~~ POSSONO ESSERE DI PIU'

DATASET n-MODALE

~~ES.~~

MEDIA. $\bar{x}_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{TC} \quad x_i \in \mathbb{X}$

ATTENTO!! $x_i \in \mathbb{R}^M \Rightarrow \bar{x}_n \in \mathbb{R}^M$

ANALOGAM

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j} f_j x_j \quad \text{TC} \quad x_j \in \mathbb{X}_{\{\}}$$

$\overline{X}_n = \sum_i \nu_i x_i \quad \forall x_i \in \mathbb{X}$

~~ESERCIZIO~~

DATI DUE DS CON STESSA CARDINALITA', MA NON CON VETTORI IN STESSO $\mathbb{R}^N$ ALLORA

$\boxed{y_k = A x_k + \beta}$ → RELAZIONE DI REGRESSIONE

↓ PASSANDO A MEDIA

$\overline{y}_k = A \overline{x}_k + \beta$

$\mathbb{X}$

SIA DATO $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$

LA STATISTICA ORDINE $\mathbb{X}_{()}$ È UN QUALUNQUE ORDINAMENTO NON DECRESCENTE (MAG-UGUALE) DI $\mathbb{X}$.

↳ ELEMENTI RIPETUTI DANNO ORDINI DIVERSI, MA ALLA FINE IL RISULTATO È LO STESSO

MINIMO. $x_{(1)} = \min \mathbb{X}$ $\quad x_{(n)} = \max \mathbb{X}$

RANGE $:= x_{(n)} - x_{(1)}$

QUANTILE E MEDIANA → DIVIDONO $\mathbb{X}_{()}$

MEDIANA $\quad x_{1/2} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \text{ DISPARI} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & n \text{ PARI} \end{cases}$

↳ PRENDO IL "PUNTO MEDIO" DI $\mathbb{X}_{()}$

NEL CASO PARI <u>NON E' DETTO</u> CHE $x_{1/2} \in \mathbb{X}$

TRATTARE VALORI ANOMALI NON E' SEMPLICE: A VOLTE SI POSSONO ESCLUDERE, MA A VOLTE NO

QUANTILE q (PERCENTILE). AVENDO $q \in (0,1)$

SIA $h = (n+1) \cdot q$

$$x_q = x_{(\lfloor h \rfloor)} + (h - \lfloor h \rfloor)\,(x_{(\lfloor h \rfloor + 1)} - x_{(\lfloor h \rfloor)})$$

GENERALIZZA MEDIANA

SE $q = \frac{1}{2} \rightarrow h = (n+1)q = \frac{n+1}{2}$

n DISPARI

$x_q = x_{(\frac{n+1}{2})} + (0) \ldots$

SE $q = \frac{1}{2}$ n PARI $h = (n+1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

LA MEDIANA "SEPARA" IL DS IN PARTI

- $q = 0{,}25 \rightarrow$ 25% DEL DS E 75% DEL DS
- $q = 0{,}5 \rightarrow$ MEDIANA
- $q = 0{,}75 \rightarrow$ 75% DEL DS TERZO QUARTILE

SE $q = \frac{k}{n+1} \Rightarrow x_q = x_{(k)}$

$IQR = x_{q_3} - x_{q_1}$

<u>ESERCIZIO</u>

1. <u>ORDINA</u> $\rightarrow x_{()}$ RICORDA!! CI SONO I RIPETUTI

~~2.~~

<u>ALTRA DEF.</u>

MODA, MEDIA, MEDIANA, QUANTILI $\rightarrow$ STATISTICHE DI CENTRALITÀ

~~DIFF~~

MEDIA VS MEDIANA.

LA MEDIA È TC <u>OGNI</u> ELEM DEL DS CONTRIBUISCE CON LO STESSO PESO. SE NEL DS HO UN VALORE ESTREMO, ESSO TENDE A SPOSTARE LA MEDIA VERSO

DI LUI. QUINDI LA MEDIA NON DESCRIVE PIU' IL DS ~~VERSO~~ ~~E~~ IN MODO ACCURATO.

LA MEDIANA TIENE CONTO DELL'ORDINE E QUINDI E' INFLUENZATA MENO DA VALORI ESTREMI NEL DS.

LA ~~#~~ DIFF TRA MEDIA E MEDIANA PERMETTE DI VEDERE ~~@~~ L'"APPORTO" DI QUESTI VALORI ESTREMI.

~~LE S~~ I DS STORICI NON SI PRESTANO MOLTO ~~VA~~ STATISTICHE COME MEDIA, MEDIANA ECC.

SI ~~DOVREBBE~~ PRIMA VEDERE SE LA SERIE E' (PIU' O MENO) INVARIANTE AL RIORDINO.

LEZIONE 4-10-2022

- PASCAL VOC . ~~SE~~ RICONOSCIMENTO IMMAGINI
  - NON HA VER ANACONDA
    USA PIP, MA ATTENTO CHE IL PIP NON TOCCHI ALTRE LIBRERIE

NUMPY ARRAY

SIMILE A LIST → MA I DATI SONO OMOGENEI
CHE POSSONO ESSERE ANCHE OGG COMPLESSI

X = NUMPY.ARRAY (. . .)
1° PARAM = OBJECT → LO USO PER DARE LA LIST CON CUI INIZIALIZZARE

DTYPE = TIPO DI OGG

FILE CSV → SIMILE A TAB DI DB IN CUI LE RIGHE SONO SEMISTRUTTURATE E I CAMPI SONO OMOGENEI
- A VOLTE CI SONO VALORI NON DISPONIBILI → ATTENTO A LETTURA
- PRIMA RIGA DI INTESTAZIONE
- I CSV SONO MOLTO LOCALIZZATI !!
  - ITALIA SI USA ; (LA VIRGOLA E' SEPARATORE DEI FLOAT)
- NELL' ESTRAZIONE DATI → TRY - EXCEPT PER I NAN !!

KGGL → CONTEST ANALISI DATI

NUMPY.GENFROMTXT → CREO DS IN AUTOMATICO PARTENDO DA FILE
- DESCRIVO IL FILE
- DTYPE → INDICO TUPLA !! → E' OMOGENEO
  - INDICO DEI TIPI DI NUMPY
- CONVERTER → DIZIONARIO INDICE CAMPO : LAMBDA
  - AD OGNI CAMPO E' APPLICATA LA LAMBDA IN AUTOMATICO
  - ESEMPIO → RIMOZIONE ~~DA~~ APICI DA STRINGA

POSSO ANCHE ASSEGNARE NOME AI CAMPI E USARE
IL NOME PER INDICIZZARE !!!

~~PIU' SEMPLICE~~

~~CO~~ DAL FILE E' APPLICATO AD OGNI RIGA

LE OPERAZIONI SU LISTE ~~SO~~ NON SONO LE CLASSICHE PYTHON, MA SONO APPLICATE AD OGNI ELEMENTO DELLA LISTA

LIBRERIA MATPLOTLIB X GRAFICI
.PYPLOT

NP. ARANGE → RANGE SUI FLOAT
↳ MINIMO, MASSIMO, PASSO
↳ RISULTATO E' UNA LISTA X

$y = f(x)$ ⇒ HO UNA LISTA IN CUI CALCOLO f ∀ VALORE DI X

PLT. PLOT (~~#~~ X, Y) ⇒ OTTENGO UN GRAFICO
↳ I PARAM SOLO LISTE PYTHON → ~~NP~~ NUMPY FA CAST AUTOMATICO

SCATTER → QUANDO NON HO DIPENDENZA FUNZIONALE TRA X ED Y

GENFROMTEXT E' COMPLESSA; ~~PA~~ QUELLA DI PANDAS E' PIU' SEMPLICE

GENFROMTXT → MISSING GESTITI CON ~~SE~~ I CONVERTERS

DASHBORD LIB PYTHON → FLUSK
→ PYPLOT

UN DS DEVE ESSERE SEMPRE COERENTE A SE STESSO: QUANDO UN DATO VIENE ~~#~~ AGGIUNTO DOPO, ESSO VA AGGIUNTO ANCHE PER I RECORD PRECEDENTI
⇒ SI METTONO DEI NULL PER I RECORD PRECEDENT

ARRAY[LISTA BOOL] → RESTITUISCE SOTTOLISTA
TC IL BOOL E' A TRUE

~~ES~~

L'OVERLOAD NON FA SPECIFICARE COMP AGGIUNTIVI.
IL FUNZIONALE FA " " "
COME LA GESTIONE DEI NAN.

LEZIONE 11-10-2022

$q = \frac{1}{2}$ $h = \frac{(n+1)}{2}$

- ~~A PARI~~ DISPARI $\lfloor h \rfloor = \frac{n+1}{2} = h$

~~- A PARI $\lfloor h \rfloor =$~~

$$X_q = X_h \cancel{4} = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

- n PARI $\lfloor h \rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2}$

$$X_q = X_{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(X_{\frac{n}{2}+1} - X_{\frac{n}{2}}\right)$$

IL CONCETTO DI QUANTILE E' IMPORTANTE.
DATO UN DS SI CERCA DI CAPIRE LA DISTRIBUZIONE E QUINDI I PARAMETRI DELLA STESSA.
QUESTO PERMETTE DI FARE PREVISIONI E DI INDICARE L'INTERVALLO DI CONFIDENZA PER QUESTA PREVISIONE.
LA PREVISIONE INDICA:
- PUNTO
- INTERVALLO
- PROBABILITA' CON CUI RICADE

L'INTERVALLO ~~È~~ E' DEFINITO DAI VALORI CRITICI CHE SONO PARTICOLARI QUANTILI.

INDICI DI DISPERSIONE

DATO UN DS HO $\bar{X}_n$.
PRESO $X_n \in \{X_n\}$ $X_n - \bar{X}_n$ E' LA DEVIAZIONE, OVVERO IL DISCOSTAMENTO

PROP. $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{X}_n) = 0$ (SBAGLIO PER ECCESSO E PER DIFETTO)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_n = \sum_{k=1}^{n} x_n - n\bar{X}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x}_n)(x_k-\bar{x}_n)^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$$
$$= S^2_{x,N}$$

MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA

$$x_k-\bar{x}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$(x_k-\bar{x}_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \end{pmatrix}$$

SE $N=1 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x}_N)^2 \in \mathbb{R}$ (SOLO SE $N=1$!! IN ALTRI AMBITI NON HA SIGNIFICATO)

PUNTI DEL DS

DIMENSIONE DELLO SPAZIO

$$S^2_{x,n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^T - n\,\bar{x}_n\,\bar{x}_n^T\right)$$

SE $N=1$

$$S^2_{x,n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\,\bar{x}_n^2\right)$$

PROP.

$$S^2_{x,n} = 0 \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

TUTTI I PUNTI DEL DS SONO UGUALI.

SIGNIFICA CHE $x_i \equiv \bar{x}_n$ E QUINDI ~~NON~~ IL PUNTO NON VARIA

PROP. $S^2_{x,n} \geq 0 \quad \forall\, x = (x_n)_{n=1}^{n}$ "SEMIDEFINITA POSITIVA"

OVVERO $\forall\, u \in \mathbb{R}^n$

$$u^T S^2_{x,n}\, u \geq 0$$

COME CONSEGUENZA, GLI AUTOVALORI SONO TUTTI ≥ 0!

$S^2_{x,n}$ E' SIMMETRICA X DEF $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

OGNI MATRICE SIMM HA # AUTOVAL (ANCHE RIPETUTI) DI GRADO PARI ALLA MATRICE.

$S^2_{x,n}$ HA $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ AUTOVAL TC $\lambda_i \geq 0$

OVVERO

$$S^2_{x,n} = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$ CON B MATRICE CAMBIO DI BASE

SI DIMOSTRA CHE

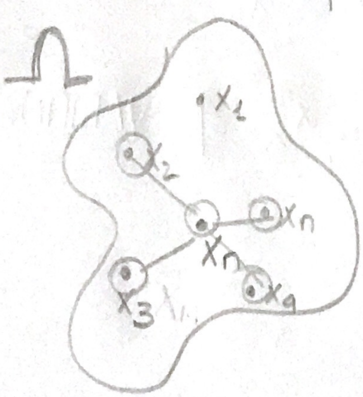
$$\exists\ S_{x,n} \geq 0 \quad TC \quad S_{x,n} S_{x,n} = S^2_{x,n}$$

CHE E' LA MATRICE DI DEV STD

SE $N=1 \Rightarrow S_{x,n} = \sqrt{S^2_{x,n}}$ **SOLO** $N=1$

TEO DI Cebysev. CONSIDERO $N=1$; FISSO $m>0$.

SIA $\Omega_m = \{k \in \{1 \dots n\}$ TC $|x_k - \bar{X}_n| \leq m S_{x,n}\}$



DOVREI FARLO SU RETTA !! STO $N=1$

CONSIDERO $m=3$

$S_{x,n} = 1$

PRENDO SOLO I PUNTI CHE DISTANO $m \cdot S_{x,n} = 3$

SI PUO' DIRE A PRIORI $|\Omega_M|$!!

INFATTI

$$\frac{|\Omega_m|}{n} > \underbrace{1 - \frac{1}{m^2}}_{\text{NON DIP DA } S_{x,n} !!}$$

OVVERO SO LA PERCENTUALE DI PUNTI DEL DS CHE CADONO VICINI A ~~$\bar{X}$~~ $\bar{X}_n$ A MENO DI $m S_{x,n}$

A PRESCINDERE DA $S_{x,n}$ POSSO TROVARE $|\Omega_m|$!
LA PERCENTUALE E' LA STESSA DATO m, MA CIO' CHE CAMBIA E' LA DISTANZA DEL PUNTO DA $\overline{X}_n$ CHE INVECE <u>DIPENDE DA $S_{x,n}$</u>.

INDICA ANCHE LA DISPERSIONE DEL DS.

CON IL DUALE $\frac{|\Omega_m^c|}{n} < \frac{1}{m^2}$ MI DICE LA PERC DEI PUNTI PIU' DISTANTI DI $m S_{x,n}$

LA DISUGUAGLIANZA NON NECESSITA DI CONOSCERE LA DISTRIBUZIONE DI $\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

<u>IL MOMENTO DI ORDINE $p \in \mathbb{N}$</u> CON $N=1$

MOMENTO CRUDO. $\mu^{\overset{\text{CRUDO}}{1}}_{x,n,\underset{\text{ORDINE}}{p}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p$

PER $p=1$ $\mu^1_{x,n,p} = \text{MEDIA} = \overline{X}_n$

PER $p=2$ $\mu^1_{x,n,2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \neq$ VARIANZA

MOMENTO CENTRALE.

$\mu_{x,n,p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}_n)^p$ ~~SE~~

SE $p=1$ $\mu_{x,n,1} = 0 =$ DEVIAZIONE

SE $p=2$. $\mu_{x,n,2} = S^2_{x,n}$

MOMENTO STANDARDIZZATO

$$\hat{\mu}_{x,n,p} = \frac{\mu_{x,n,p}}{S_{x,n}^{p}}$$

SE $p=1 \cdot \hat{\mu}_{x,n,1} = 0$

$p=2 \cdot \hat{\mu}_{x,n,2} = 1$

LA SKEWEENES E KURTOSIS MISURANO LA DISPERSIONE
- S MISURA ~~LA~~ ASIMMETRIA $p=3$
- K MISURA LONTANANZA $p=4$

~~SIA~~

PER S HO CHE I CONTRIBUTI LONTANI E NEG SI AMPLIFICANO ~~#~~ IN NEG.

SE $S \leq 0$ ALLORA IL DS E' GENERATO DA DISTRIB IN CUI CODA SX PIU' SPESSA (PROB MAGGIORE) DI CODA DX; VICEVERSA SE $S>0$.

LA K PERMETTE INVECE DI CONFRONTARE LA DISTRIB CON LA NORMALE. TUTTE LE NORMALI HANNO $K=3$

$\Rightarrow$ SE $K>3 \Rightarrow$ CODE PIU' SPESSE DI UNA NORMALE

$\Rightarrow$ SE $K<3 \Rightarrow$ CODE PIU' SOTTILI DI UNA NORMALE

QUINDI K DICE QUANTO CI AVVICINIAMO ALLA NORMALE.

NOTA. ALCUNI SOFTWARE DANNO DIRETTI LA $K - K_N$ CIOE' LE DIFFERENZE DI K.

CROSS-COVARIANZA E CROSS-CORRELAZIONE

HO DUE DS ~~E DI DIM N E~~

$X = \{x_k\}_{k=1}^{n} \quad x_k \in \mathbb{R}^N \quad y = \{y_k\}_{k=1}^{n} \quad y_k \in \mathbb{R}^M$

$$S_{x,y,n} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - \bar{x}_n)(y_h - \bar{y}_n)^T \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

$$M \times 1 \times 1 \times N \rightarrow M \times N$$

$S_{x,y,n}$ MISURA L' AFFINITÀ TRA I DS

SE $M = N = 1$

$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - \bar{x}_n)(y_h - \bar{y}_n) \in \mathbb{R}$ ED E' LA COVARIANZA TRA DUE DS (REALI)

LA CROSS-CORR

$$r_{x,y,n} = \text{DIAG}(S_{x,n}^2)^{-1} \cdot \overbrace{\sqrt{\text{DIAG}(S_{y,n}^2)^{-1}}}^{S_{x,y,n}}$$

PRENDO SOLO DIAG PRINCIPALE

PRENDO L' INVERSA

SE $N = 1$

$$r_{x,y,n} = (S_{x,n})^{-1} \cdot S_{x,y,n} \cdot (S_{y,n})^{-1} = \frac{S_{x,y,n}}{S_{x,n} \cdot S_{y,n}}$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE CLASSICO

IL TERMINE INDICA CHE CORRELO DUE DS

AUTOCOVARIANZA E AUTOCORRELAZIONE

CORRELO IL DS CON SE STESSO: PRENDO PEZZI DIVERSI DEL DS E LI COLLEGO TRA LORO

IMPORTANTE PER SERIE TEMPORALI!

LA PARTE DEL PASSATO E' CORRELATA CON LA PARTE PIU' RECENTE.

LEZIONE 12-10-2022

X ESERCIZIO

$$S^2_{x,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_n)(x_k - \bar{x}_n)^T \qquad \bar{x}_n = \text{MEDIA CAMPIONARIA}$$

1. $S^2_{x,n} = 0 \iff x_1 = x_2 = x_n$

2. $S^2_{x,n} \geq 0$ OVVERO $u^T S^2_{x,n} u \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^N$

$1 \times N ;\ N \times N ;\ N \times 1 \to 1 \times 1 \in \mathbb{R}$

3. $\exists!\ S_{x,n}$ TC $S^2_{x,n} = S_{x,n} S_{x,n}$

SI BASA SUL FATTO CHE $S^2_{x,n} \geq 0$

SE $S^2_{x,n} \geq 0 \Rightarrow M \, \text{DIAG}(S^2_{x,n}) M^{-1} = S^2_{x,n}$

DA QUI COSTRUISCO $S_{x,n}$

RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

BISOGNA VISUALIZZARE IL DS.

FREQUENCY TABLES. → ASSOCIABILI ANCHE A GRAFICI A BARRE VOLENDO

HO UN DS $(x_k)_{k=1}^{n} \,/\!/\, \mathbb{X}$ NON TROPPO GRANDE E CON DATI ANCHE RIPETUTI.

DA $(x_k)_{k=1}^{n} \longrightarrow \mathbb{X}_{\{\}}$ INSIEME DEI VALORI DEL DS

$$\mathbb{X}_{\{\}} = (x_j)_{j=1}^{m} \quad \text{DOVE} \quad m \leq n \quad \left(\text{INSIEME DEI VALORI NON RIPETE}\right)$$

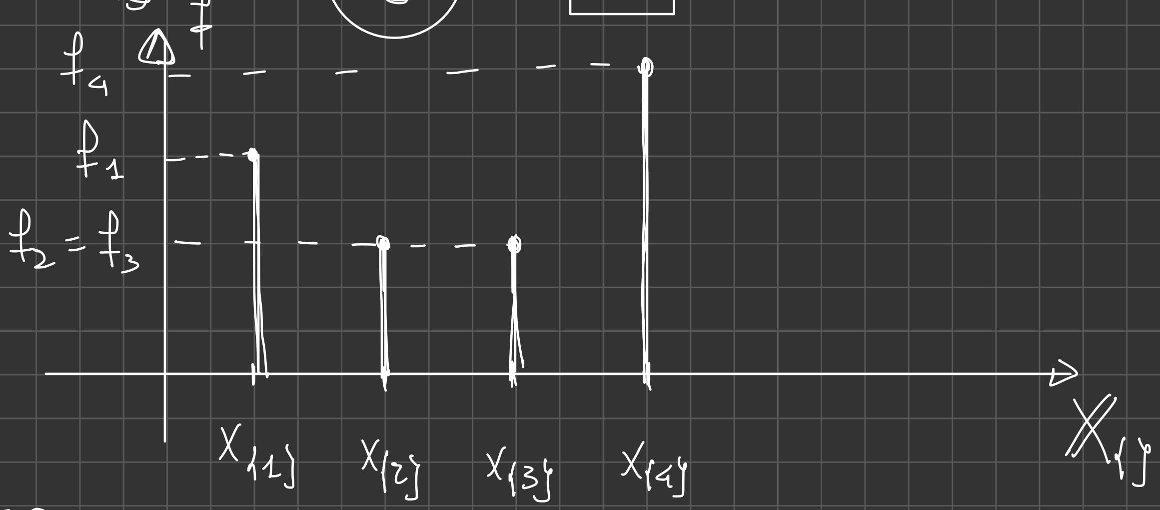
AD OGNI x_j POSSO ASSOCIARE f_j E r_j

f_j = # VOLTE IN CUI x_j COMPARE IN $\mathbb{X}$ =

$$= |\{ k \in \{1 \dots n\} \text{ TC } x_k = x_j \}|$$

$v_j = \frac{f_j}{n}$ = FREQ RELATIVA

ALLORA $\forall \; x_j \in X_{\{j\}}$ INDICO f_j O v_j → $\boxed{\frac{f_j}{n}}$ → DEVI CALCOLARLO TU NEL CASO



DATI CATEGORICI.
NON OTTENGO NUMERO MA ALTRO.

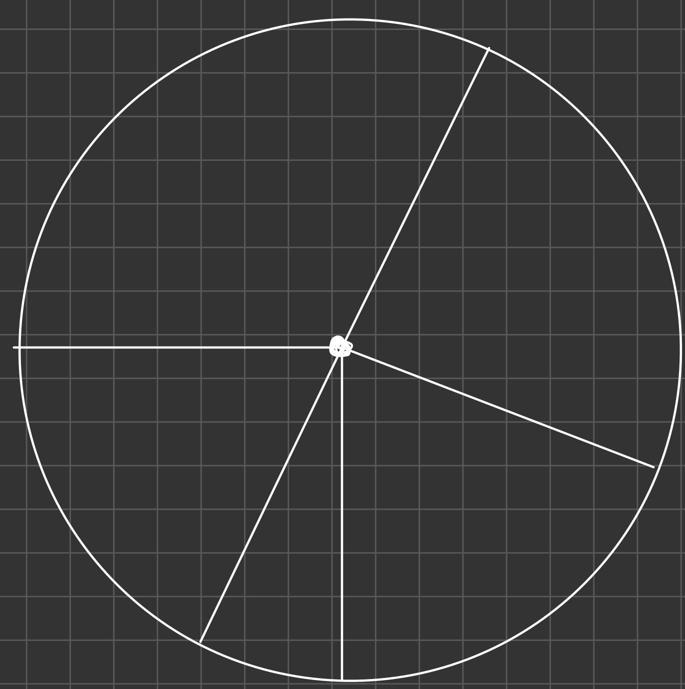
ESEMPIO. FREQ CON CUI ESCE UNA CARTA QUANDO GIRO IL MAZZO

GRAFICO A TORTA

L' AMPIEZZA DELLA FETTA E' PROP A v_j!

$$\left(\sum_{j=1}^{n} v_j = 1\right)$$

IL TOTALE DELLE % MI DEVE DARE POI IL 100 %.



BOX PLOT (GRAFICI A SCATOLA)

PRENDO X.

$X \longrightarrow X_{()}$ ORDINO L' INSIEME DEI VALORI

$= \left(x_{(k)}\right)_{k=1}^{n}$ → HO SEMPRE n VALORI

ORDINE

PRENDO $x_{(1/2)}$ LA MEDIANA.

PRENDO X^- E X^+ CON

$$\mathbb{X}^- = \{ x_k \in \mathbb{X} \text{ TC } x_k \leq x_{1/2} \}$$
$$\mathbb{X}^+ = \{ x_k \in \mathbb{X} \text{ TC } x_k \geq x_{1/2} \}$$

DIVIDO IL DS IN DUE PARTI

QUARTO INFERIORE. $x^-_{1/2}$ MEDIANA $\mathbb{X}^-$

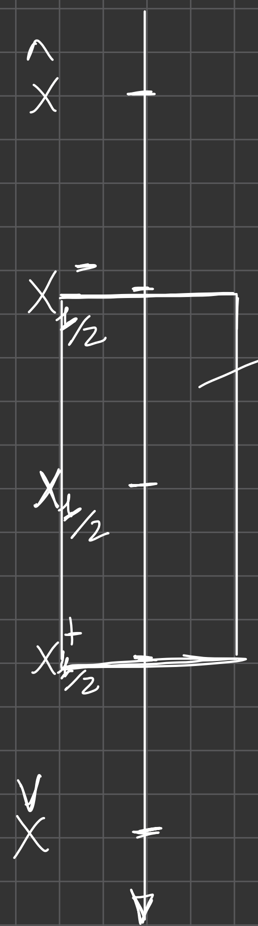
QUARTO SUPERIORE. $x^+_{1/2}$ " $\mathbb{X}^+$

MINIMO. $\min \mathbb{X} = \hat{x}$

MASSIMO. $\max \mathbb{X} = \check{x}$

FISSO UNITA' DI MISURA E RAPP VERTICALE / ORIZZONTALE

TRACCIO SEGM



SPREAD DEL QUARTO.

$f_s \equiv x^+_{1/2} - x^-_{1/2}$

IL QUARTO

PUNTI CHE STANNO A $1.5\, f_s$ SI CHIAMANO MILD OUTLIER

" " " A $3\, f_s$ " " OUTLIER

IL BOX PLOT E' UTILE PER DATI <u>INDIP</u> DAL TEMPO!!

LA RAP COGLIE VISIONE DI INSIEME DEL MODO IN CUI HO GENERATO I DATI, COME SE AVESSI DISTRIB UNICA DA CUI LO GENERO.

UN ESEMPIO E' IL RANDOM WALK.
FACCIO UN LANCIO DA UNA DISTRIB BEN DEFINITA E IN BASE AL RISULTATO FACCIO UN PASSO, AVANTI O INDIETRO.
UN FENOMENO COSÌ GENERA UN DS NON STAZIONARIO: LA DISTRIB DA CUI POSSO SUPPORRE IL PESCAGGIO "NON E' UNICA".
LA MEDIA E' SEMPRE ZERO, MA LA VAR AUMENTA: LA POSSIB DI ALLONTANARMI DI MOLTO DALLA MEDIA E' ALTA.
IN QUESTO CASO, NON AVENDO UNA DIST STAZIONARIA (CON STESSE CARATTERISTICHE) IL BOX PLOT E' FUORVIANTE.

SE HO UN DS TC NON SO BENE COME E' STATO GENERATO O CHE DIP DAL TEMPO, IL BOX PLOT NON E' RAPPRESENTATIVO.

ISTOGRAMMA

(→ VALORI UNICI)

DATO X IN CUI HO MOLTO DATI OPPURE GLI V_j SONO PICCOLI.

SE CAMPIONO UNA DIST NORMALE E' IMPOSSIBILE TROVARE DUE VOLTE LO STESSO VALORE.

ANCHE SE X E' A VAL UNICI, QUESTI VALORI SI ADDENSANO IN UNA CERTA ZONA.

FISSO DEI BINS (SCATOLE) SULLE ASCISSE. OGNI BINS CONTIENE SX E NON DX.

POSIZIONO I DATI.

IN BASE AL NUMERO DI PUNTI CHE RICADONO IN UN BINS (f_i O v_i) ASSEGNO UN VALORE AL BINS (
ISTOGRAMMI DI FREQ O DI FREQ RELATIVA.

ISTOGRAMMA DI DENSITA' → PRENDO QUELLO DI FREQ E LO RISCALO SU AREA TOTALE
→ AREA PARI AD 1

L' ISTOGRAMMA DIP DA # BINS E LORO AMPIEZZA.

SE FISSO W, ALLORA $k = \#BINS = \left\lceil \frac{MAX - MIN}{W} \right\rceil$

IN GENERE SI FISSA K E PRENDO W.

K SI FISSA CON REGOLE AD OCCHIO. $\longrightarrow$ VEDI NOTE

AD ESEMPIO
- $K = \lceil \sqrt{n} \rceil$
- $K = \lceil 1 + \log_2(n) \rceil$

IN GENERE DIPENDE DAL DS CHE SI HA

SI PUO' MODIFICARE IL K IN BASE A SKEW E KURT.

UN ISTOGRAMMA E' NORMALE (O SI AVVICINA) SE:
- IL PICCO E' AL CENTRO
- E' CIRCA SIMM RISPETTO AL PICCO
- RICORDA LA CAMPANA

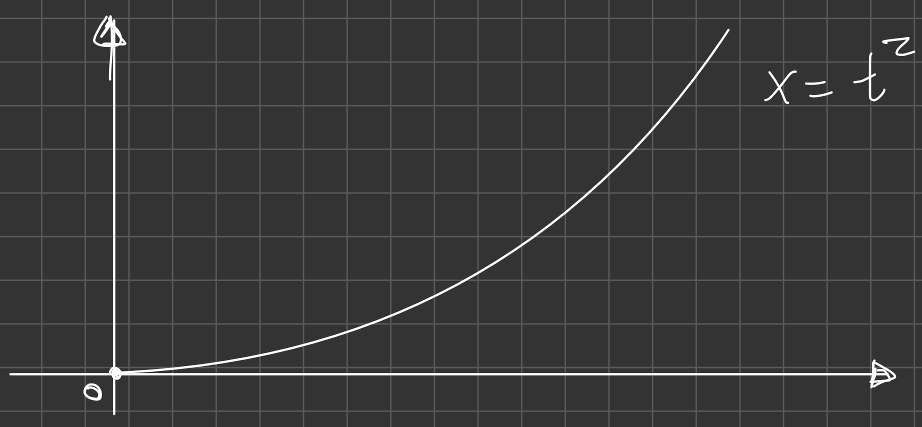
REGOLA EMPIRICA.
- CIRCA IL 68% DEI DATI RICADE IN
$$\left[\bar{x}_n - S_{x,n} \bar{x}_n \ ; \ \bar{x}_n + S_{x,n} \cdot \bar{x}_n \right]$$
- CIRCA IL 90% $\left[\bar{x}_n - 2 S_{x,n} \cdot \bar{x}_n \quad \dots \right]$ VEDI DISPENSA

CON CEBISHEV AVREI CIRCA L' 89%

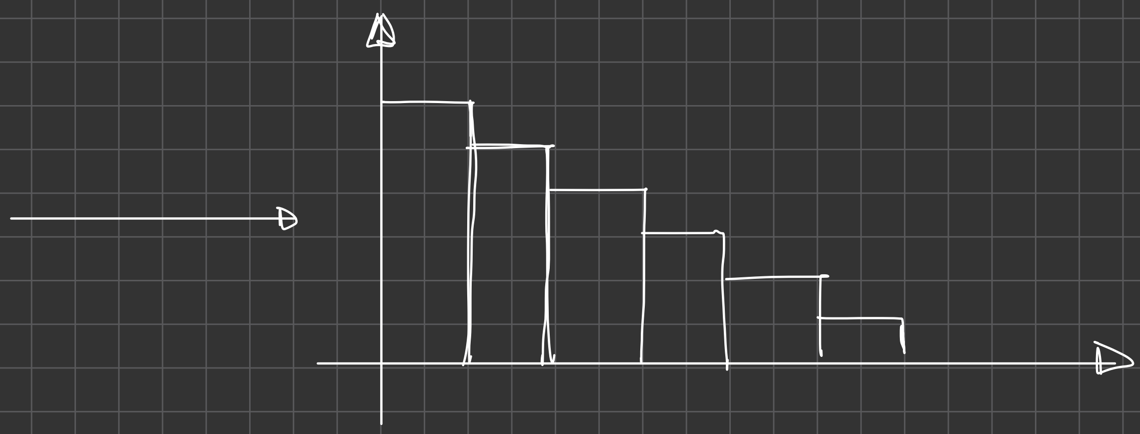
QUI HO IL 99,7% DEI DATI!! QUESTO VIENE DALLA NORMALITA'!

CEBISHEV VALE $\forall$ DISTRIBUZIONE PERO'; QUI HO UN' INDICAZIONE PIU' PRECISA.

ANCHE L'ISTOGRAMMA VA USATO CON ATTENZIONE SU ALCUNI DS.



MOTO GRAVE



ISTOGRAMMA

ANCHE SE ISTOGR È SIMILE AL POISSONIANA NON LO È !
IL MOTIVO È CHE IL DS NON È STAZIONARIO : LA MEDIA È SEMPRE UGUALE ALLA POSIZIONE NELL' ISTANTE

PP - PLOT

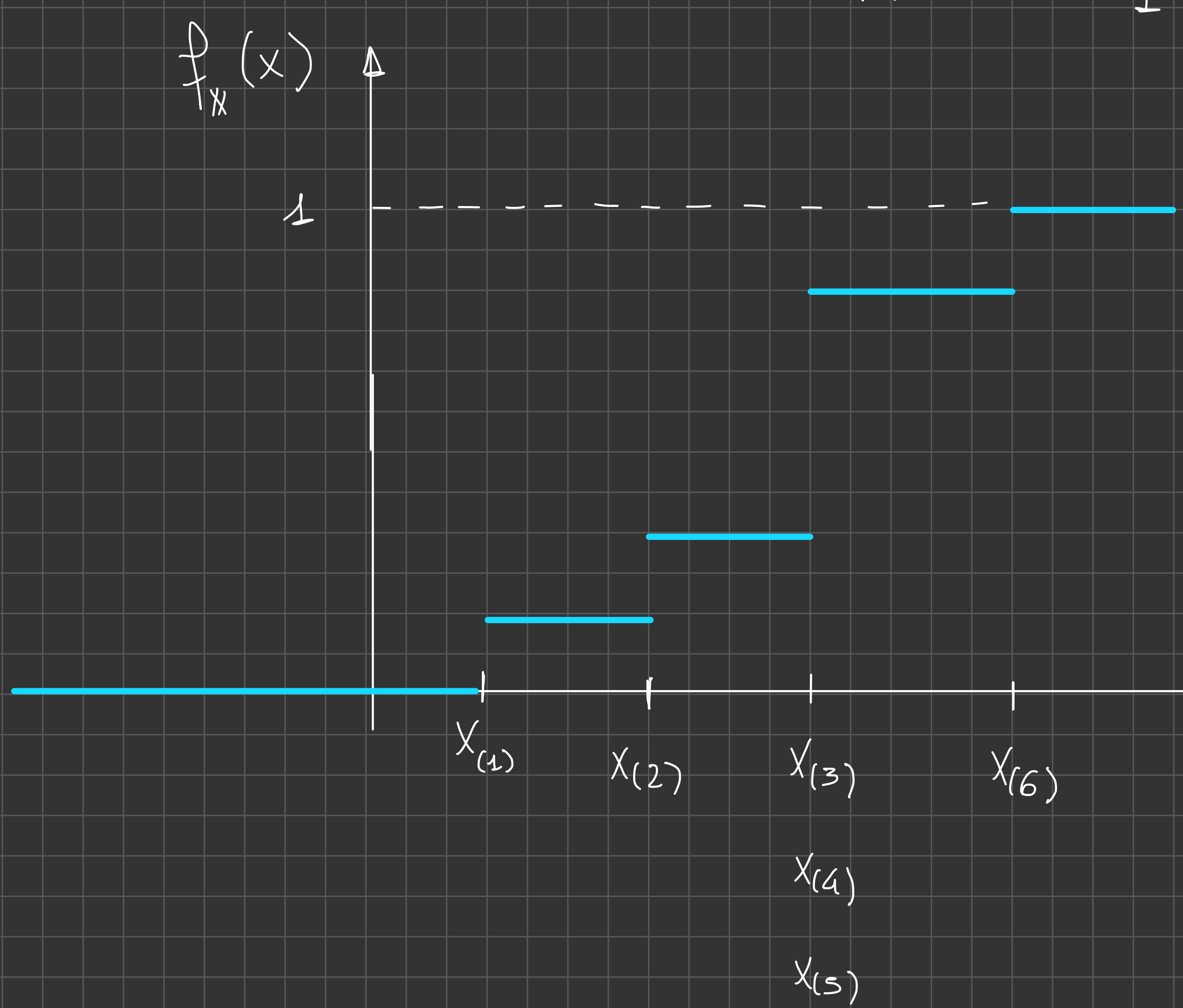
SI BASA SU DIST DI PROB DEL DS.

DATO X GLI ASSOCIO UNA FUNZIONE DI DIST EMPIRICA.

$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ TC $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{[x_{(k)}, +\infty)}(x)}$

PRENDO X E PRENDO $X_{( )}$

$$1_{[x,y)}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x,y) \\ 1 & \text{ALTRO} \end{cases}$$



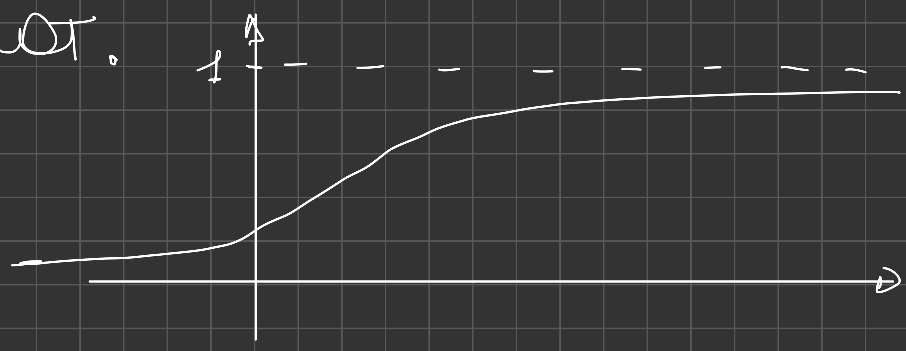
FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DEL DS

QUANDO FINISCO I PUNTI ARRIVO AD 1

DA y COSTRUISCO f_y.

POI VOGLIO CONFRONTARE f_y CON DELLE f_x DI RIFERIMENTO.

IL CONFRONTO LO FACCIO COL PP-PLOT.



$$PP_{x,y} = \left(F_x\left(y_{(k)}\right), F_y\left(y_{(k)}\right) \right)$$

PRENDO IL DS ORDINATO E VEDO QUANTO VALE F_x E F_y SUL $y_{(k)}$.

OTTENGO QUINDI UN INSIEME DI PUNTI DETTO PP-PLOT.

QUANTO PIU' F_x E' VICINO A F_y TANTO PIU' IL PP-PLOT TENDE A $y = x$. SI POSSONO APPLICARE ANCHE DELLE DEVIAZIONI PER VEDERE LE DIFFERENZE.

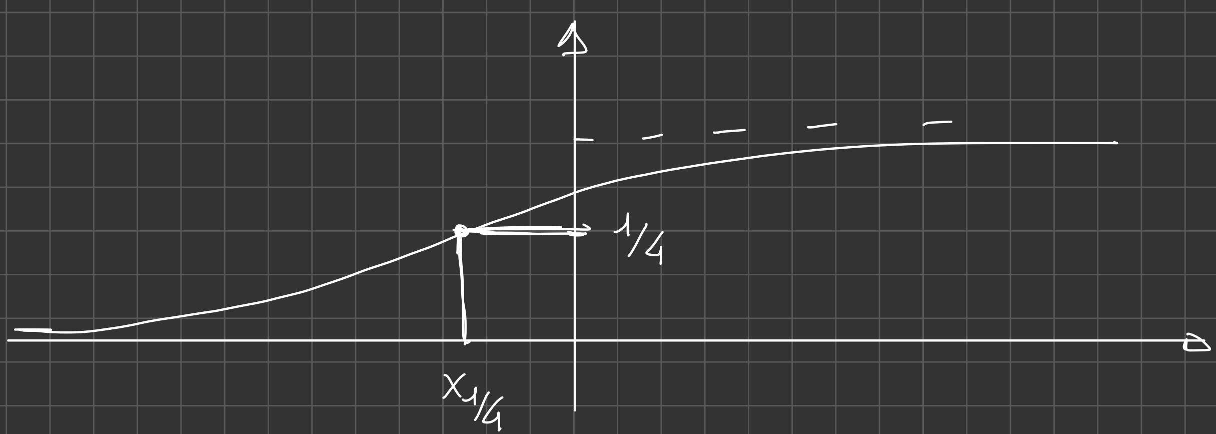
QQ - PLOT

SIMILE A PP-PLOT MA RIFERITO AI QUANTILI.

$F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TC x_q SODDISFA $F(x_q) = q$

↳ STR CRESCENTE E CONTINUA

DATO q ESISTE UNICO x_q TC $F(x_q) = q$



DATO $y \longrightarrow \left(\overline{y_{(k)}}\right)_{k=1}^{n}$

QUINDI

CONSIDERO TANTI QUANTILI QUANTI SONO n.

DIVIDO $[0, 1]$ IN n INT E PRENDO GLI n QUANTILI

$QQ_{x,y} = (x_q, y_q)$ COPPIE DEI QUANTILI

ANCHE QUI SE LA DISTRIB PROVA E' SIMILE A TEST → $y = x$.

PP-PLOT → CONFRONTO PROB
QQ-PLOT → " QUANTILI

I DUE SONO COMPLEMENTARI.

- PP CATTURA IL CENTRO DELLA DISTRIB.
  SE IL PP AL CENTRO SI DISCOSTA, LA DISTRIB NON CATTURA BENE
- QQ CATTURA LE CODE DELLA DISTRIB.

QQ → QUANDO LE CODE NON SONO CATTURATE
PP → " IL CENTRO NON E' CATTURATO

E' IMPORTANTE INDICARE LE BANDE DI CONFIDENZA IN PP-PLOT E QQ-PLOT; LA CORRISPONDENZA NON E' ASSOLUTA, MA CON CERTO ERRORE.

PROVA ESERCIZI

1. $S^2_{x,n} = 0 \iff x_1 = x_2 = x_n$

$\Leftarrow \quad x_i = x_j \quad \forall i, j$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n} \cdot n \cdot x_m = x_m$$

$$S^2_{x,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_n)(x_k - \bar{x}_n)^T =$$

$x_k = x_m \quad \forall k$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_m)(x_k - x_m)^T = 0$$

$\Rightarrow$ SE $n = 2$

$$S^2_{x,2} = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{2} (x_k - \bar{x}_2)(x_k - \bar{x}_2)^T = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_k a_k^T = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{kN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{kN} \end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1} a_{k2} & a_{k1} a_{kN} \\ a_{k1} a_{k2} & a_{k2}^2 & a_{k2} a_{kN} \\ a_{kN} a_{k1} & a_{kN} a_{k2} & a_{kN}^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall j \quad \sum_{k=1}^{2} a_{kj}^2 = 0$$

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 = 0 \Rightarrow a_{1j}^2 = 0 \quad a_{2j}^2 = 0$$

$$a_{1j}^2 = [(x_1 - \bar{x}_n)_j]^2 = 0 \Rightarrow x_{1j} = \bar{x}_{nj}$$

OVVERO X_1 E' TC

$\forall\, j = 1 \dots N \quad X_{1j} = \bar{X}_{nj}$ ALLA COMPONENTE J-ESIMA DI $\bar{X}_n$

QUESTO VALE ANCHE PER GLI ALTRI !! CVD

2

2. $S^2_{x,n} \geq 0$ OVVERO $u^T S^2_{x,n} u \geq 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^N$

$1 \times N;\ N \times N;\ N \times 1 \to 1 \times 1 \in \mathbb{R}$

SIA $u \in \mathbb{R}^N$

$$(u_1 \ u_2 \dots u_N) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_n)(x_k - \bar{x}_n)^T \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(u_1 \ u_2 \ u_N) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^T \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_N \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(u_1 \ u_2 \ u_N) \cdot \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{kN} \end{pmatrix} (a_{k1} \ a_{k2} \ a_{kN}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_N \end{pmatrix} \right] \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(u_1 a_{k1} + u_2 a_{k2} + u_N a_{kN}) \cdot (a_{k1} \ a_{k2} \ a_{kN}) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_N \end{pmatrix} \right] \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(u_1 a_{k1} + u_2 a_{k2} + u_N a_{kN}) \cdot (u_1 a_{k1} + u_2 a_{k2} + u_N a_{kN}) \right] \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} (u_1 a_{k1} + u_2 a_{k2} + u_N a_{kN})^2 \geq 0 \quad \forall\, u$$

!! CVD

3. $\exists ! \, S_{x,n}$ TC $S^2_{x,n} = S_{x,n} S_{x,n}$

SI BASA SUL FATTO CHE $S^2_{x,n} \geq 0$

SE $S^2_{x,n} \geq 0 \Rightarrow M \, \text{DIAG}(S^2_{x,n}) M^{-1} = S^2_{x,n}$

DA QUI COSTRUISCI $S_{x,n}$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_N$ AUTOVALORI DI $S^2_{x,n}$

$$S^2_{x,n} = M \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} M^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} \dots & m_{2N} \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} \dots & m_{2N} \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{NN} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2N} \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2N} \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{\dots} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 m_{11} & \lambda_2 m_{12} & \lambda_N m_{1N} \\ \lambda_1 m_{21} & \lambda_2 m_{22} & \lambda_N m_{2N} \\ \lambda_1 m_{N1} & \lambda_2 m_{N2} & \lambda_N m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2N} \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{NN} \end{bmatrix} =$$

RIVEDI

$=$

LEZIONE 13-10-2022

DATA FRAME. SONO SORTA DI DB IN CUI SI METTONO I VALORI DA STUDIARE.

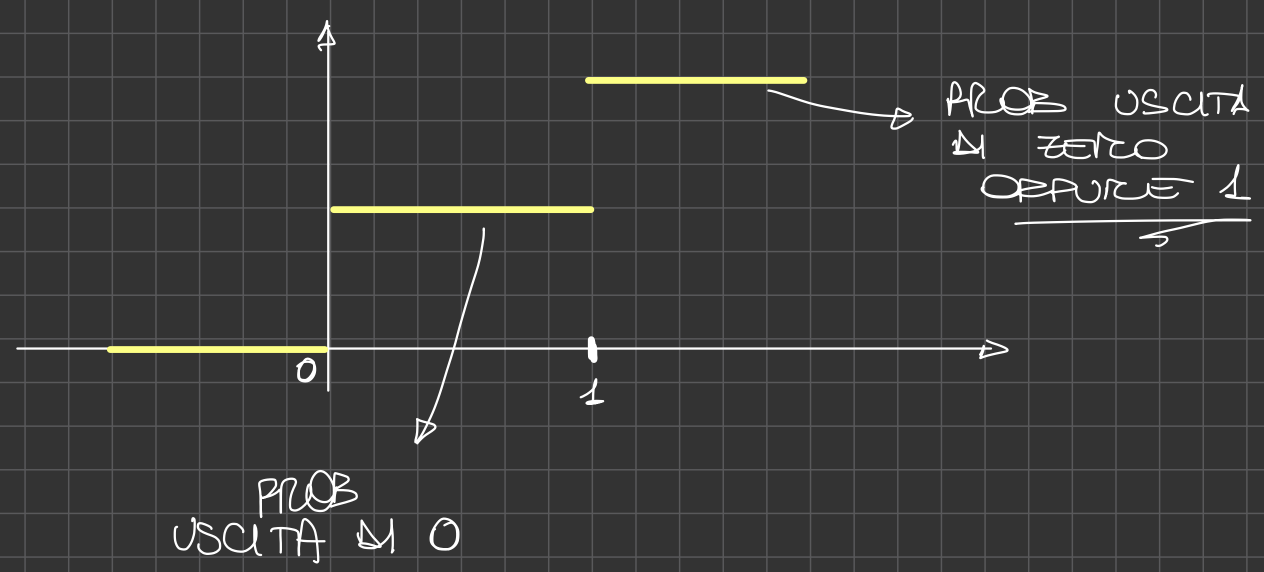
NELL' ESEMPIO DEI BOX PLOT HO CHE LA MEDIANA E' 0 AGLI ESTREMI O IN MEZZO. IL MOTIVO E' CHE HO DEGLI 0 E 1: SARA' 0, 1 OPPURE ½ ~~QUINDI LA MEDIANA E'~~ LA MEDIANA. QUESTO SUCCEDE IN GENERE CON DS A DUE VALORI.

NELLO SCATTER PLOT NON HO UNA PATTERN; QUESTO E' INDICE DEL FATTO CHE NON CI SIA DIPENDENZA DAL TEMPO.

NELLA DENSITA' DEL BW HO $\#1 = \#0$ E INFATTI LA MEDIANA ESCE 0,5.

UN MODO PER VEDERE SE IL DS DIP DA t E' FARE LO SHUFFLE: SE LE PROPRIETA' STRUTTURALI SONO LE STESSE, E' UN INDIZIO CHE NON DIP DAL TEMPO.
NEL NOSTRO CASO, FACENDO LO SHUFFLE CAMBIA LO SCATTER, MA LA STRUTTURA E' SIMILE.

LA DISTR TEORICA DI BERNULLIANA NON DOVREBBE STARE A 0,25, MA A 0,5!!
SE HO UNA BERNULLIANA DI PARAM p, LA BARRA TRA 0 E 1 SI TROVA A QUOTA $q = 1-p$: QUESTO PERCHE' RAPPRESENTA LA PROB DI INSUCCESSO.



TRAIETTORIA DEL PROCESSO DI CONTEGGIO.
CONTO GLI ZERI E UNO CHE SONO USCITI NEL CORSO DEL TOTALE.
IL PROCESSO DI CONTEGGIO E' IMPORTANTE IN ALCUNE APPLICAZIONI.

CUM SUM FA SOMMA PROGRESSIVA DI UN VETTORE.
CIO' CHE OTTENGO NON E' UN RANDOM WALK PERCHÉ NON E' A MEDIA ZERO.
IN QUESTO CASO FACENDO LO SHUFFLE DEL CONTEGGIO OTTENGO UNO SCATTER DEL TUTTO DIVERSO!! QUINDI IL DATAFRAME MI DIPENDE DAL TEMPO.

RADEMACHER TS. SIMILE A BERNULLI, MA CON VALORI -1 E +1.
UNA VAR DI $\boxed{R = B \cdot 2 - 1}$.

SE FACCIO ~~LO~~ LO SCATTER DEL R, E POI IL CONTEGGIO OTTENGO IL RANDOM WALK.

UN TREND STOCASTICO NASCE DALLA PURA CASUALITA': CASUALMENTE I VALORI SONO USCITI IN MODO DA DARE UN TREND AL CONTEGGIO.
QUINDI NON POSSO DEFINIRE f DET CHE GOVERNI LA COSA.

#PALL BIANCHE ESTRATTE CON REIMBUSSOLAMENTO.
ANCHE QUI SE FACCIO IL CONTEGGIO NON HO DETERMINISMO IN REALTA'.

POISSON. HO FENOMENO ALEATORIO CHE PUO' AVERE $x \geq 0$ ESITI POSITIVI (SENZA LIMITE SUPERIORE).
QUANDO SI USANO QUESTE DISTRIBUZIONI SENZA LIMITE, PIUTTOSTO CHE FISSARE LIMITI E' BENE RENDERE VALORI MOLTO ALTI MOLTO IMPROBABILI: QUESTO E' QUELLO CHE FA LA DISTRIBUZIONE DI POISSON

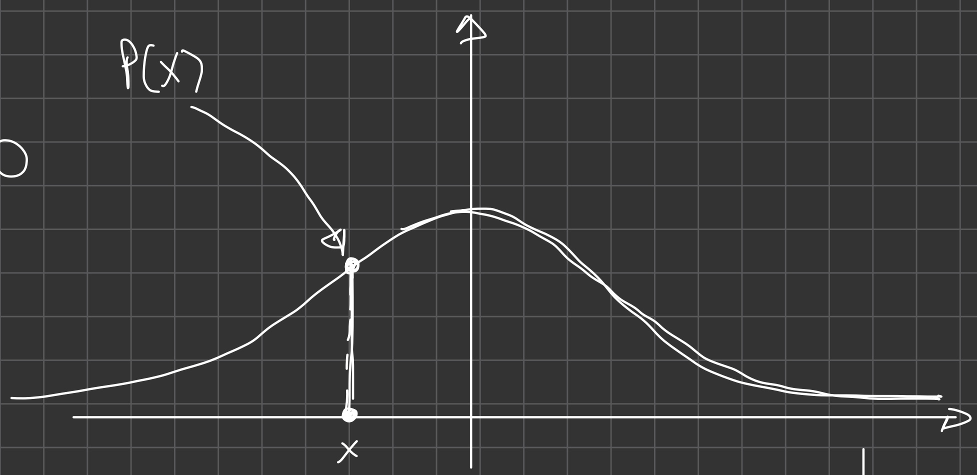
UN ESEMPIO DI FENOMENO DI POISSON E' IL #MSG IN UNA CHAT.

λ E' IL PARAM DI POISSON CHE INDICA IL # MEDIO DI EVENTI IN UN INTERVALLO.
PIU' CI SI SCOSTA DA λ, PIU' IL FENOMENO HA PROB BASSA

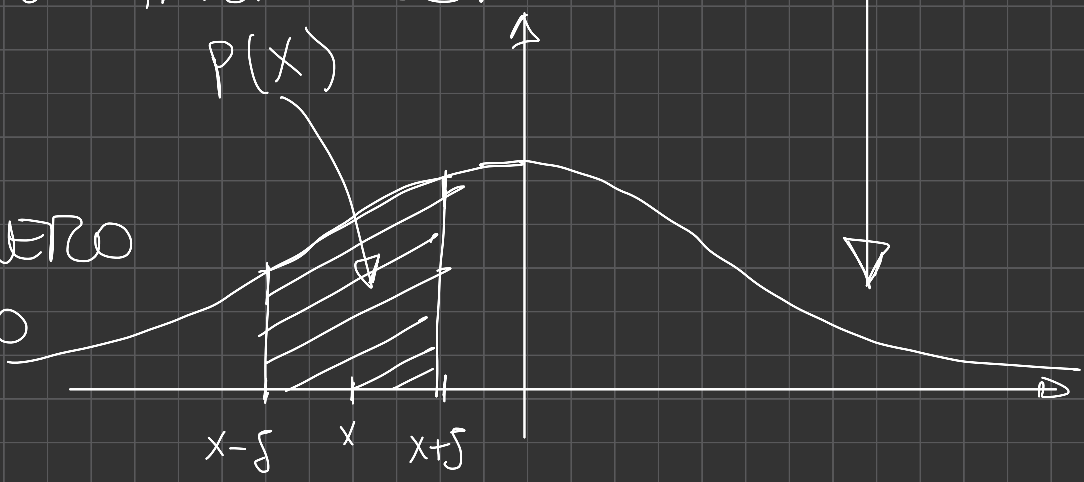
$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

FENOMENO GAUSSIANO

P(X) E' L' AREA DEL SEGMENTO
$\Rightarrow$ E' $\emptyset$!!
LA PROB DI VALORE PRECISO E' NULLA SEMPRE



DEVO QUINDI CONSIDERARE UN INTERVALLO.
QUANDO HO GEN GAUSSIANO I NUMERI SONO GENERATI CON QUESTO CRITERIO OVVERO BASANDOSI SU UN INTERVALLO IN CUI X SI TROVA.



$\mu = 0$, $\sigma = 1$ $\Longrightarrow$ CIRCA 99,7% DEI VALORI SONO $(-3;3)$

E' TIPICO DI FENOMENI GAUSSIANI L' ASSENZA DI STRUTTURA NELLO SCATTER.

NELLA REGRESSIONE LINEARE L' ERRORE VA BENE SE E' DISTRIBUITO COME UNA PESCA DA GAUSSIANA.

FACENDO LO SHUFFLE HO STESSA STR.

I BOX PLOT SONO SIGNIFICATIVI! HO LA COMPARSA DI OUTLAIER

LEZIONE 18-10-2022 INIZIO PARTE PROBABILITÀ

PROBABILITÀ → MODELLAZIONE FENOMENO ALEATORIO

"OGGI NON SO PREVEDERE CON CERTEZZA L'ESITO CHE AVRÀ DOMANI"

PRIMA DEL LANCIO DI MONETA, NON POSSO PREVEDERE COSA ESCE.

IN ALCUNI CASI, NOTE LE CONDIZIONI INIZIALI, POSSO PREVEDERE CON CERTEZZA: STUDIO IL LANCIO DELLA MONETA DA UN PUNTO DI VISTA FISICO E POSSO ARRIVARE A PREVEDERE. QUESTI MODELLI PERÒ SONO TROPPO COMPLESSI, PER QUESTO TIPO DI FENOMENI.

IL MODELLO ALEATORIO IN ALCUNE SITUAZIONI È PIÙ SEMPLICE IN MOLTI CASI DI QUELLO DETERMINISTICO CHE DESCRIVE LO STESSO FENOMENO.

VARIABILE ALEATORIA

MODELLA IL RISULTATO DI UN FENOMENO CASUALE PRIMA CHE L'ESPERIMENTO AVVENGA.

LA POSSIAMO DEFINIRE COME UNA FUNZIONE

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$$

DOVE Ω È DETTO "SPAZIO DI PROBABILITÀ"

LO SPAZIO DI PROB È L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI ESITI DI UN FENOMENO ALEATORIO.

CON $\omega \in \Omega$ INDICHIAMO IL SINGOLO ESITO POSSIBILE

ES. LANCIO MONETA $\Omega = \{T, C\}$ QUESTO LO SO PRIMA DEL LANCIO DELLA MONETA

$\Omega = \{0, 1\}$

LANCIO DADO. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

FENOMENI SEMPLICI COME GIOCHI HANNO SPAZI DI <u>PROB FINITI</u> ANCHE SE A VOLTE SONO MOLTO GRANDI.

ALTRI FENOMENI HANNO SPAZI DI ALTRA NATURA

ES. ARRIVI DEI MSG IN UNA CHAT (FISSATA L'UNITA' DI TEMPO), A PRIORI NON POSSO STABILIRE UN LIMITE SUPERIORE.

SI ASSUME COME $\Omega = \mathbb{N}_0$

CON QUESTA ASSUNZIONE POSSO MODELLARE FENOMENI MOLTO DIVERSI TRA LORO CHE INVECE VORREBBERO MODELLI DIVERSI OGNI VOLTA CHE PONGO UN LIMITE SUPERIORE. IN QUESTO CASO PER FENOMENI "AGLI ESTREMI" DI Ω SI CONSIDERANO PROB TANTO BASSE DA POTER CONSIDERARE IMPOSSIBILE IL LORO VERIFICARSI.

ES. MISURA ALTEZZA. $\Omega = \mathbb{R}^+$

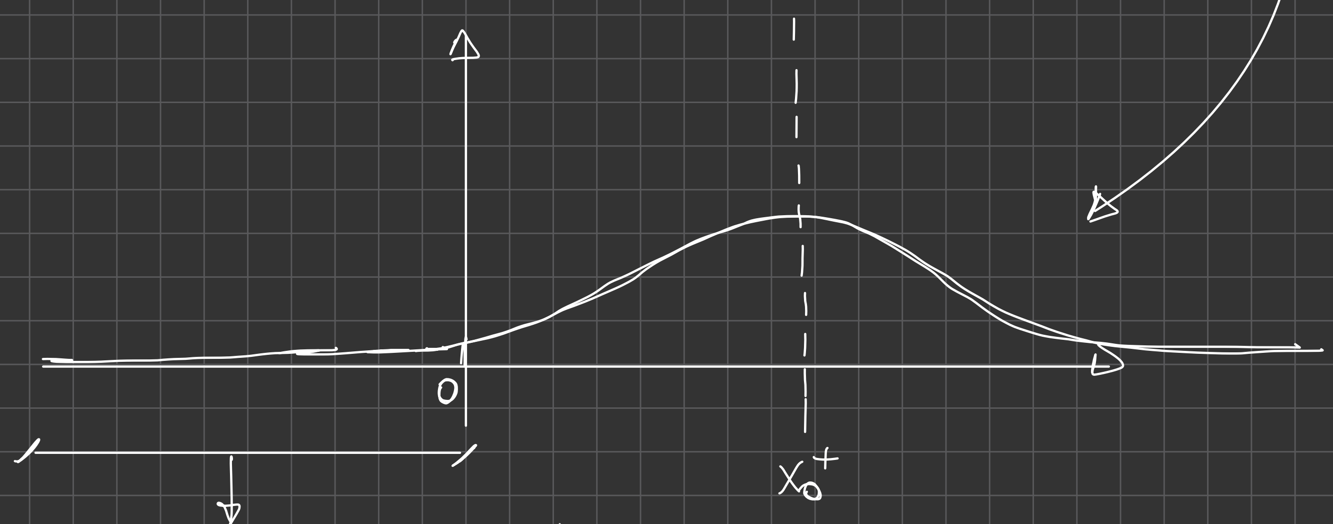
PREZZO DI UN TITOLO SUL MERCATO.

$$\Omega = \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

IL PIU' ADATTO A DESCRIVERE IL MONDO CONSIDERATO

SUI RAZIONALI NON SI FANNO BENE I LIMITI QUINDI PASSIAMO AI REALI POSITIVI

PER COMODITA' NEL FARE I CONTI



IL TITOLO NON AVRA' VALORE NEGATIVO, MA PER COMODITA' PRENDO TUTTO $\mathbb{R}$ E AI NEGATIVI DO' PROB BASSISSIME

EVENTO.

UN EVENTO E E' TC $E \subseteq \Omega$ OVVERO UN SOTTOINSIEME DI POSSIBILI ESITI DEL FENOMENO ALEATORIO.

ES. NEL LANCIO DEL DADO CONSIDERO SOLO USCITA DEI PARI

$$E_p = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$$

$$E_{\geq 2} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq \Omega$$

DA QUESTA DEF, GLI EVENTI SI COMPORTANO COME $\mathcal{P}(\Omega)$.
INDICHIAMO CON

- Ω = EVENTO CERTO $\rightarrow p = 1$. MODELLA AVVENIMENTO DI UNO QUALSIASI DEI CASI IN Ω
- ϕ = EVENTO IMPOSSIBILE $\rightarrow p = 0$. MODELLA L'AVVENIMENTO DI EVENTI IN OPPOSIZIONE

DATI $E, F \subseteq \Omega$, VALGONO TUTTE LE DEF E PROP TRA SOTTOIN

- $E = F \Rightarrow E \subseteq F$ E $F \subseteq E$
- $E \cup F$ $\quad E \cap F$

LA PROB, PER FLESSIBILITA' NELLA DEF, E' DEFINITA SUGLI EVENTI E NON SUL SINGOLO ESITO.

$\Rightarrow P(E)$

PER LE CARDINALITA' HO CHE

- Ω FINITO $\Rightarrow |\text{INSIEME EVENTI}| = |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$ FINITA
- $\Omega = \mathbb{N}_0$ ALLORA $|\Omega| = \aleph_0$
  QUINDI $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = |\mathbb{R}|$
- $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad |\Omega| = \aleph_1$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$

SE NELLE ULTIME CONDIZIONI VOGLIO DEFINIRE FUNZIONE DI PROB p

$p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ TC
1. $p(E) \geq 0$
2. $p(\Omega) = 1$

SI DIMOSTRA CHE P LA POSSO COSTRUIRE SOLO IN MODO BANALE.
QUINDI NON SEMPRE POSSO PARTIRE DA $\mathbb{P}(\Omega)$ PER COSTRUIRE LA P. SERVE CONSIDERARE UN SOTTOINSIEME TRATTABILE

DA UN ALTRO PUNTO DI VISTA HO CHE $\mathbb{P}(\Omega)$ MODELLA TUTTA L' INFO SUL FENOMENO MA NON SEMPRE E' NOTA TUTTA L' INFORMAZIONE: QUESTO E' DOVUTO A NON CONOSCENZA DI BASE O AL FATTO CHE L' INFO SI RIVELA NEL TEMPO (SERIE TEMPORALI).
QUESTA E' LA DIFFERENZA TRA "E' USCITO 6" ED "E' USCITO PARI"
IN CASI IN CUI MI SERVE CONOSCERE IL NUMERO USCITO:
CASO 1. LO CONOSCO
CASO 2. LO DEVO STIMARE IN QUALCHE MODO.

COSTRUIAMO UN' ALGEBRA O σ - ALGEBRA DI EVENTI.

$\mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ TC

1. $\phi \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ NON E' VUOTA)
2. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E}$
3. $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{E}$

ALGEBRA DI EVENTI

MODELLA L' INFO PARZIALE SU UN FENOMENO

CONSEGUENZE $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{E}$

NEL CASO DEL LANCIO DEL DADO.

$\Omega = \{1 \dots 6\}$ $\quad \mathbb{P}(\Omega) = \{E : E \subseteq \Omega\}$ TC $|\mathbb{P}(\Omega)| = 2^6$

$\mathcal{E} = \{\phi, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$ E' ALGEBRA?

1. OK
2. OK
3. OK $\{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} = \Omega \in \mathcal{E}$

$\underline{\underline{\mathcal{E} \text{ E' ALGEBRA}}}$

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega & \omega \text{ DISPARI} \\ -\omega + 1 & \omega \text{ PARI} \end{cases}$$

SE CONSIDERO SOLO $\mathcal{E}$ NON POSSO PIU' USARE $X(\omega)$ PERCHÉ NON HO IL NUM USCITO

$X(\omega)$ E' UNA VAR ALEATORIA RISPETTO A $P(\Omega)$ OVVERO $P(\Omega)$ - VAR ALEATORIA, MA NON E' $\mathcal{E}$ - RANDOM VAR ALEATORIA

QUINDI LA VAR - ALEATORIA CHE SCELGO X MODELLARE DIPENDE DALL' INFO CHE HO E CHE VOGLIO CONSIDERARE

$$X \begin{cases} \nearrow P(\Omega) \text{- VARIABILE ALEATORIA} \\ \searrow \mathcal{E} \text{ - RANDOM VARIABILE ALEATORIA} \end{cases}$$

$X \rightsquigarrow \underbrace{E[X \mid \mathcal{E}]}_{\text{SPERANZA CONDIZIONATA}}$ STIMO L' OGGETTO X IN FUNZIONE DI $\mathcal{E}$

σ - ALGEBRA SU Ω RICORDA !! $\mathcal{E} \subseteq P(\Omega)$

1. $\phi \in \mathcal{E}$
2. $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E}$
3. SE $(E_n)_n$ TC $E_n \in \mathcal{E} \Longrightarrow \underbrace{\bigcup_n E_n \in \mathcal{E}}_{\text{PERMETTO UNIONE NUMERABILE}}$

IL MOTIVO DELLA 3 E' CHE SERVE DEFINIRE

$\lim_{n \to \infty} p(E_n)$ E PER FARLO E' BENE CHE $p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ DOVE $\mathcal{E}$ E' UNA σ - ALGEBRA

p NON OPERA SU PUNTI, MA SU EVENTI IN Ω

LEZIONE 19-10-2022 1

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^N \quad \text{TC} \quad \Omega = (\Omega, \mathcal{E}, p)$$

X: VARIABILE ALEATORIA

Ω: SPAZIO DI PROB

Ω: SAMPLE SPACE

$\mathcal{E}$: ALGEBRA DI EVENTI

p: PROBABILITA'

PROBABILITA'

$$p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$$

- FINITAMENTE ADDITIVO
- NUMERABILMENTE ADDITIVO

PROBABILITA' FINITAMENTE ADDITIVA

$\mathcal{E}$ ALGEBRA

- $p(E) \geq 0$
- $p(\Omega) = 1$ (SAMPLE SPACE COME EVENTO CERTO)
- $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$ SE GLI EVENTI SONO INCOMPATIBILI OVVERO $E_1 \cap E_2 = \phi$ (DISGIUNTI)

RICHIAMA IL CONCETTO INTUITIVO

SIA DATO UN FENOMENO ALEATORIO CON:
- n VOLTE LA RIPETIZIONE DEL FENOMENO
- K VOLTE SI VERIFICA L'EVENTO OVVERO

$$f_E = \frac{K}{n} = \text{FREQUENZA RELATIVA DELL'EVENTO}$$

1. $f_E \geq 0$

2. $f_\Omega = 1$

3. DATI E_1 ED E_2 $\quad f_{E_1 \cup E_2} = f_{E_1} + f_{E_2}$ SE $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

LA PROBABILITA' QUI COINCIDE CON LA FREQ RELATIVA DELL' EVENTO.

POICHÉ $p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$

DATO $\omega \in \Omega$ PER LA PROB DEVO CONSIDERARE $\{\omega\} \in \mathcal{E}$ OVVERO L' EVENTO CHE LO CONTIENE: QUESTI SONO DETTI SINGLETON.

PER SINTESI SI INDICA $p(\omega) \equiv p(\{\omega\})$ MA p NON E' SU Ω, MA SU $\mathcal{E}$!!

PROBABILITA' DI DIRAC

SIA $\Omega \neq \emptyset \Rightarrow \omega_0 \in \Omega$

$$p_0 : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{TC} \quad p_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \omega_0 \in E \\ 0 & \text{SE } \omega_0 \notin E \end{cases}$$

1. OK
2. $p(\Omega) = 1$? $\quad \omega_0 \in \Omega \Rightarrow p_0(\Omega) = 1$
3. $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$ SE $E \cap F = \emptyset$?

- SIA ω_0 TC $\omega_0 \notin E \cup F \Rightarrow \omega_0 \notin E$ E $\omega_0 \notin F$

  ALLORA $\underset{\substack{\| \\ 0}}{p(E \cup F)} = p(E) + p(F) = 0 + 0 = 0$

- SIA ω_0 TC $\omega_0 \in E \cup F \Rightarrow \omega_0 \in E$ OPPURE $\omega_0 \in F$
  MA NON AD ENTRAMBI $E \cap F = \emptyset$

  ALLORA $\underset{\substack{\| \\ 1}}{p(E \cup F)} = p(E) + p(F) = \underset{(0+1)}{1 + 0} = 1$

MODELLA UN ESPERIMENTO CERTO CON UN MODELLO ALEATORIO.

PROBABILITA' DI BERNULLI

SIA $\Omega \neq 0$; SIANO ω_0, ω_1 E $\omega_0 \neq \omega_1$ TC $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$

POSSO APPLICARLA SOLO SU FENOMENI CON <u>ALMENO</u> DUE ESITI DISGIUNTI, MA NE POSSO AVERE DI PIU'

ES. LANCIO DADO $\Omega = \{1 \dots 6\}$

$$\mathcal{E} = \{(\text{ESCE } 6), (\text{NON ESCE } 6)\}$$

SIA $p \in [0,1]$; SIA $q = 1 - p$

$$p(E) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \omega_0 \text{ E } \omega_1 \in E \\ q & \text{SE } \omega_0 \in E \,;\, \omega_1 \notin E \\ p & \text{SE } \omega_0 \notin E \,;\, \omega_1 \in E \\ 0 & \text{SE } \omega_0, \omega_1 \notin E \end{cases}$$

$p(\{\omega_0\}) = q$; $p(\{\omega_1\}) = p$

DOVE p VIENE CHIAMATA PROB DI SUCCESSO.

1. OK
2. $p(\Omega) = 1$? $\omega_0, \omega_1 \in \Omega \Rightarrow p(\Omega) = 1$
3. $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$? CON $E \cap F = \phi$

PRENDO E.

- $\omega_0 \in E$ E $\omega_1 \in E$
- $\omega_0 \in E$; $\omega_1 \notin E$
- $\omega_0 \notin E$; $\omega_1 \in E$
- $\omega_0 \notin E$; $\omega_1 \notin E$

FISSO ~~CIO' CHE~~ E E POI VARIO CIO' CHE STA IN ω_0

PROBABILITÀ DISCRETA UNIFORME ("NAIVE")

$\Omega \neq \emptyset$ TC $\underbrace{\{\omega_1 \dots \omega_n\}}_{\text{HO } n \text{ ESITI DISTINTI}} \subseteq \Omega$ $\longrightarrow$ ESEMPIO DADO

$P_k : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ SONO PROB DI DIRAC SUL K ESIMO ESITO

POICHÉ Ω E' FINITO DI SOLITO HO $\mathcal{P}(\Omega)$

$$P_k(E) = \begin{cases} 1 & \omega_k \in E \\ 0 & \omega_k \notin E \end{cases}$$

DA CUI

$$\boxed{p(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k(\omega_k)}$$

$$p(\omega_k) = p(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{J=1}^{n} P_J(\omega_k) = \frac{1}{n} \quad \text{OK}$$

PER COME DEF

$$P_J(\omega_k) = \begin{cases} 0 & J \neq k \\ 1 & J = k \end{cases}$$

$P_k(E \cup F) = P_k(E) + P_k(F)$ VISTO CHE P_k E' PROB

$$p(E \cup F) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k(E \cup F) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k(E) + \frac{1}{n} \sum_{k=1} P_k(F) =$$

$$= p(E) + p(F)$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

SI DIMOSTRA

QUINDI DATO E HO

$$P(E) = \frac{\text{NUMERO ESITI FAVOREVOLI AD } E}{\text{NUMERO ESITI POSSIBILI}}$$

PROBABILITA' "NATURALE"

PROBABILITA' BINOMIALE

$\Omega = \{\omega_0, \omega_1 \dots \omega_{n+1}\}$ N+1 ESITI DISTINTI

$$P(E) = \sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots n\} \\ \text{CON } \omega_k \in E}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

CON $p \in (0,1)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

PRENDO GLI INDICI k TC $\omega_k \in E$

$E = \{\omega_0 \ \omega_3 \ \omega_5\} \to \{0, 3, 5\}$

$$P(E) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} + \binom{n}{3} p^3 q^{n-3} + \binom{n}{5} p^5 q^{n-5}$$

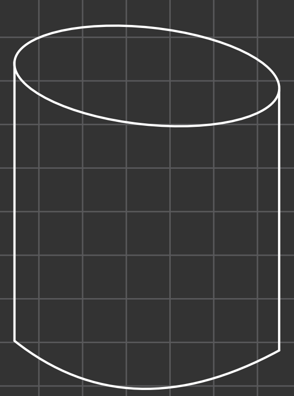
SI DIMOSTRA CHE P E' UNA PROBABILITA'

$P(E \cup F) =$

POICHE' $E \cap F = \emptyset$

L'UNIONE E' DATO DA UNIONE DEI k

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$ OK



M BIANCHE

$N-M$ NERE

N TOTALE

ESTRAZ CON REINSERIM DI n PALLINE

POSTO $p = \frac{M}{N}$ $q = \frac{N-M}{N}$

ALLORA LA PROB DI k BIAN

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

POICHÉ AD OGNI ESTRAZIONE L' URNA TORNA COME PRIMA, OGNI ESTRAZIONE E' INDIP DALLE PRECEDENTI.
SI PARLA IN AMBITO STATISTICO DI CAMPIONAMENTO INDIPENDENTE DA UNA STESSA DISTRIBUZIONE: COMODA MA DIFFICILE AVERLA NELLA REALTA' IN CUI SPESSO NON REINSERISCO (ES. SONDAGGI CON PERSONE)

PROBABILITA' IPERGEOMETRICA BIVARIATA

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1 \dots \omega_n\}$$

$$P(E) = \sum_{\{k \in \{0,1 \dots n\} : \omega_k \in E\}} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

L' IPERGEOMETRICA TRATTA INVECE DEI PESCAGGI ~~CON~~ SENZA REINSERIMENTO.

SI DIMOSTRA CHE SOTTO CERTE CONDIZIONI L' IPERGEOM TENDE ALLA BINOMIALE E QUESTO E' MOLTO COMODO NEL MONDO REALE.

PROPRIETA' DI $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$

1. $P(\emptyset) = 0$

$$P(\Omega) = 1 \qquad \Omega \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{P(\Omega)=1}{P(\Omega \cup \emptyset)} = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) \end{array}\right\} \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

$$E^c \cap E = \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{P(\Omega)=1}{P(E^c \cup E)} = P(E^c) + P(E) \end{array}\right\} P(E^c) = 1 - P(E)$$

3. $P(F-E) = P(F) - P(E \cap F)$

4. $P(E) \leq P(F)$ SSE $E \subseteq F$

5. $P(E) \leq 1$

6. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad \forall E, F \in \mathcal{E}$

7. BONFERRONE

PROBABILITA' NUMERABILMENTE ADDITIVA

$P: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ CON $\mathcal{E}$ SOLO σ-ALGEBRA

- $P(\Omega) = 1$
- $\underbrace{P\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right)}_{\text{UNIONE NUM DI EVENTI}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)}_{\text{SOMMA NUM DI PROB}}$ SE $\underbrace{E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j}_{\text{DISGIUNTI A DUE A DUE}}$

ESEMPIO. CHAT

$$\underbrace{P(E_E)}_{\#\text{ MSG PARI}} = P(\{0, 2, 4, \dots\}) =$$

$$E_E = \bigcup_{n \geq 0} \{2n\}$$ SONO SICURO DISGIUNTI

$$P(E_E) = \sum_{n=0}^{\infty} P(2n)$$

NOTA. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ (SOLO PERCHÉ $a_k \geq 0$ PER NOI)

ALGEBRA E σ-ALGEBRA

VOGLIO STIMARE VA Y NOTA VA X

$E[Y \mid X] \rightarrow$ E' LA MIGLIORE STIMA DI Y NOTA OSS X

$$\begin{array}{c} E[Y \mid X] \\ \| \\ E[Y \mid \underbrace{\sigma(X)}_{\sigma\text{-ALG GENERATA DA } X}] = E[Y \mid \mathcal{F}^X] \end{array}$$

σ-ALG GENERATA DA X OVVERO L'INFO CHE CI DA X

L'ALGEBRA DI EVENTI RAPPRESENTA UN MODELLO DI INFORMAZIONE.

DATO SAMPLE SPACE Ω COSTRUISCO $P(\Omega)$ CHE E' LA FAMIGLIA DI TUTTI GLI EVENTI CHE POSSIAMO DISTINGUERE PER UN FENOMENO ALEATORIO

LANCIO DADO $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \Rightarrow P(\Omega) = P(\{1, 2 \dots 6\})$

DETTA $|\Omega| = n \rightarrow |P(\Omega)| = 2^n$

LA $P(\Omega)$ NON SEMPRE E' NOTA!! QUINDI CONSIDERIAMO

$$\mathcal{E} = \{\phi, \Omega, \underbrace{\{1,3,5\}}_{\text{DISPARI}}, \underbrace{\{2,4,6\}}_{\text{PARI}}\}$$

NON POSSO DISTINGUERE TUTTI GLI EVENTI POSSIBILI, MA SOLO ALCUNI DEGLI EVENTI. QUINDI L'INFO CHE L'EVENTO MI PORTA E' RIDOTTA.

ALGEBRA.
$$\begin{cases} 1. \ \exists \ E \in \mathcal{E} \\ 2. \ E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E} \\ 3. \ E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E} \end{cases}$$

- $P(\Omega)$ E' UN' ALGEBRA E SI DICE "ALGEBRA DISCRETA" O "INFORMAZIONE COMPLETA"

- $\{\phi, \Omega\}$ E' UN' ALGEBRA DETTA "ALGEBRA BANALE" OVVERO NON PORTA INFORMAZIONE

$\boxed{\text{ES. 181}}$

$\omega_0, \omega_1 \in \Omega$; E_0 TC $\omega_0 \in E_0$ E $\omega_1 \notin E_0$

$\{\phi, \Omega, E_0, E_0^c\}$ = ALGEBRA DI BERNULLI

LANCIO MONETA OPPURE LANCIO DADO PARI VS DISPARI

- $\underline{\mathcal{E}_{EL}} = \{\{\omega\} \text{ TC } \omega \in \Omega\}$ NON E' UN' ALGEBRA!

$\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{E}_{EL}$

QUALE ALGEBRA CONTIENE $\mathcal{E}_{EL}$ ED E' LA PIU' PICCOLA?

SICURO ESISTE PERCHE' $\mathcal{E}_{EL} \subseteq P(\Omega)$.

IN PARTICOLARE

$\alpha(\mathcal{E}_{EL}) = P(\Omega)$ CIOE' SE POSSO ~~F~~ DISTINGUERE I SINGOLETTI HO L' INFO COMPLETA

SO CHE $\alpha(\mathcal{E}_{EL}) \subseteq P(\Omega)$.

DIMOSTRO CHE $P(\Omega) \subseteq \alpha(\mathcal{E}_{EL})$

$\forall a \in P(\Omega) \Rightarrow a \in \alpha(\mathcal{E}_{EL})$?

CONSIDERO $E \Rightarrow E = \bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}$ = UNIONE DI ELEM CHE LO COSTITUISCONO

DATO $E \in P(\Omega) \Rightarrow E = \bigcup_{\omega \in E} \{\omega\} \in \alpha(\mathcal{E}_{EL})$

$\in \alpha(\mathcal{E}_{EL})$ E $\alpha(\mathcal{E}_{EL})$ E' CHIUSA PER $\bigcup$

NON MI SERVE CONOSCERE TUTTE LE PROB, MA LA PROB DI EVENTI CHE POI MI FANNO RICOSTRUIRE LA PROB DI TUTTO.

$\underline{\mathcal{E}_{FIN}}$

$\mathcal{E}_{FIN} = \{E \in P(E) : |E| < \aleph_0\}$ E' ALGEBRA SSE Ω E' FINITO.

- Ω FINITO $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{FIN}$ E' ALGEBRA

  Ω FINITO ALLORA $\forall E \in P(E)$ $|E| < \aleph_0$

  $\Rightarrow \mathcal{E}_{FIN} = P(\Omega)$

- $\mathcal{E}_{FIN}$ E' ALGEBRA $\Rightarrow$ Ω FINITO

  SICURAMENTE $\mathcal{E}_{EL} \subseteq \mathcal{E}_{FIN}$.

  FISSATO $\{\omega_0\} \in \mathcal{E}_{EL} \Rightarrow \{\omega_0\} \in \mathcal{E}_{FIN}$

  $\{\omega_0\}^c \in \mathcal{E}_{FIN}$ PERCHÉ ALGEBRA

  $\{\omega_0\} \cup \{\omega_0\}^c = \Omega \in \mathcal{E}_{FIN}$ PERCHÉ ALGEBRA

  ALLORA Ω E' FINITO PER DEF DI $\mathcal{E}_{FIN}$.

<u>X CASA</u> (185).

Ω SAMPLE SPACE

$\mathcal{E}_{FIN-COFIN} = \{E \in P(\Omega)$ TC $|E| < \aleph_0 \vee |E^c| < \aleph_0\}$

DIMOSTRARE CHE E' UN ALGEBRA

1. $\phi \in \mathcal{E}_{FIN-COFIN}$. INFATTI $|\phi| = 0$

- $\phi, \Omega \in \mathcal{E}$
- $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{E} \quad \forall (E_k)_{k=1}^{n} : E_k \in \mathcal{E} \ \forall k$
- $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{E} \quad \forall (E_k)_{k=1}^{n} : E_k \in \mathcal{E} \ \forall k$ (DE MORGAN)

CONSIDERO Ω ; $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω

$\cdot \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega \qquad \cdot E_i \cap E_j = \phi \ \forall i \neq j$

QUAL E' $\alpha(\{E_k\}_{k=1}^{n}) = \mathcal{E}$.

SI VEDE CHE $\mathcal{E} = \{ E \in P(\Omega) \text{ TC } \underbrace{E = \bigcup_{k \in M} E_k}, M \in P(\{1, 2, \dots, n\}) \}$

UNISCO TUTTI I PEZZI DELLA PARTIZIONE IN TUTTI I MODI POSSIBILI

SE DEVO DEFINIRE UNA PROB SU $\mathcal{E}$, BASTA DEFINIRE UNA PROB SUGLI EVENTI DI $\{E_k\}$.

ESERCIZIO

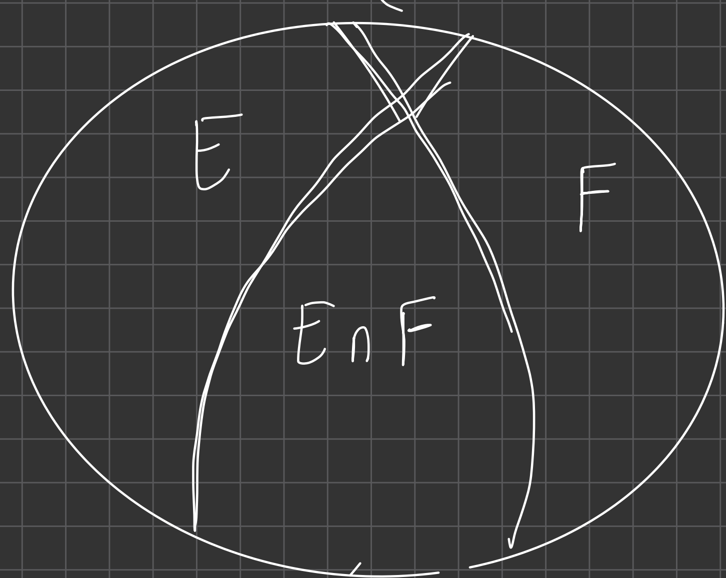
$(\Omega, \mathcal{E}, P) = \Omega$; $E, F \in \mathcal{E}$;

SUPPONGO $P(E) + P(F) \geq 1$

ALLORA $\cdot \ P(E) + P(F) - 1 \leq P(E \cap F) \leq \min(P(E), P(F))$

$E \cap F \subseteq E$

$E \cap F \subseteq F$



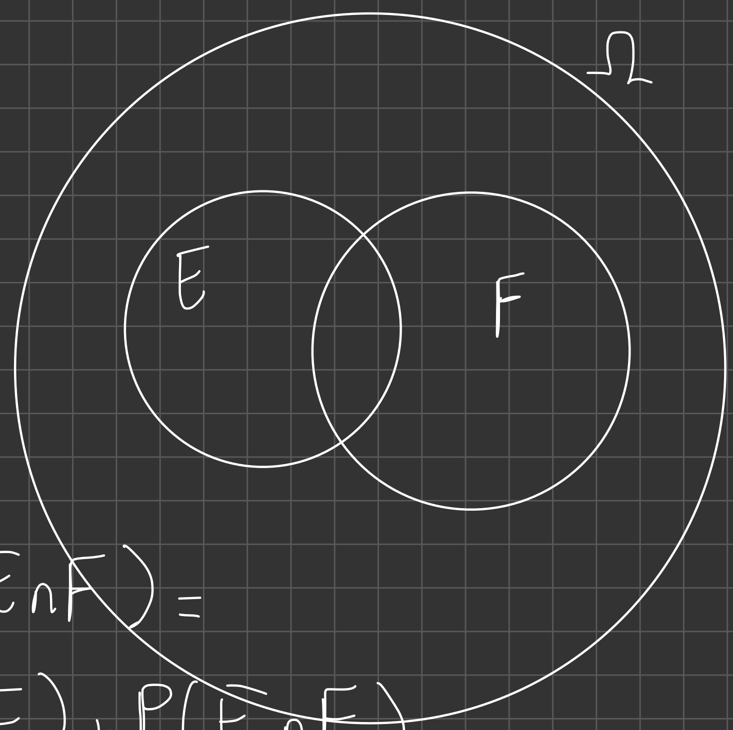
MA P E' MONOTONA !!

$P(E \cap F) \leq P(E)$ E $P(E \cap F) \leq P(F)$

DA CUI $P(E \cap F) \le \min(P(E), P(F))$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$E \cup F = (E - F) \cup (F - E) \cup (E \cap F)$$



MA SONO DISGIUNTI

$$P(E \cup F) = P(E - F) + P(F - E) + P(E \cap F)$$
$$= P(E - E \cap F) + P(F - F \cap E) + P(E \cap F) =$$
$$= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(F \cap E) + P(E \cap F) =$$
$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$P(E \cup F) \le 1 \rightarrow -P(E \cup F) \ge -1$$

$$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) \ge P(E) + P(F) - 1$$

<u>POKER</u> $\{6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$ RANKS

$\{C, Q, F, P\}$ SUITS

- $\binom{36}{5}$
- SCALA REALE $6 \rightarrow 10$; $7 \rightarrow J$; $8 \rightarrow Q$; $9 \rightarrow K$; $10 \rightarrow A$; $A \rightarrow 9$

$$4 \cdot 6 = 24$$

- POKER = FOUR OF A KIND (DI STESSO NUMERO MA SEME DIVERSO)

$$9 \cdot 8 \cdot 4$$

BLOCCA IL NUMERO

SEMI

ES. CASA

1. $\mathcal{E}_{FIN-COFIN} = \{ E \in \mathcal{P}(\Omega) : |E| < \aleph_0 \vee |E^c| < \aleph_0 \}$

E' ALGEBRA?

1. $\phi \in \mathcal{E}_{F-C}$?

$$|\phi| = 0 < \aleph_0 \Rightarrow \phi \in \mathcal{E}_{F-C}$$

2. $E \in \mathcal{E}_{F-C} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E}_{F-C}$

SIA $E \in \mathcal{E}_{F-C}$

SE $|E| < \aleph_0$ ALLORA E^c E' TC

- $|E^c| < \aleph_0$ SE Ω E' FINITO $\Rightarrow E^c \in \mathcal{E}_{F-C}$
- NON E' FINITO HO CHE $(E^c)^c = E$ CHE E' FINITO

E VICEVERSA

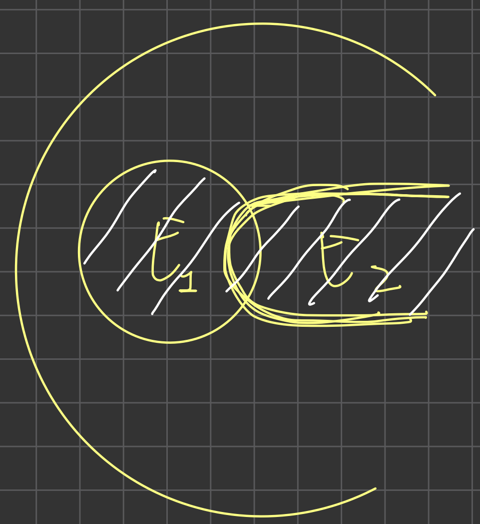
3. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_{F,C} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}_{F,C}$

- SE E_1 ED E_2 FINITI $E_1 \cup E_2$ E' FINITO $\Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}_{F,C}$
- SE E_1 FINITO, E_2 INFINITO:

CONSIDERO

$$E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cap E_2^c)^c$$

$$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$$



E_2 INFINITO ED $E_2 \in \mathcal{E}_{F-C} \Rightarrow E_2^c$ E' FINITO

E_1 FINITO E $E_1 \in \mathcal{E}_{F-C} \Rightarrow E_1^c$ FINITO O INFINITO

$E_1^c \cap E_2^c$ E' FINITO !

$(E_1^c \cap E_2^c)^c = E_1 \cup E_2$ OVVERO IL COMPLEMENTO DI

$E_1 \cup E_2$ E' FINITO $\Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}_{F-C}$

- SE E_1 ED E_2 INFINITI

$E_1 \in \mathcal{E}_{F-C}$ ED INFINITO $\Rightarrow E_1^c$ FINITO

$E_2 \in \mathcal{E}_{F-C}$ ED INFINITO $\Rightarrow E_2^c$ FINITO

$E_1^c \cap E_2^c$ FINITO $\Rightarrow (E_1^c \cap E_2^c)^c = E_1 \cup E_2$ HA COMP FINITO

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}_{F-C}$

- $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{E} \quad \forall \, (E_k)_{k=1}^{n} : E_k \in \mathcal{E} \;\forall k$

SE $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E}$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} E_k^c \in \mathcal{E}$$

MA $E_k^c \in \mathcal{E}$ VISTO CHE $E_k \in \mathcal{E}$

$\bigcup_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{E}$ SE $F_k \in \mathcal{E} \;\forall k$

QUINDI

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right)^c \in \mathcal{E} \Rightarrow \left[\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right]^c = \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{E}$$

LEZIONE 25-10-2022

$$(\Omega, \mathcal{E}, P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+)$$

FINITAMENTE ADDITIVA
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ $\quad \forall E_1, E_2 \in \mathcal{E}, E_1 \cap E_2 = \phi$

NUMERABILMENTE ADDITIVE
- $P(\Omega) = 1$
- $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ TC $E_k \in \mathcal{E}$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) \quad \text{TC } E_i \cap E_j = \phi$$

PROPRIETÀ DELLE SERIE

- $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \leq \infty$

INFATTI $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subseteq \Omega \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq P(\Omega) = 1$

MONOTONIA DI P

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$$

DA CUI

$$\sum_{k=1}^{n} P(E_k) \leq 1 \Rightarrow a_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) \leq 1}$$

TIPO TEO CARABINIERI

GLI ELEM DELLA SUCCESSIONE ADERISCONO AL LIMITE

PROBABILITÀ NUMERABILMENTE ADDITIVE

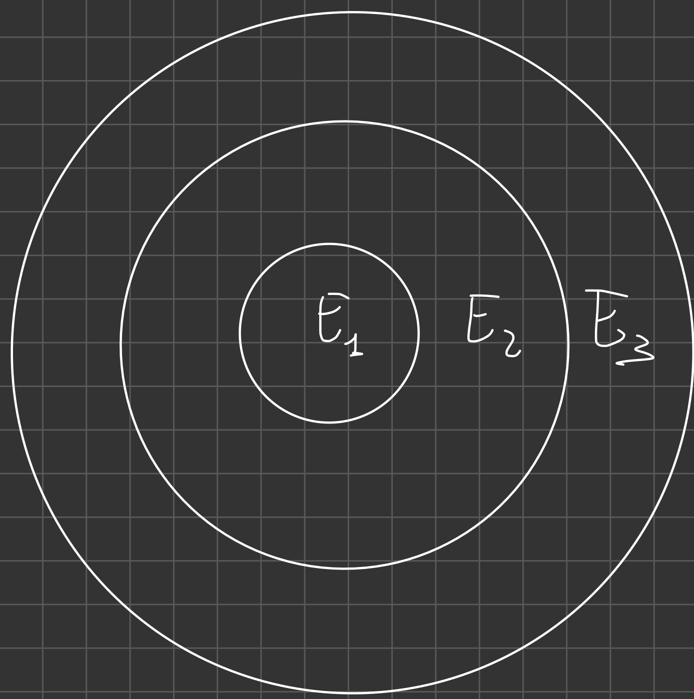
RIVEDI

- $P: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ (FINITA) ADDITIVA $\Rightarrow$ NUM ADDITIVA
- $P: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ NUM ADDITIVA $\Rightarrow$ ADDITIVA

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$$

- SIA $(E_k)_k^\infty$ TC $E_i \subseteq E_j$ SE $i \leq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n=\infty} P(E_n) \quad *$$

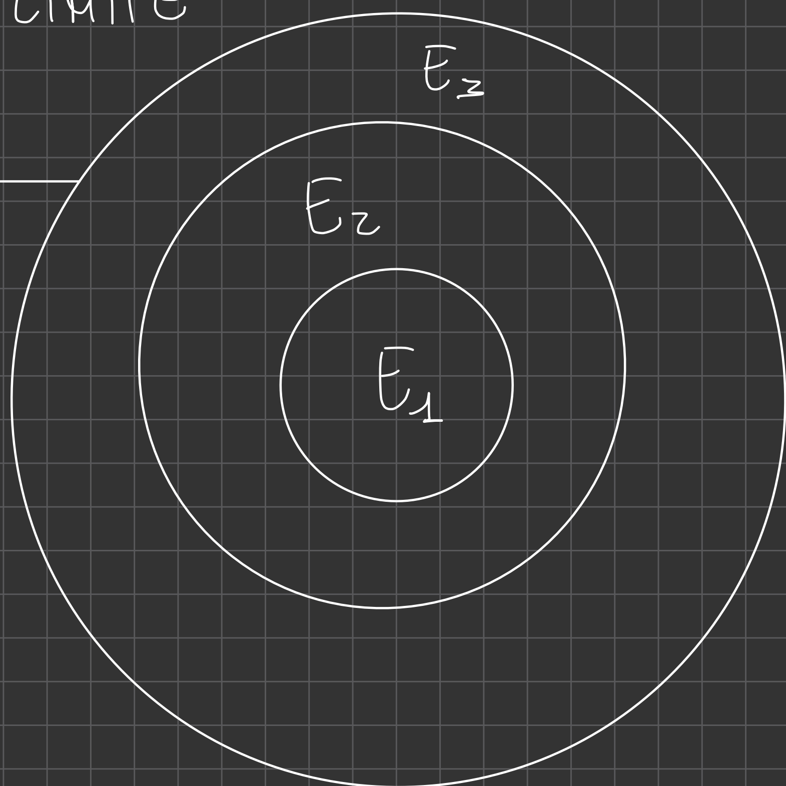


- SIA $(E_n)_n^\infty$ TC $E_i \supseteq E_j$ SE $i \leq j$ $\to$ DECRESCENTE

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$ $\to$ X ESERCIZIO

NOTA. POSSO INTRODURRE IL CONCETTO DI LIMITE

$\boxed{\text{DIM } *}$



$E_0 = \phi \Rightarrow$ POSSO SCRIVERE

$F_n = E_n - E_{n-1} \longrightarrow$ CORONE

- $F_1 = E_1 - E_0 = E_1$
- $F_2 = E_2 - E_1$
- $F_3 = E_3 - E_2$

ALLORA $F_i \cap F_j = \phi \quad \forall i, j$ TC $i \neq j$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n) =$$

POICHÉ $E_{k-1} \subseteq E_k$

$P(E_k - E_{k-1}) = P(E_k) - P(E_{k-1})$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(F_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k - E_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[P(E_k) - P(E_{k-1})\right] = \lim_{n\to\infty} \left[P(E_n) - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P(E_0)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

X CASA. FAI CON INTERSEZIONE

COSTRUZIONE DI PROBABILITÀ

1. DENSITÀ FINITE
2. DENSITÀ NUMERABILI

} DENSITÀ DISCRETE

3. DENSITÀ CONTINUE

1. $(P_k)_{k=1}^{n}$ $\quad P_k \in \mathbb{R}_+$ TC $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$

2. $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad P_n \in \mathbb{R}_+$ TC $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ BORELIANE (CON CERTA REGOLARITÀ)

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x)}_{\text{GENERALIZZA RIEMAN}} = 1 \qquad \mu_L(x) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$$

DENSITÀ FINITA $(p_k)_{k=1}^{n}$ TC $p_k \in \mathbb{R}_+$ E $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

VOGLIO COSTRUIRE UNA PROBABILITÀ

SIA $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n\}$

SIA $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(E) = \sum_{\{k \in \{1 \ldots, n\} : \omega_k \in E\}} p_k$$

$\rightarrow$ SOMMO LE p_k TC $\omega_k \in E$

- $P(\omega_k) = p_k$

- SE $n=1 \Rightarrow (p_1)$ $\quad p_1 = 1$ $\quad$ DIRAC

- SE $n=2$ $\quad (p_k)_{k=1}^{2}$ $\quad p_1 + p_2 = 1$ $\quad$ BERNULLI

LANCIO MONETA n VOLTE $\begin{cases} k & T \\ n-k & C \end{cases}$

$$\boxed{p_1 = \frac{k}{n} \qquad p_2 = \frac{n-k}{n}}$$

$\rightarrow$ SODDISFANO PROP DISTRIBUZIONE

$\downarrow$

POSSO COSTRUIRE IL MODELLO DELLA MONETA

$\downarrow$

COSTRUITO IL MODELLO VEDO SE RIESCO A VERIFICARLO NEI DATI

- $(p_k)_{k=1}^{n}$ TC $p_k = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ HO DISCRETA UNIFORME

- $(p_k)_{k=1}^{n}$ $\quad p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $\quad p \in (0,1)$

$q = 1 - p$

QUINDI NOTA LA $(p_k)_{k=1}^{n}$ TC $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

COSTRUISCO $P(E)$ SU Ω

<u>DENSITA' NUMERABILE</u> $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad p_n \in \mathbb{R}_+$ TC $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

- GEOMETRICA

$p \in (0,1) \qquad q = 1-p \in (0,1)$

- $p_n = p q^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1$
- $p_n = p q^{n} \quad \forall\, n \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = p \cdot \frac{1}{1-q} =$$

$$= p \cdot \frac{1}{\cancel{1} - \cancel{1} + p} = 1$$

<u>NOTA.</u> $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

SONO ENTRAMBE GEOMETRICA.
LA PRIMA
OSSERVO LANCIO MONETA. QUAL E' LA PROB DI AVERE 1^a TESTA ALL' n-ESIMO LANCIO?

SIA p = PROB T $\qquad q$ = PROB C

$1°$ LANCIO $\quad p$

$2°$ LANCIO $\quad p \cdot q$ → INDIPENDENZA TRA I LANCI

n-ESIMO T

$n°$ LANCIO $\quad p \cdot q^{n-1}$ → $n-1$ C

LA SECONDA MI DICE LA PROB DI AVERE IL 1° SUCCESSO DOPO n FALLIMENTI.
1ª TESTA DOPO n CROCI

QUESTA PROB E' UNA PROB A PRIORI, OVVERO PRIMA DI FARE TUTTI I LANCI.
VALE LA MANCANZA DI MEMORIA: PRIMA DEI LANCI VALE QUESTO, MA QUANDO POI I LANCI LI FACCIO NON DIPENDONO DALLA STORIA PASSATA.

- POISSONIANA

$$P_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{CON } \lambda > 0$$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{\text{TAYLOR}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

QUESTA DENSITA' GOVERNA I SEGUENTI FENOMENI.

SIA Δt UN INTERVALLO DI TEMPO.
PER UN PERIODO LUNGO CALCOLO IL # MSG RICEVO IN TEMPO Δt E CALCOLO LA MEDIA $\Longrightarrow$

λ = # MEDIO MSG IN Δt

P_n = PROBABILITA' DI OTTENERE n MSG IN TEMPO Δt

$$\left.\begin{aligned} &\cdot P_0 = e^{-\lambda} \frac{1}{1} = e^{-\lambda} \\ &\cdot P_1 = e^{-\lambda} \cdot \lambda \\ &\cdot P_2 = e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}\right\} \text{STIMATE PRIMA DELLA VALUTAZIONE, SEMPRE A PRIORI}$$

QUESTA DENSITÀ HA UN MASSIMO INTORNO ALLA SUA MEDIA.
PIÙ MI ALLONTANO DALLA MEDIA IN CRESCENDO PIÙ LA PROB È BASSA E QUINDI POSSO PORLA ALLO ZERO.

LEZIONE 26-10-2022

DISTRIBUZIONI CONTINUE

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = 1 \qquad f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ ; BORELIANE ; } f(x) \geq 0$$

MISURA DI LEBESGUE μ_L^N SU $\mathbb{R}^N$

SUPPONIAMO $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ CONTINUA

AD f ASSOCIO $P_f(E)$ TC $E \subseteq \mathbb{R}^N$

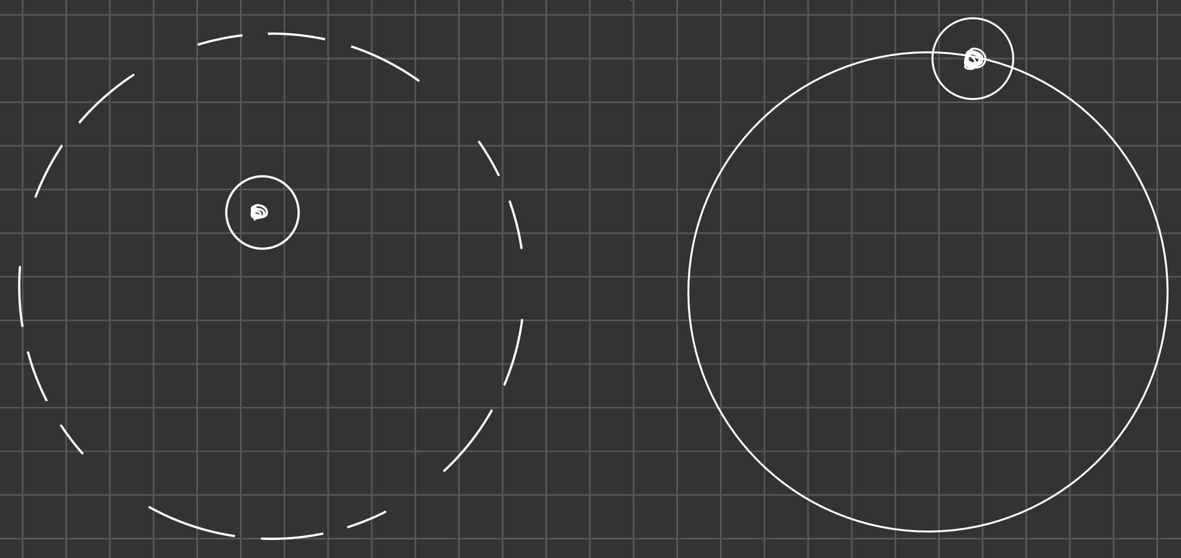
$$P_f(E) = \int_E f(x)\, dx \longleftarrow \text{RIEMAN}$$

IN QUESTO MODO PERO' NON HO UNA PROBABILITA': INFATTI NON HO L' ADDITIVITA'.

APERTI E CHIUSI

CONSIDERIAMO $\mathbb{R}^N$.

SIA $E \subseteq \mathbb{R}^N$. ESSO E' APERTO SE COMUNQUE PRENDO $x \in E$ POSSO COSTRUIRE UN OPPORTUNO DISCO CHE E' CONTENUTO IN E (NON HO FRONTIERA)



APERTO

CHIUSO $\Rightarrow$ CON FRONT

$$\underbrace{\bigtimes_{k=1}^{N} (a_k, b_k)}_{\subseteq \mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^N$$ E' UN APERTO DI $\mathbb{R}^N$.

OVVERO IL PROD CARTESIANO DI APERTI DI $\mathbb{R}^{\#}$ È UN APERTO DI $\mathbb{R}^N$

$$\underbrace{\bigtimes_{k=1}^{N} [a_k, b_k]}_{\subseteq \mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^N$$ E' UN CHIUSO DI $\mathbb{R}^N$

APERTI E CHIUSI? ϕ E $\mathbb{R}^N$.

UN APERTO E' $A \subseteq \mathbb{R}^N$ TC $x \in A$ ESISTE SFERA CENTRATA IN X CHE E' TUTTA IN A.
UN CHIUSO E' $C = A^C$ DOVE A E' UN APERTO.

6 - ALGEBRA DI INSIEMI

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ TC

1. $\phi \in \mathcal{S}$
2. $S \in \mathcal{S} \Rightarrow S^C \in \mathcal{S}$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{S}$ SE $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ CON $S_n \in \mathcal{S}$

1. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ E' UNA 6 - ALGEBRA DETTA "DISCRETA"
2. $\{\phi, \mathbb{R}^N\}$ E' UNA 6 - ALGEBRA DETTA "BANALE"
3. $\{\phi, \mathbb{R}^N\} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
4. $\forall\ \mathcal{B} \neq \phi$ TC $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ $\exists!\ \mathcal{S}$ 6 - ALGEBRA CHE E' LA PIU' PICCOLA 6 - ALGEBRA CHE CONTIENE $\mathcal{B}$

DATA $\mathcal{B}$ VOGLIO $\sigma(\mathcal{B})$

DETTO β = INSIEME DELLE σ-ALGEBRE CHE CONTENGONO $\mathcal{B}$ (NON VUOTA)

$$\Rightarrow \bigcap_{\beta} \text{ È } \sigma(\mathcal{B})$$

5. $\sigma(\underbrace{O(\mathbb{R}^N)}_{\text{APERTI DI } \mathbb{R}^N}) = \sigma(\underbrace{C(\mathbb{R}^N)}_{\text{CHIUSI DI } \mathbb{R}^N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow$ σ-ALGEBRA DI BOREL

ALLORA HO CHE

$$\mu_L^N : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

NON POSSO MISURARE TUTTI GLI INSIEMI DI $\mathbb{R}^N$!!

INFATTI 1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

POSSO CONSIDERARE INSIEMI PIU' PICCOLI PER COSTRUIRE $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ OLTRE AD $O(\mathbb{R}^N)$ E $C(\mathbb{R}^N)$? SI' !

1. $I_{O,Q}(\mathbb{R}^N)$ = INSIEME DEGLI INTERVALLI A ESTREMI RAZIONALI

$$I = \bigtimes_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \quad \text{TC} \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}$$

$\rightarrow$ SONO SCATOLE DI $\mathbb{R}^N$

2. COME 1 MA CHIUSI E VARIE COMBINAZIONI

E' IMPORTANTE PERCHÉ STO IN $\mathbb{Q}$ CHE E' NUMERABILE !!

QUINDI HO FAM NUM CHE GENERA $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

TEOREMA.

$\exists!$ "MISURA" SU $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ INDICATA CON μ_L^N TC

$$\mu_L^N\left(\bigtimes_{k=1}^{N}[a_k, b_k]\right) = \prod_{k=1}^{N}(b_k - a_k)$$

$\downarrow$

μ_L^N CALCOLATA SULLE "SCATOLE" DI $\mathbb{R}^N$ MI RESTITUISCE IL VOLUME DELLE SCATOLE STESSE

MISURA SIGNIFICA CHE

1. $\mu_L^N\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_N\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_L^N(B_N) \quad \forall\ (B_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall\ i, j$

2. $\mu_L^N(B + x) = \mu_L^N(B) \quad \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N$

OVVERO LA MISURA E' INVARIANTE PER TRASLAZIONE.
NEL CASO DI PROB NON CI INTERESSA: NON HA SENSO TRASLARE GLI ESITI

3. NON POSSO DIRE CHE LA MISURA DI $\mathbb{R}^N$ E' 1, MA E' SEMPRE ∞

4. CI SONO $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \mu_L^N(B) = 0$?

$\mu_L^N(\phi) = 0$! INFATTI

$$\mu_L^N(B_0 \cup \phi) = \mu_L^N(B_0) + \mu_L^N(\phi)$$

$$\| $$

$$\mu_L^N(B_0)$$

$$\cancel{\mu_L^N(B_0)} = \cancel{\mu_L^N(B_0)} + \mu_L^N(\phi) \rightarrow \mu_L^N(\phi) = 0$$

5. $\mu_L^N(\{x\}) = 0 \quad \forall x$

IL MOTIVO PER CUI HO VOLUMI NON NULLI È CHE IN SCATOLA HO INSIEME NON NUMERABILE DI PUNTI

6. $\mu_L^N(N) = 0$ CON $N \subseteq \mathbb{R}^N$ E N NUMERABILE

7. $\exists$ INSIEMI NON BANALI TC $\mu_L^N(B) = 0$

PROBABILITÀ CONTINUA

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ TC $f(x) \geq 0$ QUASI OVUNQUE OVVERO

$$\mu_L^N(\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < 0\}) = 0$$

ALLORA SE

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, d\mu_L^N(x) = 1$$

$f(x)$ È UNA DENSITÀ DI PROB

PER UNA STEP FUNCTION HO:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{\overset{N}{\underset{k=1}{\times}} [a_k, b_k)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, d\mu_L^N(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_L^N\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\times}} [a_k, b_k)\right)$$

ESEMPIO

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\mathbb{R} - (\mathbb{Q} \cap [0,1])$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} - (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \end{cases}$$

$\rightarrow$ INDICATRICE DEI RAZ DI $[0,1]$

$f(x) = 1_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ NON INTEGRABILE SECONDO RIEMAN

$\lim(\text{SUP}) \neq \lim(\text{INF})$

SI DIMOSTRA CHE $f(x)$ E' INTEGRABILE SECONDO LEB E L' INTEGRALE E' NULLO.

ALLORA SE HO $f(x)$ TC

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L^N(x) = 1$ $\exists$ PROB ASSOCIATA TC

$P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ E $P(B) = \int_B f(x)\, d\mu_L^N(x)$

PROBABILITA' CHE HA PER DENSITA' $f(x)$

SCEGLIERO' $\Omega = \mathbb{R}^N$

1. $P(\Omega) = 1$ x DEF
2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_N\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_N)$

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_N\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_N} f(x)\, d\mu_L^N(x) = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_N} f(x)\, d\mu_L^N(x)$

VERO SOLO PER LE PROPRIETA' DELL' INTEGRALE DI LEB

ESEMPIO.

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ CAMPANA DI GAUSS

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L^N(x) \overset{?}{=} 1$$

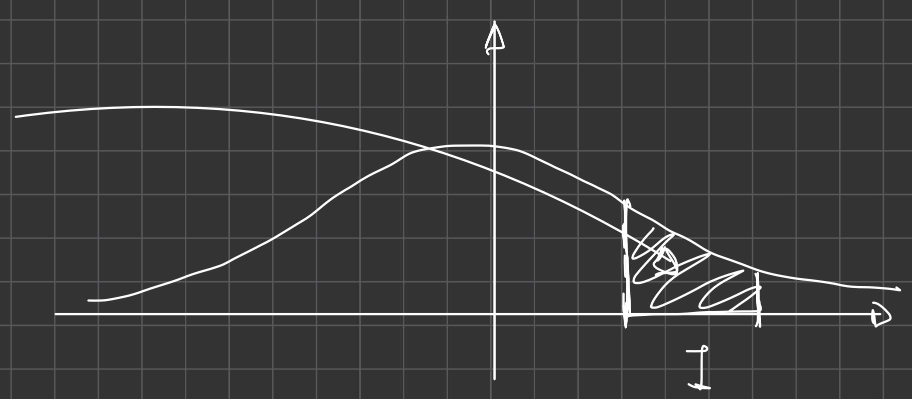
HO CHE
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
- $f(x)$ CONTINUA

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L^N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

I DUE INTEGRALI COINCIDONO

QUINDI

$$P_f(I) = \int_I f(x)\, dx$$



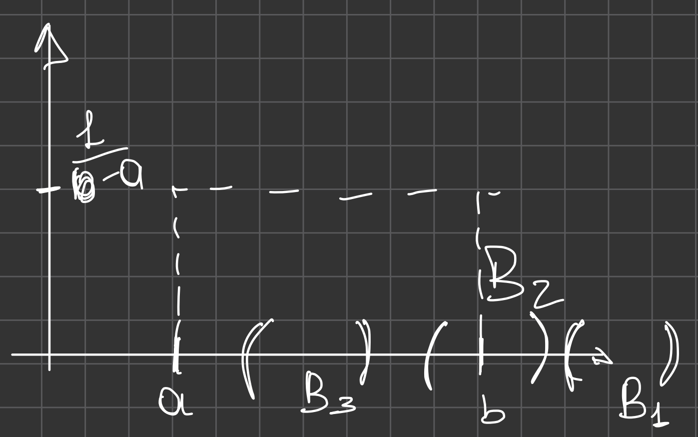
2. SIA $N = 1 \quad a, b \in \mathbb{R}$ TC $a < b$

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \quad \geq 0 \quad \forall x$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(x)\, d\mu_L^N(x) = \frac{1}{b-a} \mu_L([a,b]) = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1$$

STEP FUNCTION

ALLORA $P_f(B) = \int_B \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, d\mu_L(x)$



- $B \cap [a,b] = \emptyset \quad P(B) = \emptyset$
- $B \cap [a,b] = B \quad P(B) = \frac{1}{b-a} \mu_L(B)$
- $B \cap [a,b] = C \quad P(B) = \frac{1}{b-a} \mu_L(C)$

MODELLA FENOMENI ALEATORI TC LA PROB E'
PROPORZIONALE ALL' AMPIEZZA DELLA REGIONE IN CUI
OSSERVO IL FENOMENO

LEZIONE 27-10-2022

INDIPENDENZA E CONDIZIONAMENTO

REALTÀ VS MODELLO

SIA $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

$E, F \in \mathcal{E}$ SONO INDIPENDENTI SE

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

ES. LANCIO DUE MONETE A E B

$$H_A \; ; \; H_B$$

$$P(H_A \cap H_B) \overset{?}{=} P(H_A) \cdot P(H_B)$$

NELLA REALTÀ È VERO, MA DEVO COSTRUIRE UN MODELLO IN CUI QUESTA COSA È VALIDA

MODELLO $\Omega_A = \{1, 0\}$ $\Omega_B = \{1, 0\}$

$$\Omega = \Omega_A \times \Omega_B = \{(1,1)\ (1,0)\ (0,1)\ (0,0)\}$$

$$\underset{\text{DISCR UNIF}}{P(\omega)} = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$ X SINGOLO ESITO

$$P(H_A \cap H_B) = P(H_A) \cdot P(H_B)$$

$H_A = \{(1,1)\ (1,0)\}$
$H_B = \{(1,1)\ (0,1)\}$ $\Rightarrow H_A \cap H_B = \{(1,1)\}$

$$P(H_A \cap H_B) = \frac{1}{4} = P(H_A) \cdot P(H_B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

IN QUESTO MODELLO QUINDI HO INDIP

SUPPONIAMO

$$q_{00} = \frac{1}{6} \quad q_{01} = \frac{1}{4} \quad q_{10} = \frac{1}{4} \quad q_{11} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_A) = q_{11} + q_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P(H_B) = q_{11} + q_{01} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P(H_A \cap H_B) = P(\{(1,1)\}) = q_{11} = \frac{1}{3} \neq \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

CON QUESTO MODELLO QUINDI NON HO INDIPENDENZA.
IL MODELLO E' VALIDO IN TERMINI MATEMATICI, MA NON RISPECCHIA LA REALTA'.

QUINDI L'INDIPENDENZA NEL MOD MI DIPENDE DA COME COSTRUISCO P

1. DATO $E \in \mathcal{E}$ TC $P(E) = 0$ ALLORA $\forall F \in \mathcal{E}$

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$ OVVERO E' INDIP DA OGNI EVENTO

$$\underbrace{P(E \cap F) \leq P(E)}_{\text{MONOTONIA}} = 0 \rightarrow P(E \cap F) = 0$$

2. DATI $E, F \in \mathcal{E}$ SONO INDIPENDENTI, ALLORA
   - E^c, F^c
   - E^c, F
   - F^c, E

   SONO INDIPENDENTI

   E VICEVERSA

$$P(E^c \cap F^c) =$$

$$P((E \cup F)^c) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)]$$

$$= 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F) =$$

$= 1 - P(E) - P(F) + P(E) \cdot P(F) =$

$= (1 - P(E)) - P(F)(1 - P(E)) =$

$= (1 - P(E))(1 - P(F)) = P(E^c) P(F^c)$

QUINDI $P(E^c \cap F^c) = P(E^c) P(F^c)$

NEL CASO DELLE MONETE QUINDI H_A, H_B INDIP $\Rightarrow T_A, T_B$ INDIP

3. $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{E}$. $\mathcal{J}_1$ ED $\mathcal{J}_2$ SONO INDIP SE

$\forall E_{J1} \in \mathcal{J}_1, \forall E_{J2} \in \mathcal{J}_2 \quad P(E_{J1} \cap E_{J2}) = P(E_{J1}) \cdot P(E_{J2})$

4. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}$, GLI EVENTI DI $\mathcal{J}$ SONO INDIPENDENTI O "TOTALMENTE INDIPENDENTI" SE SE

$\forall J$ INSIEME FINITO DI INDICI ALLORA

$$P\left(\bigcap_{k \in J} E_k\right) = \prod_{k \in J} P(E_k)$$

ES. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$E_1 = \{1, 2\} \quad E_2 = \{2, 3\} \quad E_3 = \{1, 3\}$

$$P(E_j) = \frac{|E_j|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

CON QUESTI E

$$P(E_i \cap E_k) = \frac{|E_i \cap E_k|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = P(E_j) \cdot P(E_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

SEMPRE UN ELEM

$\Rightarrow$ A DUE A DUE INDIP

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \neq \frac{1}{2^3}$$

$\Rightarrow$ NON HO TOTALE INDIPENDENZA

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$P(E \cap F)$ ACCADONO ENTRAMBI

$P(E \mid F)$ ACCADE E DATO CHE ACCADE F

DEF. SIA $F \in \mathcal{E}$ TC $P(F) > 0$

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

1. $P(E \mid F) = P(E)$ SSE E ED F SONO INDIPENDENTI

2. $P(E \mid F)$ LA POSSO VEDERE COME LA PROB DI E RISCALATA SU QUELLA DI F

$$P_F : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+ \qquad P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

CONCENTRO IL MIO SPAZIO DI PROB SU F CONSIDERANDOLO A PRIORI

INFATTI $E = F$ $P_F(F) = 1$

$E \subseteq F$ $P_F(E) = \dfrac{P(E)}{P(F)}$

$E \cap F = \phi$ $P_F(E) = 0$

ESEMPIO. LANCIO DUE DADI W, B

P = UNIF DISCRETA ; $\Omega = \Omega_W \times \Omega_B$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$E_{6,6} = \{(6,6)\}$ $\quad E_{6 \times \Omega_B} = \{(6,1) \dots (6,6)\}$

$$P(E_{6,6} \mid E_{6\times\Omega_B}) = \frac{P(E_{6,6} \cap E_{6\times\Omega_B})}{P(E_{6\times\Omega_B})} = \frac{P(E_{6,6})}{P(E_{6\times\Omega_B})} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

PROB DOPPIO 6 DATO CHE IL BIANCO MOSTRA 6

SE CONSIDERASSI Ω_B COME SPAZIO DI PROB AVREI LO STESSO

$$P(E_{6,6} \mid E_{E,E}) \dots$$

NON HO INDIP !!

$$P(E_{6,6} \cap E_{6\times\Omega_B}) = \frac{1}{6} \neq P(E_{6,6}) \cdot P(E_{6\times\Omega_B}) = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{36}$$

NEL MOMENTO IN CUI HO UN 6, LA PROB MI AUMENTA

ESEMPIO URNE.

ESTRAGGO DUE PALLINE SENZA REINSERIMENTO.

N PALLINE $\quad M = \#$BIANCHE $\quad N - M = \#$NERE

$$p = \frac{M}{N} \qquad q = \frac{N-M}{N} = 1 - p$$

p = PROB BIANCA

$$P(W_2 \mid W_1) = ? \qquad P(W_2 \mid B_1) = ?$$

$$P(W_2 \mid W_1) = \frac{P(W_2 \cap W_1)}{P(W_1)} \qquad P(W_2 \mid B_1) = \frac{P(W_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

QUI PERÒ NON HO INDIP PERCHÉ NON HO REINSERIMENTO

$$P(W_2 | W_1) = \frac{M-1}{N-1}$$ HO UNA PALLINA BIANCA IN MENO

$$P(W_2 | B_1) = \frac{M}{N-1}$$

NON SO COSA PRENDO PER PRIMO !!

$$P(W_2) = P(W_2 \cap \Omega) = P(W_2 \cap (W_1 \cup B_1)) =$$

DEVO CONSIDERARE ENTRAMBI I CASI

$$= P((W_2 \cap W_1) \cup (W_2 \cap B_1)) =$$

$$= P(W_2 \cap W_1) + P(W_2 \cap B_1) =$$

$$= P(W_2 | W_1) \cdot P(W_1) + P(W_2 | B_1) \cdot P(B_1)$$

$$= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} + \frac{M}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N} = \frac{M(M-1+N-M)}{N(N-1)} = \frac{M}{N}$$

$$= P(W_1)$$

NON SAPENDO L' ESITO DELLA PRIMA ESTRAZIONE E' COME SE NON L' AVESSI FATTA

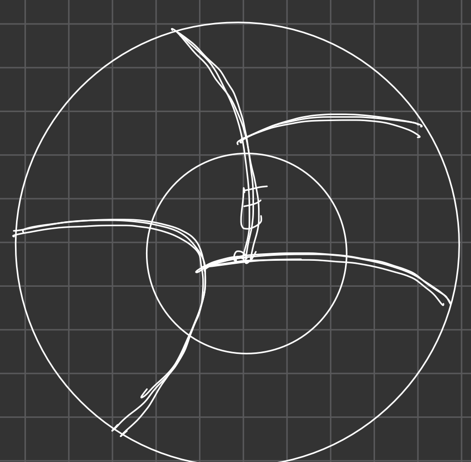
FORMULA DI SIMMETRIA

- DATI E ED F TC $P(E), P(F) > 0$

$$\frac{P(E|F)}{P(E)} = \frac{P(F|E)}{P(F)}$$

TEO DELLA PROB TOTALE.

$$P(E) = \sum_{n \in N} P(E | F_n) \cdot P(F_n)$$



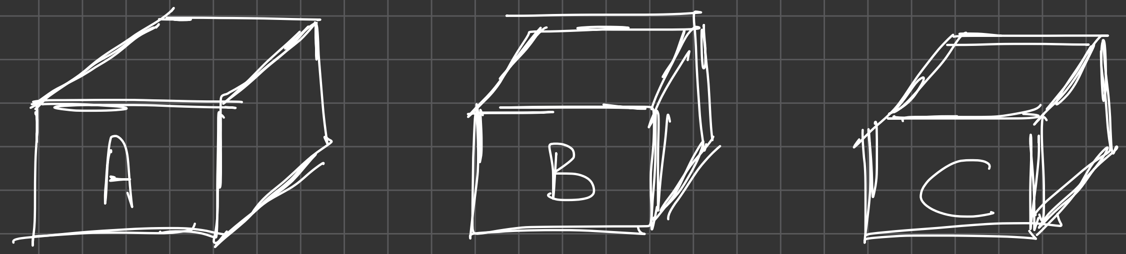
TC $(F_n)_{n \in N}$ E' UNA PARTIZIONE DI Ω

E' IMPORTANTE PERCHÉ SPESSO E' SEMPLICE IL CALCOLO DI $P(E | F_n)$

TEO DI BAYES.

$$P(F_n | E) = \frac{P(E|F_n)\,P(F_n)}{\sum_{m \in N} P(E|F_m) \cdot P(F_m)}$$

ESEMPIO.



IL CONCORRENTE HA A.

IL CONDUTTORE APRE B (SAPENDO DOVE E' IL PREMIO), MOSTRA CHE E' VUOTA.

SCAMBIO A CON C?

$P(A \mid B \text{ vuoto})$

X CASA

APRE B PERCHÉ SA CHE IN B NON C'E' IL PREMIO: QUESTO MODIFICA LO STATO.

SE IL PRESENTATORE APRISSE A CASO, SAREBBE INDIF.

CONVIENE CAMBIARE?

$$P(A_v \mid B_p) = \frac{P(A_v \cap B_p)}{P(B_p)} = \frac{2/9}{2/3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_p) = \frac{2}{3}$$

$$P(A_v \cap B_p) = P(A_v) \cdot P(B_p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$ NO!!

$$P(A_v) = P(B_v) = P(C_v) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_v) = \underbrace{P(A_v|A_p)}_{=0} \cdot P(A_p) + P(A_v|B_p) \cdot P(B_p) + P(A_v|C_p) \cdot P(C_p)$$

$$= P(A_v|B_p) \cdot P(B_p) + P(A_v|C_p) \cdot P(C_p) =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}} \left(P(A_v|B_p) + P(A_v|C_p) \right) \qquad \underline{\text{NO}}$$

$$P(B_p) \neq \frac{2}{3} \quad !!!$$

$$P(B_p) = P(B_p|A_v) \cdot P(A_v) + \cancel{P(B_p|B_v) \cdot P(B_v)} + P(B_p|C_v) \cdot P(C_v)$$

$$P(C_p) = P(C_p|A_v) \cdot P(A_v) + P(C_p|B_v) \cdot P(B_v) + \cancel{P(C_p|C_v) \cdot P(C_v)}$$

$$\begin{cases} P(B_p) = P(B_p|A_v) \cdot P(A_v) + P(B_p|C_v) \cdot P(C_v) \\ P(C_p) = P(C_p|A_v) \cdot P(A_v) + P(C_p|B_v) \cdot P(B_v) \end{cases}$$

IL CONDUTTORE SA COSA APRIRE: SE A_v APRE B o C A CASO

$$P(B_p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(C_p) = \frac{1}{2}$$

DA CUI

$$P(A_V \mid B_P) = \frac{P(B_P \mid A_V) \cdot P(A_V)}{P(B_P)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(C_V \mid B_P) = \frac{P(B_P \mid C_V) \cdot P(C_V)}{P(B_P)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1/2} = \frac{2}{3}$$

ALTRO MODO : B_V , B_P

$P(A_V \mid B_P)$

$$P(A_V) = P(A_V \mid B_V) \cdot P(B_V) + P(A_V \mid B_P) \cdot P(B_P)$$

$$= 0 + P(A_V \mid B_P) \cdot \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{3}$

LEZIONE 3-11-2022

VARIABILI ALEATORIE REALI

SIA $\Omega = (\Omega, \mathcal{E}, P)$ SPAZIO DI PROB DI KOLMOGOROV

POSSIAMO CONSIDERARE LA PROB DI COMPLETAMENTO

E E' TRASC SE $\exists\, F \in \mathcal{E}$ TC $E \subseteq F$ E $P(F) = 0$

ALLORA POSSO COSTRUIRE

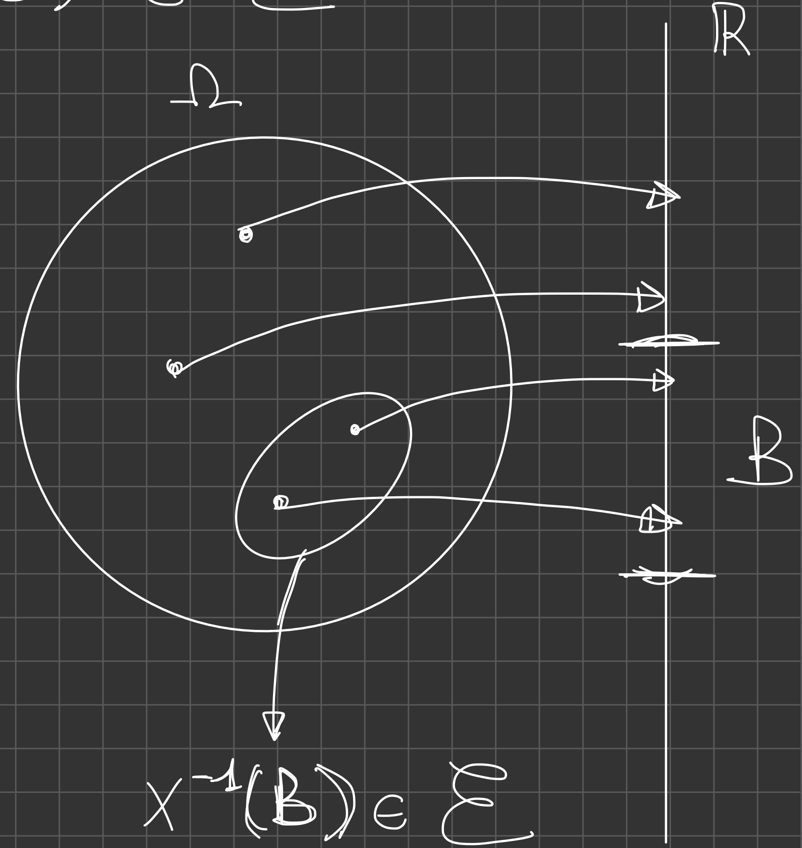
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}} \\ P \longrightarrow \bar{P} \end{array}\right\} \text{ COMPLETAMENTO DI } E$$

UN EVENTO $E \neq \Omega$ TC $P(E) = 1$ SI DICE "QUASI CERTO"

DEF. SIA $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ E' UNA VARIABILE ALEATORIA REALE SE

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

SE FISSO $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$



UNA VAR ALEATORIA E' TC
POSSO OSSERVARE I VALORI
ALLA LUCE DELL' INFORMAZIONE
CHE HO.
CIOE'

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega & \omega \text{ DISP} \\ -\omega + 1 & \omega \text{ PARI} \end{cases}$$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

X ASSUME VALORI

FISSATO UN B INTERVALLO, POSSO TROVARE UN EVENTO IN $\mathcal{E}$ TC $X^{-1}(B) = E$

SE $B = \{5\}$ $\quad X^{-1}(B) = 5$

$B = \{-5\}$ $\quad X^{-1}(B) = 6$

$B = \{-1, 1\}$ $\quad X^{-1}(B) = \{1, 2\}$

SE $\mathcal{E} = \{\phi, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

SE $B = \{-1\}$, NON TROVO UN EVENTO IN $\mathcal{E}$ TC $X^{-1}(B) = E$

QUINDI LA VARIABILE ALEATORIA MI PERMETTE DI OSSERVARE (INTERPRETARE) I VALORI ALLA LUCE DELL' INFORMAZIONE $\mathcal{E}$ CHE POSSIEDO.

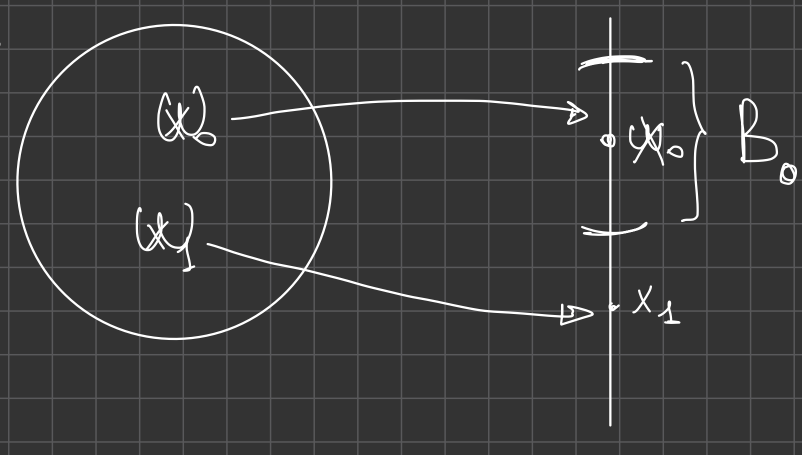
USO I BORELIANI PERCHÉ:

1. ESPRIMO INTERVALLO PER DEFINIRE INCERTEZZA
2. POSSO MISURARE L' INTERVALLO CON μ_L.
   QUINDI POSSO PORTARMI L' INTEGRALE NEGLI SPAZI DI PROB

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \text{ TC } X(\omega) \in B\} \underset{\text{ABBREVIANDO}}{=} \{X \in B\}$$

1. SE $\mathcal{E} = P(\Omega)$ OGNI FUNZIONE $X : \Omega \to \mathbb{R}$ E' UNA VAR ALEATORIA

2. SE $\mathcal{E} = \{\phi, \Omega\}$ VOGLIO X.
   ALLORA $x_0 \neq x_1$ E PRENDO B TC $x_0 \in B$ E $x_1 \notin B$



QUINDI $E_0 = \{X = x_0\}$ ED E_0^C

$E_0 \cap E_0^C = \phi$ ED $E_0, E_0^C \neq \phi$ PERCHÉ UNO VA SU x_0 E UNO VA SU x_1

MA $E_0, E_0^C \neq \Omega$

QUINDI $E_0 \notin \mathcal{E}$.

OVVERO SE $x_0 \neq x_1$ $E_0 \notin \mathcal{E}$, OVVERO X NON E' VA.

L' UNICA E' CHE $x_0 = x_1$!!

OVVERO $X_\Delta : \Omega \to \{x_0\}$

X_Δ E' DETTA VA ALEATORIA DI DIRAC CHE ESPRIME GLI ESITI DI OSSERVAZIONI DETERMINISTICHE.

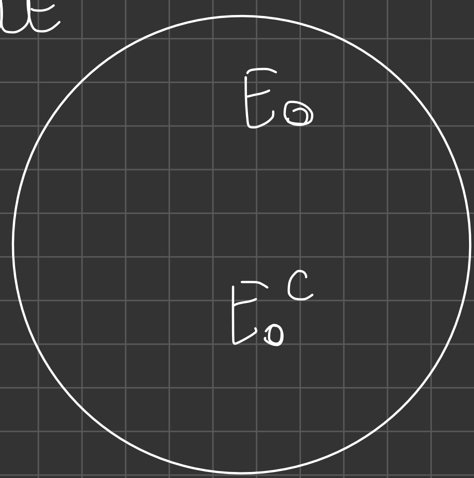
3. VAR ALEATORIA DI BERNULLI.

DESCRIVE FENOMENI ALEATORI CON SOLI DUE ESITI

SIA $E_0 \in \mathcal{E}$ TC $0 < P(E_0) < 1 \Rightarrow E_0 \neq \phi, \Omega$

SIA $E_0^C \in \mathcal{E}$ (CHIUSURA $\mathcal{E}$) $\Rightarrow E_0^C \neq \phi, \Omega$

POSSO RICONOSCERE <u>ALMENO</u> DUE EVENTI SEPARATI



$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in E_0 \\ 1 & \omega \in E_0^C = E_1 \end{cases}$$

AL POSTO DI 0, 1 POSSO PORRE x_0, x_1 PURCHÉ $x_0 \neq x_1$

$$\underset{q}{P(E_0)}, \quad \underset{p}{P(E_1)} = 1 - P(E_0)$$

SE $p = \frac{1}{2}$ LA VA DI BERNULLI SI DICE STANDARD

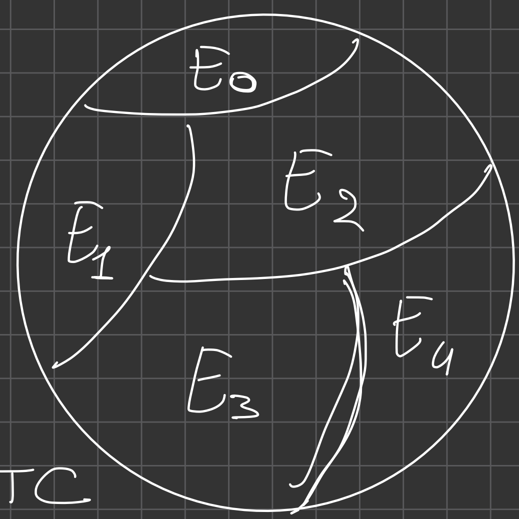
SIA $\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ 0 & \omega \notin E \end{cases}$ FUNZIONE INDICATRICE DI E

SE X E' VA DI DIRAC $X = x_0 \mathbb{1}_\Omega(\omega)$

SE X E' DI BERNULLI $X = x_0 \mathbb{1}_E(\omega) + x_1 \mathbb{1}_{E_1}(\omega)$

ATTENTO !! $\mathbb{1}_E$ E' VA SSE $E \in \mathcal{E}$

4. VA BINOMIALE.



SUPPONIAMO $\exists \, (E_k)_{k=0}^{n}$ PARTIZIONE DI Ω

CON $E_i \in \mathcal{E} \; \forall \, k = 0, 1 \dots n$

X E' VA BINOMIALE SE $\exists \, x_0 < x_1 < \dots < x_n$ TC

$X(E_k) = x_k \quad \forall \, k = 0, 1, \dots, n$

TUTTI I PUNTI IN E_k VANNO IN x_k

DEFINIAMO P IN DUE MODI:

- $P(E_k) = \frac{1}{n+1}$ HO VA UNIF DISCRETA
- $P(E_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ HO VA BINOMIALE

QUINDI HO VA BIN SE DEFINISCO P NEL SECONDO MODO

POICHÉ $(E_k)_{k=0}^{n}$ E' PARTIZIONE DI Ω ED $E_k \in \mathcal{E} \; \forall k$

IN QUESTO CASO HO IN AUTOMATICO CHE

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{X \in B\} \in \mathcal{E}$

$\downarrow$

O MEGLIO AD UN' OPPORTUNA SOTTOFAMIGLIA DI $\mathcal{E}$

DEFINIAMO L' INFO MINIMA TC $X: \Omega \to \mathbb{R}$ SIA UNA VA.
QUESTA INFO MINIMA SI DICE σ-ALGEBRA GENERATA DA X
E SI INDICA CON $\sigma(X)$.

QUINDI " $\sigma(X) \subseteq \mathcal{E}$ SSE X E' UNA VA "

$\downarrow$

INFO CHE STO CONSIDERANDO

PARTIZIONE DI Ω

SI DIMOSTRA CHE $\sigma(X) = \sigma\left(\{E_k\}_{k=0}^{n}\right)$

AD ESEMPIO $X: \Omega \to \{x_0\}$ $\quad \sigma(X) = \{\phi, \Omega\}$

X VA BERN $\quad \sigma(X) = \{\phi, \Omega, E_0, E_0^c\}$

$\downarrow$

BASTA CHE $\mathcal{E}$ CONTENGA $\sigma(X)$
AFFINCHÉ SU $\mathcal{E}$ SI POSSA
COSTRUIRE X VA DI BERNULLI

CONSIDERIAMO $\Omega = [0, 1]$ QUINDI UN FENOMENO ALEATORIO
CHE ASSUME VALORE TRA 0 ED 1.

CONSIDERO $\mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1])$.

NON PRENDO $\mathcal{E} = \mathcal{P}([0,1])$ PERCHÉ E' COMPLESSO FARCI CALCOLI
SOPRA.

$P: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ TC $P(\Omega) = 1$

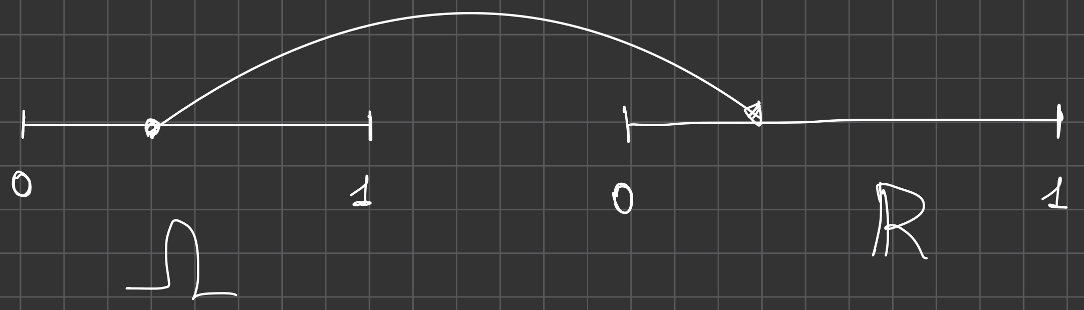
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \quad \text{SSE } E_i \cap E_j = \phi$$

ALLORA PRENDO $P \equiv \mu_L$.

SE VOGLIO LA PROB DI DOVE CADE GOCCIA, QUESTA SARA' FUNZIONE
DELL' AMPIEZZA DELL' INTERVALLO E AVRO' ANCHE INV PER
TRASLAZIONE.

DEFINISCO

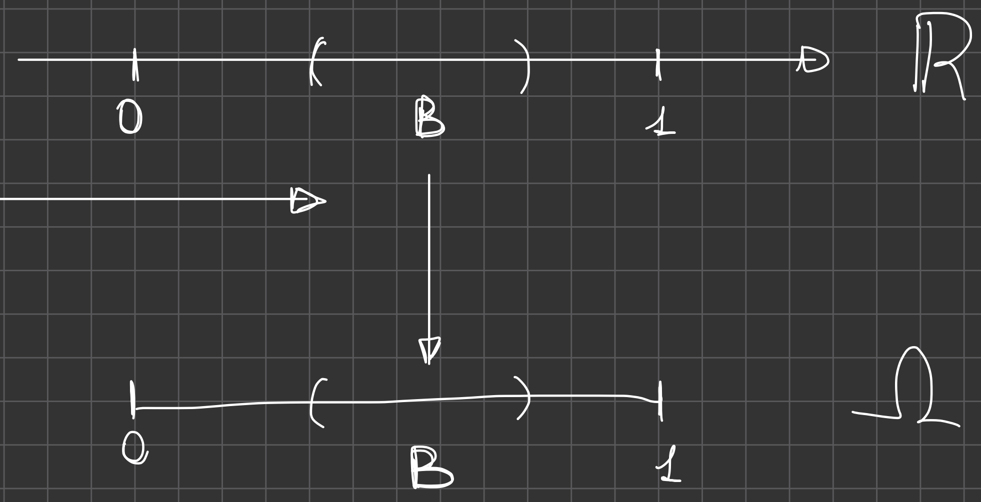
$X(\omega) = \omega$



CIOE' ASSEGNO AL PUNTO SE STESSO.
"VA UNIFORME"

SIA $B \in \mathcal{B}([0,1])$

$\{X \in B\} = B$



QUINDI

$P(X \in B) = P(B) = \mu_L(B)$

$P(\{x_0\}) = 0$ SE COSÌ NON FOSSE UN SOTTO INSIEME INFINIT NUMERABILE DI $(0,1)$ AVREBBE PROB ∞ E QUINDI NON SAREBBE UNA PROB.

IL PROBLEMA DI QUESTA VA E' CHE CONFINA Ω IN $[0,1]$.
NON SEMPRE POSSO STABILIRE A PRIORI Ω.

POSSO PRENDERE $\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

DEVO DEFINIRE P. NON POSSO USARE μ_L (AVREI $P(\mathbb{R}) = \infty$)

DEFINISCO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ TC $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = 1$

E DEFINISCO

$$P(B) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x)$$

INFATTI :

1. $P(\Omega) = 1 \qquad P(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)\, d\mu_L(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = 1$

2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \quad \forall\, B_i \cap B_j = \phi$ E $\forall\, B_i \in \mathcal{E}$

MA QUESTO E' VERO PER LE PROP DELL' INTEGRALE DI LEB

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} f(x)\, d\mu_L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f(x)\, d\mu_L(x)$$

PER DEF DI
INTEGRALE DI LEB.
NON E' SEMPRE VERO IN
RIEMAN

LEZIONE 8-11-2022

<u>TEO.</u> DATA $g(x)$ BORELIANA E X V.A.

$g(X)$ E' VA

...

- DATE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ E X, Y VA $\quad \alpha X + \beta Y$ E' VA $\quad$ (SOMMA DI VA E' UNA VA)
- DATA X VA $\to$ $|X|$ E' VA
- DATA X VA, $X^+ = \frac{1}{2}(|X| + X)$ E' VA
- DATA X VA, $X^- = \frac{1}{2}(|X| - X)$ E' VA

$\downarrow$

E' COMUNQUE ≥ 0

AD ESEMPIO

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP = \int_\Omega X^+ \, dP - \int_\Omega X^- \, dP$$

QUI USIAMO X^+ ED X^-

SSE $\int_\Omega |X| \, dP < \infty$

ESEMPIO $\quad X(\omega) = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]_{n=1}^{\infty} = -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4} \dots$

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty$$

NON HO CONVERGENZA DI NESSUNO DEI DUE

SIA X VA, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X \in B\} \in \mathcal{E}$ E' UN EVENTO

POSSO CALCOLARE $P(B) \in \mathbb{R}_+$

$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ $\quad P_X(B) = P(X \in B)$ LA P_X E' LA DISTRIBUZIONE DI VA X

P_X E' UNA PROBABILITA'

1. $P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$

$$\{X \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega \text{ TC } X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$$

TUTTI I PUNTI DI Ω VANNO IN $\mathbb{R}$

2. $P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n)$ $\quad \forall B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ TC $B_i \cap B_j = \emptyset$

SE FACCIO LA CONTROIMMAGINE DELL' UNIONE DI UNA FAMIGLIA NUM, QUESTA E' L' UNIONE DELLE CONTROIMMAGINI

$$\left\{X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in B_n\}$$

$$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \in B_n)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \in B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n)$$

I B SONO DISGIUNTI A DUE A DUE

$\Downarrow$

LE CONTROIMM SONO DISGIUNTE

(SE NON FOSSE COSI' NON AVREI UNA FUNZIONE)

PARTO DA $X : \Omega \to \mathbb{R}$

COSTRUISCO $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ TC $P_X(B) = P(X \in B)$

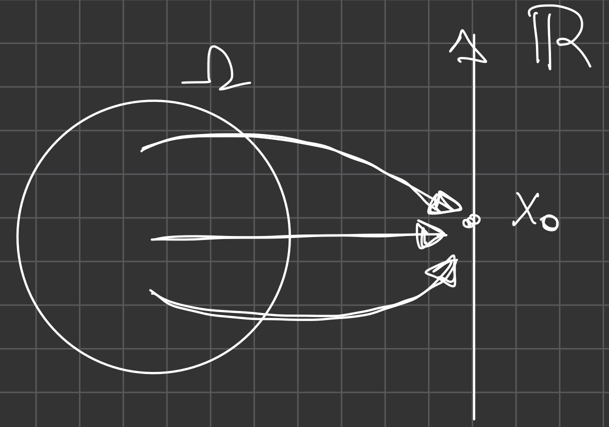
DA CUI COSTRUISCO $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ COME SPAZIO DI PROB.

TRASFERISCO LE PROPRIETA' PROBABILISTICHE DA UNO SPAZIO AD UN ALTRO.

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ CON $X(\omega) = x_0 \in \mathbb{R}$ (VA DIRAC)

LA DISTRIBUZIONE ?

$P_X(B) \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$



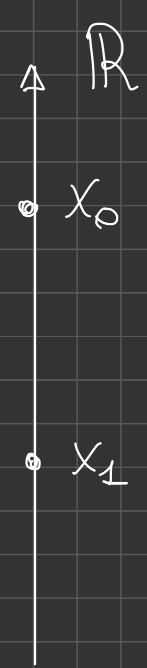
$x_0 \in B$ OPPURE $x_0 \notin B$

SE $x_0 \in B$ $\quad \{X \in B\} = \Omega \to P_X(B) = 1$

$x_0 \notin B$ $\quad \{X \notin B\} = \phi \to P_X(B) = 0$

$$P_X(B) = \begin{cases} 1 & x_0 \in B \\ 0 & x_0 \notin B \end{cases}$$

2. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ TC $X(\omega) = \begin{cases} x_0 & p \\ x_1 & 1-p \end{cases}$



- $x_0, x_1 \in B \to P_X(B) = P(X \in B) = P(\Omega) = 1$
- $x_0 \in B,\ x_1 \notin B \to P_X(B) = P(X \in B) =$

$= P(E_0) = p$

$\phi \subset E_0 \subset \Omega$

NON E' VUOTO

NON CI STA x_1

- $x_0 \notin B,\ x_1 \in B \qquad P_X(B) = q$

- $x_0 \notin B,\ x_1 \notin B \qquad P_X(B) = 0$

$$P_X(B) = \begin{cases} 1 & x_0, x_1 \in B \\ p & x_0 \in B,\ x_1 \notin B \\ 1-p & x_0 \notin B,\ x_1 \in B \\ 0 & x_0, x_1 \notin B \end{cases}$$

3. SIA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA UNIFORME
CON $\Omega = [0,1] \quad \mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1])$

$$X(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in [0,1] \longrightarrow X(x) = x \quad \forall x \in [0,1]$$

LA VA CONTINUA UNIFORME E' LA FUNZIONE IDENTITA' NELL' INTERVALLO.

$$P \equiv \mu_L$$

$$P_X : \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}_+ \quad \text{ALLORA} \quad P_X \equiv \mu_L$$

PERCHÉ LO SPAZIO FINALE $([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \mu_L)$
COINCIDE CON QUELLO INIZIALE $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

DISTRIBUZIONE $\quad P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x])$

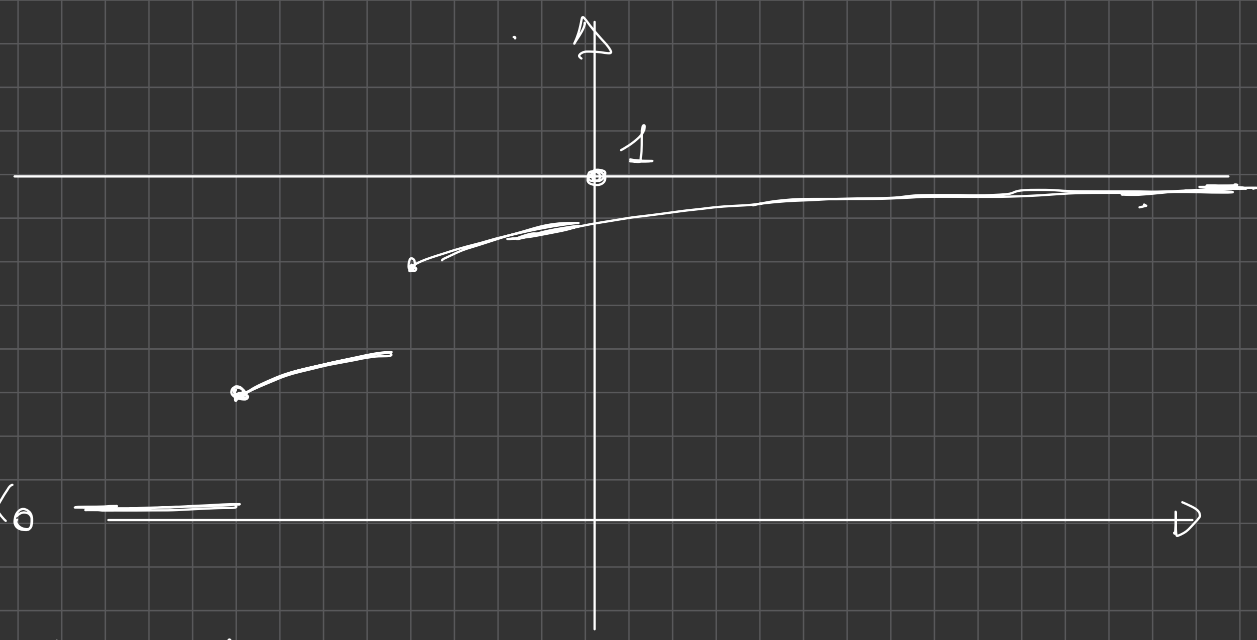
1. F_X E' MONOTONA NON DECRESCENTE.
SE $x_0 < x_1$

$$F_X(x_0) = P_X((-\infty, x_0]) \leq P_X((-\infty, x_0]) + P((x_0, x_1]) =$$
$$= P_X((-\infty, x_1]) = F_X(x_1)$$

2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4. $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0) \quad \forall x_0$



5. $\exists \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} F_X(x) \quad \forall x_0$ "CONTINUA A DESTRA"

6. F_X PUO' AVERE AL PIU' UNA QUANTITA' NUMERABILE DI DISCONTINUITA'.

7. $F_X \geq 0 \quad \forall x$

LEZIONE 10-11-2022

DATA VA $X: \Omega \to \mathbb{R}$ HO $\cdot\ P_X : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ DISTRIBUZ

$$P_X(B) = P(X \in B)$$

$\cdot\ F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ FUNZ DISTRIB

$$F_X(x) = P_X(X \leq x) = P_X(X \in (-\infty, x])$$

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

- $\lim_{x \to -\infty} F_X = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X = 1$
- $\lim_{x \to x_0^+} F_X = F(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} F_X(x)$
- $F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \forall\ x_1 < x_2$ (MONOTONA NON DECRES)
- AL PIU' # NUMERABILE DI DISCONTINUITA'

NOTA FUNZIONE DISTRIB F_X POSSO CALCOLARE PROB SU OGNI INTERVALLO DEFINITO DA x, y.

AD ESEMPIO

$$P([x,y]) = P((-\infty, y] - (-\infty, x]) = P((-\infty, y]) - P((-\infty, y] \cap (-\infty, x]) =$$

$$= P((-\infty, y]) - P((-\infty, x)) = F_X(y) - \lim_{u \to x^-} F_X(u)$$

$\cdot\ P_X(X = x) = F_X(x) - \lim_{u \to x^-} F_X(u) \quad$ ($= 0$ SSE F_X E' CONTINUA)

- F_X MONOTONA NON DECRESCENTE $\to$ DERIVABILE QUASI OVUNQUE

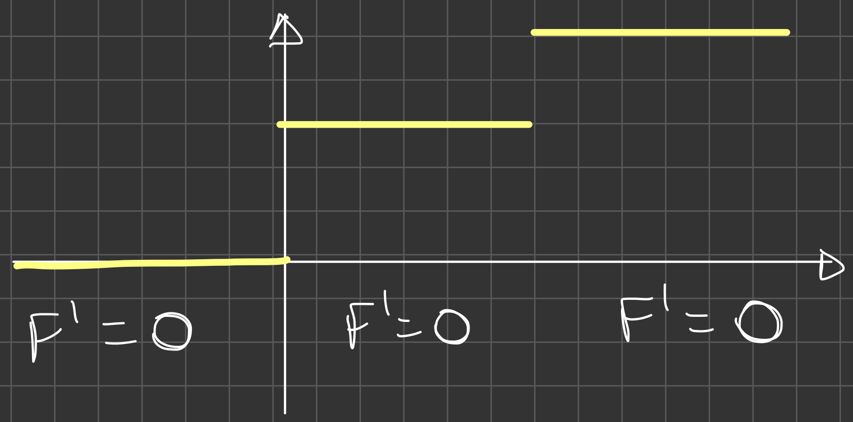
$\exists\ N \in B(\mathbb{R})$ TC $\mu_L(N) = 0$ TC $\forall x \in N$

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}$$

QUESTO NON PERMETTE DI RICOSTRUIRE F DA F' COME

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} F_X'(u)\, d\mu_L(u)$$

SE HO BERNOULLI



QUANDO INTEGRO INTEGRO ZERO $\rightarrow$ OTTENGO ZERO

- SE $F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} F'(u)\, d\mu_L(u)$ ALLORA F_X E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA

- SE F_X' ESISTE OVUNQUE ED E' LIMITATA, F_X E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA

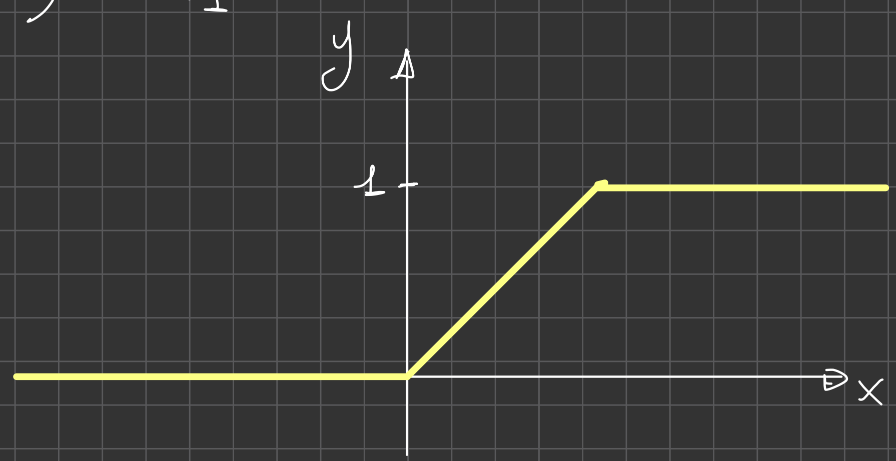
SIA X UNIF DISTRIBUITA IN $[0,1]$. TROVIAMO $F_X(x)$

HO TRE CASI:

- $x < 0$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = 0$
- $x \in [0,1)$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = \ell([0,x)) = x$
- $x \ge 1$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = 1$

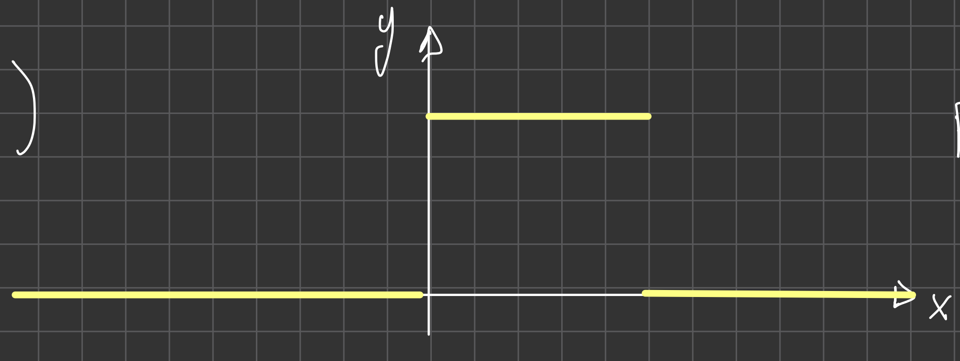
F_X ASS CONTINUA
↓
F_X CONTINUA

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0, x) \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



$F(x)$

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$



$F'(x)$

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} F'(u)\, d\mu_L(u)$$

PER • $X < 0$ $\quad F_X(x) \overset{?}{=} \int_{(-\infty, x]} F'(x)\, d\mu_L(x) = 0 \quad$ OK

• $X > 0$ $\quad F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} F'(x)\, d\mu_L(x)$

$F'(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

PER LEBESGUE SE CAMBIO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN UN NUMERO NUMERABILE DI PUNTI, L' INTEGRALE RIMANE UGUALE

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \mu_L\big((-\infty, x) \cap [0,1]\big)$$

- SE $x \in [0,1) \rightarrow F_X(x) = x$
- SE $x > 1 \longrightarrow F_X(x) = \mu_L([0,1]) = 1$

QUINDI LA F_X E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA ANCHE SE CI SONO DUE PUNTI IN CUI F'_X NON E' DEFINITA.

CONSIDERIAMO LA DENSITA' $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; QUESTA E' LIMITATA ED ESISTE OVUNQUE

SE PRENDO $F_X(x) = \int_{(-\infty, x)} f(u)\, d\mu_L(u)$; QUESTA E' UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CHE E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA E QUINDI $\quad F'_X(x) = f(x)$

IL VANTAGGIO DELL' ASSOLUTA CONTINUITA' E' CHE SE F_x E' ASS CONTINUA, ALLORA

$$P(X \in B) = \int_B F_x'(x)\, d\mu_L(x)$$

<u>INTEGRALE DI LEBESGUE</u>

$\mu_L : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ TC $\mu_L([a,b] = b-a$

$\mu_L([a,b]+x) = \mu_L([a,b])$

VOGLIO DEFINIRE $\int_B f(x)\, d\mu_L(x)$

- PER FUNZIONI SEMPLICI E POSITIVE

$$S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{(a_k, b_k]}(x) \quad \text{TC} \quad (a_k, b_k] \cap (a_h, b_h] = \phi$$

$$\alpha_k \in \mathbb{R}_+$$

ALLORA DEFINISCO

$$\int_{\mathbb{R}} S(x)\, d\mu_L(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (b_k - a_k)$$

- IL VALORE DELL' INTEGRALE NON DIPENDE DALLA SCELTA DEGLI INTERVALLI $[a_k, b_k]$ OVVERO

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 1_{(a_k, b_k]} \ \overset{E}{\nabla}\ s(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \, 1_{[c_k, d_k]}$$

ALLORA HO STESSO INTEGRALE.
CIOE' GLI α E $(a_k, b]$ E β_k E $(c_k, d_k]$ SI COMBINA= NO IN MODO CHE IN OGNI x HO STESSO VALORE

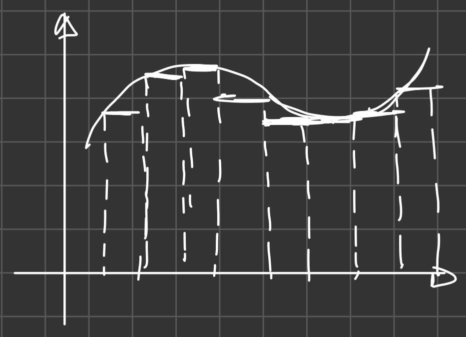
- IL VALORE DELL' INTEGRALE E' MONOTONO CRESCENTE IN $s(x)$; OVVERO DATA $u(x)$ SEMPLICE E POSITIVA TC

$$s(x) \leq u(x) \quad \forall x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} s(x)\, d\mu_L(x) \leq \int_{\mathbb{R}} u(x)\, d\mu_L(x)$$

<u>TEO</u>. SE $f(x) \geq 0$ BORELIANA, $\exists \, (s_n)_{n=1}^{\infty}$ FUNZIONI SEMPLICI POSITIVE TC

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

(SIMILE COSTRUZIONE INTEGRALE RIEMAN)



ALLORA DATA $f(x)$ POSITIVA E BORELIANA

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} s(x)\, d\mu_L(x) \; : \; \begin{array}{l} s(x) \text{ SEMPLICE E} \\ \text{POSITIVA TC} \\ s(x) \leq f(x) \end{array} \right\}$$

E QUINDI POICHÉ $f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$ ALLORA

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(x)\, d\mu_L(x)$$

<u>NOTA</u>. L' INTEGRALE PUO' FARE ∞

SE $\overbrace{f(x) \in \mathbb{R}}^{\text{(GENERALE E NON POSITIVA)}}$ PASSO A $|f(x)| \geq 0$; ALLORA $f(x)$ E' INTEGRABILE SECONDO LEBESGUE SE

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\mu_L(x) < \infty$$

DETTA $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ E $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ SONO ENTRAMBE POSITIVE

SE $f(x)$ E' INTEGRABILE ALLORA f^+ ED f^- SONO ANCHE INTEGRABILI; QUINDI

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, d\mu_L(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, d\mu_L(x)$$

DA QUI HO.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ DATI $(E_k)_{k=1}^n$ TC $E_k \in \mathcal{E}$ ED $E_{k_1} \cap E_{k_2} = \phi$

PRESA $(\alpha_k)_{k=1}^n$ CON $\alpha_k \geq 0$

CONSIDERO $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{E_k}(\omega)$ COME V.A. SEMPLICE POSITIVA

DEFINISCO SPERANZA

$$E\left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{E_k}(\omega)\right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(E_k) = \int_{\Omega} s\, dP$$

- SE $X \geq 0$ $E[X] = \int_{\Omega} X\, dP = \sup\left\{ \int_{\Omega} \text{V.A. SEMPLICI} \right\}$
- SE X GENERICA $E[X] = E[X^+] - E[X^-]$ (SSE $< +\infty$)

$$E[X] = E[|X|]$$

LEZIONE 15-11-2022

SIMPLE FUNCTION $\sum_{J=1}^{N} \alpha_J \mathbb{1}_{A_J}(x)$ TC $A_J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

$\mu_L^N(A_J)$

$A_{J1} \cap A_{J2} = \phi$

MOMENTO DI VA

SIA $X: \Omega \to \mathbb{R}$ VA $\left(\mathcal{E}\text{-VA} : \{X \in B\} \in \mathcal{E} \right)$

INFORMAZIONE

$E[X] = ?$ $E[X^2] = ?$ $\Delta^2[X] = ?$ $\text{SKEW}[X] = ?$ $\text{KURT}[X] = ?$

PER DEFINIRLO CONSIDERO $|X|$: SO CHE E' VA, POSITIVA

SE $\int_{\Omega} |X| \, dP < \infty$ ALLORA X AMMETTE "MOMENTO DI ORDINE 1" OPPURE "SPERANZA"

LA SPERANZA $E[X] = \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP$

MEDIA CAMPIONARIA $(x_k)_{k=1}^{n} \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$

CONSIDERIAMO $X: \Omega \to \mathbb{R}$ CON $X(\Omega) = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} ; \ \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) ; \ P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

$$|X| = \{|x_1|, |x_2| \dots |x_n|\}$$

$$\int_\Omega |X| \, dP = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

QUINDI LA DEF CHE DIAMO CATTURA IL CONCETTO INTUITIVO DI MEDIA.

LA SOMMA E' FINITA QUINDI HO CHE UNA VA DISCRETA AMMETTE SEMPRE SPERANZA.

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq 0}}^{n} x_k P(X = x_k) - \sum_{\substack{k=1 \\ x_k < 0}}^{n} |x_k| P(X = x_k) =$$

METTO VAL ASSOLUTO PERCHE LA PARTE NEGATIVA E' POSITIVA

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \geq 0}}^{n} x_k P(X = x_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ x < 0}}^{n} x_k P(X = x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

PER VA DISCRETE QUINDI

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k \, P(X = x_k) \quad \text{SE } P(X = x_k) \equiv \text{DISCRETA UNIFORME}$$

HO LA MEDIA CAMPIONARIA

QUINDI:

- CONOSCO $P \Rightarrow$ USO $E[X]$
- NON CONOSCO $P \Rightarrow$ USO CAMPIONARIA

DATA Ω

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

DUE CASI:

1. $F_X(x)$ E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} f_X(u) \, d\mu_L(u) \quad \text{CON } f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ BORELIANA}$$

"DENSITA' DI X"

2. F_X NON ASSOLUTAMENTE CONTINUA

NON POSSO ESPRIMERLO COME SOPRA

LEZIONE 16-11-2022

DATA $X:\Omega\to\mathbb{R}$, AMMETTE MOMENTO DI ORDINE n SSE

$$\int_\Omega |X^n|\,dP < \infty$$

SE X AMMETTE MOM DI ORDINE n, ALLORA

$$E[X^n] = \int_\Omega X^n\,dP$$

SE :
- $n=1 \to$ SPERANZA DI X
- $n=2 \to$ MOMENTO DEL SECONDO ORDINE DI X

$$D^2[X] = E\left[(X-E[X])^2\right]$$

- $n=3 \to$ MOMENTO DI ORDINE 3 DI X

$$\mathrm{Skew}(X) = \frac{E\left[(X-E[X])^3\right]}{D^3[X]}$$ ASIMMETRIA DELLA f_X

- $n=4 \to$ MOMENTO DI ORDINE 4 DI X

$$\mathrm{Kurt}(X) = \frac{E\left[(X-E[X])^4\right]}{D^4[X]}$$ VALORI ESTREMI PIU' PROB RISPETTO A QUELLI IN GAUSSIANA

• DATA VA X DISCRETA (CON UN NUMERO AL PIU' NUM DI VAL)

$$X(\Omega) = (x_k)_{k=1}^{\infty}$$

- UNA VA DI POISSON $X(\Omega) = (n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
- UNA VA GEOMETRICA: 1° SUCCESSO IN UNA SUCCESSIONE DI TENTATIVI

$$X(\Omega) = (n)_{n \in \mathbb{N}}$$

SUPPONIAMO X UNA VA DI POISSON $X(\Omega) = (n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

X HA VALORI POSITIVI $\longrightarrow \int_\Omega |X| \, dP < \infty$ SSE $\int_\Omega X \, dP < \infty$

QUINDI QUI POSSO CALCOLARE DIRETTO

$(\{X=n\})_{n \in \mathbb{N}_0}$ SONO UNA PARTIZIONE DI Ω

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X=n\}} X \, dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{X=n\}} X \, dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{X=n\}} n \, dP =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \int_{\{X=n\}} dP = \sum_{n=0}^{\infty} n \, P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = *$$

NOTA. PER VA DISCRETE $\int_\Omega \lvert X \rvert \, dP = \sum_{n=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert \, P(X = x_n)$

$$* = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\longrightarrow E[X] = \lambda$$

- <u>TEO</u>. SE X ED Y AMMETTONO MOMENTO DI ORDINE 1, ALLORA $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $\alpha X + \beta Y$ AMMETTONO MOM DI ORDINE 1 ED

  $$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$$

  OVVERO LA SPERANZA E' LINEARE

  NOTA! CON $n > 1$ VALE L'AMMISSIONE DI SPERANZA, MA <u>NON VALE</u>

  $$E[(\alpha X + \beta Y)^n] \neq \alpha E[X^n] + \beta E[Y^n]$$

- DETTO $\mathcal{L}^n(\Omega; \mathbb{R})$ = INSIEME DELLE $\mathcal{E}$-VA REALI SU Ω, ESSO E' UNO SPAZIO VETTORIALE / LINEARE

- $E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2X E[X] + E^2[X]] \overset{\text{LINEARITA'}}{=}$

  $= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E^2(X) = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) =$
  $= E(X^2) - E^2(X)$

  $$\longrightarrow E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E^2(X)$$

• ESEMPIO. CALCOLO $D^2(X)$ PER X DI POISSON

$$D^2(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{\Omega} X^2 dP = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{X=n\}} X^2 dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{X=n\}} X^2 dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{X=n\}} n^2 dP =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} =$$

DATO ANCHE DALL' INIETTIVITA' DI x^2

E' UNA SERIE POSITIVA

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1+1)\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\lambda^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

DA CUI

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$\longrightarrow$ PER VA DI POISSON $D^2(X) = \lambda$

• CALCOLO $\text{SKEW}(X)$ E $\text{KURT}(X)$ CON X POISSON

• CALCOLO MEDIA + VARIANZA DI X CON X GEOMETRICA

• CON X VA DI BERNOULLI CON PROB DI SUC $= p$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad P(X=1) = p \qquad P(X=0) = 1-p$$

HO NUM FINITO DI VALORI $\longrightarrow$ ESISTE IL MOMENTO DI OGNI ORDINE

$$E[X] = \int_{\Omega} X \, dP = \int_{\{X=0\} \cup \{X=1\}} X \, dP = \underbrace{\int_{\{X=0\}} X \, dP}_{0} + \int_{\{X=1\}} X \, dP = \int_{\{X=1\}} dP = P(X=1)$$

$$= p$$

SE NON HO $X(\Omega) = \{0, 1\}$ MA $X(\Omega) = \{x_0, x_1\}$ HO

$$\longrightarrow E[X] = x_0 q + x_1 p$$

CALCOLO $D^2(X)$

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$X^2 = X$ SE $X(\Omega) = \{0, 1\}$ OVVERO E' STANDARD

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = q \cdot p$$

SE NON E' STANDARD

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} x_k^2 P(X = x_k) = x_0^2 q + x_1^2 p$$

$$D^2(X) = (x_0^2 q + x_1^2 q) - (x_0 q + x_1 p)^2 = - x_0 x_1 pq$$

$$\longrightarrow D^2(X) = - x_0 x_1 pq$$

$$\text{SKEW}(X) = \frac{E((X-E(X))^3)}{D^3(X)}$$

$$E((X-E(X))^3) = E(X^3 - 3X^2E(X) + 3XE^2(X) - E^3(X)) =$$
$$= E(X^3) - 3E(X)\cdot E(X^2) + 3E^2(X)\cdot E(X) - E^3(X) =$$
$$= E(X^3) - 3E(X)\cdot E(X^2) + 2E^3(X)$$

SE STANDARD $X^3 = X$

$$E((X-E(X))^3) = p - 3p\cdot p + 2p^3 = p - 3p^2 + 2p^3$$
$$= p(1 - 3p + 2p^2) = p(1 - 2p + p^2 + p^2 - p) =$$
$$= p((p-1)^2 + (p-1)p) = p(p-1)(p-1+p) =$$
$$= p(1-p)(1-2p) = pq(1-2p)$$

$$\longrightarrow \text{SKEW}(X) = \frac{pq(1-2p)}{(qp)^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{pq}}$$

- CALCOLO CON X BINOMIALE

$X(\Omega) = (k)_{k=0}^{n}$ $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

CON p = PROB SUCCESSO = PROB DI AVERE UN SUCCESSO CON UN LANCIO

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$J = k-1$$

$$= np \sum_{J=0}^{n-1} \binom{n-1}{J} p^J q^{(n-1)-J} = np\,(p+q)^{n-1} = np\,(1)^{n-1}$$

$$= np$$

$$\longrightarrow E[X] = np$$

NOTA. $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ CON X_k VA BERNULLIANE INDIPENDENTI

$$E[X] = E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = np$$

$$\Delta^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \ldots$$

SFRUTTO CHE $X = \sum_k X_k$

$$\Delta^2(X) = \Delta^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Delta^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} pq = npq$$

SE SONO INDIPENDENTI

LEZIONE 23-11-2022

SPAZI DI VARIABILI ALEATORIE

SIA Ω SPAZIO PROB $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$ = INSIEME DI $\mathcal{E}$-VA SU Ω

E' UNO SPAZIO VETTORIALE/LINEARE DI DIMENSIONE INFINITA (NON E' POSSIBILE TROVARE UNA BASE FINITA)

SIA $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R}) = \{ X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R}) \text{ TC } |X|^p \text{ HA SPERANZA FINITA} \}$$

SI VEDE CHE $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ E' SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$

OVVERO E': - NON VUOTO

- CHIUSO RISPETTO ALLA COMBINAZIONE LINEARE

PROPOSIZIONE DI MINKOWSKI. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$

$\mathbb{R}^N$ E' NORMATO, OVVERO POSSO COSTRUIRCI UNA NORMA

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^{1/2}$$

ESISTE PRODOTTO SCALARE

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k \qquad \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

SI VEDE CHE $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ E':

- NORMATO
- SE $p=2$, POSSO COSTRUIRE UN PRODOTTO SCALARE

DISUGUAGLIANZE:

- CAUCHY-SCHWARZ. $(x_k)_{k=1}^N \quad (y_k)_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{k=1}^N |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^N x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N y_k^2\right)^{1/2}$$

- HOLDER. SIANO $p, q \in (1, +\infty) \quad q = \frac{p}{p-1}$ (q E P SONO ESPONENTI CONIUGATI)

$$|xy|^p \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

- COROLLARIO HOLDER.

$$\sum_{k=1}^N |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{1/q}$$

CON $p=2 \longrightarrow$ CAUCHY-SCHWARZ

- MINKOWSKI

$$\left(\sum_{k=1}^N |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{1/p}$$

- $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$; $p \in (1, +\infty) \quad q = \frac{p}{p-1}$

SE $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$ E $Y \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathbb{R})$

$$E[|XY|] \leq E(|X|^p)^{1/p} \cdot E(|Y|^q)^{1/q}$$

QUINDI $XY \in \mathcal{L}^1$

IN GENERALE NON E' DETTO CHE $XY \in \mathcal{L}^1$, MA SE HO L'IPOTESI SU P E q, ALLORA VALE

SE $p=2$ $X \in \mathcal{L}^2$ E $Y \in \mathcal{L}^2$ ALLORA $XY \in \mathcal{L}^1$
(NON E' DETTO $XY \in \mathcal{L}^2$).

ESEMPIO. $X, Y \in \mathcal{L}^2$

$$E((X+Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) < \infty$$

- SE $X, Y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbb{R})$, ALLORA
  - $X+Y \in \mathcal{L}^p$
  - $E(|X+Y|^p)^{1/p} \leq E(|X|^p)^{1/p} + E(|Y|^p)^{1/p}$

NORMA SU $\mathcal{L}^p$; $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\|X\|_p = \int_\Omega |X|^p \, dP = E[|X|^p]$$

E' UNA NORMA? - $\|X\| = 0 \longleftrightarrow X = 0$

- SE $\alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha X\| = \|\alpha\| \|X\|$
- $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

COSÌ DEFINITA LE RISPETTA TUTTE TRANNE "$\|X\| = 0 \longrightarrow X = 0$", OVVERO $X = 0$ "QUASI CERTAMENTE" (= TRANNE AL PIU' UN INSIEME DI PROB NULLA)

QUINDI $\|\cdot\|_p$ E' DETTA SEMI-NORMA.

$X+Y \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ SPAZIO DI BANACH + HILBERT

SE $Y, X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI Y SU X E' $\{\hat{Y} \in L^2(\Omega_{\sigma(X)}; \mathbb{R}) : \|\hat{Y} - Y\|_2$ E' MINIMO$\}$

$$\hat{Y} = E(Y \mid X)$$

POSSO FARLO PERCHÉ L^2 E' DI HILBERT

COVARIANZA

SIANO $X, Y \in \mathcal{L}^2$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

- $X, Y \in \mathcal{L}^2 \to X, Y \in \mathcal{L}^1$
- $X - E(X),\ Y - E(Y) \in \mathcal{L}^2$
- PRODOTTO DI $A, B \in \mathcal{L}^2$ STA IN $\mathcal{L}_1$

METTE IN EVIDENZA CHE DUE VA, VARIANO IN MODO COMUNE: SE DI UNA VEDO VALORI POSITIVI, ANCHE DELL' ALTRA OSSERVERÒ VALORI POSITIVI

- $Cov(X, Y) = E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X) \cdot E(Y)) =$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

- $Cov(X, X) = D^2(X)$

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ SIMMETRIA
- $Cov(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha Cov(X, Z) + \beta Cov(Y, Z)$ BILINEARITÀ

- $|\text{Cov}(X,Y)| \leq D(X)\, D(Y)$

<u>CORRELAZIONE</u>

$$\text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{D(X) \cdot D(Y)}$$

- $|\text{Corr}(X,Y)| \leq 1$
- E' ADIMENSIONALE

PERMETTE DI VEDERE COME VARIANO INSIEME VA DIVERSE.

PERMETTE ANCHE DI DEFINIRE LA REGRESSIONE LINEARE

LEZIONE 24-11-2022

$\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ PROIEZIONE CANONICA K-ESIMA

$x \in \mathbb{R}^N \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

$\pi_k(x) = x_k \quad \forall\, k=1,\dots,n$

SIA $\Omega = (\Omega, \mathcal{E}, P)$

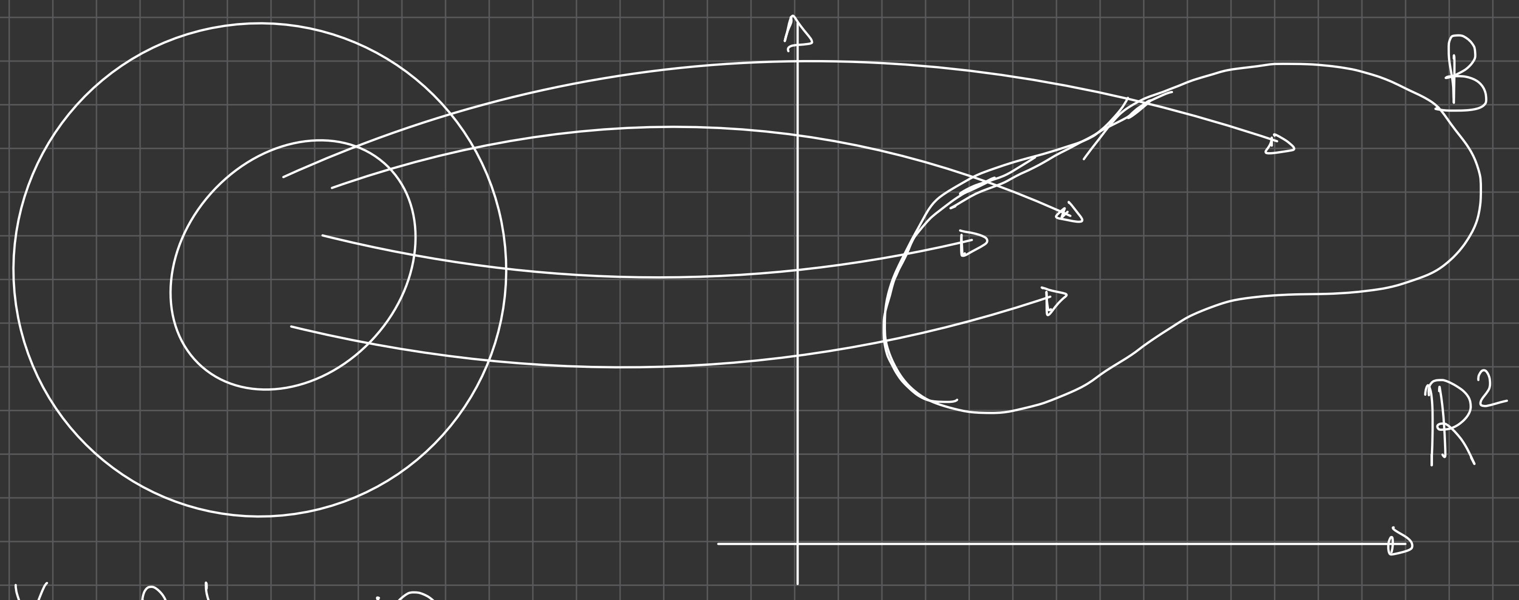
$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{E}$- VETTORE ALEATORIO A STATI IN $\mathbb{R}^N$

$\mathcal{E}$- " " REALE N-VARIATA

$\mathcal{E}$- " " REALE N-DIMENSIONALE

TC $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \quad \{X \in B\} \in \mathcal{E}$

OSSERVO GLI STATI DI X ALLA LUCE DELL'INFO CHE HO (OVVERO $\mathcal{E}$)



$\{X \in B\} \in \mathcal{E}$

CONSIDERIAMO X VETTORE ALEATORIO $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$

$\pi_k \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ OVVERO $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ E' UNA VARIABILE ALEATORIA REALE

TEO. $X: \Omega \to \mathbb{R}^N$ VETTORE ALEATORIO N-DIM SSE $\forall k = 1 \dots N$
$\pi_k \circ X = X_k$, $X_k: \Omega \to \mathbb{R}$ E' VA REALE

SIA $a, b \in \mathbb{R}^N$, PER CONVENZIONE

- $\{a \le X \le b\} \equiv \bigcap_{k=1}^{N} \underbrace{\{a_k \le X_k \le b_k\}}$

QUESTO INVECE VALE PER L' ORDINAMENTO DI $\mathbb{R}$

- $\{X \ge a\} \equiv \bigcap_{k=1}^{N} \{X_k \ge a_k\}$

TEO. SIA $X: \Omega \to \mathbb{R}^N$; SIA $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ BORELIANA; ALLORA
$g \circ X$ E' UNA VAR ALEAT A STATI IN $\mathbb{R}^M$.

IN QUESTO CASO g BORELIANA SIGNIFICA CHE
$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

NOTA. $g: A \to B$ E' BORELIANA SSE LA CONTROIMMAGINE DI UN BORELIANO E' BORELIANA

DISTRIBUZIONE MARGINALE

$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ TC $\forall k$ $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}_+ \quad \text{TC} \quad P_X(B) = P(X \in B)$$

FISSO UN INSIEME DI INDICI $\{k_1, k_2, \dots, k_M\} \subseteq \{1, \dots, N\}$

CON $k_i < k_j$ SE $i < j$

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_M} = P(X_{k_1} \in B_1, X_{k_2} \in B_2, \dots, X_{k_M} \in B_M)$$

$$\forall B_1, \dots, B_M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$P_{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_M}}\left(\bigtimes_{j=1}^{M} B_j\right) = \underbrace{P(X_{k_1} \in B_1, X_{k_2} \in B_2, \dots, X_{k_M} \in B_M)}$$

DISTRIBUZIONE MARGINALE

COME SE STESSI CONSIDERANDO IL VETTORE ALEATORIO FATTO DALLE COMPONENTI

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

SIANO $X_1, X_2, X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ (REALI)

SIANO k_1, k_2, k_M INDICI

CONSIDERIAMO IL VET ALEAT $(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_M}) = X_{k_1, \dots, k_M} : \Omega \to \mathbb{R}^M$

$$P_{X_{k_1, k_2, \dots, k_M}}\left(\bigtimes_{j=1}^{M} B_j\right) = P(X_{k_1} \in B_1, X_{k_2} \in B_2, \dots, X_{k_M} \in B_M)$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI VET ALEATORIO

$$F_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$$

SIA $x \in \mathbb{R}^N$

$$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N) = P\left(\bigcap_{k=1}^{N} \{X_k \leq x_k\}\right)$$

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \\ \vdots \\ x_N \to +\infty}} F_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = 1$ TUTTE VANNO A ∞ INSIEME, ALTRIMENTI SE UNA VA A ∞ E LE ALTRE RIMANGONO A FINITO, RIMANGO AL FINITO PERCHÉ HO L'INTERSEZIONE

2. $\displaystyle\lim_{x_k \to -\infty} F_X(x.) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$ QUI NE BASTA UNA PERCHÉ L'INTERSEZIONE TENDE ALL'EVENTO IMPOSSIBILE

3. $F_X(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N)$ E' NON DECRESCENTE PER LA SINGOLA VARIABILE x_k : LE BLOCCO TUTTE E NE LASCIO UNA LIBERA; RISPETTO ALLA LIBERA HO LA NON DECRESCENZA

4. $F_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA SSE $\exists f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ TC

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{\times_{k=1}^{N} (-\infty, x_k]} f(u_1, u_2, \dots, u_N)\, d\mu_L^N(u_1, u_2, \dots, u_N)$$

CON f DETTA DENSITA' DI X E $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u)\, d\mu_L^N = 1$

ESEMPIO. SIANO $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$(X, Y) = Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$

X, Y CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE SSE

$\exists \, f_Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ TC

$$P((X,Y) \in (a_x, b_x) \times (a_y, b_y)) = \int_{(a_x, b_x) \times (a_y, b_y)} f_Z(u, v) \, d\mu_L(u, v)$$

DOVE f_Z HA UNA FORMA PARTICOLARE

SIA $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ ASS CONTINUA CON

$P(X \in B) = \int_B f_X(x_1, x_2, \dots, x_N) \, d\mu_L^N$; ALLORA OGNI VETTORE ALEATORIO MARGINALE E' ASSOLUTAMENTE CONTINUO E POSSO TROVARNE LA DENSITA'

ESEMPIO. $Z = (X, Y)$ ASS CONTINUO $\exists \, f_Z(x,y)$ TC

$$P(X \in B) = \int_B f_Z(x,y) \, d\mu_L(x,y).$$

ALLORA X E' ASSOLUTAMENTE CONTINUA ED

$$\left.\begin{array}{l} \exists \, f_X \text{ TC } f_X(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y) \, d\mu_L(y) \\[2em] Y \text{ E' ASS CONTINUA ED } \exists \, f_Y \text{ TC} \\[1em] f_Y(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y) \, d\mu_L(x) \end{array}\right\} \text{"INTEGRALE PARZIALE"}$$

IL VICEVERSA NON VALE!!

- X, Y ASSOLUTAM CONTINUO $\not\longrightarrow$ (X, Y) ASSOLUTAM CONTINUO

RAPPORTO F_X ED f_X

SIA X ASS CONTINUO $\quad F_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$

$$f_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$$

IN CASO $N=1$; $F_X'(x) = f_X(x)$

IN CASO $N>1$. $\dfrac{\partial^N F_X(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_N} = f_X(x_1, x_2, \dots, x_N)$

DERIVATA PARZIALE
RISPETTO A TUTTE LE
COMPONENTI

LEZIONE 29-11-2022

VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

$X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$, X E Y SONO INDIPENDENTI SSE

$$P(X \in B, Y \in C) = P(X \in B) \cdot P(Y \in C)$$

SIA $X = 1_E$; $Y = 1_F$

$$P(X \in B, Y \in C) = P(1_E \in B, 1_F \in C) =$$

$\cdot (1 \in B \vee 0 \in B) + (1 \in C \vee 0 \in F)$

1. $1 \in B$, $1 \in B$, $0 \notin B$, $0 \notin C$
   $= P(E \cap F)$

2. $1 \in B$, $0 \in B$, $1 \in C$, $0 \notin C$
   $= P(\Omega \cap F)$

ECC.

ANALIZZANDO LE CONTROIMMAGINI TROVO I VARI CASI

I CASI NON BANALI SONO $E \cap F$; $E^c \cap F$; $E \cap F^c$, $E^c \cap F^c$

$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ SSE E ED F SONO INDIPENDENTI !

QUINDI

1_E ED 1_F SONO INDIP SSE E ED F INDIPENDENTI

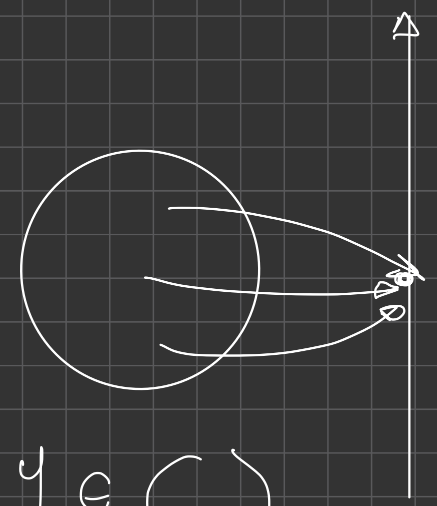
$\downarrow$

L'INDIPENDENZA DELLE VA GENERALIZZA L'INDIPENDENZA DI EVENTI

ESEMPIO. $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ TC $X_0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

E' INDIP DA QUALUNQUE VA

$P(X_0 \in B, Y \in C) =$



1. $0 \in B$

$$P(\Omega, Y \in C) = P(Y \in C) = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\overbrace{P(\Omega)}} \cdot P(Y \in C)$$

2. $0 \notin B$

$$P(\phi, Y \in C) = P(\phi) = P(\phi) \cdot P(Y \in C) = 0$$

ESEMPIO. $R : \Omega \to \mathbb{R}$ TC $R(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ -1 & \omega \in E^c \end{cases}$

R ED R^2 SONO INDIPENDENTI! INFATTI R^2 E' UNA DIRAC ED E' INDIPENDENTE DA R SEMPRE

ESEMPIO. DATA $B : \Omega \to \mathbb{R}$ BERNULLIANA E SIA DATA B^k.

SONO INDIP?

NO! $B^k = B \quad \forall k \Rightarrow$ NON SONO MAI INDIPENDENTI

ESEMPIO. DATA B BERNULLIANA E' VERO SEMPRE CHE

$$P(B \in C, B \in D) = P(B \in C) \cdot P(B \in D) \quad ?$$

SIA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ E SIA $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ DOVE

$$P_X(B) = P(X \in B)$$

SIA $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ E SIA P_Y

$$P_Y(B) = P(Y \in B)$$

SI PUO' PROVARE CHE $\exists\ P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ TC

$$P(B \times C) = P_X(B) \cdot P_Y(C)$$

DOVE $D = B \times C$ E' PRODOTTO DI BORELIANI DI $\mathbb{R}$

(NON SEMPRE POSSO SCRIVERLO IN QUESTO MODO; DOVREI ESTENDERE P)

"PRODOTTO TENSORE DI P_X E P_Y"

$$P \equiv P_X \otimes P_Y$$

DATE X ED $Y \to (X, Y)$ HO $P_{(X,Y)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ TC

$$P_{(X,Y)}(B) = P((X, Y) \in B)$$

X ED Y SONO INDIP SSE $P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$

ESEMPIO. X, Y VA; (X, Y) VET ALEATORIO

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

X ED Y SONO INDIP SSE FUNZIONE DISTRIBUZIONE CONGIUNTA = PROD FUNZ DISTRIBUZIONE MARGINALE

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

NON USO IL TENSORE PERCHÉ È IMPLICITO CHE STO CONSIDERANDO BORELIANI DEL TIPO $A \times B$

ESEMPIO. SIA (X, Y) ASS CONTINUO

$P_{(X,Y)} : B(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}_+$ E' ASS CONTINUA RISPETTO A μ_L^2

$$\begin{bmatrix} \text{SE } B \in B(\mathbb{R}^2) \quad \mu_L^2(B) = 0 \\ P_{(X,Y)}(B) = 0 \end{bmatrix}$$

OVVERO $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ E' DERIVABILE OVUNQUE E

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{(-\infty, x] \times (-\infty, y]} f_{X,Y}(u, v) \, d\mu_L^2(u, v)$$

PROPRIE. (X, Y) ASS CONTINUO ; X ED Y INDIPENDENTI SSE

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

QUINDI DATE X ED Y:

1. FACCIO CONGIUNTA
2. TROVO DISTRIBUZIONE

3. VEDO SE ASS CONTINUA

4. VEDO SE DENSITÀ CONGIUNTA È PRODOTTO DELLE SINGOLE

- SIANO X, Y INDIP E CHE AMMETTONO MOMENTO DI ORDINE 2

$X, Y \in L^2$

$\Rightarrow X \cdot Y \in L^1 \quad \left(E(|XY|) \le E(X^2)^{1/2} \cdot E(Y^2)^{1/2} \right)$

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

- SE $X, Y \in L^2$ E INDIPENDENTI,

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0 \longrightarrow Corr(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{D(X) \cdot D(Y)} = 0$

IL VICEVERSA NON È SEMPRE VERO!

SE $Cov(X,Y) = 0 \not\longrightarrow X$ ED Y INDIPENDENTI

<u>ESEMPIO</u>. $X \sim Gauss(\mu = 0, \sigma = 1)$

$Cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) = 0$

INFATTI

$$E(X^{2k+1}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|X|^{2k+1}}_{\text{DISPARI}} \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{PARI}} \cdot d\mu_L(x) = 0$$

DISPARI · PARI $\longrightarrow$ DISPARI

$P(X \in B, X^2 \in C) = P(X \in B) \cdot P(X^2 \in C)$

PER VEDERE SE VERA DEVO VEDERLI TUTTI!
PER " " FALSA NE BASTA 1!

$\{X^2 \geq \frac{1}{4}\} = \{X \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{X \geq \frac{1}{2}\}$ E SONO DISGIUNTI

$$P(X \geq \tfrac{1}{2} \; ; \; X^2 \geq \tfrac{1}{4}) = P(\{X \geq \tfrac{1}{2}\} \cap (\{X \geq \tfrac{1}{2}\} \cup \{X \leq \tfrac{1}{2}\})) =$$

$$= P(X \geq \tfrac{1}{2}) \neq P(X \geq \tfrac{1}{2})\, P(X^2 \geq \tfrac{1}{4})$$

DOVREBBE ESSERE

$P(X^2 \geq \frac{1}{4}) = 1$ COSA CHE NON E'

ESEMPIO IMPORTANTE: $\boxed{\text{X CASA}}$

$X \sim N(0,1)$

$R \sim Rad(\frac{1}{2})$

SUPPONIAMO X ED R INDIPENDENTI.

SIA $Y = X \cdot R$. SI VEDA
- $Y \sim N(0,1)$
- R ED Y INDIPENDENTI
- X, Y SCORRELATE MA NON INDIPENDENTI

QUANDO OSSERVO $Y = RX$, LA MAGGIOR PARTE DELL' INFO VIENE DA X

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(RX \leq y) =$$

$$= P(RX \leq y \cap R = 1) + P(RX \leq y \cap R = -1) =$$

$$= P(RX \leq y \mid R = 1)\, P(R = 1) + P(RX \leq y \mid R = -1)\, P(R = -1) =$$

$$= P(X \leq y \mid R = 1)\, P(R = 1) + P(-X \leq y \mid R = -1)\, P(R = -1) =$$

$$= P(X \leq y) \cdot P(R=1) + P(-X \leq y) \cdot P(R=-1) =$$

INDIP

$$= \frac{1}{2}\left[P(X \leq y) + P(-X \leq y)\right] = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\boxed{P(X \leq y)} + \boxed{P(X \geq -y)}\right]}_{\text{SIMMETRIA RISP ORIGINE}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 P(X \leq y) = P(X \leq y)$$

$$= F_X(y)$$

$\rightarrow Y \sim N(0,1)$

NEL CASO SE NE ABBIAMO DI PIU'

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ VA SONO INDIP SSE

$\forall\, k_1, k_2, \ldots, k_M \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P(X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_M} \in B_M) = \prod_{j=1}^{M} P(X_{k_j} \in B_j)$$

CIOE' SE OGNI POSSIBILE VETTORE ALEATORIO HA DISTRIB PARI A PROD DELLE DIST MARGINALI

<u>PROPR</u>. SIANO $X_1, X_2, \ldots X_m$ E $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ TC $\forall\, i, j$

X_i E Y_j SONO INDIPENDENTI

(NON PER FORZA LE X SONO TRA LORO INDIP)

$f(X_1, \ldots, X_m)$ E $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ SONO VA INDIP

LEZIONE 30-11-2022

$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad X(\Omega) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \qquad x_n \in \mathbb{R} \qquad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$

$E_n = P(X = x_n) \to \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ SONO UNA PARTIZIONE DI Ω

$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$

CONSIDERO $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad P_X(B) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k \in B}} P(X = x_k)$

ESEMPIO. SIA $X \sim Geom(p)$

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, \} = \mathbb{N}$$

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

VOGLIO CALCOLARE LA DISTRIBUZIONE $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$

$$P_X(B) = P(X \in B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$P_X(B) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ TC} \\ n \in B}} P(X = n)$$

$$B = [3, 10]$$

$$P_X(B) = \sum_{k=3}^{10} P(X = k) = \sum_{k=3}^{10} p\, q^{k-1} = p \sum_{k=3}^{10} q^{k-1} =$$

$$= p\, q^2 \sum_{k=3}^{10} q^{k-3} = p q^2 \sum_{k=0}^{7} q^k = p q^2 \frac{1 - q^{7+1}}{1 - q}$$

$$= p q \frac{1 - q^8}{p} = q(1 - q^8)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ x_k \leq x}} P(X = x_k)$$

NEL CASO ASS CONTINUO $\quad P_X(B) = \int_B f_X(x)\, d\mu_L(x)$

<u>VETTORI ALEATORI DISCRETI</u>

$$|X(\Omega)| \leq \aleph_0$$

$$X(\Omega) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{TC} \quad |\mathbb{N}| \leq \aleph_0$$

$$\text{E} \quad \boxed{x_n \in \mathbb{R}^N}$$

$$P_X : \boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)} \to \mathbb{R}_+$$

$$P_X(B) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ TC} \\ x_n \in B}} \boxed{P(X = x_n)}$$

DA STUDIARE SUI VETTORI

ESEMPIO. $X = (X_1, X_2)$ $\quad X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ LANCIO MONETA $\quad X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ LANCIO DADO $\Big\}$ INDIPENDENZA

$$X(\Omega) = \{(0,1)(0,2)\dots(0,6)(1,1)(1,2)\dots(1,6)\}$$
$$= X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$$

$$P(X = (j,k)) = P(X_1 = j, X_2 = k) =$$

$= P(X_1 = j)\, P(X_2 = k)$

$\downarrow$

INDIPENDENZA

SE $j = 0 \to \frac{q}{6}$

SE $j = 1 \to \frac{p}{6}$

$B = [3,7] \times [0,4] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$P_X([3,7] \times [0,4]) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ TC} \\ x_n \in [3,7] \times [0,4]}} P(X = x_n) = 0$$

$$P_X([0,4] \times [3,7]) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ TC} \\ x_n \in [0,4] \times [3,7]}} P(X = x_n)$$

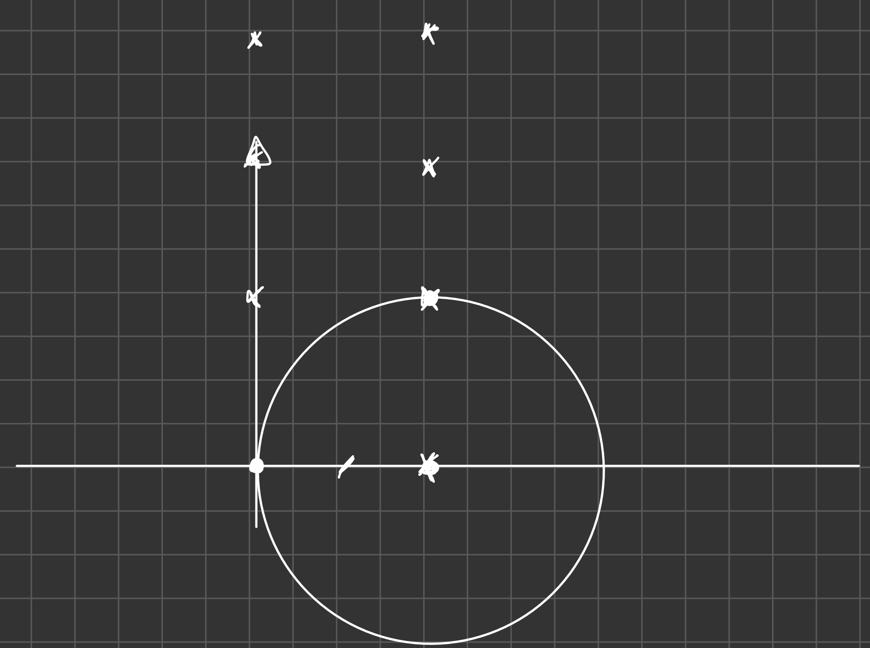
TUTTI QUELLI CHE HANNO COME
- 1^a COMP $\in [0,4]$
- 2^a COMP $\in [3,7]$

$$= (p+q)\frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\downarrow$ OK

$D((1,0), 1) =$ DISCO CON CENTRO IN $(1,0)$
RAGGIO $R = 1$

$$P_X(D) = P(X = (1,1)) = \frac{p}{6}$$



$$F_X(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} : x_n \le x \\ x_{n,k} \le x_k \ \forall k=1,\dots,n}} P(X = x_k) = \sum$$

SIA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA VA DISCRETA E g BORELIANA.

$g(X)$ E' UNA VA ANCORA DISCRETA TC

$$|g(X(\Omega))| \le |X(\Omega)|$$

SUPPONIAMO $|X(\Omega)| < \aleph_0$ $\quad X(\Omega) = (x_k)_{k=1}^{n}$

$$g(X(\Omega)) = (g(x_k))_{k=1}^{n}$$

E' UNA SUCCESSIONE, QUINDI POSSO RIPETERNE ALCUNI

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) P(X = x_k)$$

OPPURE

$Y = g(X)$ TC $\quad Y(\Omega) = (g_j)_{j=1}^{m}$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{m} g_j P(Y = g_j)$$

I RISULTATI SONO UGUALI, MA NON BISOGNA MESCOLARE LE COSE!

- USO LA g INSIEME ALLA X
- USO LA Y IN TOTO

SIA $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$

$\underset{\sim}{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \quad \underset{\sim}{g} = (\underset{\sim}{g}_1, \underset{\sim}{g}_2, \dots, \underset{\sim}{g}_M)$ CON $\underset{\sim}{g}_J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$Y = \underset{\sim}{g}(X) = (\underset{\sim}{g}_1(X), \underset{\sim}{g}_2(X) \dots \underset{\sim}{g}_M(X))$

$\underset{\sim}{g}(X) = (\underset{\sim}{g}_k)_{k=1}^n$

$\underset{\sim}{g}_k = (\underset{\sim}{g}_1(X_k), \underset{\sim}{g}_2(X_k), \dots, \underset{\sim}{g}_M(X_k))$

$E[\underset{\sim}{g}(X)] = (E[\underset{\sim}{g}_1(X)], \dots, E[\underset{\sim}{g}_M(X)])$

$E[\underset{\sim}{g}_J(X)] =$ DEF

<u>ESERCIZIO</u> ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾ ∾

$Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ASS CONTINUA

$X = (X_1, X_2)$ TC $X_1 = X_2 = Z$

$P(X_1 = X_2) = 1 = P(Z = Z)$

$\{X_1 = X_2\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ TC } x_1 = x_2\}$

$\qquad \|$

$\{\omega \in \Omega \text{ TC } X_1(\omega) = X_2(\omega)\}$ → CONTROIMMAGINE DELLA BISETTRICE DI 1° E 3° QUAD

$P_X(B_0) = 1 \qquad \mu_L(B_0) = 0$

BISETTRICE

NON E' ASS CONTINUA!

MISURA NULLA MA DISTRIBUZIONE NON NULLA

ALTRO MODO

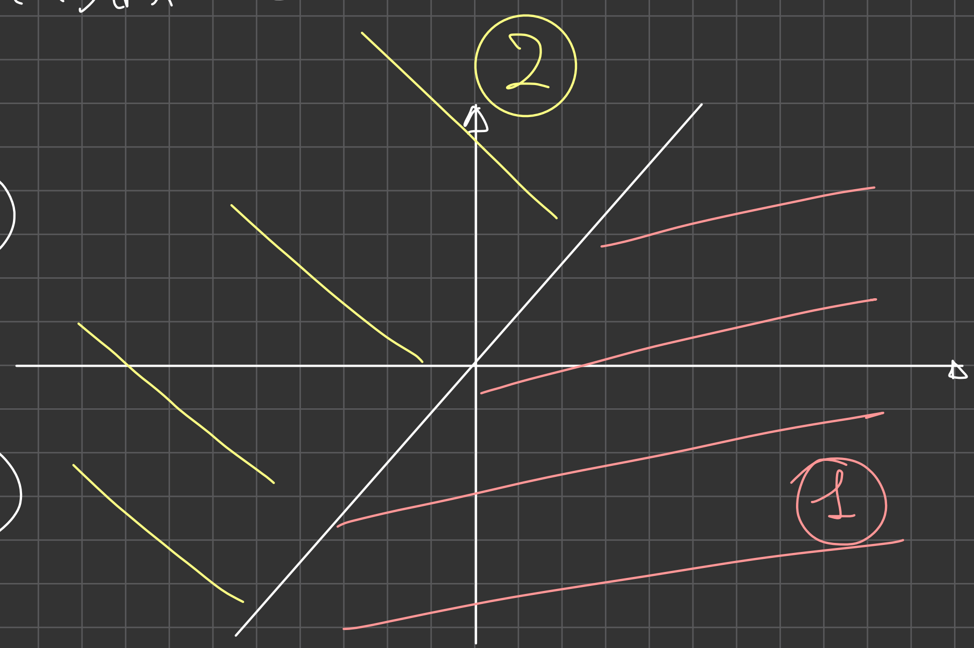
$f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA (PER COMODITA')

$$F_X(x_1, x_2) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = P(Z \le x_1, Z \le x_2) =$$

$$= P(Z \le \min(x_1, x_2)) = \int_{-\infty}^{x_1 \wedge x_2} f_Z(x)\,dx =$$

CONTINUA

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_1} f_Z(x)\,dx & x_1 \le x_2 \quad (1) \\ \int_{-\infty}^{x_2} f_Z(x)\,dx & x_2 < x_1 \quad (2) \end{cases}$$



CALCOLIAMO LA DERIVATA

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{(x_1, x_2)} \begin{cases} f_Z(x_1) & x_1 < x_2 \\ 0 & \text{ALTRO} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{(x_1, x_2)} = \begin{cases} f_Z(x_2) & x_2 < x_1 \\ 0 & \text{ALTRO} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \longrightarrow \text{E' LA DENSITA' DELLA CONGIUNTA}$$

QUINDI LA CONGIUNTA HA DENSITA' NULLA TRANNE AL PIU' SULLA BISETTRICE CHE HA MISURA NULLA: QUINDI POSSO PRENDERE LA DENSITA' NULLA OVUNQUE CHE E' UN ASSURDO PERCHE' L'INTEGRALE DELLA DENSITA' DEVE DARE 1

QUESTO FA VEDERE CHE X NON E' ASS CONTINUO NONOSTANTE LE MARGINALI NON LO SIANO

~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

LEZIONE 1-12-2022

$$E(X_1 X_2 \dots X_M) = \prod_{k=1}^{M} E(X_k)$$ SE SONO INDIPENDENTI

SE $\int_{\Omega} |X_1 X_2 \dots X_M| dP < +\infty$

LEGGERE CAPITOLO SULLE FUNZIONI CARATTERISTICHE

VETTORI GAUSSIANI

$X_1, X_2, \dots, X_N$ CONGIUNTAMENTE GAUSSIANI E $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ E' UN VETTORE GAUSSIANO SE

$\forall c \in \mathbb{R}^N \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ ALLORA $\sum_{k=1}^{N} c_k X_k \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$

μ_c, σ_c^2: DIPENDONO DA c

SE $\sigma_c^2 = 0$ LA NORMALE SI RIDUCE AD UNA DIRAC. QUINDI LE DIRAC SONO DELLE NORMALI DEGENERI.

SE SONO CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE, LE SINGOLE SONO GAUSSIANE. INFATTI SE $c_1 = 1$ E $c_k = 0$ $\forall k = 2 \dots N$ OTTENGO

$X_1 \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$ QUINDI X_1 E' GAUSSIANA.

TEOREMA. SIANO $X_1, X_2, \dots, X_N$ CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE E SIA $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ $\exists$ MATRICE $A_X \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ $\exists \mu_X \in \mathbb{R}^N$ $\exists$ Z_1, Z_2, Z_M GAUSSIANE STANDARD E INDIPENDENTI TC

$$X = \mu_X + A_X Z \quad \text{DOVE} \quad Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_M)$$

CIOE' TUTTI I VETTORI GAUSSIANI LI POSSO GENERARE DA NORMALI STANDARD

$\mu_x = E(X)$ INFATTI $X = \mu_x + A_x Z$

$$E(X) = E(\mu_x) + E(A_x \cdot Z) = E(\mu_x) + A_x \underbrace{E(Z)}_{\substack{\| \\ 0}} = \mu_x$$

0 → TUTTE NORMALI

SI DIM

$$VAR(X) = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = A_x A_x^T$$

→ SIAMO NEL CASO VETTORIALE

$$VAR(X) = E\left((X - E(X))(X - E(X))^T\right) =$$

$$= E\left(\begin{pmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \\ X_N - E(X_N) \end{pmatrix} \left(X_1 - E(X_1),\ X_2 - E(X_2),\ X_N - E(X_N)\right)\right) =$$

$$= E\begin{pmatrix} (X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1)) & \dots \\ & \end{pmatrix}$$

$$X = \mu_x + A_x Z$$

$$A_x Z = X - \mu_x$$

$$E\left((X - E(X))(X - E(X))^T\right) = E\left((A_x Z) \cdot (A_x Z)^T\right) =$$

$$= E(A_x Z \cdot Z^T A_x^T) = A_x \cdot E(Z \cdot Z^T) \cdot A_x^T = A_x\, VAR(Z)\, A_x^T =$$

$Z_i \sim NORM(0, 1)$

$$= A_x A_x^T \longrightarrow VAR(X) = A_x A_x^T \longrightarrow A_x = \text{MATRICE DI VARIANZA COVARIANZA DI } X$$

$VAR(Z) \equiv I$ = MATRICE IDENTITA'

SIA X GAUSSIANO. $Y = b + AX$ E' GAUSSIANO?
IN GENERALE NO!

$$A \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \; ; \; X = (X_1, X_2, \dots, X_M) \; ; \; Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$$

SE A E' DI FULL-RANK ($\exists$ DET DI A NON NULLO?)
ALLORA QUESTO VALE

DICIAMO CHE (X_1, X_2, X_N) E' UN VETTORE GAUSSIANO NON DEGENERE SE:

1. X E' ASS CONTINUO

2. $$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Sigma^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{(x-\mu)^T}_{1 \times N} \underbrace{(\Sigma^2)^{-1}}_{N \times N} \underbrace{(x-\mu)}_{N \times 1} \right)$$

1×1

TC $\Sigma^2 = (\sigma_{J,K})_{J,K=1}^{M}$ DOVE $\sigma_{J,K} = E\big((X_J - E(X_J))(X_K - E(X_K)) \big)$

$\longrightarrow$ MATRICE DELLE COVARIANZE

- SIANO $X_1, X_2 \sim N(0,1)$. $X = (X_1, X_2)$ E' GAUSSIANO?
IN GENERALE NO!! VEDI UNO DEGLI ESERCIZI DEL POMERIGGIO

- SIANO $X_1, X_2, \dots, X_N$ GAUSSIANE E INDIPENDENTI
$\longrightarrow (X_1, X_2, \dots, X_N)$ E' UN VETTORE GAUSSIANO

- $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ GAUSSIANO, CON LE X_K IN GENERALE NON INDIPENDENTI, E LE X_K X_J A DUE A DUE SCORRELATE
$\longrightarrow$ LE X_K SONO $\boxed{\text{INDIPENDENTI}}$ $\longrightarrow$?? INDIPENDENTI O GAUSSIANE?

VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE

DUE TIPI DI CONDIZIONAMENTO :

- $E(X|E)$ CON E UN EVENTO
  "MORALMENTE: SUPPONENDO CHE ACCADE L'EVENTO E QUANTO VALE IN MEDIA X"

- $E(X|\mathcal{F})$ CON $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$
  "ALLA LUCE DELLA REALIZZAZIONE DI UN EVENTO DELL'INFORMAZIONE RIDOTTA, QUANTO VALE IN MEDIA X"

QUINDI $E(X|\mathcal{F}) = f(F)$ CON $F \in \mathcal{F}$ E' UNA FUNZIONE DI F.

SI VEDE CHE $f(F)$ E' A SUA VOLTA UNA VARIABILE ALEATORIA E NELLO SPECIFICO E' UNA $\mathcal{F}$-VA

SI VEDE CHE $E(X|\mathcal{F}) = \text{ARG.MIN}\{E((X-Y)^2), Y \in \mathcal{F}^2(\Omega_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}, \mathbb{R})\}$

STIMATORE OTTIMO NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI

INSIEME DELLE $\mathcal{F}$ V.A. CHE HANNO MOM FINITO DI ORDINE 2

VA CONDIZIONATE

$E(X|F)$ TC $F \in \mathcal{E}$ E $P(F) > 0$

$$E(X|F) = \frac{1}{P(F)} \int_F X \, dP$$

QUESTO CI RIPORTA ALLA DEF INTUITIVA.
CALCOLO LA MEDIA SU F E POI LA PESO CON LA PROB CHE F ACCADA

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$ SOLO IN RELAZIONE ?

SIA $X = \mathbb{1}_E$

$$E(X|F) = E(\mathbb{1}_E | F) = \frac{1}{P(F)} \int_F \mathbb{1}_E \, dP = \frac{1}{P(F)} \int_{F \cap E} dP = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

COINCIDE CON LA PROB CONDIZIONATA!!

SIA $X(\Omega) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = x_n \mathbb{1}_{E_n}$ $\quad E_n = \{X = x_n\}$

AFFINCHÉ CONVERGA $X \in L^1$ $\rightarrow$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$ ASSOLUTA CONVERGENZA

$$E(X|F) = \frac{1}{P(F)} \int_F X \, dP = \frac{1}{P(F)} \int_F \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{1}_{E_n} \, dP =$$

$$= \frac{1}{P(F)} \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \int_{F \cap E_n} dP = \frac{1}{P(F)} \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P(F \cap E_n) =$$

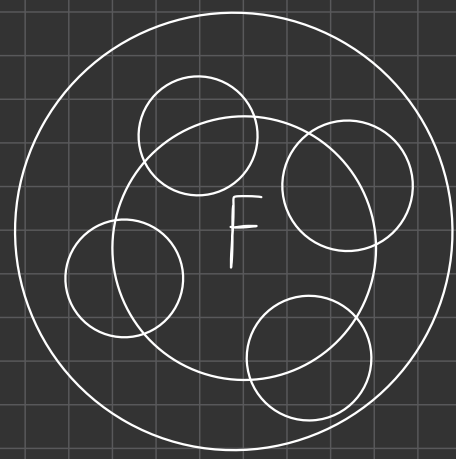
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \frac{P(F \cap E_n)}{P(F)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P(E_n | F) \longrightarrow$$ SIMILE AL TEO PROB TOTALI

SIA $P(F) > 0 \rightarrow P_F(E) = P(E|F)$ PROB DI $\mathcal{E}$ CONCENTRATA SU F

$$E(X|F) = \int_\Omega X \, dP_F$$

P_F MI FA RICALIBRARE LE PROB ORIGINALI ALLA LUCE DEL FATTO CHE SIA AVVENUTO F

SE $\bigcup\limits_{n} E_n \cap F = F$



QUINDI SE PASSO A PROB HO F

SE RIDIVIDO PER $P(F)$ HO 1

CIOE' F DIVENTA IL "NUOVO" EVENTO CERTO

LEZIONE 13-12-2022

1

$$E(Y|X) = E(Y) \longrightarrow Cov(X,Y)=0$$

X ED Y NON NEC INDIPENDENTI

$$E(E(XY|X)) = E(XY)$$

$$E(X\,E(Y|X)) = E(X\,E(Y)) = E(X)\cdot E(Y)$$

DA CUI

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

SIA X BERNULLIANA, $Z \sim N(0,1)$, INDIPENDENTI.

SIA $Y = ZX$

X ED Y SONO INDIP?

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = E(X\cdot ZX) - E(X)E(ZX) =$$

$$= E(X^2 Z) - \cancel{E^2(X)E(Z)} = 0 \longrightarrow \text{SONO SCORRELATE}$$

PROVIAMO CON I QUADRATI

$$Cov(X^2, Y^2) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2)$$

$$= E(X^2\cdot Z^2X^2) - E(X^2)\cdot E(X^2Z^2) =$$

$$= E(X^4 Z^2) - E^2(X^2)\cdot \underset{1}{E(Z^2)} = E(X^4) - E^2(X^2) =$$

$$= E(X) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq \neq 0$$

POICHÉ X, Y INDIP $\Rightarrow \underbrace{g \circ X}$ E $h \circ Y$ INDIP $\forall \underbrace{g}$ ED h BORELIANA

$$E(Y|X) = E(XZ|X) = X\,E(Z|X) = X \cdot E(Z) = 0$$

$$E(Y) = E(XZ) = E(X) \cdot E(Z) = 0$$

DIMOSTRARE CHE $Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow E(Y|X) = E(Y)$

SIA $X \sim N(0,1)$
$Y = X^2$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) = 0$$

$$E(Y|X) = E(X^2|X) = X^2 \neq \left(E(X^2) = 1\right)$$

$$E(Y) = E(X^2) = 1$$

②

SIANO $X, Y \sim \mathrm{Rad}(1/2)$ INDIPENDENTI.

SIA $Z = X + Y$

$$Z = X + Y = \begin{cases} 2 & X = 1 \wedge Y = 1 & 1/4 \\ 0 & (X = 1 \wedge Y = -1) \vee (X = -1 \wedge Y = 1) & 1/2 \\ -2 & (X = -1 \wedge Y = -1) & 1/4 \end{cases}$$

$E(X \mid Z) = ?$ $\quad E(Y \mid Z) = ?$

$$E(X \mid Z) = E(X \mid Z = -2)\, 1_{\{Z=-2\}} + E(X \mid Z = 0)\, 1_{\{Z=0\}} + E(X \mid Z = 2)\, 1_{\{Z=2\}}$$

$$E(X \mid Z = -2) = \frac{1}{P(Z=-2)} \int_{\{Z=-2\}} X \, dP = \frac{1}{P(Z=-2)} \cdot \int_{\{X=-1, Y=-1\}} X \, dP =$$

$$= \frac{1}{P(Z=-2)} \cdot (-1)\, P(X = -1, Y = -1) = -1$$

$$E(X \mid Z = 0) = \frac{1}{P(Z=0)} \int_{\{Z=0\}} X \, dP = \frac{1}{P(Z=0)} \int_{\{X=1, Y=-1\} \cup \{X=-1, Y=1\}} X \, dP = 0$$

$$E(X \mid Z = 2) = \frac{1}{P(Z=2)} \int_{\{Z=2\}} X \, dP = \frac{1}{P(Z=2)} \cdot \int_{\{X=+1, Y=1\}} X \, dP = \frac{1}{P(Z=2)} \cdot 1\, P(X=1, Y=1)$$
$$= 1$$

$$E(X|Z) = -1_{\{Z=-2\}} + 0 \cdot 1_{\{Z=0\}} + 1_{\{Z=2\}} = \frac{Z}{2}$$

PER SIMMETRIA $E(Y|Z) = \frac{Z}{2}$

$$S = E(X|Z) = \frac{Z}{2} \qquad T = E(Y|Z) = \frac{Z}{2}$$

$$\mathrm{Cov}(S,T) = E\left(\frac{Z^2}{4}\right) - E^2\left(\frac{Z}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(E(Z^2) - \underset{0}{\underset{\parallel}{E^2(Z)}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 0$$

$$E(Z^2) = \underset{1}{\underset{\parallel}{E(X^2)}} + 2E(XY) + \underset{1}{\underset{\parallel}{E(Y^2)}} = 2 + 2E(X)E(Y) = 2$$

DIRAC

$\longrightarrow$ NON SONO INDIPENDENTI

③

$N \sim Geom(p)$

$(X_n)_{n\geq 1}$ SUCC V.A. $X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ INDIP TRA LORO
E DA N

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} X_n \qquad E(S_N \mid N) = ?$$

$$E(S_N \mid N) = \sum_{h=1}^{\infty} E(S_N \mid N=h) 1_{\{N=h\}} = \sum_{h=1}^{\infty} E(S_h \mid N=h) 1_{\{N=h\}} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{h} X_k \mid N=h \right) \overset{1_{\{N=h\}}}{=} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} E(X_k \mid N=h) 1_{\{N=h\}} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} E(X_k) \overset{1_{\{N=h\}}}{=} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} \mu \overset{1_{\{N=h\}}}{=} \sum_{h=1}^{\infty} h\mu \overset{1_{\{N=h\}}}{=} \mu \sum_{h=1}^{\infty} h 1_{\{N=h\}} =$$

$$= \mu \cdot N$$

$$E(S_N) = E\big(E(S_N \mid N)\big) = E(\mu N) = \mu \cdot E(N) = \frac{\mu}{p}$$

$$D^2(S_N) = E(S_N^2) - E^2(S_N)$$

$$E(S_N^2) = \underline{E\big(E(S_N^2 \mid N)\big)}$$

$$E(S_N^2 \mid N) = \sum_{h=1}^{\infty} E(S_N^2 \mid N=h) 1_{\{N=h\}} = \sum_{h=1}^{\infty} E(S_h^2 \mid N=h) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} E\left(\left(\sum_{k=1}^{h} X_k \right)^2 \mid N=h \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{i\neq j}^{n} X_i X_j \mid N=n\right) 1_{\{N=n\}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 \mid N=n)\, 1_{\{N=n\}} + \sum_{n=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} E(X_i X_j \mid N=n)\, 1_{\{N=n\}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)\, 1_{\{N=n\}} + \sum_{n=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} E(X_i X_j)\, 1_{\{N=n\}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} n\, E(X_k^2)\, 1_{\{N=n\}} + \sum_{n=1}^{n} \sum_{i\neq j}^{n} \mu^2\, 1_{\{N=n\}} =$$

$$= E(X_k^2)\cdot N + \sum_{n=1}^{n} \mu^2\, 1_{\{N=n\}} \cdot n(n-1) =$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\, N + \mu^2 N(N-1)$$

$$= \cancel{\mu^2 N} + \sigma^2 N + \mu^2 N^2 - \cancel{\mu^2 N} = \sigma^2 N + \mu^2 N^2$$

4 $X \sim \text{UNIF}(-1, 1)$ $g(x) = x^2 - 2x$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 - 2X \leq y)$$

$x^2 - 2x - y = 0$ $\Delta = 1 + y$

- SE $y < -1$

$\rightarrow 0$

- SE y

LEZIONE 15-12-2022

SUCCESSIONI DI V.A.

DATA UNA SUCCESSIONE $(a_n)_{n\geq 0}$ TC $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ SSE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ TC $\forall n \geq \varepsilon$ $|a_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$

SIA $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ E $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

POSSO INTERPRETARLO IN DUE MODI:

- CONVERGENZA PUNTUALE.

$\forall x \in [a,b]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

- CONVERGENZA UNIFORME

$\forall x \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ TC $|f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

NOTA!! UNIFORME $\longrightarrow$ PUNTUALE

AD ESEMPIO

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

- CON PUNTUALE NON SEMPRE SIGNIFICA $\int_a^b f(x)\,dx$
- CON PUNTUALE INVECE VALE SEMPRE $= \int_a^b f(x)\,dx$

DEFINIZIONE. SIA $(X_n)_{n\geq 0}$ UNA SUCC DI VA

$\lim_{n\to+\infty} X_n = X$ QUASI CERTAMENTE SU Ω ($X_n \xrightarrow{A.S} X$) SIGNIFICA

CHE $\exists\, E \in \mathcal{E} : P(E) = 1 \quad \forall \omega \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\omega,\varepsilon) :$

$\forall n > n(\omega,\varepsilon) \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$

OVVERO • MI BASTA CHE FUNZIONI PER UN EVENTO QUASI CERTO
• IL RESTO E' UGUALE ALLA CONVERGENZA PUNTUALE

ABBIAMO QUINDI UNA "CONVERGENZA PUNTUALE QUASI CERTA"

SIA $\Omega = ([0,1], \mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1]), \mu_L)$

NOTA. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ E' NUMERABILE $\to$ POSSO DEFINIRLO COME SUCCESSIONE $(\phi_n)_{n\geq 1}$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} (-1)^n & \omega = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \\ 1/n & \text{ALTRO} \end{cases}$$

QUINDI X_n • VALE $(-1)^n$ SUI RAZIONALI DI $[0,1]$
• VALE $1/n$ SUGLI IRRAZIONALI

POICHE' $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ E' NUMERABILE, LA $\mu_L(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$

QUINDI X_n SI COMPORTA COME $1/n$ E CONVERGE A 0 QUASI CERTAMENTE.

PROPRIETÀ: $X_n \to X$ ED $X_n \to Y \implies X = Y$ QUASI CERTAMENTE
$\left(\text{OVVERO } P(\{\omega \in \Omega \text{ TC } X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0 \right)$

PROPRIETÀ: $X_n \xrightarrow{A.S} X$ SSE $X_n - X \xrightarrow{A.S} 0$

PROPRIETÀ: $X_n \xrightarrow{A.S} X$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA ;
ALLORA $g(X_n) \xrightarrow{A.S} g(X)$

PROPRIETÀ: $X_n \xrightarrow{A.S} X$; $Y_n \xrightarrow{A.S} Y$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
ALLORA
- $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{A.S} \alpha X + \beta Y$
- $X_n Y_n \to XY$
- $\dfrac{X_n}{Y_n} \to \dfrac{X}{Y}$ SE $P(Y_n = 0) = 0$ DEFINITIVAMENTE
  $P(Y = 0) = 0$

PROPRIETÀ: $X_n \xrightarrow{A.S} X$ SSE $\lim\limits_{m \to \infty} P\left(\bigcap\limits_{n \geq m} \{|X_n - X| < \varepsilon\} \right) = 1$

OPPURE

$$\lim_{m \to \infty} \left(\bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \right) = 0$$

GLI EVENTI $\{|X - X_n| < \varepsilon\}$ SONO EVENTI DI Ω ; QUANDO POI FACCIO L'INTERSEZIONE SIGNIFICA CHE QUESTE CONDIZIONI DEVONO VALERE PER TUTTI GLI EVENTI ; SE IL lim VA AD 1 SIGNIFICA CHE QUESTO INSIEME È MOLTO GRANDE

PROPRIETÀ. SIA $(X_n)_{n\geq 1}$ ED X UNA VA;

SIA $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

ALLORA $X_n \xrightarrow{A.S} X$ (NON È VERO IL VICEVERSA)

DEFINIZIONE. $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{P} X$ CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

OPPURE

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

RISPETTO A PRIMA, QUI NON HO L'INTERSEZIONE! IN QUEL CASO HO IL LIM SU M E POI L'INTERSEZIONE, QUINDI AVRÒ UN EVENTO CHE SARÀ PIÙ PICCOLO RISPETTO A $|X_n - X| < \varepsilon$.

PROPRIETÀ. CONVERGENZA QUASI CERTA $\Longrightarrow$ CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

ESEMPIO. SIA $(X_n)_{n\geq 1}$ TC X_n HA DENSITÀ $f_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}$

$\downarrow$

SONO DELLE V.A. DI CAUCHY

VEDIAMO SE $X_n \xrightarrow{P} 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n| < \varepsilon) = 1$$

$nx = y$

$$P(|X_n| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < X < \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon}}{\pi} \int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\, dy = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} y \,\Big|_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} n\varepsilon - \operatorname{arctg}(-n\varepsilon) \right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n\varepsilon .$$

DA CUI HO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(n\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

<u>PROPRIETA'</u>. $X_n \xrightarrow{P} X$ E $Y_n \xrightarrow{P} Y$.
ALLORA $X = Y$ QUASI CERTAMENTE RISPETTO A P

<u>OSSERVAZIONE</u>. $X_n \xrightarrow{P} X$; <u>SE X_n CONVERGE AS</u> ALLORA $X_n \xrightarrow{A.S} X$

<u>ESEMPIO</u>. X_n COME PRIMA DI CAUCHY. X_n INDIPENDENTI.

$$\lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{n \geq m} \{ |X_n| < \varepsilon \} \right) = 1 \ ?$$

SE LIMITO L' INTERSEZIONE AVRO' UN EVENTO PIU' GRANDE

$$\leq \lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{n=m}^{2m} \{ |X_n| < \varepsilon \} \right) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} P\left(\{ |X_n| < \varepsilon \} \right) =$$

CRESCENZA arctg

$$= \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(n\varepsilon) \leq$$

CON GEOGEBRA

$$\leq \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(2m\varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(2m\varepsilon) \right)^m$$

$\boxed{<}\ 1$

QUESTO E' IL MODO SOLITO IN CUI SI PROCEDE PER VEDERE CHE NON C'E' CONVERGENZA AS CON VA INDIP

$$\lim_{m\to\infty}\left(\bigcap_{n\geq m}\right) \leq \lim_{m\to\infty}\left(\bigcap_{n\geq m}^{\infty}\right) < 1$$

<u>PROPRIETA'</u>. $X_n \xrightarrow{P} X$; $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINUA ;

ALLORA $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

<u>PROPRIETA'</u>. $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ALLORA
- $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$
- $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
- $\dfrac{X_n}{Y_n} \longrightarrow \dfrac{X}{Y}$ SE $P(Y_n = 0) = 0$ DEFINITAMENTE
  $P(Y=0)=0$

<u>ESEMPIO</u>. $(X_n)_{n\geq 1}$ TC $X_n \sim Ber(1/n)$ E INDIPENDENTI

VEDIAMO $X_n \xrightarrow{P} 0$ E $X_n \xrightarrow{A.S.}\!\!\!\!\!\!\!\!\times\;\; 0$

1.

CONV IN PROB $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} P(|X_n| < \varepsilon) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n < \varepsilon) =$$

ε E' PICCOLO

$\to$ MORALMENTE E' LO STESSO

$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \implies X_n \xrightarrow{P} 0$$

2. $\lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{n \geq m} \{|X_n| < \varepsilon\} \right) = 1$?

$$\lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{n \geq m} \{|X_n| < \varepsilon\} \right) \leq \lim_{m \to \infty} P\left(\bigcap_{n=m}^{2m} \{|X_n| < \varepsilon\} \right) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} P(|X_n| < \varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} P(X_n = 0) =$$

INDIP

$$= \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \lim_{m \to \infty} \prod_{n=m}^{2m} \left(1 - \frac{1}{2m}\right) =$$

CRESCENZA

$$= \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2m}\right)^m = e^{-1/2} < 1$$

QUINDI NON HO CONVERGENZA QUASI CERTA.

ATTENTO !! SENZA INDIPENDENZA NON POSSO PROCEDERE IN QUESTO MODO

PROPRIETÀ: $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_{n_k} \xrightarrow{A.S} X$

$\exists$ UNA SOTTOSUCCESSIONE (NON LA SUCC STESSA) CHE CONVERGE AS AD X.

LEZIONE 20-12-2022

CONVERGENZA DEBOLE (O IN DISTRIBUZIONE)

DEF. $(X_n)_{n\geq 1}$ TC $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ E $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (NON HO A PRIORI LO STESSO SPAZIO DI PROB); $F_{X_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ALLORA HO CONVERGENZA DEBOLE ($X_n \xrightarrow{w} X$) SE

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ TC F_X E' CONTINUA

PER VERIFICARLA NON MI INTERESSANO I PUNTI DI DISCONTINUITA'

ESEMPIO. $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ $\mathcal{E}_n = P(\Omega_n)$

$P_n : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+$ TC $P_n(E) = \frac{|E|}{n}$ (PROB NATURALE)

$X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ TC $X_n(\omega_{n,k}) = \frac{k}{n} \quad \forall k = 1 \dots n$

n INDICA Ω_n

k INDICA UNO TRA 1 ED n

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

SONO SPAZI CHE DESCRIVONO LE VA UNIFORMI DISCRETE

SIA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $X \sim Unif(0,1)$ TC $X(\omega) = \omega$

$\Omega = ([0,1], B([0,1]), \mu_L)$

X HA DENSITÀ $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$

ALLORA $F_X(x) = x \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{(1,+\infty)}$

VEDIAMO $X_n \xrightarrow{w} X$

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (F_X È CONTINUA) ?

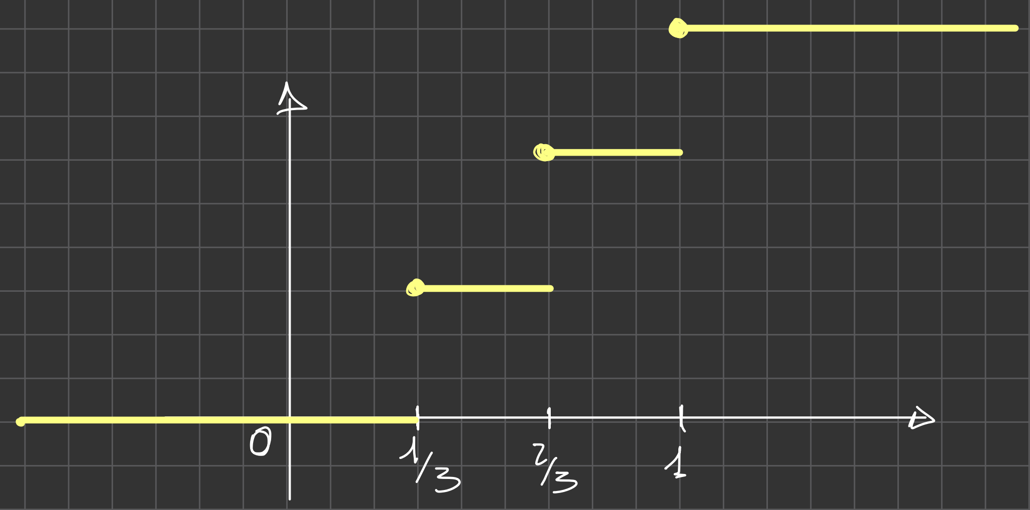
SCRIVIAMO F_{X_n}

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \le 1/n \\ 1 & \text{SE } x \geq 1 \\ \frac{k}{n} & \text{SE } \frac{k}{n} \le x < \frac{k+1}{n} \end{cases}$$

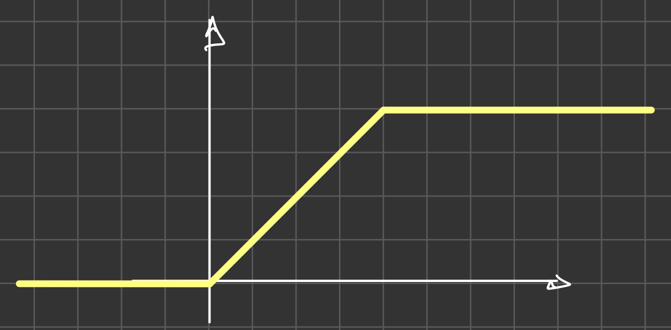
$$X_n(\omega_{n,k}) = \frac{k}{n}$$

SE $n = 3$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{cases}$$



QUINDI DIRE $X_n \xrightarrow{w} X$ SIGNIFICA CHE IL GRAFICO TENDE A



$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ VERO SE $x \le 0$ E $x \geq 1$
PERCHÉ HANNO LO STESSO VALORE

VEDIAMO SE $x \in (0,1)$

ALLORA $\exists\ n(x) : \quad x > \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq x$

$\exists\ k(x,n) : \ k(x,n) \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ E $x \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$

UNA VOLTA CHE SUPERO x CON $\frac{1}{n}$, POSSO TROVARE UN k TC POSSO METTERE x IN QUELL' INTERVALLO

INFATTI GLI INTERVALLI $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right] \dots \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$

PARTIZIONANO $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ E POICHÉ $x > \frac{1}{n}$ IN QUALCHE INTERVALLO LA x DEVE ANDARE

ALLORA

$$\frac{k}{n} = F_x\left(\frac{k}{n}\right) \leq F(x) \leq F_x\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{k+1}{n}$$

MONOTONIA

$$F_{X_n}(x) = \frac{k}{n} \longrightarrow -F_{X_n}(x) = -\frac{k}{n}$$

SOTTRAIAMO A TUTTI I MEMBRI $F_{X_n}(x)$

$$0 \leq F(x) - F_{X_n}(x) \leq \frac{1}{n}$$

$\longrightarrow$ TEOREMA DEI CARABINIERI

$$\lim_{x \to +\infty} \left(F(x) - F_{X_n}(x)\right) = 0 \implies X_n \xrightarrow{w} X$$

TEOREMA. $X_n \xrightarrow{w} X$

SSE

$$\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(B) = P_X(B) \quad \underbrace{\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P(\partial B) = 0}_{\text{EQUIVALENTE DEL } \forall x \in \mathbb{R} \text{ TC } F_X \text{ CONTINUA}}$$

FRONTIERA

TEOREMA. $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \, dP_{X_n} = \int_{\mathbb{R}} f \, dP_X \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

C_b: FUNZIONI CONTINUE E LIMITATE SUPERIORM

$\boxed{\text{TEOREMA DI LÉVY}}$.

1. $X_n \xrightarrow{w} X \implies \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$

2. $\phi_{X_n}(t) \to \phi(t)$ CON ϕ CONTINUA IN 0

$\implies \phi_{X_n}(t) = \phi(t)$ E $X_n \xrightarrow{w} X$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$. SE $\Omega_n \equiv \Omega$ E $X_n \xrightarrow{P} X$

ALLORA

$X_n \xrightarrow{w} X$

NON VALE IL VICEVERSA

ESEMPIO. $X \sim N(0,1)$ $\quad -X \sim N(0,1)$

SIA $X_n = -X \quad \forall n$

$X_n \xrightarrow{w} N(0,1) = X$

PERO' $X_n \xrightarrow{P} -X$ CON $P(X=-X) = P(2X=0) = 0$

$\Longrightarrow$ QUINDI $X_n \xrightarrow{w} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

NOTA. NEL CASO DI CONVERGENZA DEBOLE POSSO AVERE PIU' LIMITI

PROPOSIZIONE. SE $\Omega_n = \Omega$ E $X_n \xrightarrow{w} \Delta_{\mathbb{R}}(x_0)$

ALLORA

$X_n \xrightarrow{P} \Delta_{\mathbb{R}}(x_0)$

TEOREMA. $X_n \xrightarrow{w} X$ E g CONTINUA

ALLORA

$g(X_n) \xrightarrow{w} g(X)$

TEOREMA. SIANO X_n E Y_n DUE SUCC DI VA; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

X_n ED Y_n SCORRELATE; $X_n \xrightarrow{w} X$ E $Y_n \xrightarrow{w} Y$

ALLORA

$\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{w} \alpha X + \beta Y$

TEOREMA. SIANO $X_n \xrightarrow{w} X$ E $Y_n \xrightarrow{w} \text{Dir}(y_0)$

ALLORA

$$X_n Y_n \xrightarrow{w} y_0 X$$

CONVERGENZA IN NORMA L^P

$$L^P(\Omega, \mathbb{R})$$

- SPAZIO DI BANACH
- SPAZIO DI HILBERT SE $p = 2$

→ POSSO METTERCI UNA NORMA

$$\| X \|_p = \left(\int_\Omega |X|^p \, dP \right)^{1/p}$$

DEFINIZIONE. $X_n \xrightarrow{L_p} X$

SSE

$$\lim_{n \to \infty} \| X_n - X \|_p = 0$$

NOTA. E' COME SE STESSI FACENDO IL LIMITE IN $\mathbb{R}^N$, OVVERO VEDO SE LA LORO DISTANZA VA ALLO ZERO

TEOREMA. $X_n \xrightarrow{L^P} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$ SE $p \geq 1$

DIMOSTRAZIONE. $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$

$$\underbrace{P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p)}_{\text{MONOTONIA}} \underbrace{\leq}_{\text{MARKOV}}$$

$$= \frac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p} = \frac{\| X_n - X \|_p^p}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0$$

$\| X_n - X \|_p \longrightarrow 0$ PER HP

TEOREMA. $X_n \xrightarrow{L^p} X \Longrightarrow \exists \, (X_{n_k})_{k \geq 1}$ SOTTOSUCC DI X_n TC

$$X_{n_k} \xrightarrow{A.S} X$$

ATTENTO! QUESTO <u>NON</u> SIGNIFICA $X_n \xrightarrow{L^p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{AS} X$!!

TEOREMA. $(X_n)_{n \geq 1}$ E $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ E $X_n \xrightarrow{P} X$

ALLORA

$$X_n \xrightarrow{L^p} X$$

PROPRIETA'. $X_n \xrightarrow{L^p} X$ E $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$ E $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{L^p} \alpha X + \beta Y$$

ATTENTO!! $X_n \xrightarrow{L^p} X$ E g CONTINUA NON E' DETTO CHE

$$g(X_n) \xrightarrow{L^p} g(X) \text{ !!}$$

INFATTI NON E' DETTO CHE $g(X_n) \in L^p$!! (POTREI ANDAR FUORI)

DEFINIZIONE. $X_n \xrightarrow{L^1} X$ SI DICE CONVERGENZA IN MEDIA $(p = 1)$

$$\|X_n - X\|_1 = E(|X_n - X|) \longrightarrow 0$$

DEFINIZIONE. SE $p=2$ $X_n \xrightarrow{L_2} X$ E' DETTA CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

$$\|X_n - X\|_2 = E((X_n - X)^2) \longrightarrow 0$$

LEZIONE 22-12-2022

SUPPONIAMO DI LANCIARE UNA MONETA

$$X = \begin{cases} 0 & P(X=1) \\ 1 & P(X=0) \end{cases}$$

VOGLIO STIMARE $P(X=1)$

FACCIO n LANCI QUINDI AVRO' $\omega = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \dots)$

$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \overline{X}_n(\omega)$ E' UNA STIMA DELLA PROBABILITA'

SU n LANCI $\Omega = \bigtimes_{k=1}^{n} \{0, 1\}$ QUESTI SONO TUTTI I POSSIBILI ESITI

POSSO DEFINIRE

$X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ TC $X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_k = 1 \\ 0 & \omega_k = 0 \end{cases}$

SI COMPORTANO TUTTE COME X

LE X_k
- SONO INDIPENDENTI PER COME ABBIAMO COSTRUITO IL MODELLO
- SONO COPIE DI X

L'OGGETTO $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ E' DETTO STIMATORE : STUDIANDO LO STIMATORE POSSO OTTENERE I PARAMETRI CHE MI MANCANO DI X

NON TUTTI GLI STIMATORI SONO BUONI : SE PRENDESSI X_3 COME STIMATORE, QUESTO NON E' BUONO PERCHE' NON CATTURA PROPRIETA' GENERALI.

NOTIAMO CHE

- $$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\cdot n\,P(X=1) = p$$

$$E(X_k) = p$$

- $$D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dots = \frac{pq}{n^2}$$

$$D^2(X_k) = pq$$

NEL PRIMO CASO LA VARIANZA ALL' AUMENTO DI n VA A ZERO, NEL SECONDO CASO NO!

LE LEGGI DEI GRANDI NUMERI DESCRIVONO LE PROPRIETÀ ASINTOTICHE DI ALCUNI STIMATORI.
QUESTO PERMETTE DI DIRE CHE IL VALORE CHE STIMO CON UN CERTO ESPERIMENTO È ATTENDIBILE

LEGGI DEI GRANDI NUMERI
- DEBOLI
  - IPOTESI FORTI
  - IPOTESI DEBOLI
- FORTI
  - IPOTESI FORTI
  - IPOTESI DEBOLI

<u>LEGGE DEB HP FORTI</u>. SIA $(X_n)_{n\geq 1}$ VA INDIP E BERNOULLIANE.
SIA $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p$ E SI DICE CHE $\bar{X}_n$ È CONSISTENTE IN PROBABILITÀ.

DIMOSTRAZIONE. $E(\bar{X}_n) = p \quad D^2(X_n) = \frac{pq}{n^2}$

$$P(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n^2\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

SE $n \to \infty$

QUINDI $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p$

$$0 \leq P(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{pq}{n^2\varepsilon^2}}$$

LEGGE DEBOLE HP SEMI-DEB. $(X_n)_{n\geq 1}$ VA INDIP TC $\exists\, E(X_n^2)$ FINITO SIA $E(X_n) = \mu_n = \mu$ (TUTTE STESSA MEDIA) E SIA $D^2(X_n) = \sigma_n^2$ TC $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0$. DETTO $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ALLORA

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

DIMOSTRAZIONE. $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$

$$D^2(\bar{X}_n) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(X_n) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$

DA CUI

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \longrightarrow 0 \quad \text{PER } n \to \infty$$

QUINDI $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

<u>LEGGE DEBOLE HP DEBOLI</u>. SIA $(X_n)_{n\geq 1}$ VA INDIP CON MOMENTO DI ORDINE 1 TC $E(X_n) = \mu_n = \mu$.

ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

<u>LEGGE FORTE HP FORTI</u>. $(X_n)_{n\geq 1}$ SUCC VA CON MOMENTO FINITO DI ORDINE 2. SIA $E(X_n) = \mu_n$ $D^2(X_n) = \sigma_n^2$. SIA $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$

SIA $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. ALLORA $\exists\ X \in L^2$ TC $Z_n - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \xrightarrow{AS} X$

<u>LEGGE FORTE HP FORTE BIS</u>. $(X_n)_{n\geq 1}$ SUCC VA CON MOM FINITO DI ORDINE 2. $E(X_n) = \mu_n = \mu$ E $D^2(X_n) = \sigma_n^2$ TC $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < +\infty$. ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{AS} \mu$

<u>TEOREMA DI KOLMOGOROV</u>. $(X_n)_{n\geq 1}$ SUCC DI VA INDIP E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE E DI ORDINE 1.

ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{AS} \mu$

<u>DEFINIZIONE</u>. $S^2_{X,n} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2$ E' DETTO VARIANZA CAMPIONARIA NON DISTORTA.

<u>NOTA</u>. $E(S^2_{X,n}) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} E((X_k - \bar{X}_n)^2) =$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(E(X_k^2) - 2E(X_k \cdot \bar{X}_n) + E(\bar{X}_n^2) \right) = \dots = \sigma_X^2$$

TEOREMA. $(X_n)_{n\geq 1}$ VA INDIP E CON MOM FINITO DI 2° ORDINE.
ALLORA $S_n^2 \xrightarrow{AS} \sigma_X^2$.

NOTA. CI SONO ANCHE LEGGI DEI GRANDI NUMERI IN L^p CHE CI PERMETTONO DI DIRE $\overline{X}_n \xrightarrow{L^2} \mu$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE. SIA $(X_n)_{n\geq 1}$ VA INDIP, IDENTICAMENTE DISTRIBUITE E CON $\exists$ FINITO $E(X_n^2)$. SIA $E(X_k)=\mu$ E $D^2(X_k)=\sigma^2$.

SIA $\tilde{Z}_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. ALLORA $\tilde{Z} \xrightarrow{w} N(0,1)$

E' COME SE LA NORMALE FOSSE UNA COSTANTE DELLA NATURA A CUI A LUNGO TERMINE TENDONO FENOMENI ALEATORI CON UNA CERTA REGOLARITA'.

LEZIONE 10 - 01 - 2023

STATISTICA INFERENZIALE

PERMETTE DI INFERIRE DELLE PROPRIETA' DEI DS.

ESEMPIO. HO UN DS.
VOGLIO STIMARE LA MEDIA

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_n \in \mathbb{R}^N$$

SE VOGLIO CONSIDERARE $\bar{x}_n$ COME STIMA DELLA MEDIA DEL DS, CONSIDERO UNA SEQ DI VA $X_1, X_2, \dots, X_n$; COSTRUISCO $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_n$

ALLORA CONSIDERO $\bar{x}_n = \bar{X}_n(\omega)$ PER QUALCHE ω

NOI SUPPONIAMO CHE GLI x_k VENGANO DAL CAMPIONAMENTO DI UNA CERTA POPOLAZIONE.
IL PUNTO E' CAPIRE QUANTO L' $\bar{X}_n$ SIA RAPPRESENTATIVO DELLA MEDIA DELLA POPOLAZIONE, ANCHE DI COLORO CHE NON SONO STATI CAMPIONATI.

IL CAMPIONAMENTO E' SUPPOSTO INDIPENDENTE, OVVERO LA SCELTA DEI CAMPIONATI E' DEL TUTTO CASUALE E NON SEGUE UN CRITERIO.

IN GENERALE, UN APPARTENENTE ALLA POPOLAZIONE E' DESCRITTO DA UN CERTO VETTORE X.
SUPPONIAMO $X = (H, W)$ (ALTEZZA, PESO) CON F_X E f_X

POSSIAMO DIRE CHE f_X DIPENDE DA h, w, MA ANCHE DA μ E σ

PER TROVARE LA f_X DEVO TROVARE IL VALORE VERO DI μ E σ. SE POSSO PRENDERE TUTTA LA POPOLAZIONE ALLORA μ E σ LI POSSO TROVARE; SE NON POSSO, μ E σ LI DEVO STIMARE!!
QUANTO E' BUONA QUESTA STIMA ??

<u>DEFINIZIONE</u>. $X_1, X_2, \dots, X_n$ CON STESSA DIST E INDIPENDENTE, SI DICE CAMPIONE ALEATORIO SEMPLICE DI X.

PARTENDO DA $X_1, X_2, \dots, X_n$ POSSO COSTRUIRE DELLE VA DETTE STATISTICHE; FATTO QUESTO, LA STIMA E' IL VALORE DELLA STATISTICA IN UN CERTO SOTTOINSIEME

<u>DEFINIZIONE</u>. UNA POPOLAZIONE E' UN INSIEME DI DATI

NEL CASO (ALT, PESO), LA POPOLAZIONE E $\{(h_k, w_k)\}_{k=1}^{n}$

LA MIA POPOLAZIONE HA μ E σ^2 VERI!!

NEL NOSTRO CASO $\mu = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h_k, \sum_{k=1}^{n} w_k\right)$.

NON POTENDO FARE IL CALCOLO SU TUTTA LA POPOLAZIONE, CONSIDERO m COPIE INDIP DI X, OVVERO $X_1, X_2, \dots, X_m$ CON $X_i = (H_i, W_i)$ E CONSIDERO $\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} H_k, \sum_{k=1}^{m} W_k\right)$
$= (\overline{H}_m, \overline{W}_m)$ CHE SONO A LORO VOLTA VA.

QUESTA E' UNA STATISTICA

SE USO QUESTA STATISTICA PER STIMARE μ, SI DICE CHE SONO DEGLI STIMATORI PER μ.

PER STIMARE POSSO VEDERE IL VALORE ATTESO SUL CAMPIONE

$$(\bar{H}_m(\omega), \bar{W}_m(\omega)) = (\hat{\mu}_H, \hat{\mu}_W) \text{ CHE STIMANO } \mu = (\mu_H, \mu_W)$$

NELLA PRATICA, MI BASTA FARE

$$\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} h_k, \sum_{k=1}^{m} w_k\right) = \left(\bar{H}_m(\omega), \bar{W}_m(\omega)\right)$$

QUI STO DICENDO CHE (h_i, w_i) E' IL VALORE ASSUNTO DA (H_i, W_i) SU ω.

CONSIDERIAMO $\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h_j, \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_j\right) = (\hat{\mu}_H, \hat{\mu}_W)$.

QUESTO E' UN BUON STIMATORE.

QUANDO LO COSTRUISCO PRENDO m COPIE DI X, $X_1, X_2, \dots, X_m$ INDIPENDENTI.

HO CHE

$$(\hat{\mu}_H, \hat{\mu}_W) = (\bar{H}(\omega), \bar{W}(\omega))$$

QUESTA E' UNA STIMA ATTENDIBILE PER LE PROPRIETA DI $(\bar{H}, \bar{W})$

INFATTI $E[(\bar{H}, \bar{W})] = E((H, W))$

$$D^2(\bar{H}) = \frac{1}{m^2} D^2(H) \qquad D^2(\bar{W}) = \frac{1}{m^2} D^2(W)$$

QUINDI OTTENGO UNA VARIANZA PIU' BASSA! QUINDI PRENDENDO UN VALORE DI $(\bar{H}, \bar{W})$ QUESTO SI DISCOSTA MENO DALLA MEDIA DI $E((\bar{H}, \bar{W})) = E((H, W))$.

SE PRENDESSI COME STIMATORE $X_1 = X$, NON AVREI NESSUN VANTAGGIO !!

$$E(X_1) = E(X) \qquad D^2(X_1) = D^2(X)$$

OK

HO LA STESSA VARIANZA !!

<u>DEFINIZIONE</u>. UN CAMPIONE ALEATORIO SEMPLICE DI TAGLIA $n \geq 1$ ESTRATTO DA X E' UNA SUCCESSIONE DI n VA CHE SONO:
- INDIPENDENTI
- CON STESSA DISTRIBUZIONE DI X

<u>DEFINIZIONE</u>. DATA UNA FUNZIONE BORELIANA $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ E' UNA STATISTICA SUL CAMPIONE $X_1, X_2, \dots, X_n$ OPPURE STATISTICA DI TAGLIA n SU X.

<u>ESEMPIO</u>. $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TC $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$

$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k$ "SOMMA CAMPIONARIA"

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X) = n E(X)$$

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} D^2(X) = n D^2(X)$$

LA VARIANZA MI AUMENTA !! QUINDI NON E' UNA BUONA STATISTICA SE VOGLIO STIMARE LA MEDIA

ESEMPIO. $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ "MEDIA CAMPIONARIA"

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = E(X)$$

$$D^2\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} D^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} D^2(X)$$

- STESSA MEDIA
- VARIANZA DIMINUITA !! ALL' AUMENTO DI n DIMINUISCE

SE VOGLIO DIRE QUANTO LO STIMATORE SIA ATTENDIBILE, DEVO TROVARE LA SUA DISTRIBUZIONE; PER FARLO DEVO FARE IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DI X.

ESEMPIO. $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k = Z_n$

- $X \sim Ber(p) \Longrightarrow Z_n \sim Bin(p, n)$
- $X \sim Poiss(\lambda) \Longrightarrow Z_n \sim Poiss(n\lambda)$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $X \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow Z_n \sim \Gamma(n, \lambda)$
- $X \sim \chi^2_1 \Longrightarrow Z_n \sim \chi^2_n$

  $\chi^2_1 = X^2$ CON $X = N(0,1)$

ESEMPIO. $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_1$

SIA $Z = \dfrac{Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$: STANDARDIZZAZIONE DI Z_n

$$Z \xrightarrow[n \to \infty]{w} N(0,1)$$

PROPRIETÀ. $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \bar{X}_n$ $\quad E(\bar{X}_n) = E(X)$

$$D^2(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} D^2(X)$$

- SE $X \in L^1$ ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu_X$ (KINTCHINE)
- SE $X \in L^2$ ALLORA $\bar{X}_n \xrightarrow{L^2} \mu_X$
- $E(X) = \mu$ E $D^2(X) = \sigma^2$; ALLORA

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{w} N(0,1)$$

ESEMPIO. $g(x) = MAX(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = MAX(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

SUPPONIAMO $X \sim Exp(\lambda)$

$$F_{MAX}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n \, 1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

E' IMPORTANTE, AD ESEMPIO PER LO STUDIO DEL TEMPO DI VITA DI UN CIRCUITO IN PARALLELO

LEZIONE 11-10-2023

VARIANZA CAMPIONARIA DELLA POPOLAZIONE

$$S^2_{x,n}(\mu_x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_x)^2$$

DEVO CONOSCERE IL VALORE VERO DI μ_x

$$E(S^2_{x,n}(\mu_x)) = \sigma^2_x$$

VARIANZA CAMPIONARIA

$$S^2_{x,n} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}_n\right)^2$$

UNBIASED SAMPLE VARIANCE

A $\mu_x \longrightarrow \overline{X}_n$ STIMATORE DI μ_x

SI VEDE CHE $E(S^2_{x,n}) = \sigma^2_x$

ESEMPIO. $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ DISTRIBUITO SECONDO UNA VA $X \in L^2$

VOGLIO STIMARE σ^2_x

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) = \hat{\sigma}^2_x \quad \text{STIMA } \sigma^2_x$$

QUESTO PERCHÉ $\hat{\sigma}^2_x$ E' UNA REALIZZAZIONE DI $S^2_{x,n}$
DOVE $E(S^2_{x,n}) = \sigma^2_x$.

QUANTO E' BUONA LA STIMA DIPENDE DA $D^2(S^2_{x,n})$

$$E(S^2_{x,n}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} E\left(\left(X_k - \bar{X}_n\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left[E(X_k^2) - 2E(X_k)E(\bar{X}_n) + E(\bar{X}_n^2) \right] =$$

$$= \dots = \sigma^2_X$$

IL MOTIVO PER CUI METTO $n-1$ VIENE DAL FATTO CHE NON STO USANDO IL VALORE VERO DI μ_X, MA UNA SUA STIMA: E' UN FATTORE CORRETTIVO

$$\tilde{S}_{x,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 \quad \text{BIASED SAMPLE VARIANCE}$$

$$E(\tilde{S}_{x,n}) = \frac{n-1}{n} E(S^2_{x,n}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2_{x,n}$$

VEDIAMO

$$D^2(S_{x,n}) = E(S^2_{x,n}) - E^2(S^2_{x,n}) = \dots = \frac{1}{n}\left(\mu_X^{(4)} - \frac{n-3}{n-1}\sigma_X^4\right) =$$

$$= \frac{\sigma_X^4}{n}\left(k - \frac{n-3}{n-1}\right)$$

PER POTERLO FARE DEVO SUPPORRE $X \in L^4$

$$\mu_X^{(4)} = E((X - \mu_X)^4)$$

σ_X = DEV STD X

$$k = \frac{\mu_X^{(4)}}{\sigma_X^4} \quad \text{KURTOSIS}$$

NOTIAMO CHE n GRANDE $D^2 \to 0$

E QUINDI UN VALORE DI $S^2_{x,n}$ E' VICINO A $E(S^2_{x,n}) = \sigma^2_X$!

$$\hat{\sigma}^2_X \cong \sigma^2_X$$

__TEOREMA.__ SIA $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$; SIA $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

SIA $S_{x,n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_n - \bar{X}_n)^2$.

ALLORA $\bar{X}_n$ E $S_{x,n}^2$ SONO INDIPENDENTI.

__TEOREMA.__ $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$.

ALLORA $\frac{(n-1) S_{x,n}^2}{\sigma_x^2} \sim \chi_{n-1}^2$

__TEOREMA.__ $X \sim N(0,1)$; $Y \sim \chi_n^2$; X ED Y INDIP.

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim T_n$$

(STUDENT AD $n-1$ GRADI DI LIBERTA')

$\downarrow$ SIMILE A GAUSSIANA, MA CON CODE PIU' SPESSE

__TEOREMA.__ $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$. ALLORA $\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{S_{x,n}\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$

__DIM.__

$$* \left\{ \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \right.$$

$$\cdot\ E\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\cdot\ D^2\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sigma_x^2 / n} \cdot \overbrace{D^2(\bar{X}_n - \mu_x)}^{= D^2(\bar{X}_n) = \frac{\sigma_x^2}{n}} = 1$$

$$\underbrace{\frac{(n-1)S^2_{x,n}}{\sigma^2_x}}_{**} \sim \chi^2_{n-1}$$

$*$ E $**$ SONO INDIPENDENTI

$$X = \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \qquad y = \frac{(n-1)S^2_{x,n}}{\sigma^2_x} \sim \chi_{n-1}$$

$$T_{n-1} \sim \frac{X}{\sqrt{\frac{y}{n-1}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\frac{\cancel{\sigma_x}}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{n-1}}}{\frac{\cancel{\sqrt{n-1}} \cdot S_{x,n}}{\cancel{\sigma_x}}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{S_{x,n}/\sqrt{n}}$$

<u>COROLLARIO.</u> $\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{S_{x,n}\sqrt{n}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$

$\downarrow$

ASINTOTICAMENTE

STIME PUNTUALI PARAMETRICHE

DATA X

$\nearrow$ $P_X(\cdot,\theta) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad P(B,\theta) = P(X \in B)$

$\searrow$ $F_X(x,\theta) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad F_X(x,\theta) = P(X \leq x)$

$\downarrow$ ASS CONTINUA

$f_X(x,\theta) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ TC $\quad P(X \in B) = \int_B f_X(x,\theta)\, d\mu_L(x)$

IL θ CARATTERIZZA LA DISTRIBUZIONE CHE CONSIDERO.

AD ESEMPIO, SE HO UN DATASET NORMALE, A CARATTERIZZARE LA DISTRIBUZIONE $\theta = (\mu_x, \sigma_x^2)$

SE E' ESPONENZIALE $\theta = \lambda$

SE E' BINOMIALE/BERNOULLIANA $\theta = p$

NELLA REALTA', NON CONOSCO IL θ: PARTENDO DAL DS POSSO PROVARE A STIMARE IL θ.

QUESTO SI FA CON "STIMATORI DEL PARAMETRO"

AD ESEMPIO NEL CASO NORMALE $\bar{X}_n$ STIMA θ_1

$S^2_{x,n}$ STIMA θ_2

DATO θ:
- INDICO CON $\hat{\theta}$ O $\hat{\theta}_n$ UNO STIMATORE PER θ
- INDICO CON $\hat{\theta}(\omega)$ O $\hat{\theta}_n(\omega)$ LA STIMA DI θ USANDO LO STIMATORE

COME VALUTARE LA BONTA' DI UNA STIMA

BISOGNA CAPIRE IL RAPPORTO TRA CIO' CHE VALUTO E LO STIMATORE

- $E[\hat{\theta} - \theta] = E[\hat{\theta}] - \theta = 0$

  $\downarrow$

  PER MOLTI STIMATORI

- $E(|\hat{\theta} - \theta|)$ POCO UTILE PERCHE' IL MODULO E' SCOMODO
- $E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = MSE(\theta)$ ERRORE QUADRATICO MEDIO

  $\rightarrow$ E' IL MODO MIGLIORE PER VEDERE LA BONTA' DI UNO STIMATORE

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[\hat{\theta}^2] - 2\theta E[\hat{\theta}] + \theta^2$$

SE LO STIMATORE E' NON DISTORTO $E(\hat{\theta}) = \theta$

QUINDI

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[\hat{\theta}^2] - \theta^2 = E[\hat{\theta}^2] - E^2[\hat{\theta}] = D^2[\hat{\theta}]$$

QUESTO E' IL MOTIVO PER CUI VOGLIAMO VARIANZE PICCOLE!

PICCOLE VARIANZE $\Rightarrow$ PICCOLI MSE

DETTO $BIAS(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ (UTILE SE $\hat{\theta}$ E' DISTORTO)

$$MSE(\hat{\theta}) = D^2(\hat{\theta}) + BIAS^2(\hat{\theta})$$

- SUPPONIAMO $\hat{\theta}_n$ PER θ SI DICE CHE $\hat{\theta}_n$ E'
  - CONSISTENTE IN PROBABILITA' $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$
  - CONSISTENTE IN MEDIA QUADRATICA $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L_2} \theta$

LEZIONE 12-01-2023

- $\overline{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} X_l^k$ STIMATORE DEL MOMENTO CRUDO K-ESIMO $\mu_X'^{(k)}$

$$E[\overline{X}_n^{(k)}] = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} E[X_l^k] = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} E[X^k] = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \mu_X'^{(k)} = \mu_X'^{(k)}$$

- $M_{X,n}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(X_l - \overline{X}_n)^k$ STIMATORE PER IL MOMENTO CENTRALE DI X DI ORDINE k $\mu_X^{(k)}$

$$\mu_X^{(k)} = E[(X-\mu_X)^k]$$

PROPRIETÀ. 1. $\overline{X}_n^{(k)} \xrightarrow{P} \mu_X'^{(k)}$ CONSISTENTE IN PROBABILITÀ

2. $D^2[\overline{X}_n^{(k)}] = \frac{1}{n}\sigma^2_{X^k}$ $\rightarrow$ DIPENDE DALLA VARIANZA DI X^k, NON DA QUELLA DI X

$\rightarrow$ LA VARIANZA VA COME $1/n$

$\overline{X}_n^{(k)} \xrightarrow{L^2} \mu_X'^{(k)}$ CONSISTENTE IN MEDIA QUADRATICA

PROPRIETÀ. 1. $M_{X,n}^{(k)} \xrightarrow{P} \mu_X^{(k)}$

ESEMPIO. SUPPONIAMO $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$. $\mu_X = ?$ $\sigma_X^2 = ?$

ABBIAMO DELLE STIME DI $\hat{\mu}_X$ E $\hat{\sigma}_X^2$.

COME SONO COSTRUITI GLI STIMATORI DA CUI PRENDO

INTRODUZIONE

ABBIAMO UNA VA X A CUI E' ASSOCIATA

- $P_X(\cdot,\theta): B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ TC $P_X(B,\theta) = P(X \in B)$

  LA DIPENDENZA DI P_X DAL PARAMETRO VIENE DALLA DIPENDENZA DI X DAL PARAMETRO θ STESSO

- $F_X(\cdot,\theta): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TC $F_X(x,\theta) = P(X \leq x)$

- $f_X(\cdot,\theta): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TC $P(X \in B) = \int_B f_X(x,\theta)\, d\mu(x)$

ASSOCIAMO AD X UN SRS DI DIMENSIONE n $X_1, X_2, \dots, X_n$.
QUESTO E' UN VETTORE ALEATORIO DI DIM n

- $P_{X_1,X_2,\dots,X_n}: B(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ TC

$$P_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in B_k) = \prod_{k=1}^{n} P_{X_k}(B_k)$$

INDIP   STESSA DIST

- $F_{X_1,X_2,X_n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TC

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) =$$

INDIP

$$= P(X_1 \leq x_1)\, P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n) =$$

STESSA DIST

$$= F_X(x_1)\, F_X(x_2) \dots F_X(x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_X(x_k;\theta)$$

- $f_{X_1, X_2, X_n}(x_1, x_2, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k, \theta)$

METODO DEI MOMENTI

VOGLIO STIMARE I PARAMETRI θ DI UNA VA X.

$f_X(x, \theta)$ CON $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$

SIA $\overline{X}_n^{(J)}$ LO STIMATORE DEL MOMENTO CRUDO DI ORDINE J

CON $J = 1, 2, ..., m$

COSTRUIAMO DA f I MOMENTI VERI DI ORDINE J $E(X^J)$

$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x,\theta) \, d\mu_L(x)$ $\quad$ $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, f_X(x,\theta) \, d\mu_L(x)$

$E(X^3) = \int_{\mathbb{R}} x^3 \, f_X(x,\theta) \, d\mu_L(x)$ ECC.

POICHÉ LA $\overline{X}_n^{(J)}$ STIMA $E(X^J)$, IMPONIAMO

$\forall J = 1, 2, ..., m \quad \overline{X}_n^{(J)} = E(X^J)$

OTTENIAMO UN SISTEMA DI m EQUAZIONI NELLE m COMPONENTI DI θ.

RISOLVENDO IL SISTEMA IN $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ TROVO

$\theta_J = f_J(\overline{X}_n^{(1)}, X_n^{(2)}, ..., X_n^{(m)})$ SONO ANCORA VA!

QUINDI SONO $\hat{\theta}_J$ STIMATORI DI θ_J !!

ESEMPIO. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ $\quad f_x(x; \mu, \sigma^2)$

$$f_x(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X) = \mu \quad ; \quad E(X^2) = D^2(X) + E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\begin{cases} \overline{X}_n^{(1)} = \mu \\ \overline{X}_n^{(2)} = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = \overline{X}_n^{(1)} \\ \overline{X}_n^{(2)} = \overline{X}_n^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

$$\overline{X}_n^{(2)} - \overline{X}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n^2\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1} X_n\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n^2\right) - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} X_i X_j\right)\right] = \dots =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}_n\right)^2}_{} = \sigma^2$$

$\rightarrow$ VARIANZA CAMPIONARIA DISTORTA

DA CUI $\hat{\mu} = \overline{X}_n$

$$\hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2_{x,n}$$

ESEMPIO. $X \sim Bin(m, p)$

NOTA. CON LE BINOMIALI ASSUMIAMO m NOTO!
QUESTO PERCHÉ LA BINOMIALE STIMA IL # SUCCESSI
CHE POSSONO ANDARE DA 0 AD m.
NOTO IL DATASET $m = MAX$ (VALORI DEL DS)

TROVARE $\hat{p}_n$ STIMATORE PER p

$$E(X) = mp$$

$$\bar{X}_n = mp \implies p = \frac{1}{m} \bar{X}_n$$

DA CUI $\hat{p}_n = \frac{1}{m} \bar{X}_n$

NON m!! DIPENDE DALLA TAGLIA DEL DS

SUPPONIAMO CHE IL DS = [4, 4, 3, 5, 6]: FACCIO 10 ESTRAZIONI PER 5 VOLTE E DS[i] CONTA I SUCCESSI ALLA i-ESIMO GRUPPO DI ESTRAZIONI

IN QUESTO CASO

$$\hat{p}_5 = \frac{1}{10} \bar{X}_5 = \frac{1}{10} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \underbrace{\left(2 \cdot 4 + 3 + 5 + 6\right)}_{}$$

SOSTITUIRE I VALORI SIGNIFICA VALUTARE LO STIMATORE SUL CAMPIONE

ESEMPIO. $X \sim Unif(0, \theta)$ CON $\theta > 0$

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x)$$

$$E(X) = \frac{\theta}{2}$$

DA CUI

$$\frac{\theta}{2} = \bar{X}_n \longrightarrow \theta = 2\bar{X}_n$$

QUINDI $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$

- E' NON DISTORTO ?

$$E[\hat{\theta}_n] = 2E[\bar{X}_n] = 2E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{2}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot E[X] = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

QUINDI $\hat{\theta}_n$ E' NON DISTORTO

- E' CONSISTENTE ?

VEDIAMO SE $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L^2} \theta$

NON DISTORTO

$$E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = E[(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n))^2] = D^2[\hat{\theta}_n] =$$

$$= D^2[2\bar{X}_n] = 4D^2[\bar{X}_n] = 4D^2\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot D^2[X] =$$

$$= \frac{4}{n} D^2[X] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

QUINDI $\hat{\theta}_n$ E' CONSISTENTE IN NORMA L^2

QUINDI $\hat{\theta}_n$ E' CONSISTENTE IN PROBABILITA'

$$0 \le P(|\hat{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon) = P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| \ge \varepsilon) \le \frac{D^2(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{4}{n\varepsilon^2} D^2(X)$$

CHEBYSHEV

$n \to \infty$: 0, 0

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \ge \varepsilon) = 0$$ PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

SIA $X \sim Bin(m, p)$.

ESSA E' TC $P(X = j) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$

SUPPONIAMO $p = \frac{1}{3} \longrightarrow P(X = x) = \binom{m}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{m-x}$

$$f_X(x, p) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} \mathbb{1}_{\{j\}}(x)$$

FISSATO p E SCELTO $x \longrightarrow f_X(x, p) = P(X = x)$

FACCIAMO L' ESPERIMENTO E SUPPONIAMO $X = 5$

$$f_X(5, p) = \binom{m}{5} p^5 q^{m-5}$$

QUESTA QUI NON E' PIU' UNA PROBABILITA' !! L' EVENTO E' GIA' AVVENUTO
QUINDI LA PROBABILITA' CHE ESCA 5 A POSTERIORI E' 1. !

COSA ESPRIME $f_X(5, p)$?

- $p \simeq 0 \longrightarrow f_X(5, p) \simeq 0$
- $p \simeq 1 \longrightarrow f_X(5, p) \simeq 0$

$f_X(5, p)$ MISURA QUANTO SIA VEROSIMILE AVERE UN CERTO VALORE DEL PARAMETRO NOTO CHE HO OTTENUTO UN CERTO RISULTATO DALL' ESPERIMENTO!

SE $p \simeq 0$ E' MOLTO DIFFICILE OTTENERE 5 SUCC (E NON ZERO)
SE $p \simeq 1$ " " " " 5 SUCC (E NON m)

QUINDI $f_X(x; p)$

- DATO $p \longrightarrow$ PROBABILITA' DI OTTENERE UN VALORE x
- DATO $x \longrightarrow$ VEROSIMIGLIANZA DEL VALORE DEL PARAMETRO p

NEL CASO DI DENSITA' CONTINUA IL VALORE $f_X(x; p)$ DATO x, NON MI DA' LA PROBABILITA'! POSSO VEDERLO COME LA PROB DI UN PICCOLO INTORNO DI x_0.

SIA X UNA VA $\longrightarrow f_X(x; \theta)$ DENSITA'

$f_X : \mathbb{R} \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ DOVE Θ = DOMINIO DI θ

ESEMPIO. $\theta = (\mu, \sigma^2) \rightarrow \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$

$X \longrightarrow$ SRS $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k; \theta)$$

SUPPONIAMO θ AD m COMPONENTI

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n} = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

ALLORA LA FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA

$$L_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m; x_1, x_2, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

RILEGGO $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}$ CONSIDERANDO LE x_k COME PARAMETRO E I θ COME VARIABILI

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA SIGNIFICA: NOTO CHE HO UNA CERTA REALIZZAZIONE DEL CAMPIONE, QUALI SONO I θ TC MASSIMIZZANO LA $L_{x_1, x_2, \dots, x_n}$

<u>ESEMPIO.</u> $X \sim Ber(p)$

$$f_X(x; p) : \mathbb{R} \times (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_X(x; p) = (1-p)\, \mathbb{1}_{\{0\}}(x) + p \cdot \mathbb{1}_{\{1\}}(x) =$$

$$= p^x (1-p)^{1-x}\, \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

CONSIDERIAMO SRS

$$L_{X_1, X_2, \dots, X_n}(p; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p^{x_k} (1-p)^{1-x_k}\, \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p^{x_k} \prod_{k=1}^{n} (1-p)^{1-x_k} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_k) =$$

$$= p^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1-p)^{\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)} \cdot \mathbb{1}_{\times_{k=1}^{n} \{0,1\}}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \underbrace{p^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1-p)^{n - \sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA DI UNA BERNULLIANA}}$$

SUPPONIAMO DI AVERE COME $DS = [1, 1, \dots, 1]$

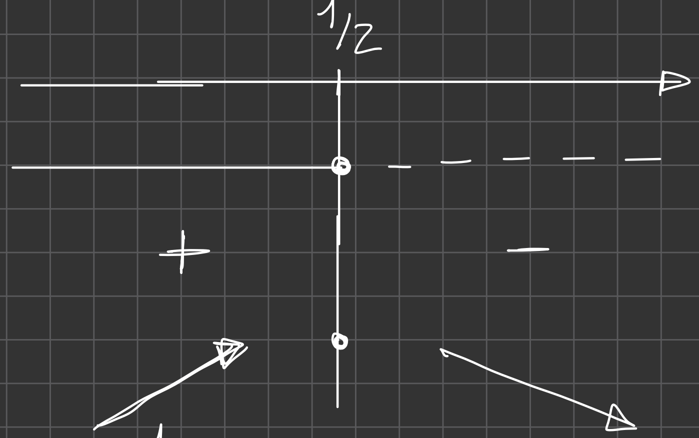
$L = p^n$ IL VALORE MASSIMO L LO ASSUME SU $p = 1$

$\Rightarrow$ E' VEROSIMILE CHE $p = 1$

SE HO UN DS $= (0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots, 0, 1)$

$$L = p^{n/2}(1-p)^{n/2} = (p(1-p))^{n/2}$$

$$L = \frac{n}{2}(1-2p)^{\frac{n}{2}-1} \geq 0 \quad \text{SSE} \quad 1-2p \geq 0 \to p \leq \frac{1}{2}$$



IL PUNTO DI MASSIMO LO HO $p = \frac{1}{2}$

<u>ESEMPIO.</u> $X \sim Bin(m, p)$

$$f_X(x; p) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \mathbb{1}_{\{j\}}(x) =$$

$$= \frac{m!}{(m-x)!\,x!} p^x (1-p)^{m-x} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(x)$$

$$L_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(p; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \binom{m}{x_k} p^{x_k} (1-p)^{m-x_k} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(x_k) =$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \binom{m}{x_k}}_{a} \cdot \prod_{k=1}^{n} p^{x_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} (1-p)^{m-x_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(x_k) =$$

$$= a \cdot p^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1-p)^{\sum_{k=1}^{n}(m-x_k)} \cdot \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}^n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= a \cdot p^{\sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot (1-p)^{mn - \sum_{k=1}^{n} x_k} \cdot \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}^n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

SUPPONIAMO $x_k = m \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$L = \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1} \cdot p^{mn} \cdot (1-p)^0 = p^{mn}$$

MASSIMO QUANDO $p = 1$

RISPETTO A PRIMA HO UN RISULTATO PIU' FORTE PERCHÉ HO ESPONENTE $m \cdot n$

$$X \longrightarrow f_X(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$X_1, X_2, X_m \longrightarrow L_{X_1, X_2, \dots, X_m}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m; x_1, x_2, \dots, x_n) : \Theta \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

CERCO θ_1^*, θ_2^* ECC TC MASSIMIZZA L

$$\theta_1^* = \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \hat{\theta}_1^* = \theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\theta_2^* = \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \hat{\theta}_2^* = \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ECC STIMATORI

<u>ESEMPIO.</u> $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f_X : \mathbb{R} \times \Theta$ CON $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu, \sigma^2; x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}$$

DEVO TROVARE IL MASSIMO !!

SE $f(x) > 0 \ \forall x \implies \text{ARG MAX } f(x) = \text{ARG MAX } \ln(f(x))$

$$K = \underbrace{\ln L}_{\text{LOG VEROSIMIGLIANZA}} = \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\cdot\sigma^n}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\cdot\sigma^n}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 =$$

$$= -\ln\left((2\pi)^{n/2}\cdot\sigma^n\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 = K$$

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma} = -n\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\cancel{2}\cdot(x_k-\mu)\cdot(\cancel{-}1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k - n\mu\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = 0 \quad \text{SSE} \quad n\mu = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\longrightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \overline{X}_n$$

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{SSE} \quad -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 = 0$$

$$-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2$$

DA CUI $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$

LEZIONE 17-01-2023

INTERVALLI DI CONFIDENZA

SIA $\hat{\Theta} : \Omega \to \mathbb{R}$ CON $\theta \in \Theta$ IGNOTO

SIA ω_0 UN CAMPIONE. $\hat{\Theta}(\omega_0)$ E' UNA STIMA DI θ

L'INTERVALLO DI CONFIDENZA MI DICE QUANTO $\hat{\Theta}(\omega_0)$ E' VICINO A θ.

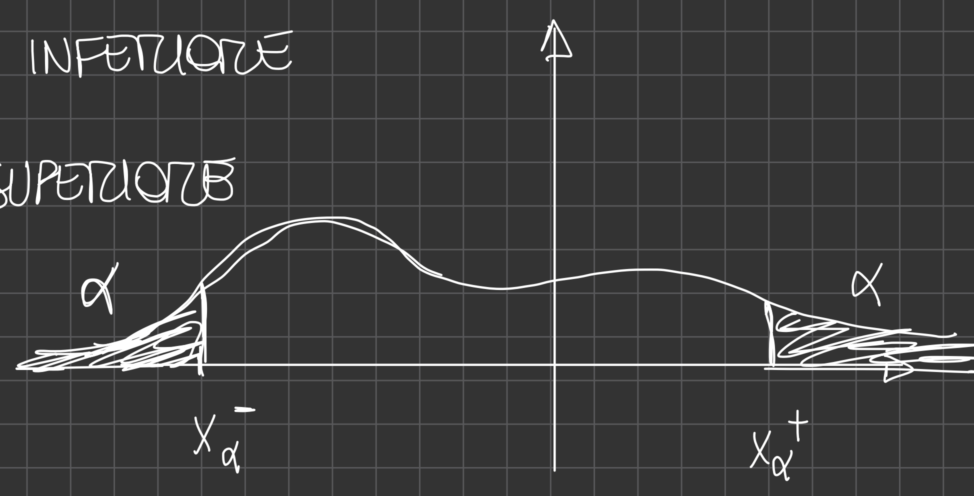
SUPPONIAMO DI TROVARE COME INTERVALLI $(-\infty, \hat{\Theta}(\omega_0))$ $(\hat{\Theta}(\omega_0), +\infty)$

IL θ VERO PUO' STARE O NON STARE IN QUESTO INTERVALLO: NON POSSIAMO PARLARE DI PROB.
D'ALTRONDE NON SAPPIAMO θ QUINDI NON SAPPIAMO BENE COME VANNO LE COSE.
QUESTO SI AGGIRA CON IL CONCETTO DI CONFIDENZA.

DEF. SIA X UNA VA CON f_X. UN VALORE CRITICO INFERIORE / SUPERIORE DI LIVELLO $\alpha \in (0,1)$ IL QUANTILE INFERIORE / SUPERIORE DI LIVELLO α (OPPURE $1-\alpha$)

OVVERO $P(X \leq x_\alpha^-) = \alpha$ PER INFERIORE

$P(X \geq x_\alpha^+) = \alpha$ PER SUPERIORE



PER I QUANTILI SI RAGIONA SEMPRE A SINISTRA, QUINDI IL VALORE CRITICO INF DI LIV α COINCIDE CON IL QUANTILE DI LIV α; IL VALORE CRITICO SUP DI LIV α COINCIDE CON IL QUANTILE DI LIV $1-\alpha$

$$F_X(x_\alpha^-) = \alpha \quad ; \quad F_X(x_\alpha^+) = 1-\alpha$$

DEF. SIA X UNA VA ; $F_X : \mathbb{R} \times \Theta \to \mathbb{R}$ $F_X(x,\theta)$; SIA $\alpha \in (0,1)$.

SIA $\underline{\theta}$ UNO STIMATORE DI θ. $\underline{\theta}$ E' UN CONFINE INFERIORE PER θ DI LIVELLO $1-\alpha$ (OPPURE $100(1-\alpha)\%$) SE

$$P(\underline{\theta} \leq \theta) \geq 1-\alpha.$$

$\left(P(\bar{\theta} \geq \theta) \geq 1-\alpha \text{ PER IL CONFINE INFERIORE}\right)$

PARLIAMO DI PROBABILITA' PERCHÉ $\underline{\theta}$ NON L' HO VALUTATO SU ω_0

QUESTA DISUGUAGLIANZA PUO' ESSERE RISOLTA PER ALCUNE STATISTICHE PARTICOLARI SENZA CONOSCERE IL VALOR VERO θ

ESEMPIO. SIA $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ CON $\mu_x = ?$

CON σ_x^2 NOTO

SIA $\underbrace{\bar{X}_n - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha}_{C_i}$; $\underbrace{\bar{X}_n + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha}_{C_s}$

DOVE z_α E' IL VALORE CRITICO SUPERIORE DI LIVELLO α DELLA NORMALE $N(0,1)$

C_i E' CONFINE INFERIORE ; C_s CONFINE SUP

$$P(C_i \leq \mu_x) \geq 1-\alpha$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\right) = 1-\alpha \geq 1-\alpha$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq z_\alpha \Rightarrow \bar{X}_n - \mu_X \leq \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} z_\alpha \Rightarrow \underbrace{\bar{X}_n - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} z_\alpha}_{C_i} \leq \mu_X$$

QUINDI $P(C_i \leq \mu_X) \geq 1-\alpha$

E QUINDI C_i E' UN CONFINE INFERIORE PER μ_X

ANALOGAMENTE C_S E' UN CONFINE SUPERIORE PER μ_X

$P(C_S \geq \mu_X) \geq 1-\alpha$

SUPPONIAMO DI AVERE UN CERTO ω_0; SIANO $\underline{\theta}(\omega_0)$ E $\bar{\theta}(\omega_0)$ I VALORI ASSUNTI DA $\underline{\theta}$ E $\bar{\theta}$ SU ω_0.

OTTENGO DUE INTERVALLI $(\underline{\theta}(\omega_0), +\infty)$ E $(-\infty, \bar{\theta}(\omega_0))$;

θ APPARTIENE A QUESTI DUE INTERVALLI CON CONFIDENZA $1-\alpha$

SUPPONIAMO DI AVERE MOLTI CAMPIONI $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{100}$; QUESTI MI GENERANO 100 COPPIE DI INTERVALLI; SUPPONIAMO $\alpha = 0{,}05$; SIAMO CONFIDENTI AL 95% OVVERO CIRCA 95 DI QUESTI INTERVALLI RACCHIUDONO θ E CIRCA 5 NO.

<u>ESEMPIO</u>. SIA $X \sim N(0,1)$; $\underline{\theta} = \bar{X}_n - \frac{1}{\sqrt{n}} z_\alpha$; $\bar{\theta} = \bar{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} z_\alpha$

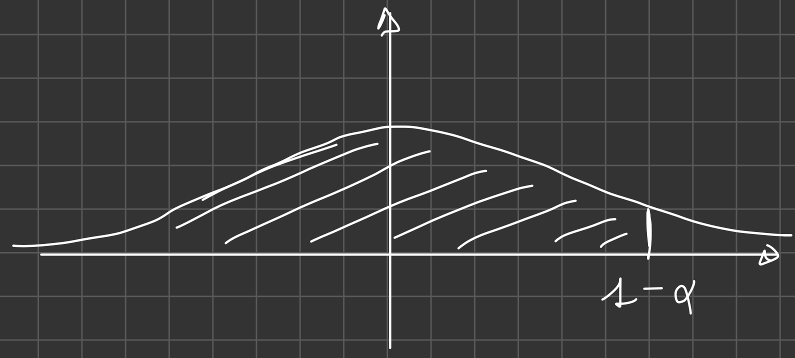
ESTRAIAMO 75 VALORI PER 100 VOLTE.

OTTENIAMO

$$\begin{matrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & \dots & X_{1,75} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & \dots & X_{2,75} \\ \vdots & & & & \\ X_{100,1} & X_{100,2} & X_{100,3} & \dots & X_{100,75} \end{matrix}$$

PER OGNUNO CALCOLO $\overline{X} \rightarrow \overline{X}_{75,1}$; $\overline{X}_{75,2}$; ... ; $\overline{X}_{75,100}$

PRENDIAMO $\alpha = 0,05$



OTTENIAMO 100 COPPIE DI INTERVALLI

CIRCA 95 DI QUESTI INTERVALLI CONTERRANNO LO ZERO

DEF. UN INTERVALLO DI CONFIDENZA DI LIVELLO $1-\alpha$ E' UNA COPPIA DI STATISTICHE ϕ E ψ TC

$$P(\phi \leq \theta \leq \psi) \geq 1-\alpha$$

ESEMPIO. NELL' ESEMPIO DI PRIMA AVEVO

$$C_i = \overline{X}_n - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_\alpha \qquad C_s = \overline{X}_n + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

ALLORA

$$\phi = \overline{X}_n - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \qquad \psi = \overline{X}_n + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

INFATTI

$$P(\phi \leq \mu_x) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad P(\psi \geq \mu_x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\phi \leq \mu_x \leq \psi) \overset{?}{=} P(\mu_x \leq \psi) - P(\phi \geq \mu_x) =$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

ESEMPIO. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ CON $\mu_x = ?$ E $\sigma_x^2 = ?$

SI MOSTRA CHE:

- INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA E'

$$\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \alpha/2} \;;\; \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1, \alpha/2}$$

CON $t_{n-1, \alpha/2}$ E' IL VALORE CRITICO SUPERIORE DI LIVELLO $\alpha/2$ DI UNA VA DI STUDENT CON $n-1$ GRADI DI LIBERTA'

NELLE STUDENT HO DELLE CODE PIU' SPESSE: QUESTO COMPORTA CHE LO SPESSORE IN ZERO E' PIU' BASSO (IL TOTALE DELL' INTEGRALE FA 1).

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n}\right) \longrightarrow \bar{X}_n - \mu_x \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \bar{X}_n - \mu_x \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot N(0,1) \longrightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\longrightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu_x}{\frac{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma_x^2}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1} \longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu_x}{S_n/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

$$P\left(\bar{X}_n - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \le \mu_x \le \bar{X}_n + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right) \ge 1 - \alpha$$

$$\frac{1}{n} \sum_k X_k \sim \frac{1}{n} N(n\mu_x, n\sigma_x^2) = N\left(n\mu_x, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

LEZIONE 18-01-2022

NEGLI INTERVALLI DI CONFIDENZA NON CONOSCIAMO θ, MA TROVIAMO $[\underline{\theta}(\omega_0), \bar{\theta}(\omega_0)]$ IN CUI θ RICADE CON LIVELLO DI CONFIDENZA $1-\alpha$.

GLI INTERVALLI SONO NIDIFICATI

$$[\underline{\theta}_{90\%}(\omega), \bar{\theta}_{90\%}(\omega)] \subseteq [\underline{\theta}_{95\%}(\omega), \bar{\theta}_{95\%}(\omega)]$$

TEST DI IPOTESI

1. IPOTIZZIAMO UN CERTO $\theta = \theta_0$
2. FORMULO UN IPOTESI ALTERNATIVA $\begin{cases} \theta \neq \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \\ \theta > \theta_0 \end{cases}$

   NOTA. IL RISULTATO DEL TEST DIPENDE DALL'IPOTESI CHE FORMULIAMO E QUESTA DIPENDE DAL MOTIVO DELLO STUDIO

3. FISSIAMO LA TOLLERANZA, OVVERO FISSO $\alpha \in (0,1)$.
   IN QUESTO CASO FISSO α E CONSIDERO α (NELL' INTERV DI CONFID CONSIDERO $1-\alpha$) : LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA' DEL TEST

4. INTRODURRE UNA STATISTICA TEST

5. CONSIDERO UN CAMPIONE

6. . . .

I TEST D' IPOTESI NON SEMPRE STUDIANO UN PARAMETRO: A VOLTE POSSO VERIFICARE SE IL DS SEGUE UNA CERTA DISTRIBUZIONE.

IPOTESI NULLA: IPOTIZZO CHE IL NUOVO SIA PARI AL VECCHIO (STATUS QUO) H_0.

POSSO AVERE DUE ERRORI:

1. RIGETTO $H_0 \mid H_0$ E' VERO (DEL I TIPO)
2. NON RIGETTO $H_0 \mid H_0$ E' FALSO (DEL II TIPO)

$$P(\text{RIGETTO } H_0 \mid H_0 \text{ VERO}) = \alpha$$
$$P(\text{NON RIGETTO } H_0 \mid H_0 \text{ FALSO}) = \beta$$

<u>ESEMPIO.</u> CON UN PARAURTI NON HO DANNI VISIBILI IL 25% DELLE VOLTE.

CONVIENE CAMBIARE IL PARAURTI?

CONSIDERIAMO UN CAMPIONE DI $n=20$ CON NUOVO PARAURTI.

QUANTE MACCHINE NON DEVONO MOSTRARE DANNI?

- CON IL VECCHIO MI ASPETTO CHE CIRCA 5 MACCHINE NON MOSTRINO DANNI.

LA SINGOLA MACCHINA $X = \begin{cases} 0 & \text{SI ROMPE} \quad q = 0,75 \\ 1 & \text{ALTRO} \quad p_0 = 0,25 \end{cases}$

BERNULLIANE INDIPENDENTI.

L' IPOTESI NULLA H_0 E' "IL NUOVO PARAURTI NON CAMBIA LE COSE HO LE PEGGIORA" $H_0 : p \leq p_0$

L' IPOTESI $H_1 : p > p_0$

LE 20 MACCHINE $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(n, p_0)$ (SE $H_0: p = p_0$)

$Z_n = k$ CON $k = 0, 1, ..., 20$

$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}$

$E(Z_n) = p_0 \cdot n = 5$

CERCHIAMO

$P(\text{RIGETTO } H_0 \mid H_0 \text{ VERO}) = \alpha$

TUTTO DIPENDE DAL LIVELLO DI ERRORE CHE SIAMO DISPOSTI AD ACCETTARE.

QUAL È IL NUMERO DI MACCHINE CHE NON DEVONO MOSTRARE DANNI POSTO CHE L'ERRORE CHE TOLLERO È α.

$$m_\alpha = \underset{0 \le m \le n}{\text{ARG MIN}} \{ P(Z_n \ge m \mid H_0 \text{ VERO}) \le \alpha \}$$

$$P(Z_n \ge m \mid H_0 \text{ VERO}) = P(Z_n \ge m \mid Z_n \sim Bin(n, p_0)) =$$

H_0 VERO $\Rightarrow Z_n \sim Bin(n, p_0)$

L'IPOTESI NULLA SI TRADUCE SEMPRE IN UNA FORMA PARTICOLARE DELLA STATISTICA CHE STIAMO CONSIDERANDO

$$= \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}$$

CERCO $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha$

SUPPONIAMO $\alpha = 0,05$

$$\sum_{k=1}^{n=20} \binom{n}{k} (0,25)^k (0,75)^{n-k} \begin{cases} \to 0,102 & \text{SE } m = 8 \\ \to 0,041 & \text{SE } m = 9 \end{cases}$$

QUINDI $m_\alpha = 9$

DI SOLITO IL TEST VIENE FATTO A POSTERIORI, QUINDI α NON E' UNA PROBABILITA', MA E' DETTA "SIGNIFICATIVITA'".

<u>ESEMPIO.</u> COME PRIMA, MA CON ERRORE DEL II TIPO

$$P(\text{NON RIGETTO } H_0 \mid H_0 \text{ FALSA}) = \beta$$

QUINDI

$P(Z_n < m_\alpha \mid p \neq p_0)$ IL PROBLEMA E' CHE p E' CONTINUO E PUO' ASSUMERE MOLTI VALORI

$p = p_1$ E $p_0 \neq p_1$

$$P(Z_n < m_\alpha \mid p \neq p_0) = P(Z_n < m_\alpha \mid p = p_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{8} \binom{20}{k} p_1^k (1-p_1)^{20-k} =$$

$$= \begin{cases} 0,887 & p_1 = 0,3 \\ 0,596 & p_1 = 0,4 \\ \vdots & \\ 0,00\ldots & p_1 = 0,8 \end{cases}$$

SE PRENDO p_1 VICINO A p_0 LA PROB DI NON RIGETTARE H_0 NOTO CHE E' FALSA E' MOLTO ALTA.

SE MI ALLONTANO DA p_0 LA PROBABILITA' SI ABBASSA

ESERCIZIO. UNA TINTURA HA TEMPO DI ASCIUGATURA NORMALE CON $\mu_0 = 75$ E $\sigma^2 = 81$.

UN CHIMICO PROPONE DI AGGIUNGERE UN ADDITIVO CHE LASCIA INALTERATA LA DISTRIBUZIONE E LA VARIANZA E ABBASSA LA MEDIA.
CONSIDERIAMO UN CAMPIONE $n = 25$ DI PROVE.

QUANTO E' IL NUMERO DA AVERE ASCIUTTE PER RIGETTARE H_0 CON ERRORE $\alpha = 0,01$.

SIA X VA CHE DESCRIVE IL TEMPO DI ASCIUGATURA:

SE H_0 VERA $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

$P($RIGETTO $H_0 \mid H_0$ VERO$)$

$$\bar{X}_n \sim \left(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

SIA $Z_0 = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P(\text{RIFIUTO } H_0 \mid H_0 \text{ VERO}) = P(Z_0 < z \mid H_0 \text{ VERO})$$

$$= P(Z_0 < z \mid Z_0 \sim N(0,1)) = \alpha$$

$z = z_\alpha^- = -2{,}33$

ALLORA CERCO n TC

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_\alpha^- = z$$

PER $H_1 : \mu < \mu_0$

L' INTERVALLO $(-\infty, z_\alpha)$ SI DICE REGIONE DI RIFIUTO:

SE LA STATISTICA PRENDE VALORE IN QUESTA REGIONE POSSIAMO RIFIUTARE IN FAVORE DELL' ALTERNATIVA.

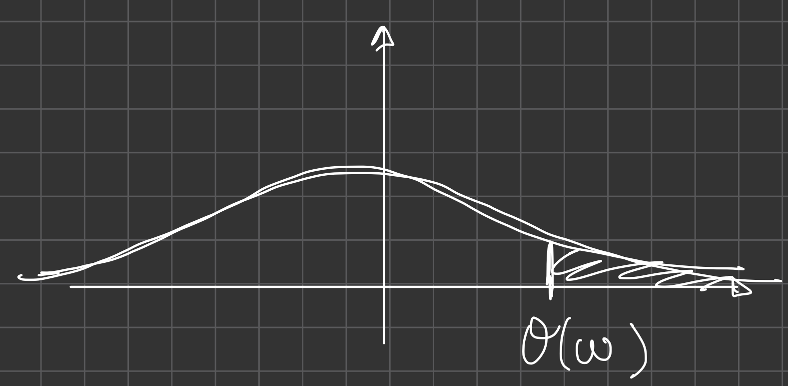
SE L' ALTERNATIVA E' $H_1 : \mu > \mu_0$ LA REGIONE DI RIFIUTO E' $(z_\alpha, +\infty)$.

SE L' ALTERNATIVA E' $H_1 : \mu \neq \mu_0$ LA REGIONE DI RIFIUTO E' $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$

P - VALUE

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$



VALUTIAMO $P(\theta \geq \theta(\omega)) = p$ → P - VALUE

PIU' $\theta(\omega)$ E' GRANDE, PIU' p E' PICCOLO, PIU' E' FORTE IL RIFIUTO DI H_0

SE INVECE $H_1: \mu < \mu_0$ VALUTO $P(\theta < \theta(\omega))$ OVVERO LA CODA SX.

SE $H_1: \mu \neq \mu_0$

- DISTRIB SIMMETRICA VALUTO $\underbrace{P(Z \geq 2|\theta(\omega)|) + P(Z \leq -2|\theta(\omega)|)}_{\text{DOPPIA CODA}}$

INTERVALLI DI PREDIZIONE

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad F_X(\cdot, \mu)$ $\quad X_1, X_2, \dots, X_n$ GAUSSIANE

$E(\bar{X}_n) = \mu$

DOVE CADE X_{n+1}

NORMALIZZIAMO $\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$

IO DETERMINO L'INTERVALLO DI CONFIDENZA SULLA BASE DEI PRIMI n VALORI, MA NON C'È MOTIVO DI SUPPORRE CHE L'X_{n+1} CADRÀ UGUALE NELL'INTERVALLO STIMATO.

STIMIAMO $\dfrac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma_X \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$

$\bar{X}_n$ GAUSSIANA

X_{n+1} GAUSSIANA INDIP DA $\bar{X}_n$

$E[X_{n+1} - \bar{X}_n] = E[X_{n+1}] - E[\bar{X}_n] = 0$

$$D^2[X_{n+1}] + D^2[\bar{X}_n] = \sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^2}{n} = \sigma_x^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

QUINDI $$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq z_{\alpha/2} \longrightarrow$$

$$\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq X_{n+1} \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

DA CUI $$\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}} \; ; \; \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_x\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]$$

DOVE $$P(\underline{\theta} \leq X_{n+1} \leq \bar{\theta}) = 1-\alpha$$

L' INTERVALLO E' DIVERSO DA QUELLO DELLA μ !!

$$\mu \in \left[X_n - \underline{z_{\frac{\alpha}{2}}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \; ; \; X_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right]$$

L' INTERVALLO PER X_{n+1} E' PIU' AMPIO DI QUELLO PER μ PERCHÉ AUMENTA L' INCERTEZZA.

IPOTESI DI TEST PER LA VARIANZA

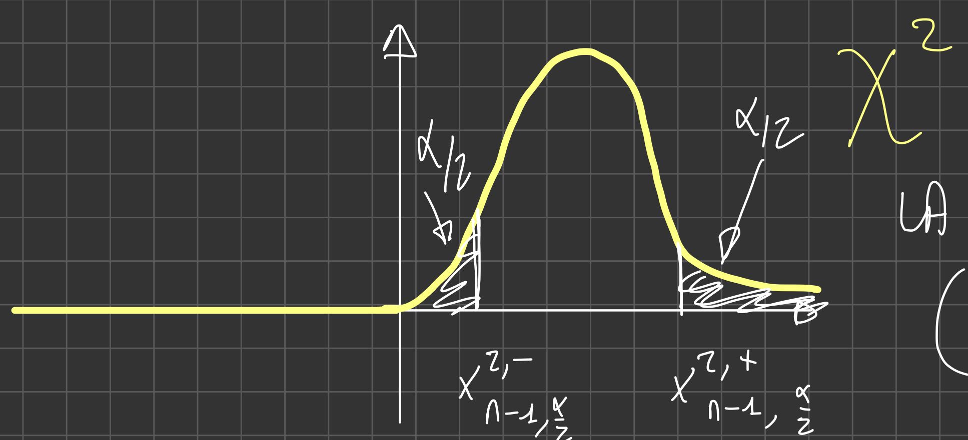
$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ $\qquad \sigma_x^2 = ?$

$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2$

$H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \qquad H_2 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \qquad H_3 : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2$

SE $\sigma_x^2 \neq \sigma_0^2$

$$S^2_{n,x} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 \Longrightarrow \frac{(n-1) S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



LA REGIONE $\left(\chi^{2,-}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, \chi^{2,+}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right)$ È DI ACCETTAZIONE DI H_0;

IL RESTO È DI RIFIUTO DI H_0 IN FAVORE DELL'ALTERNATIVA

SE VOGLIO USARE IL P-VALUE CALCOLO LE PROBABILITÀ

LEZIONE 19-01-2022

ABBIAMO $\dfrac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}$ CON σ_x NOTA

ALLORA $\dfrac{\bar{X}_n - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

L' IPOTESI NULLA CI DICE $H_0: \mu_x = \mu_0$

LE ALTERNATIVE CI DICONO $H_1: \mu_x \neq \mu_0$

$H_1: \mu_x < \mu_0$

$H_1: \mu_x > \mu_0$

SIA DATA SIGNIFICATIVITA' α

$P(H_0 \text{ RIGETTO} \mid H_0 \text{ VERO})$

DETERMINO DELLE REGIONI CHE DIPENDOLO DA α.

QUANTILE α

SE $H_1: \mu_x < \mu_0 \Longrightarrow$ REGIONE DI RIGETTO $(-\infty, -z_\alpha)$

VALOR CRITICO SUPERIORE

$H_1: \mu_x > \mu_0 \Longrightarrow$ REGIONE DI RIGETTO $(z_\alpha, +\infty)$

$H_1: \mu_x \neq \mu_0 \Longrightarrow$ REGIONE DI RIGETTO $(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$

RIGETTO H_0 QUANDO LA STATISTICA ASSUME VALORE NELLA REGIONE DI RIGETTO

ESERCIZIO 1

$(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n \sim \text{BER}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $\quad \alpha > 0$

$$X_n = \begin{cases} 1 & 1/n^\alpha \\ 0 & 1-\frac{1}{n^\alpha} \end{cases}$$

INDIPENDENTI

$$Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{ALTRO} \\ 1 & X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1 \end{cases}$$

$$P(Y_n = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\dots P(X_n = 1) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n!^\alpha}$$

$$Y_n = \begin{cases} 0 & 1 - \frac{1}{n!^\alpha} \\ 1 & \frac{1}{n!^\alpha} \end{cases}$$

1) CONVERGENZA ω

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n^\alpha} & x \in [0,1) \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - \frac{1}{n!^\alpha} & y \in [0,1) \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \in [0,1) \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

$$X_n \xrightarrow{w} X = \mathrm{DIR}(0) \qquad Y_n \xrightarrow{w} Y = \mathrm{DIR}(0)$$

② CONVERGENZA P

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n < \varepsilon) = *$$

- $\varepsilon \in [0,1)$

$$* = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$$

- $\varepsilon \geq 1$

$$* = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} \mathrm{DIR}(0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - Y| < \varepsilon) = 1 \quad ?$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - Y| < \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n < \varepsilon) = \aleph$$

- $\varepsilon \in [0,1)$

$$\aleph = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n!^\alpha}\right) = 1$$

- $\varepsilon \geq 1$

$$\aleph = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$$\Longrightarrow Y_n \xrightarrow{P} \mathrm{DIR}(0)$$

CONVERGENZA L^P

$$E(|X_n - X|^p) = E(X_n^p) = 0^p \cdot P(X_n = 0) + 1^p P(X_n = 1) =$$

$$= P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$E(|Y_n - Y|^p) = E(Y_n^p) = 0^p P(Y_n = 0) + 1^p P(Y_n = 1) =$$

$$= P(Y_n = 1) = \frac{1}{n!^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X = \mathrm{DIR}(0) \qquad Y_n \xrightarrow{L^p} Y = \mathrm{DIR}(0)$$

4 CONVERGENZA AS

CONVERGENZA DI X

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - P(X_n \le \varepsilon)\right) = *$$

- $\varepsilon > 1$

$$* = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

- $\varepsilon \in [0, 1)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

CONVERGE $\forall \alpha > 1$

VEDIAMO PER $\alpha \in [0, 1]$

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{n\ge m} \{|X_n - X| < \varepsilon\}\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{n\ge m} \{X_n < \varepsilon\}\right) \le \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{n=m}^{2m} \{X_n < \varepsilon\}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{2m} P(X_n < \varepsilon) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{2m} P(X_n = 0) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{2m} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \le$$

$$\le \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{2m} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha m^\alpha}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha \cdot m^\alpha}\right)^m < 1 .$$

PER y_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|y_n - y| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - P(y_n \leq \varepsilon)\right) = N$$

- $\varepsilon > 1$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

- $\varepsilon \in [0, 1)$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!^{\alpha}}$$ CONVERGE $\forall \alpha$ PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO

ESERCIZIO 2

$$X \longleftrightarrow f_X(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

1

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, \theta x^{\theta-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, d\mu(x) = \theta \int_{[0,1]} x^{\theta}\, d\mu_L(x) = \theta \int_0^1 x^{\theta}\, dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$E[X] = \bar{X}_n \longrightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}_n \qquad \theta = \bar{X}_n + \theta \bar{X}_n$$

$$(1-\bar{X}_n)\theta = \bar{X}_n \longrightarrow \theta = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}$$

DA CUI $\boxed{\hat{\theta} = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}}$

2 E' DISTORTO ?

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}\right)$$

SIA $g(x) = \frac{x}{1-x}$

PER TAYLOR $g(x) \simeq g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0)$

$$g(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n}{1-\bar{X}_n}$$

$$\mu_{\bar{X}_n} = E[\bar{X}_n] = E\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$g(\bar{X}_n) \cong g(x_0) + (\bar{X}_n - x_0)\, g'(x_0)$$

PONIAMO $x_0 = \mu_{\bar{x}_n}$

$$g(\bar{X}_n) \cong g(\mu_{\bar{x}_n}) + (\bar{X}_n - \mu_{\bar{x}_n})\, g'(\mu_{\bar{x}_n})$$

$$E[g(\bar{X}_n)] \cong E[g(\mu_{\bar{x}_n}) + (\bar{X}_n - \mu_{\bar{x}_n}) \cdot g'(\mu_{\bar{x}_n})] =$$

$$= g(\mu_{\bar{x}_n}) + g'(\mu_{\bar{x}_n}) \underbrace{E(\bar{X}_n - \mu_{\bar{x}_n})}_{=0} = g(\mu_{\bar{x}_n}) = \frac{\mu_{\bar{x}_n}}{1-\mu_{\bar{x}_n}} = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} =$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1+\theta}{1+\theta-\theta} = \theta$$

OVVERO $E[g(\bar{X}_n)] \cong \theta$ È CIRCA NON DISTORTO

CONSISTENZA P

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_M - \theta| > \varepsilon)$$

POICHÉ $E[\hat{\theta}_M] \cong \theta$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_M - \theta| > \varepsilon) \cong \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_M - E[\hat{\theta}_M]| > \varepsilon) =$$ CHEB

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{D^2[\hat{\theta}_M]}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

$$D^2[\hat{\theta}_M] \cong [g'(\mu_{\bar{x}_n})]^2 D^2[\bar{X}_n] = [g'(\mu_{\bar{x}_n})]^2 \cdot \frac{1}{n} D^2[X] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

CONSISTENTE L^2

$$\lim_{n\to+\infty} E(|\hat{\theta}_n - \theta|^2) \overset{N}{=} \lim_{n\to+\infty} E\left[(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n))^2\right] = \lim_{n\to+\infty} D^2(\hat{\theta}_n) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{[g'(\mu_{X_n})]^2}_{\text{COST}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \underbrace{D^2(X)}_{\text{COST}} = 0$$

$\Rightarrow$ E' CIRCA CONSISTENTE L^2 E P

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k; \theta) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \theta\, x_k^{\theta-1} \cdot 1_{[0,1]}(x_k) = \theta^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\theta-1} \cdot 1_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_k)$$

PER $L>0$

$$K = \ln L = n \ln\theta + (\theta-1)\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) =$$

$$= n\ln\theta + (\theta-1)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \ln x_k\right)$$

$$K' = \frac{n}{\theta} + \sum_{k=1}^{n} \ln x_k \geq 0 \qquad \frac{n}{\theta} \geq -\sum_{k=1}^{n} \ln x_k$$

$$\frac{\theta}{n} \leq -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln x_k} \Rightarrow \theta \leq -\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k}$$

HO IL MASSIMO IN $\theta = -\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k}$

QUINDI $\boxed{\hat{\theta}_{ML} = \dfrac{-n}{\sum_{k=1}^{n} \ln X_k}} = \dfrac{-n}{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)}$

$h(x) = \dfrac{-n}{\ln x}$ $\qquad \hat{\theta}_{ML} = h\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{-n}{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)}$

σ_x^2 IGNOTA $\cdot\; X \sim N \qquad \dfrac{\bar{X}_n - \mu_x}{S_n/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$

$\cdot\; X \nsim N$ E n GRANDE $\qquad \dfrac{\bar{X}_n - \mu_x}{S_n/\sqrt{n}} \tilde{N}\; N$

σ NOTO $\qquad \mu_x \in \left[\bar{X}_n - z^+_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_x^2}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{X}_n + z^+_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma_x^2}{\sqrt{n}} \right]$

σ IGNOTO $\qquad \mu_x \in \left[\bar{X}_n - t^+_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{X}_n + t^+_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$

σ IGNOTO
X IGNOTO $\qquad \mu_x \in \left[\bar{X}_n - z^+_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$ ED n GRANDE

$X \sim N$

$$\sigma_x^2 \in \left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^{2,+}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \;;\; \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^{2,-}_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

ESERCIZIO

$\alpha = P(H_0 \text{ RIGETTATO} \mid H_0 \text{ VERO})$

$\beta = P(\text{NON RIGETTO } H_0 \mid H_0 \text{ FALSO})$

H_0 ACCETTATO SSE LA LEGGE NON ASSUME VALORE NELLA REGIONE DI RIGETTO

$$\beta = P(H_0 \text{ ACCETTATO} \mid H_0 \text{ FALSO}) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \notin R \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} \notin R \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} \leq 15{,}507 \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_x^2} \cdot 15{,}507 \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$\sigma^2_x = 5$

$$= P\left(\chi^2_{n-1} \leq \frac{\sigma_0^2}{\sigma_x^2} \cdot 15{,}507 \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$$= P\left(\chi^2_{n-1} \leq \frac{4}{5} \cdot 15{,}507 \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right) =$$

$$= P\left(\chi^2_{n-1} \leq 8{,}46 \;\middle|\; \sigma_0^2 \neq \sigma_x^2 \right)$$

NOTA

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta)^2$$ E' MINIMIZZATO DALLA MEDIA

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - \theta|$$ E' MINIMIZZATO DALLA MEDIANA