Documento a cura di Simone Remoli

TEORIA DELLA DUALITÀ

DAL "PRIMALE" AL "DUALE"

1 — **PROBLEMA IN FORMA STANDARD (PRIMALE)**

Consideriamo un problema in forma standard con le rispettive variabili Xi senza l'aggiunta delle variabili di slack.

2 — **RICERCA DEI MOLTIPLICATORI**

Definire N moltiplicatori Y1,Y2,Y3,...,YN dove N rappresenta il numero di vincoli del problema primale.

3 — **SCELTA ACCURATA DEI MOLTIPLICATORI**

La funzione che ottengo per ogni variabile Xi, in ogni vincolo, deve avere un coefficiente Yi che domini il coefficiente di Xi che quella variabile ha nella funzione obiettivo.

P — **SCELGO IL MINIMO UPPER BOUND**

Trovo il problema duale minimizzando il valore dell'upper bound.

Alla prima lettura, parrebbe incomprensibile.
Pertanto, ecco un esempio.

Consideriamo il seguente problema **primale** di programmazione lineare:

$$\underline{\textbf{Max}}\ 4x1+x2+5x3+3x4 = Z$$
$$x1-x2-x3+3x4 <= 1$$
$$5x1+x2+3x3+8x4 <= 55$$
$$-x1+2x2+3x3-5x4 <= 3$$
$$x1,x2,x3,x4 >= 0$$

Trovare il problema **duale**.

Svolgimento.

In questo esempio sono presenti 3 vincoli.
Pertanto definisco 3 moltiplicatori y1,y2 e y3, che costituiscono le variabili del problema duale.
Quindi ho un **vettore di moltiplicatori (y1,y2,y3)**.
I moltiplicatori y1,y2,y3 devono essere tutti **non negativi**.

Funzione ottenuta dalla variabile X1.

Troviamo i coefficienti di x1 nei vincoli, ossia 1,5 e -1.
Abbiamo un **vettore di coefficienti della variabile x1, ossia (1,5,-1)**.
Applichiamo il **prodotto scalare** tra il **vettore dei moltiplicatori** e il **vettore dei coefficienti della variabile x1**.
Il risultato è il seguente: **y1+5y2-y3**.
Questa espressione deve **dominare il valore del coefficiente x1 che è presente nella funzione obiettivo**, pertanto la prima espressione è la seguente:

$$y1+5y2-y3 >= 4.$$

Funzione ottenuta dalla variabile X2.

Vettore coefficienti della variabile x2 = (-1,1,2).
Vettore delle variabili duali = (y1,y2,y3).

Espressione finale = $-y1+y2+2y3 >= 1$.

Funzione ottenuta dalla variabile X3.

Vettore coefficienti della variabile x2 = (-1,3,3).
Vettore delle variabili duali = (y1,y2,y3).

Espressione finale = -y1+3y2+3y3 >= 5.

Funzione ottenuta dalla variabile X4.

Vettore coefficienti della variabile x2 = (3,8,-5).
Vettore delle variabili duali = (y1,y2,y3).

Espressione finale = 3y1+8y2-5y3 >= 3.

A questo punto troviamo l'upper bound.

Adesso supponiamo che **(y1,y2,y3) = (0,5/3,0)**.
Allora succede questo:

$$\frac{25}{3} \geq 4, \quad \frac{5}{3} \geq 1, \quad 5 \geq 5, \quad \frac{40}{3} \geq 3$$

Pertanto, le disuguaglianze risultano pienamente soddisfatte.

Adesso supponiamo che **(y1,y2,y3) = (0,1,1)**.

$$4 \geq 4, \quad 3 \geq 1, \quad 6 \geq 5, \quad 3 \geq 3$$

Pertanto, le disuguaglianze risultano pienamente soddisfatte.

Da notare però che in questo caso tende a formarsi un **vincolo indotto**, ossia: ***4x1+3x2+6x3+3x4 <= UpperBound***.

Teorema: *Se scelgo un qualunque vettore Y che soddisfi questi vincoli, ottengo un limite superiore (upper bound) per la mia funzione obiettivo.*

Quanto vale questo UpperBound?

Funzione ottenuta dai termini noti.

Vettore coefficienti dei termini noti = (1,55,3).
Vettore delle variabili duali = (y1,y2,y3).

UPPER BOUND = $y_1+55y_2+3y_3$.

Pertanto vale la seguente relazione:

$$Z = 4x_1+x_2+5x_3+3x_4 \le 4x_1+3x_2+6x_3+3x_4 \le y_1+55y_2+3y_3$$

Quindi da questo vale che:

$$Z \le y_1+55y_2+3y_3$$

E se stiamo supponendo che $(y_1,y_2,y_3) = (0,1,1)$, allora:

$$Z \le 58.$$

Cosa rappresenta il valore Upper Bound 58?

Se esiste un limite superiore (upper bound) pari a 58 e dispongo di una soluzione ammissibile di valore 50, posso concludere che la mia soluzione, con valore 50, non è molto lontana dalla soluzione ottima.
Qualora trovassi un limite superiore maggiore di 58, questo risulterebbe meno efficace (un upper bound peggiore), poiché un upper bound di 58 implica che la funzione obiettivo non può superare tale valore.

Ora per trovare il miglior upper Bound devo minimizzarlo, quindi il **problema duale** ricavato è il seguente:

$$\begin{aligned}
\textbf{Min } & y_1+55y_2+3y_3 = W \\
& y_1+5y_2-y_3 \ge 4 \\
& -y_1+y_2+2y_3 \ge 1 \\
& -y_1+3y_2+3y_3 \ge 5 \\
& 3y_1+8y_2-5y_3 \ge 3 \\
& y_1,y_2,y_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

QUINDI IN SOSTANZA ABBIAMO DUE PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE.

Max $4x_1+x_2+5x_3+3x_4 = Z$

$x_1-x_2-x_3+3x_4 <= 1$

$5x_1+x_2+3x_3+8x_4 <= 55$

$-x_1+2x_2+3x_3-5x_4 <= 3$

$x_1,x_2,x_3,x_4 >= 0$

PRIMALE(P)

Min $y_1+55y_2+3y_3 = W$

$y_1+5y_2-y_3 >= 4$

$-y_1+y_2+2y_3 >= 1$

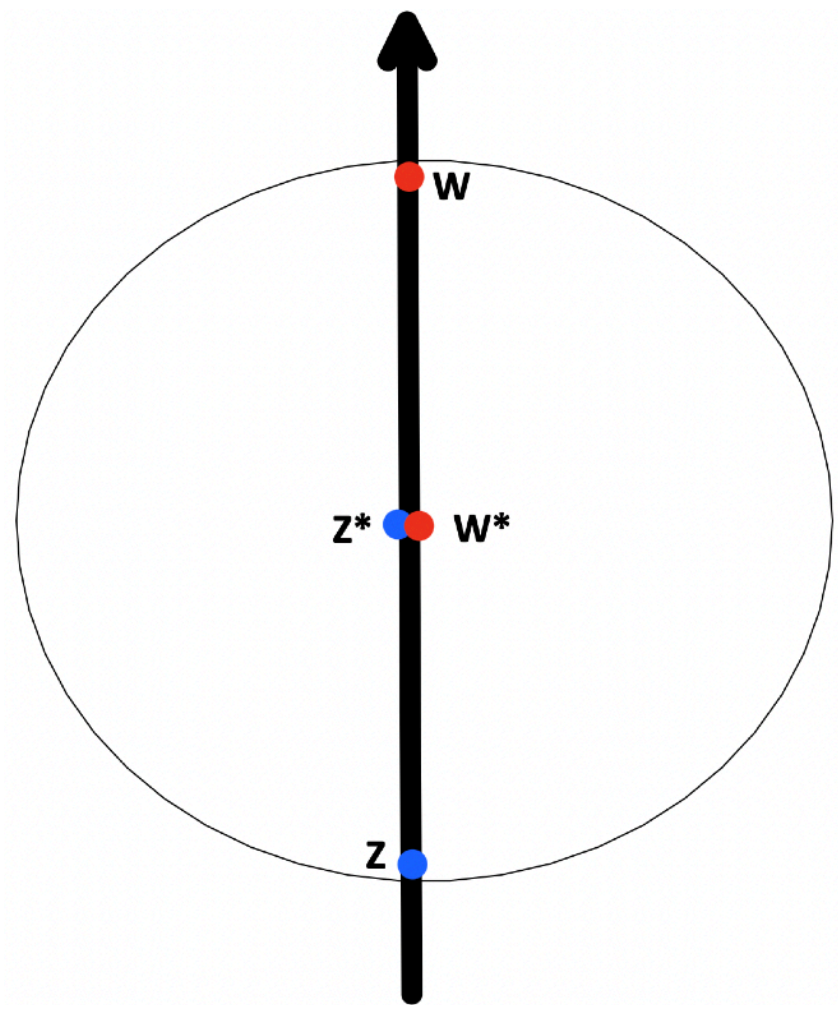
$-y_1+3y_2+3y_3 >= 5$

$3y_1+8y_2-5y_3 >= 3$

$y_1,y_2,y_3 >= 0$

DUALE(D)

Il problema primale è un problema di massimizzazione.
Il problema duale è un problema di minimizzazione.

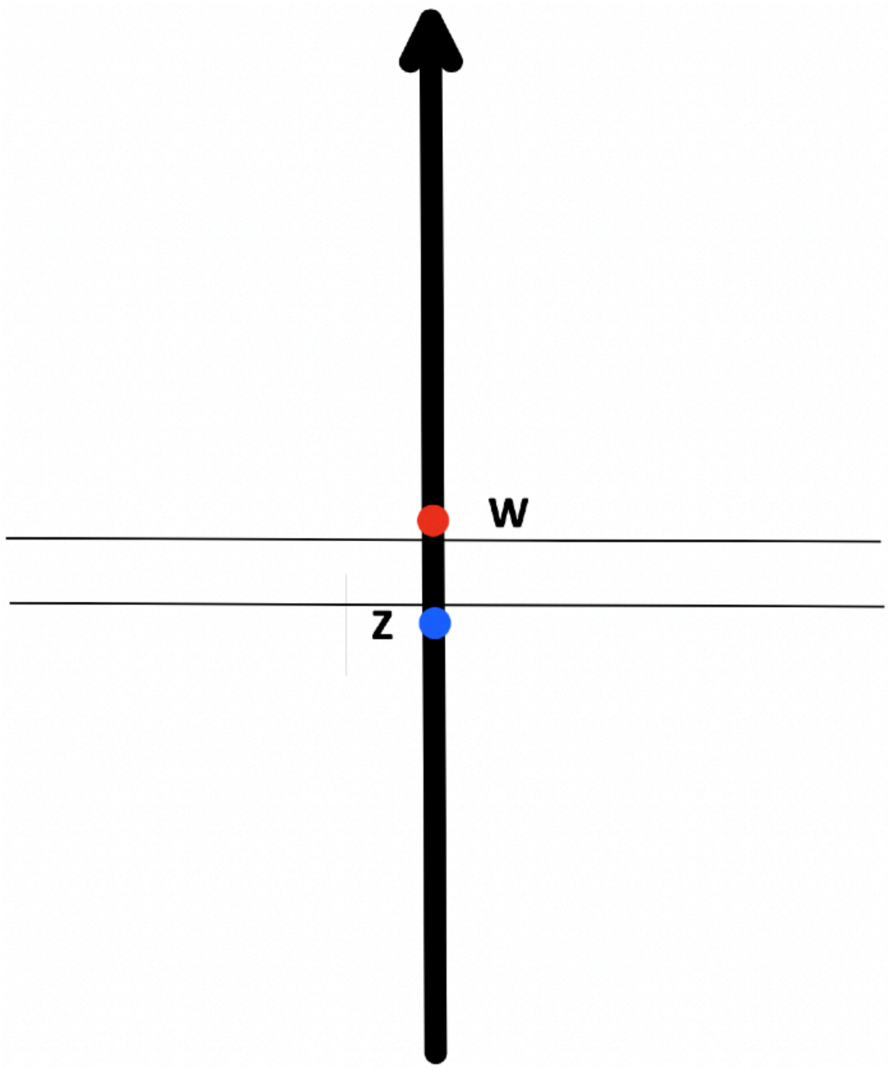


Siano definiti i seguenti dati:

Z^* = Soluzione **ottima** del problema primale;
W^* = Soluzione **ottima** del problema duale;
Z = Soluzione generica del problema primale;
W = Soluzione generica del problema duale;

Teorema: Se ho una soluzione primale ammissibile di valore Z e una soluzione duale ammissibile di valore W, la soluzione ottima del primale non può essere più di W e la soluzione ottima del duale non può essere meno di Z.

Nota: **W >= Z**, SEMPRE.
Se W < Z, W non appartiene alla soluzione duale.



Quindi pian piano stiamo schiacciando il campo per sintonizzarci sulla soluzione ottima.

In questo esempio entrambe le soluzioni non sono molto lontane dall'ottimo.

Teorema fondamentale: ***Data una soluzione Z ammissibile per il problema primale e una soluzione W ammissibile per il problema duale, il valore della funzione obiettivo calcolato nella soluzione primale è minore (o uguale) del valore delle funzione obiettivo calcolato nella soluzione duale***.

In sintesi: Se prendo una qualunque soluzione ammissibile del problema duale, il valore della funzione obiettivo su questa soluzione è sempre maggiore (o uguale) del valore della funzione obiettivo su una qualunque soluzione ammissibile del problema primale.

$$Z <= W$$

Teorema essenziale della soluzione ottima.

Se il valore della funzione obiettivo della soluzione ammissibile/generica del problema primale è uguale al valore della funzione obiettivo della soluzione ammissibile/generica del problema duale, quella coppia di soluzioni è OTTIMA.

$$Z^* = W^*$$

Vale l'uguaglianza.

Ricorda: il valore della soluzione ottima del problema duale coincide con il valore della soluzione ottima del problema primale, ma questo non vuol dire che coincidano necessariamente le due soluzioni. La coincidenza è in termini di valore della funzione obiettivo.

Okay ora passiamo all'azione.

Troviamo una soluzione ottima del problema primale.
Applichiamo il **metodo del simplesso sul problema primale**.

$$\begin{aligned}
&\underline{\textbf{Max}}\ 4x1+x2+5x3+3x4 = Z\\
&x1-x2-x3+3x4 <= 1\\
&5x1+x2+3x3+8x4 <= 55\\
&-x1+2x2+3x3-5x4 <= 3\\
&x1,x2,x3,x4 >= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} \ \mathbf{=}\ & 4x1+x2+5x3+3x4\\
x5 =\ & 1-x1+x2+x3-3x4\\
x6 =\ & 55-5x1-x2-3x3-8x4\\
x7 =\ & 3+x1-2x2-3x3+5x4
\end{aligned}$$

(0,0,0,0,1,55,3), Z = 4.

● ● ●

Etc…

Il metodo del simplesso si sposterà di base in base.
Alla fine perveniamo al seguente dizionario ottimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} \ \mathbf{=}\ & 29-x1-2x3-11x5-6x7\\
x2 =\ & 14-2x1-4x3-5x5-3x7\\
x4 =\ & 5-x1-x3-2x5-x7\\
x6 =\ & 1+5x1+9x3+21x5+11x7
\end{aligned}$$

(0,14,0,5,0,1,0), Z = 29.

La soluzione di questo dizionario ottimo produce un valore della funzione obiettivo **Z = 29**.

Immaginiamo di trovarci al cospetto di un ipotetico superiore, al quale presentiamo una soluzione di valore pari a 29.

Tuttavia, il nostro capo, nella sua ingenua insoddisfazione, **esige un risultato superiore**, *ignorando che il valore ottenuto rappresenta una soluzione ottima per il problema primale e che, pertanto, oltre non si può procedere*.

A questo punto, con astuzia, decido di esibire un **certificato** che attesti in maniera incontrovertibile l'ottimalità della soluzione proposta.

Come ottenere tale certificato?

Basta mostrare una soluzione del problema duale di valore pari a 29, purché essa sia ammissibile per il duale. In tal caso, la soluzione risulterà non solo valida ma anche ottima. Poiché il valore del duale coincide con quello del primale, è dimostrato che non è possibile superare il valore di 29, consacrando la soluzione come definitiva e ineccepibile.

La soluzione ottima per il duale consiste nel prendere i coefficienti di costo ridotto delle variabili di slack dalla funzione obiettivo del primale, cambiarli di segno e assegnarli alla corrispondente variabile duale.

In questo esempio le variabili di slack aggiuntive sono x5,x6 e x7.

Andiamo nella funzione obiettivo del dizionario ottimo e prendiamo i coefficienti:

$$(-11,0,-6).$$

Cambiamo di segno il vettore:

$$(11,0,6).$$

Assodato che il numero di variabili di slack Xi aggiuntive è uguale al numero di vincoli e, quest'ultimo è uguale al numero di moltiplicatori, posso assegnare in maniera ordinata gli elementi del vettore alle variabili moltiplicative Yi, pertanto:

$$y1 = 11,\ y2 = 0,\ y3 = 6.$$

Pertanto la soluzione (11,0,6) è una soluzione OTTIMA per il problema duale.

Teorema dualità: ***ogni volta che termino il metodo del simplesso sul problema primale e analizzo i costi ridotti delle variabili di slack cambiandoli di segno ed assegnandoli alle variabili Yi, trovo una soluzione ottima del problema duale. Questo succederà sempre.***

Le due soluzioni, quella primale e quella duale, sono una coppia di soluzioni ottime:

(0,14,0,5) <-> (11,0,6).

Entrambe (nei loro rispettivi problemi) forniscono un valore della soluzione obiettivo pari a 29.

Queste due soluzioni sono ottime perché sono entrambe ammissibili e forniscono uno stesso valore (sia per il primale che per il duale) della funzione obiettivo.

Fine.