MINI RIEPILOGO ESERCIZI D'ESAME

Documento a cura di Simone Remoli

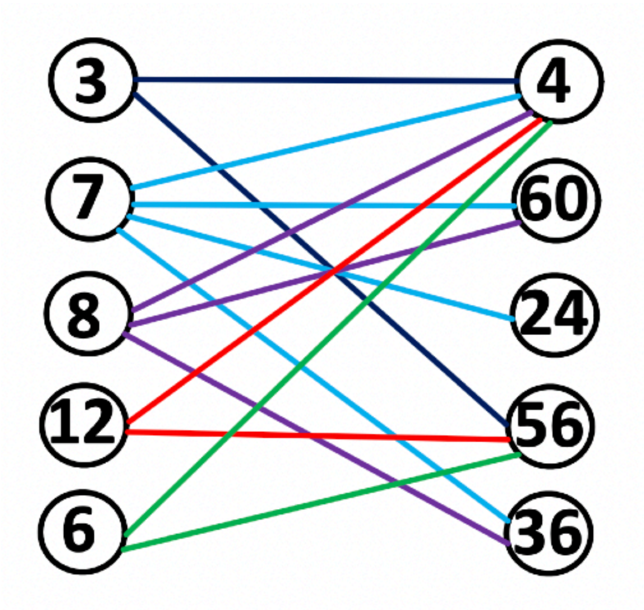
Mi sento generoso e desidero dedicare qualche parola per introdurre questo documento.
Fino ad ora ho affrontato i vari argomenti singolarmente, dedicando un documento a ciascuno.
In questo ampio documento, invece, cerco di risolvere ogni dubbio riguardante i diversi temi della ricerca operativa, con *l'eccezione del conteggio combinatorio e degli esercizi di formulazione*, che rimangono esercizi standard e possono essere affrontati sempre con lo stesso approccio.
Mi auguro che questo lavoro possa risultare utile a tutti gli studenti che lo consulteranno.
Il documento sarà trattato nel modo più chiaro e comprensibile possibile.

Esercizio d'esame 13 settembre 2023 - Matching.

Il vostro magazzino dispone di **100 alloggi**, numerati da 1 a 100. Al momento sono liberi solo gli alloggi con numero **4, 60, 24, 56, 36.** Dovete riporre nel magazzino cinque oggetti anch'essi numerati: rispettivamente **3, 7, 8, 12, 6.**
Ogni oggetto deve essere riposto in un alloggio diverso e un oggetto con numero x può essere riposto in un alloggio numerato y solo se y non è un multiplo di x.
Fornire un assegnamento degli oggetti agli alloggi ammissibile oppure un certificato che tale alloggiamento non può esistere.

Svolgimento.

L'esercizio viene risolto su un grafo bipartito.

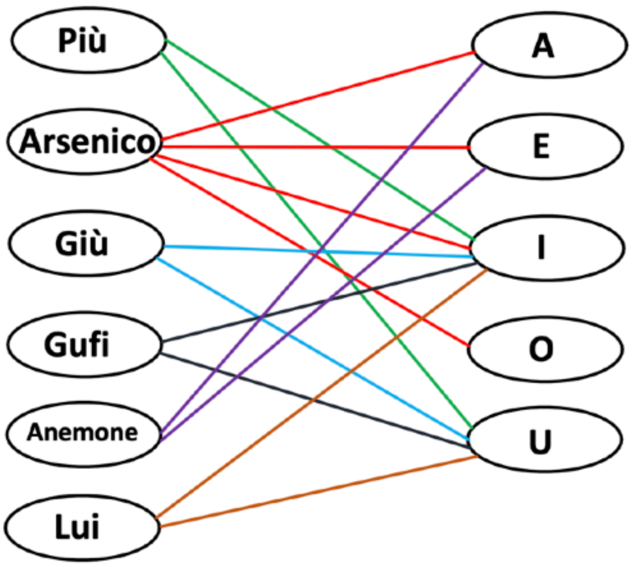


Non esiste un matching completo perché preso Q = {3,6,12} e N(Q) = {4,56}, si ha che |N(Q)| < |Q|, 2 < 3, quindi è violata la condizione di Hall.

Esercizio d'esame 17 settembre 2021 - Matching.

Si consideri l'insieme X delle seguenti parole: {**Più** , **Arsenico**, **Giù** , **Gufi**, **Anemone**, **Lui**} e l'insieme Y delle vocali {**a**, **e**, **i**, **o**, **u**}.
Si consideri quindi il grafo bipartito G(X **U** Y, E) dove {x, y} ∈ E, x ∈ X, y ∈ Y , se e solo se la vocale y è presente nella parola x.
Esibire un matching Y-completo oppure un certificato, tra quelli visti a lezione, che dimostri che tale matching non esiste.
Non è richiesto di giustificare la risposta.

Svolgimento.



Preso Q = {A,E,O}, N(Q) = {Arsenico, Anemone}, |N(Q)| < |Q|, pertanto è violata la condizione di Hall.

Esercizio d'esame 26 febbraio 2021 - Matching.

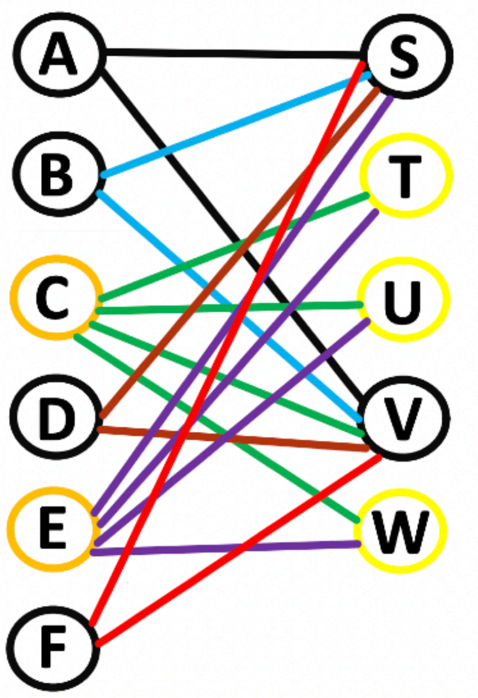
Si consideri il grafo bipartito **G(X U Y, E)** con insieme dei vertici X **U** Y con

X = {A, B,C, D, E, F} e Y= {S, T,U,V,W} e insieme degli spigoli E definito dalla matrice a destra ->:

	S	T	U	V	W
A	1	0	0	1	0
B	1	0	0	1	0
C	0	1	1	1	1
D	1	0	0	1	0
E	1	1	1	0	1
F	1	0	0	1	0

({x, y}∈ E se e solo l'elemento (x, y) è 1).
Esibire un matching Y-completo oppure un certificato, tra quelli visti a lezione, che dimostri che tale matching non esiste. Non è richiesto di giustificare la risposta.

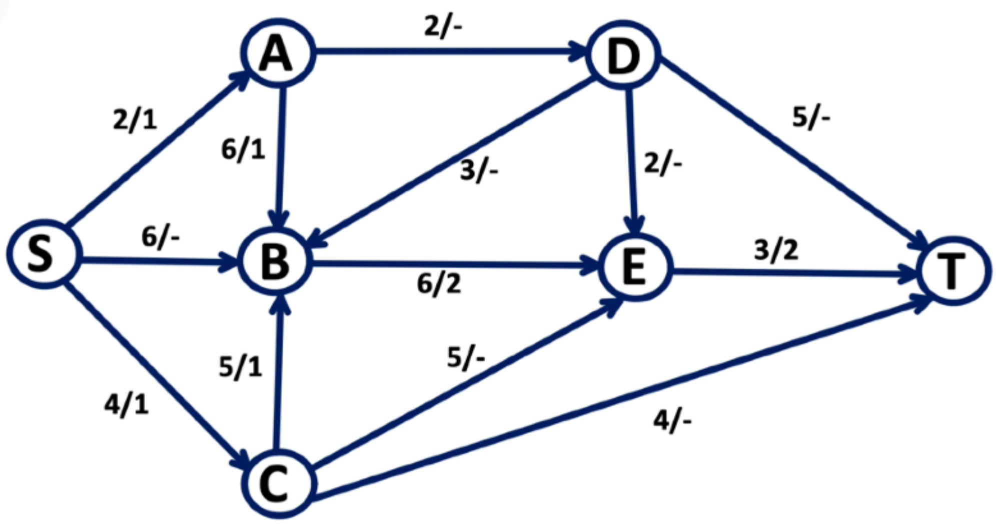
Svolgimento.



Preso l'insieme Q = {T,U,W} e N(Q) = {C,E}, |N(Q)| < |Q|, 2 < 3, pertanto è violata la condizione di Hall e non esiste un Matching Y-Completo.

Esercizio d'esame 26 febbraio 2021 - Flusso.

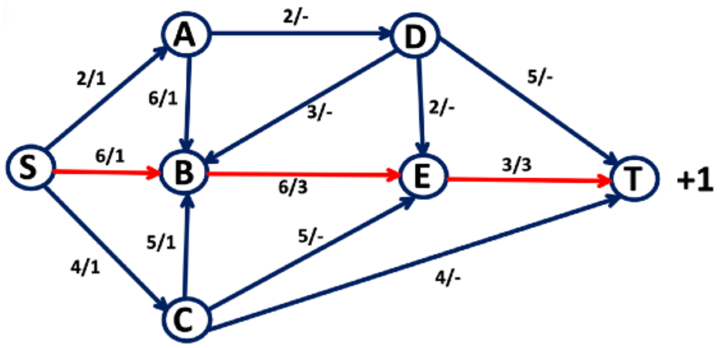
Trovare il massimo flusso della seguente rete:

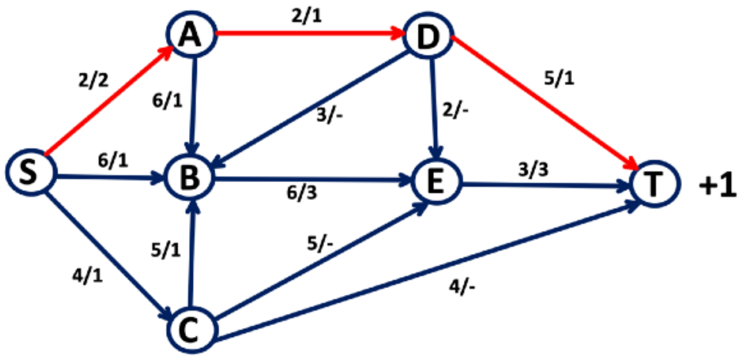


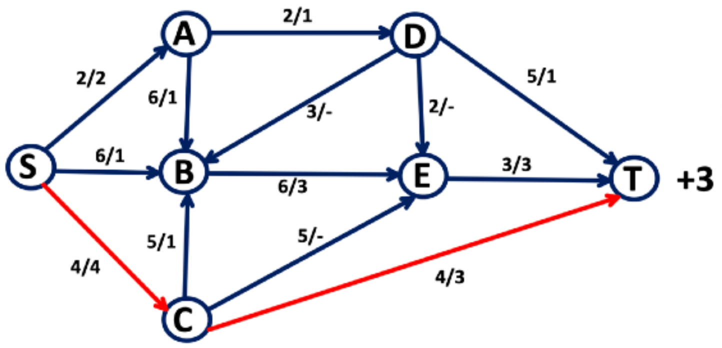
E **certificarne** la sua ottimalità.

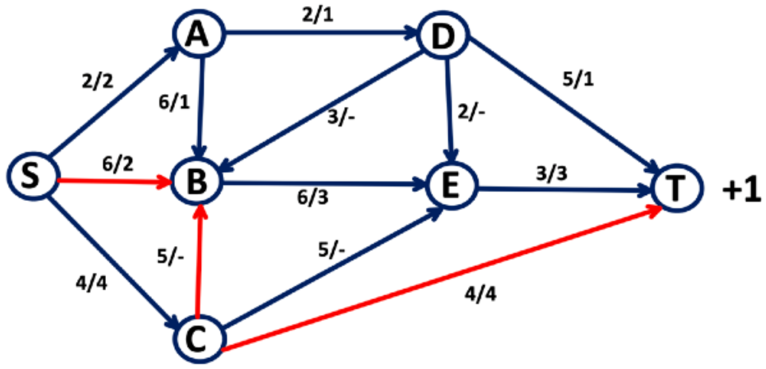
Svolgimento.

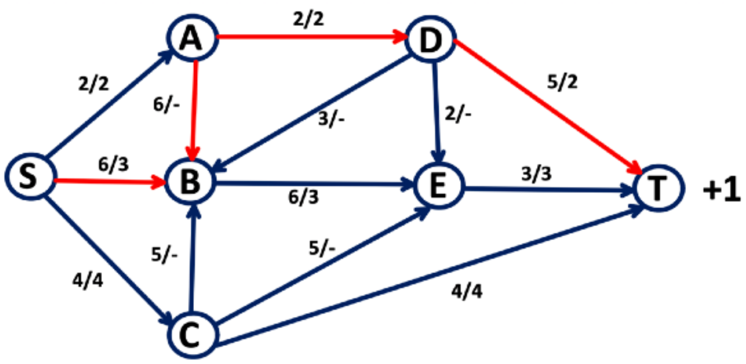
Il valore del flusso iniziale è pari a 2.
Cerchiamo i cammini aumentanti (Leggilo da sinistra a destra).





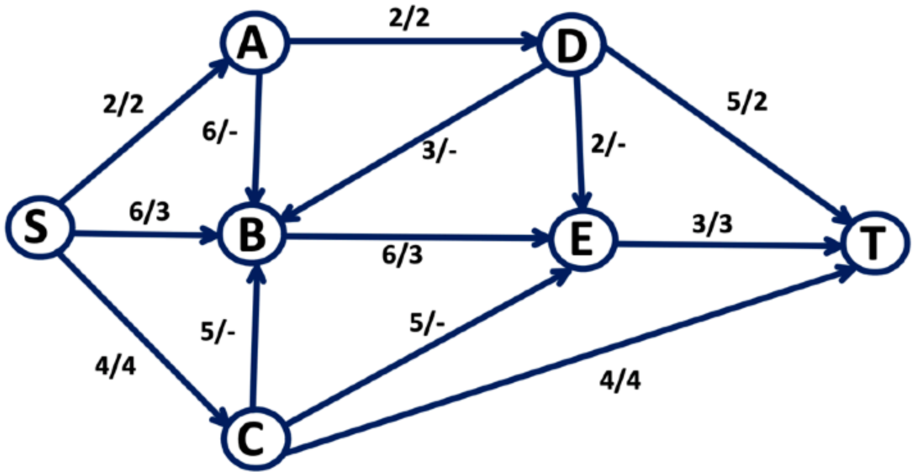




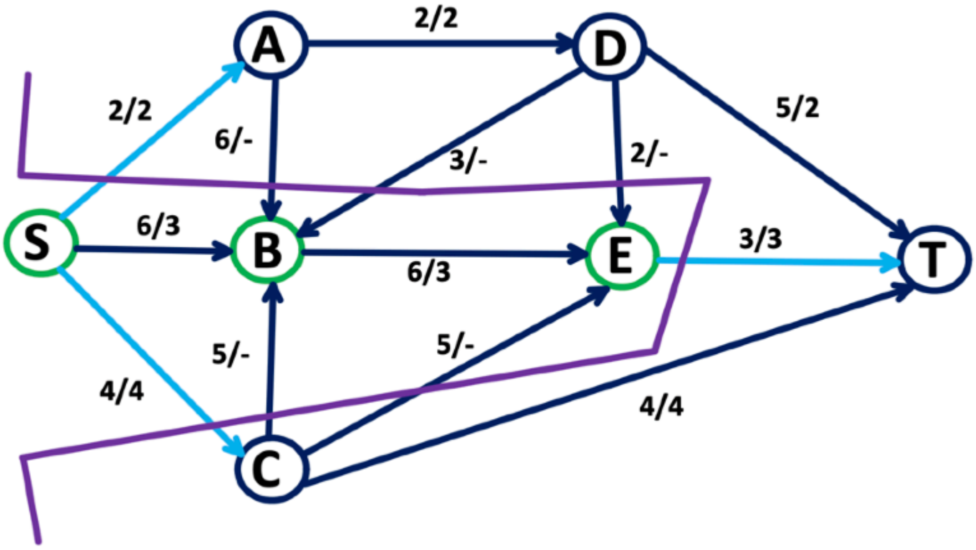


Come è facile notare il flusso di valore massimo è pari a 9.

La rete finale con la capacità/flusso aggiornata è la seguente:

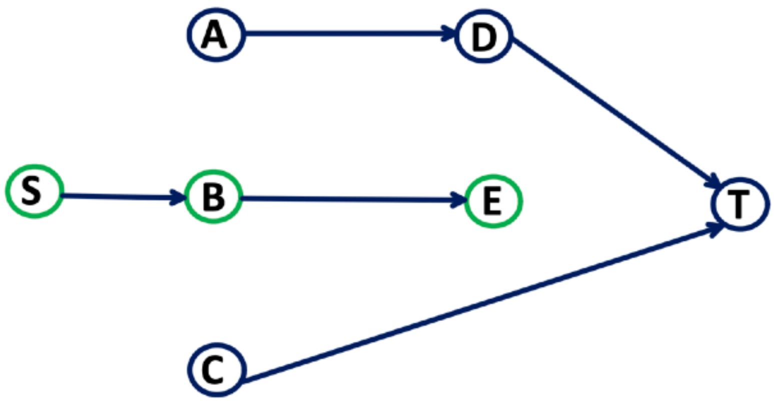


Il **taglio** che certifica l'ottimalità del flusso è il seguente:



Il taglio che certifica l'ottimalità è rappresentato dai seguenti insiemi disgiunti:

V1 = {S,B,E} V2 = {A,C,D,T}.



Esercizio d'esame 13 settembre 2023 - Matrici unimodulari.

1. Si scriva una matrice M ∈ {0,1,−1} 4×4 non totalmente unimodulare.

1.1: E se dovevo scrivere una matrice M ∈ {0,−1} 4×4 non totalmente unimodulare?

2. Si scriva una matrice N ∈ $\{0, 1,-1\}_{4\times 4}$ totalmente unimodulare con almeno 3 elementi diversi da 0 in ciascuna riga e ciascuna colonna.

Svolgimento.

Det(S) = -2, quindi la matrice è non totalmente unimodulare.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det(S) = -2, quindi la matrice è non totalmente unimodulare.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di N è 0.
Il determinante di N, presa 3x3, è 0.
Il determinante di N, presa 2x2, è 0.
Il determinante di N, presa 1x1, è 0.
La matrice N è TOTALMENTE UNIMODULARE.

Nota: *Non provate a risolverlo con **ChatGPT** perché sbaglia nella creazione delle matrici.*
***Ragionateci*.**

Esercizio d'esame 16 settembre 2024 - Simplesso.

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max\ -4x_1 + 10x_2 - 3x_3 &: \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &\le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\le 1 \\ -x_1 + x_2 \qquad &\le 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. & \end{aligned}$$

Individuare una soluzione ottima, se esiste, **attraverso il metodo del simplesso.** In caso in cui in una iterazione ci siano più variabili candidate a entrare in base, far entrare quella con il costo ridotto più alto. Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, riportare la sequenza dei diversi dizionari e le opportune considerazioni finali.

Svolgimento.

$$\text{Maximizzare } Z = -4x_1 + 10x_2 - 3x_3$$

$$\text{soggetto a: } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Sono state aggiunte le variabili di slack (x4,x5,x6). Procediamo con la scrittura del primo dizionario.

$$Z = -4x_1 + 10x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 1 + 2x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$x_5 = 1 - 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$x_6 = 2 + x_1 - x_2$$

(0,0,0,1,1,2)

Z = 0.

Ora entra in base x2 ed esce x4.
Procediamo con la scrittura del secondo dizionario.

$$Z = \frac{5}{2} + x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

$$x_5 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4$$

$$x_6 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

$$(0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{7}{4}, \frac{7}{4})$$

$$Z = \frac{5}{2}$$

Ora entra in base x1 ed esce x5.
Procediamo con la scrittura del terzo dizionario.

$$Z = 6 - x_3 - 4x_4 - 2x_5$$

$$x_2 = 2 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - 2x_5$$

$$x_6 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5$$

$$\left(\frac{7}{2}, 2, 0, 0, 0, \frac{7}{2}\right)$$

$$Z = 6$$

Togliendo le variabili di slack e riportando tutto alle variabili originali:

$$\left(\frac{7}{2}, 2, 0\right)$$

È una soluzione ottima di valore **Z = 6**.

ATTENZIONE: *La soluzione ottima del problema primale ha valore pari a 6. Tuttavia, se abbiamo studiato con attenzione la teoria (si veda i documenti precedenti sulla dualità), sappiamo che anche il valore della soluzione ottima del problema duale deve essere pari a 6. Ciò si deve al fatto che è stato dimostrato come i valori delle soluzioni ottimali del problema primale e di quello duale coincidano*.

(Procedo oltre a ciò che strettamente occorre per il superamento dell'esame, guidato dalla mia passione e dal fervente desiderio di spingermi oltre i limiti imposti. Tuttavia, **quanto segue può essere ignorato**, poiché **non è indispensabile al conseguimento del successo nell'esame**.)

Ora verifichiamo innanzitutto che le due soluzioni all'ottimo coincidono.

Procediamo a scrivere il **problema duale**.

$$\begin{aligned} \max\ & -4x_1+10x_2-3x_3: \\ & -2x_1+4x_2-x_3 \le 1 \\ & 2x_1-3x_2+x_3 \le 1 \\ & -x_1+x_2 \le 2 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

$$\text{Minimizzare } Z = y_1+y_2+2y_3$$

$$\begin{cases} -2y_1+2y_2-y_3 \ge -4 \\ 4y_1-3y_2+y_3 \ge 10 \\ -y_1+y_2 \ge -3 \\ y_1,y_2,y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ora abbiamo il problema **primale** (sinistra) con il relativo problema **duale** (destra).

Come prima verifica, consideriamo i costi ridotti delle variabili di slack x4,x5,x6 cambiandone il segno.

Successivamente, assegniamo tali valori, uno per volta, alle variabili duali y1,y2,y3.

(y1,y2,y3) = (-4,-2,0).

Cambiamone il segno.

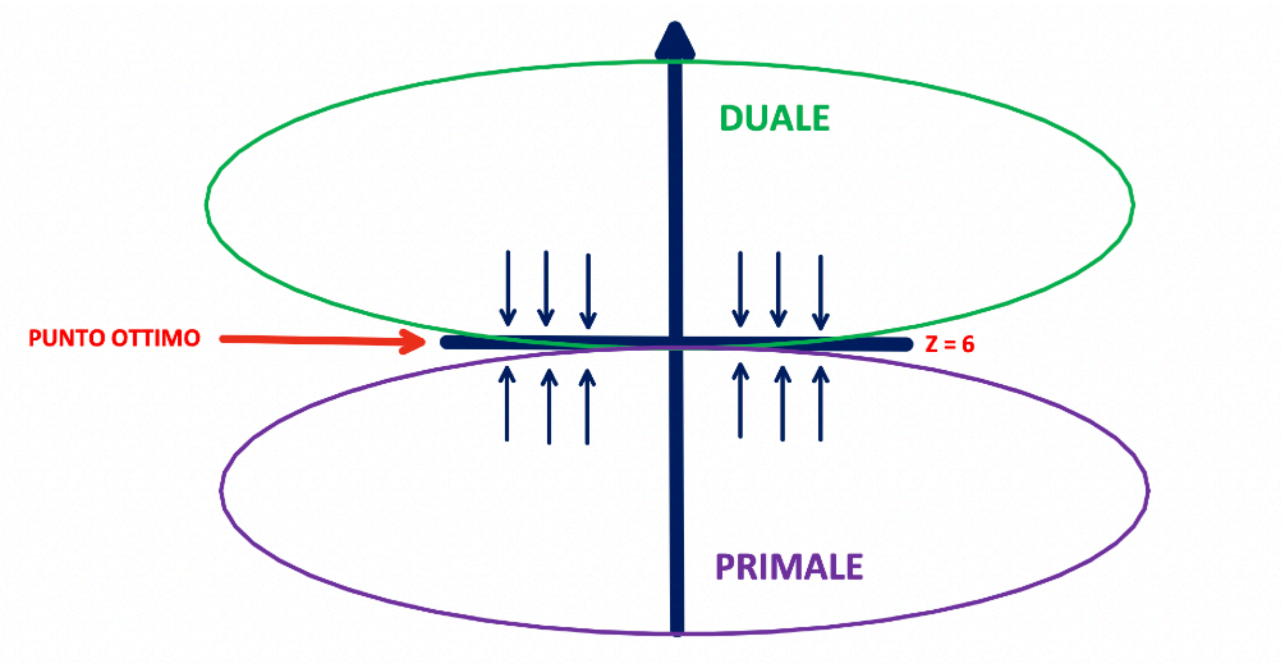
(y1,y2,y3) = (4,2,0).

La soluzione rispetta tutti i vincoli del duale, pertanto è **ammissibile** per D.

1. $-2y_1 + 2y_2 - y_3 = -4 \quad (\text{rispetta il vincolo: } -4 \geq -4)$
2. $4y_1 - 3y_2 + y_3 = 10 \quad (\text{rispetta il vincolo: } 10 \geq 10)$
3. $-y_1 + y_2 = -2 \quad (\text{rispetta il vincolo: } -2 \geq -3)$

Se nella funzione obiettivo del duale andiamo a sostituire y1 = 4, y2 = 2 e y3 = 0, otteniamo una soluzione Z = 6 per il problema D.

Z = 6 sia per il primale che per il duale.



Okay, abbiamo dimostrato che il valore della funzione obiettivo all'ottimo coincide (tra duale e primale).

Ed è qui che si manifesta la sublime bellezza della programmazione lineare.

La soluzione (4,2,0) si erge come una soluzione ottima del duale e, per ciò stesso, se decidessimo di mettere alla prova l'equivalenza tra le soluzioni ottimali del *problema primale e del suo duale, percorrendo il sentiero delle **condizioni di complementarità**, tale soluzione dovrebbe naturalmente emergere dal sistema che ci apprestiamo a risolvere.*

E proprio questo è il viaggio che intraprenderemo ora.

Verificare se

$$\left(\frac{7}{2}, 2, 0\right)$$

è una soluzione ottima del primale attraverso le **condizioni di complementarità.**

I **vincoli attivi** (soddisfatti all'uguaglianza) sono il **primo e il secondo.**
Il **vincolo non attivo** è il **terzo.**

Le **condizioni di complementarità** ci portando a risolvere questo sistema.

$$\begin{cases} y_3 = 0 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 = -4 \\ 4y_1 - 3y_2 + y_3 = 10 \end{cases}$$

Il sistema ammette una sola soluzione **(y1,y2,y3)=(4,2,0)**.

(4,2,0) è una soluzione ottima per il duale.

$\left(\frac{7}{2}, 2, 0\right)$ è una soluzione ottima per il primale.

Ma entrambe le soluzioni, seppur diverse fra loro, all'ottimo producono un valore uguale della funzione obiettivo, Z = 6 (Soluzione ottima).

Esercizio d'esame 20 luglio 2017 - Slackness Compl.

Considera il seguente PL:

$$\begin{array}{lrrrrcl} \max & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +x_4 & & \\ & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & \leq & 12 \\ & x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq & 7 \\ & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 10 \\ & & & & x_1,x_3,x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando le condizioni di complementarità, cosa è possibile dire sulla soluzione $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,2,2,0)$? Cosa è possibile dire sulla soluzione $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,\frac{52}{5},0,\frac{2}{5})$?

Per illustrare la risposta, riportare:
1) **il problema duale;**
2) **per ciascun punto: il sistema da risolvere con eventuale soluzione e la valutazione del punto** (ammissibile, ottimo etc.).

Svolgimento.

1) Il problema duale è il seguente:

$$\text{Minimizzare } Z = 12y_1 + 7y_2 + 10y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) <u>(1,2,2,0) = (x1,x2,x3,x4)</u> viene sostituita nei vincoli del **primale**.

7 < 12;
-1 < 7;
10 = 10;

Il vincolo attivo è il terzo.
I due vincoli non attivi sono rispettivamente il primo e il secondo.

Pertanto, *le condizioni di complementarità ci portano a scrivere il seguente sistema*:

$$
\begin{cases}
y_1 = 0 \\
y_2 = 0 \\
3y_1 + y_2 + 2y_3 = 2 \\
y_1 - 3y_2 + y_3 = 4 \\
y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 3
\end{cases}
$$

<u>Il sistema non ha soluzioni valide</u>. Questo significa che le equazioni sono incompatibili tra loro, ovvero non esiste un valore di y3 che soddisfi contemporaneamente tutte le equazioni date.
Pertanto, la soluzione (1,2,2,0) non è una soluzione ottima per il primale.

$$(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$$

Adesso andiamo a sostituire nei vincoli primari questa soluzione.
Otteniamo:

12 = 12;
-30 < 7;

10 = 10;

I vincoli attivi sono il primo e il terzo.
Il vincolo non attivo è il secondo.

Le condizioni di complementarità ci portano a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 = 4 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 1 \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzione (y1,y2,y3) = (1,0,3).
Ora bisogna prendere i vincoli duali in corrispondenza delle variabili x1,x3, ossia le variabili pari a zero nella soluzione fornita.
E sostituire **y1 = 1, y2 = 0 e y3 = 3,** per verificare se i vincoli sono soddisfatti.

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2$$
$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3$$

9 > 2
10 > 3

Ammissibilità duale confermata.

Conclusione: la soluzione (1,0,3) è una soluzione OTTIMA per il duale.

E quindi analogamente, vale tutto ciò che ho spiegato prima, ossia anche la soluzione fornita per il primale **->** è ottima.

$$(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$$

(1,0,3) $(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5})$

SONO ENTRAMBE SOLUZIONI OTTIME

Sostituendo queste due soluzioni nella rispettiva funzione obiettivo, è immediato verificare che entrambe producono un valore ottimale della funzione obiettivo pari a 42.

Abbiamo così dimostrato tutto: entrambe le soluzioni sono ammissibili e soddisfano i vincoli. Tuttavia, se decidessimo di applicare il metodo del simplesso al problema di massimizzazione, troveremmo comunque una soluzione ottimale con valore pari a 42. Pertanto, siamo riusciti a determinare una soluzione ottima senza dover ricorrere al metodo del simplesso.

Resta, a questo punto, solo da provare il **metodo del simplesso** su questo problema primale di massimizzazione: come anticipato, il valore della funzione obiettivo ottenuto sarà 42.

A questo punto sappiamo come si applica il metodo del simplesso.
L'uguaglianza si può trasformare in due vincoli di disuguaglianza e il problema è già in forma di massimizzazione.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +x_4 & & \\
 & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & \leq & 12 \\
 & x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \leq & 7 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 10 \\
 & & & & x_1, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Applichiamo il metodo del simplesso per trovare la soluzione ottima del **primale** fornito inizialmente.

Attenzione sto per svolgere un procedimento del "metodo del simplesso" diverso da quello che sino ad ora potresti conoscere.

Adesso imposto il problema in forma standard.

(Pagina successiva)

$$\text{Massimizzare } Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_7 \le 10 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_8 \le -10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0 \end{cases}$$

Le variabili di slack introdotte sono (x5,x6,x7,x8).
Ora ricaviamo il primo dizionario, chiamiamolo P1.

$$x_5 = 12 - 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4$$

$$x_6 = 7 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4$$

$$x_7 = 10 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4$$

$$x_8 = -10 + 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$(0, 0, 0, 0, 12, 7, 10, -10)$$

Questo costituisce un problema, poiché la soluzione di questo primo dizionario non è ammissibile in quanto viola la proprietà di non negatività della variabile x8.

Di conseguenza, il metodo del simplesso **non può procedere**. Tuttavia, sappiamo che la soluzione ottima del problema primale esiste e, inoltre, conosciamo che il suo valore è pari a 42.

Dobbiamo creare un problema ausiliario per trovare una prima soluzione ammissibile.
Solo dopo si procede con il metodo del simplesso come lo conosciamo.

Teorema: **Il problema P1 ha 1 *soluzione ammissibile* se e soltanto se la *soluzione ottima* di P2 ha valore 0**.

Cosa rappresenta P2?

P2 è un problema ausiliario di ***minimizzazione*** definito

con una nuova variabile x0 positiva (o uguale) a 0.
Il problema viene scritto con gli stessi vincoli togliendo le variabili di slack precedentemente inserite.

Scriviamo P2.

Minimizzare x_0

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_0 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_0 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_0 \le 10 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_0 \le -10 \end{cases}$$

Massimizzare $W = -x_0$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_0 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_0 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_0 \le 10 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_0 \le -10 \end{cases}$$

Min f(x) = Max -f(x).
<u>Il problema a destra (di massimizzazione) è quello che useremo per verificare il teorema</u>.
Scriviamo il primo dizionario di P2.
Nota: sono già state aggiunte le variabili di slack (x5,x6,x7,x8) a P2.

$$w = -x_0$$

$$x_5 = 12 - 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_0$$

$$x_6 = 7 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_0$$

$$x_7 = 10 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_0$$

$$x_8 = -10 + 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_0$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, 12, 7, 10, -10)$$

Sembra che questo problema abbia deciso di non lasciarci in pace: ancora una volta ci ritroviamo con una soluzione non ammissibile perché x8 ha deciso di essere ancora negativa... proprio lei, sempre lei! Ma niente paura😄.

Ma allora che senso ha tutto questo?
Ha perfettamente senso, poiché quella soluzione può essere resa ammissibile facendo entrare in base la variabile x0 ed espellendo dalla base la variabile più inammissibile tra tutte, ossia quella con il coefficiente negativo di maggior valore assoluto. Tale scelta permette di correggere l'incoerenza e di avanzare verso una soluzione ottimale.

Entra in base x0 ed esce x8.

$$x_0 = -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_8 + 10$$
$$x_5 = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_8 + 22$$
$$x_6 = -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_8 + 17$$
$$x_7 = -4x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 + x_8 + 20$$
$$w = -x_0 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_8 - 10$$

$$(10, 0, 0, 0, 0, 22, 17, 20, 0)$$
$$w = -10$$

Finalmente il dizionario è **ammissibile**.
Ora procediamo naturalmente con il classico *metodo del simplesso*.

Entra in base x3 ed esce x0.

$$x_3 = -\frac{x_0}{3} - \frac{2x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{x_4}{3} + \frac{x_8}{3} + \frac{10}{3}$$
$$x_5 = \frac{4x_0}{3} - \frac{7x_1}{3} - \frac{2x_2}{3} - \frac{13x_4}{3} - \frac{x_8}{3} + \frac{26}{3}$$
$$x_6 = \frac{5x_0}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{11x_2}{3} - \frac{11x_4}{3} - \frac{2x_8}{3} + \frac{1}{3}$$
$$x_7 = 2x_0 - x_8$$
$$w = -x_0$$

$$\left(0, 0, 0, \frac{10}{3}, 0, \frac{26}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$$
$$w = 0$$

La soluzione ottima di P2 ha valore 0.
Adesso dall'ultimo dizionario togliamo la variabile x0 e alla funzione obiettivo originale Z (la primissima) sostituiamo la variabile x3.
Viene fuori un nuovo dizionario.

$$x_3 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_8$$

$$x_5 = \frac{26}{3} - \frac{7}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{13}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_8$$

$$x_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{11}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_8$$

$$x_7 = -x_8$$

$$Z = 10 + 3x_2 + 2x_4 + x_8$$

$$\left(0, 0, \frac{10}{3}, 0, \frac{26}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$$

$$Z = 10$$

Entra in base x2 ed esce x3.

$$x_2 = -2x_1 - 3x_3 + x_4 + x_8 + 10$$

$$x_5 = -x_1 + 2x_3 - 5x_4 - x_8 + 2$$

$$x_6 = -7x_1 - 11x_3 + 2x_8 + 37$$

$$x_7 = -x_8$$

$$Z = -6x_1 - 9x_3 + 5x_4 + 4x_8 + 40$$

$$(0, 10, 0, 0, 2, 37, 0, 0)$$

$$Z = 40$$

Entra in base x4 ed esce x5.

$$x_4 = -\frac{x_1}{5} + \frac{2x_3}{5} - \frac{x_5}{5} - \frac{x_8}{5} + \frac{2}{5}$$

$$x_2 = -\frac{11x_1}{5} - \frac{13x_3}{5} - \frac{x_5}{5} + \frac{4x_8}{5} + \frac{52}{5}$$

$$x_6 = -7x_1 - 11x_3 + 2x_8 + 37$$

$$x_7 = -x_8$$

$$Z = -7x_1 - 7x_3 - x_5 + 3x_8 + 42$$

$$\left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, 37, 0, 0\right)$$

$$Z = 42$$

Entra in base x8 ed esce x7.

$$x_8 = -x_7$$

$$x_4 = -\frac{x_1}{5} + \frac{2x_3}{5} - \frac{x_5}{5} + \frac{x_7}{5} + \frac{2}{5}$$

$$x_2 = -\frac{11x_1}{5} - \frac{13x_3}{5} - \frac{x_5}{5} - \frac{4x_7}{5} + \frac{52}{5}$$

$$x_6 = -7x_1 - 11x_3 - 2x_7 + 37$$

$$Z = -7x_1 - 7x_3 - x_5 - 3x_7 + 42$$

$$\left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, 37, 0, 0\right)$$

$$Z = 42$$

L'algoritmo termina con una soluzione ottima Z* = 42.

Ricordiamoci da dove siamo partiti.
Il nostro problema iniziale era in R^4, quindi possiamo riscrivere la soluzione con solo le variabili (x1,x2,x3,x4):

$$\left(0, \frac{52}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$$

La **soluzione ottenuta** attraverso il **metodo del simplesso** si rivela, in effetti, **identica** a quella **fornita inizialmente** dal problema.
Poiché avevamo già dimostrato, applicando le **condizioni di complementarità**, che questa rappresenta a tutti gli effetti una soluzione ottima di valore pari a 42, non abbiamo fatto altro che confermare tale affermazione risolvendo il problema primale mediante il metodo del simplesso. Questa verifica consolida ulteriormente la correttezza del risultato e l'eleganza dell'approccio adottato.

Ma non è tutto.

Tramite le condizioni di complementarità, avevamo dimostrato che **la soluzione (1,0,3) è una soluzione OTTIMA per il duale.**

Bene.

Verifichiamolo anche tramite il metodo del simplesso.
Consideriamo i costi ridotti delle variabili di slack $x5,x6,x7,x8$ cambiandone il segno. Successivamente, assegniamo tali valori, uno per volta, alle variabili duali $y1,y2,y3$.

$$(-1,0,-3,0) = (1,0,3)$$

Penso non ci sia niente da aggiungere.
Abbiamo verificato tutto.

La dualità nella programmazione lineare è uno strumento importante che ti aiuta a vedere i problemi da un'altra prospettiva. Ogni problema primale ha un suo "compagno", il problema duale, e insieme permettono di trovare soluzioni in modo più completo ed efficace. Non preoccuparti se all'inizio sembra complicato: con un po' di pratica, diventerà tutto più chiaro.