Documento a cura di Simone Remoli.

CONTEGGIO - R.O

Non esiste una prova d'esame dove non è presente almeno un esercizio di conteggio.
Partiamo dalle basi.

Regola della somma: Se un'attività può essere svolta in due modi distinti, e il primo modo ha **N1** possibilità mentre il secondo ne ha **N2** , allora il numero totale di possibilità è la somma **N1+N2**, a patto che i due modi siano incompatibili (cioè non si sovrappongano). Ossia se devi scegliere tra due opzioni che non possono avvenire contemporaneamente, sommi il numero di possibilità di ciascuna, altrimenti alla somma sottrai la sovrapposizione.

Nota importantissima: Deve esistere il connettivo o. Il connettivo **O** implica che devi scegliere **o una cosa o l'altra**, ma non entrambe contemporaneamente. Questo garantisce che le due opzioni siano **mutuamente esclusive** e non abbiano elementi in comune, il che è un requisito per applicare correttamente la regola della somma.

Esempio 1.

Un ristorante offre **5 tipi di pizze** e **4 tipi di panini**. Se puoi scegliere **o una pizza o un panino**, quante scelte hai in totale?

Risposta: 5 + 4. Puoi scegliere una pizza (5 modi) **O** un panino (4 modi).

Esempio 2.

Un negozio vende 6 tipi di magliette e 3 tipi di pantaloni. Se vuoi comprare **o una maglietta o un paio di pantaloni**, quante scelte hai?

Risposta: 6 + 3. Puoi scegliere una maglietta (6 modi) **O** un paio di pantaloni (3 modi).

Esempio 3.

In un gioco, puoi pescare una carta dal mazzo **rosso** (20 carte) o dal mazzo **blu** (15 carte).Quante carte diverse puoi pescare in totale?

Risposta: 20 + 15. Puoi pescare una carta dal mazzo rosso (20 modi) **O** una dal mazzo blu (15 modi).

Regola del prodotto: Se un'attività si può suddividere in più passaggi indipendenti, e il primo passaggio ha N1 possibilità, il secondo **N2**, e così via, allora il numero totale di combinazioni è dato dal prodotto N1 x N2 x. ..... .

Quando devi fare **più scelte consecutive** e ogni scelta dipende da un'opzione precedente, **moltiplichi** le possibilità di ogni scelta.

Si usa con il **connettivo logico E.**

Teorema: il **connettivo O** specifica il **+** (somma delle possibilità), mentre il **connettivo E** implica la **moltiplicazione delle possibilità.**

Esempio 4.

Un guardaroba ha 3 magliette e 2 pantaloni.
Quante combinazioni di un completo maglietta e pantalone si possono creare?

Risposta: 3 x 2. Usando la regola del prodotto.
Una maglietta può essere scelta in 3 modi diversi e un pantalone può essere scelto in 2 modi diversi.

Le combinazioni sono:

1. M1 + P1;
2. M1 + P2;
3. M2 + P1;
4. M2 + P2;
5. M3 + P1;
6. M3 + P2;

Esempio 5.

Un menù prevede: 2 antipasti, 3 primi, 2 dolci.
Quante combinazioni di pasti completi (antipasto + primo + dolce) si possono fare?

Risposta: 2 x 3 x 2.

Esempio 6.

Un codice PIN è composto da 4 cifre (0-9).
Quanti codici PIN distinti si possono generare?

Risposta: 10^4 = 10 x 10 x 10 x 10.
Ogni cifra può essere scelta in 10 modi diversi.

Esempio 7.

Quante sono le diverse stringhe con 9 bit?

Risposta: 2^9 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2.
Ciascun bit lo posso scegliere in 2 modi diversi.

Esempio 8.

Voglio etichettare dei pacchi e voglio assegnare ad ogni pacco un codice.
Posso utilizzare un codice formato da 6 caratteri.

***   ***

Caratteri alfabeto IT.
Cifre (0-9).

Quanti pacchi riesco ad etichettare?

Risposta: 21^3 x 10^3.
21 x 21 x 21 x 10 x 10 x 10.
I primi 3 caratteri li posso scegliere ciascuno in 21 modi diversi dovendo pescare dall'insieme dell'alfabeto italiano, mentre gli ultimi 3 caratteri li posso scegliere ciascuno in 10 modi diversi dovendo pescare dall'insieme delle cifre.

Esempio 9.

Quante sono le stringhe con 10 bit che hanno uno zero in 7ª posizione?

Risposta: $2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$.
Il 0°,1°,2°,3°,4°,5°,6°,8° e il 9° bit lo posso scegliere in 2 modi diversi, mentre il 7° bit lo posso scegliere in 1 solo modo poiché è fissato a zero:

*** * * * * * * 0 * ***

Esempio 10.

Quante sono le stringhe con 10 bit che hanno un 1 in seconda posizione **e** (reg prodotto) uno 0 in settima posizione?

Risposta: 2^8.

Esempio 11.

Possiedo una password con 6 **o** 7 caratteri alfanumerici. Quante sono le mie possibili password?

Risposta: $31^6 + 31^7$.

Il problema sfrutta l'uso della regola del prodotto per contare le possibili password con 6 caratteri: $\mathbf{31^6}$.

Il problema sfrutta l'uso della regola del prodotto per contare le possibili password con 7 caratteri: $\mathbf{31^7}$.

Dopodiché sfrutta l'uso della regola della somma poiché la prima password la posso scegliere in 31^6 modi diversi e la seconda password in 31^7 modi diversi.
Nota che è presente il connettivo **O**.

In questo caso, **non esistono password che soddisfano entrambe le condizioni**, perché una password non può avere contemporaneamente **6 e 7 caratteri.** Quindi, le due insiemi di password sono **mutuamente esclusivi.** Per questo motivo, la semplice somma è sufficiente, senza bisogno di considerare l'intersezione

Esempio 11-Bis.

Ma se la password ha come primo carattere una cifra?

Risposta: $31^5 \times 10 + 31^6 \times 10$.

Nota che il primo carattere lo posso scegliere in 10 modi diversi.

Quindi,

per contare le password con 6 caratteri che hanno una cifra in prima posizione usiamo la regola del prodotto: $31^5 \times 10$;
per contare le password con 7 caratteri che hanno una cifra in prima posizione usiamo la regola del prodotto: $31^6 \times 10$.

Dopodiché si sfrutta l'uso della regola della somma poiché la prima password la posso scegliere in $31^5 \times 10$ modi diversi e la seconda password in $31^6 \times 10$ modi diversi.

Esempio 11-tris.

E se il primo carattere deve essere necessariamente una z?

Risposta: $31^5 + 31^6$.

31^5 = Z/z * * * * *

31^6 = Z/z * * * * * *

Le * le posso scegliere in 31 modi diversi poiché sono caratteri alfanumerici.

Esempio 12.

Quante sono le stringhe con 8 bit tali che il 3° bit è uno 0 **o** il settimo è 1?

Risposta: $2^7 + 2^7 - 2^6$.

Stringhe con 8 bit tali che il terzo bit sia 0:

*** * * 0 * * * ***

2^7.

Stringhe con 8 bit tali che il settimo bit sia 1:

*** * * * * * * 1**

2^7.

Quando il problema usa il connettivo **O**, in questo caso è necessario considerare **l'intersezione degli insiemi** per evitare di contare due volte gli elementi che soddisfano **entrambe le condizioni, poiché non sono mutuamente esclusive.**

Stringhe con 8 bit tali che il terzo bit sia a 0 e il settimo bit sia a 1:

*** * * 0 * * * 1**

2^6.

Pertanto, per calcolare il numero di stringhe che soddisfano **almeno una delle due condizioni**, sommiamo le stringhe che soddisfano ciascuna condizione e sottraiamo quelle che soddisfano entrambe (per evitare duplicati).

Esempio 13.

Quante sono le stringhe con 8 bit tali che il 3° bit è uno 0 **E** il settimo è 1?

Risposta: 2^6.

Per risolvere il problema, dobbiamo contare le stringhe di **8 bit** che soddisfano entrambe le condizioni.

Ogni bit libero ha 2 possibilità (0 o 1).

*** * * 0 * * * 1**

Esempio 14.

In un ristorante, puoi ordinare:

Un **antipasto** (2 tipi) più un **primo** (3 tipi), oppure solo un **piatto unico** (4 tipi).

Quante combinazioni di pasti ci sono?

Risposta: 2 x 3 + 4.

L'antipasto e il primo li posso ordinare insieme e l'antipasto lo posso scegliere in 2 modi diversi mentre il

primo in 3 modi diversi e, applicando la regola del prodotto, viene 2 x 3.
Il piatto unico lo posso scegliere in 4 modi diversi e applico la regola del prodotto.

Al connettivo O, applico la regola della somma.

Qui non abbiamo considerato l'intersezione degli insiemi nonostante il connettivo **O.** Questo accade perché le due opzioni ("antipasto + primo" **oppure** "piatto unico") sono **mutuamente esclusive**, cioè non ci sono casi in cui una combinazione soddisfi entrambe le condizioni contemporaneamente.

Esempio 15.

Una password può avere:
- **4 lettere** (ognuna da 26 possibilità), oppure
-**3 lettere** e **2 cifre** (26 possibilità per lettere, 10 per cifre).
Quante password distinte si possono creare?

Risposta: $26^4 + 26^3 \times 10^2 = 2214576$.

Il connettivo O unisce due condizioni:

1. Una password con 4 lettere.

* * * *

26 X 26 X 26 X 26
Ciascuna lettera scelta in 26 modi diversi.

2. Una password con 3 lettere E (contemporaneamente) 2 cifre.

* * * * *

$26^3 \times 10^2$

Applicando la regola della somma le due soluzioni vengono sommate.

Poiché una password non può avere contemporaneamente **4 lettere** E **3 lettere + 2 cifre**, le due categorie sono **mutuamente esclusive, pertanto non sottraggo l'intersezione.**

Password con 4 lettere

* * * *

26^4

+

O

Password con 3 lettere e 2 cifre

* * * * *

$26^3 \times 10^2$

Esempio 15-bis.

Una password può avere:
- **4 lettere** (ognuna da 26 possibilità), oppure (+)
-**3 lettere** o (+) **2 cifre** (26 possibilità per lettere, 10 per cifre).

Quante password distinte si possono creare?

Risposta: $26^4 + 26^3 + 10^2 = 474652$ password distinte.

Password di 4 lettere: $26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4$.

Password di 3 lettere o 2 cifre:
Una password di 3 lettere = $26 \times 26 \times 26 = 26^3$.
Una password di 2 cifre = $10 \times 10 = 10^2$.
Applico la regola della somma per tutti e tre i risultati.

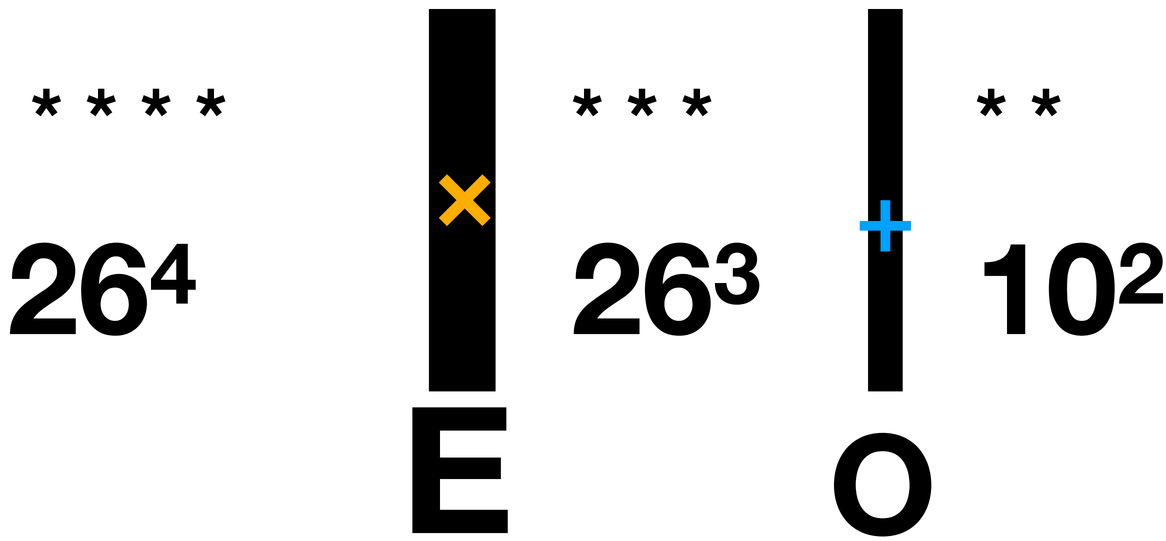
Una password di **3 lettere** e **2 cifre non può esistere contemporaneamente.** Questo perché i due casi descritti ("password di **3 lettere**" e "password di **2 cifre**") rappresentano categorie completamente separate, e non si sovrappongono, quindi non devo sottrarre l'intersezione poiché tutte le categorie sono **mutuamente esclusive**.

Esempio 15-tris.

Una password può avere:
4 lettere (ognuna da 26 possibilità) e 3 lettere o 2 cifre

(26 possibilità per lettere, 10 per cifre).
Quante password distinte si possono creare?

Risposta: 26^4 x $(26^3 + 10^2)$.

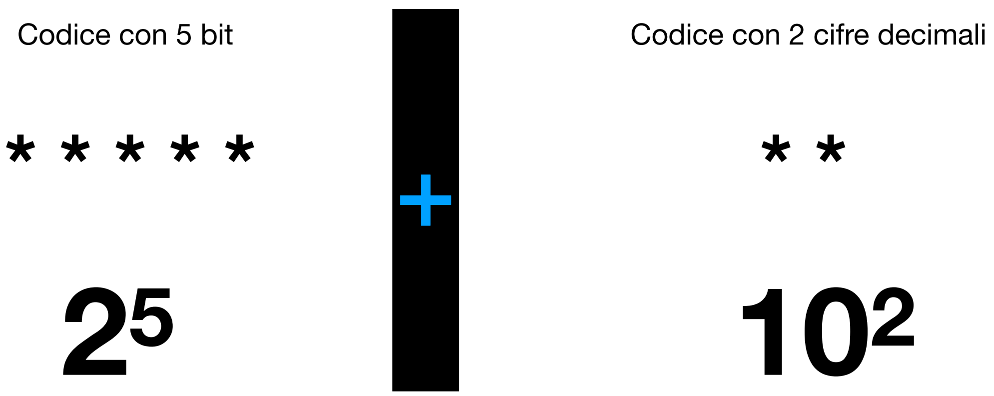


Una password se ha 3 lettere non può avere 2 cifre pertanto c’è mutua esclusività nella O.

Esempio 16.

Un codice può essere: **5 bit** (ogni bit ha 2 possibilità), oppure **2 cifre decimali** (ogni cifra ha 10 possibilità).
Quanti codici diversi si possono creare?

Risposta: $2^5 + 10^2$.



Il codice non può avere contemporaneamente 5 bit e 2 cifre decimali pertanto le due categorie sono mutuamente esclusive e non devo sottrarre l'intersezione.

Esempio 17.

In un ristorante puoi scegliere:
Antipasto (2 tipi) e un **primo piatto** (3 tipi),
O un **primo piatto** (3 tipi) e un **dolce** (2 tipi).
2 piatti sono considerati sia antipasti che dolci.
Quante combinazioni di pasti puoi fare?
Nota: i primi piatti delle due opzioni sono uguali in entrambe le condizioni.

Risposta: (2 x 3) **+** (3 x 2) **-** 6.

Non sono mutuamente esclusive le due condizioni:
Ci sono **2 piatti** che possono essere considerati **sia antipasti che dolci.**
Ognuno dei **2 piatti** può essere abbinato a un **primo piatto (3)**.

3(primi piatti) x 2 (antipasto o dolce in comune) = 6.

Il **+** rappresenta l'unione (**U**) nel contesto combinatorio e considera l'intersezione (∩) se necessario.

La formula generale è:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dove sottraiamo l'intersezione ($A \cap B$) per evitare di contare due volte gli elementi comuni.

Esempio 17-bis.

In un ristorante puoi scegliere: Antipasto (2 tipi) e un primo piatto (5 tipi), O un primo piatto (5 tipi) e un dolce (2 tipi). Quante combinazioni di pasti puoi fare?
Nota: i primi piatti delle due opzioni sono uguali in entrambe le condizioni.

Risposta: (2 x 5) **+** (5 x 2).

Sovrapposizione tra antipasti e dolci: Non è stato specificato in questo problema se ci sono piatti che sono sia antipasti che dolci, come invece era nel problema precedente. Non si possono scegliere entrambe le condizioni nello stesso pasto

In questo caso, ci sono 20 combinazioni possibili, poiché non ci sono sovrapposizioni tra le due opzioni.

Esempio 17-tris.

In un ristorante puoi scegliere:
Antipasto (2 tipi) e un **primo piatto** (5 tipi),
O un **primo piatto** (4 tipi) e un **dolce** (2 tipi).
2 piatti sono considerati sia antipasti che dolci.
Quante combinazioni di pasti puoi fare?

Risposta: (2 x 5) + (4 x 2).

I primi piatti dell'Opzione 1 e dell'Opzione 2 sono diversi.
Non c'è indicazione che siano gli stessi o che vi siano sovrapposizioni tra di essi.

Esempio 17-quater.

In un ristorante puoi scegliere: Antipasto (2 tipi) e un primo piatto (3 tipi), O un primo piatto (3 tipi) e un dolce (2 tipi). 2 piatti sono considerati sia antipasti che dolci. Quante combinazioni di pasti puoi fare?
Nota: i primi piatti delle due opzioni sono diversi in entrambe le condizioni.

Risposta: (2 x 3) + (3 x 2).
Dato che i primi piatti delle due opzioni sono diversi, non ci sono sovrapposizioni tra le combinazioni delle due opzioni.
I primi piatti delle due opzioni sono diversi, quindi le combinazioni non si sovrappongono.
Le opzioni sono mutuamente esclusive: non si può scegliere sia un antipasto che un dolce nello stesso pasto.

Esempio 18.

A una conferenza, 50 persone partecipano alla sessione sulla tecnologia e 30 persone partecipano alla sessione sulla scienza. Di queste, 15 partecipano a entrambe le sessioni. Quante persone partecipano in totale alla conferenza?

Risposta: 50 + 30 - 15.

Esempio 19. Prova d'esame del 15 gennaio 2024.

Vogliamo disegnare una bandiera composta da tre bande orizzontali tale che il colore della banda centrale sia diverso dal colore dalle altre due bande.
Quante diverse bandiere possiamo disegnare se i colori che possiamo usare sono solo i 6 seguenti: rosso, verde, blu, giallo, nero e bianco?

Risposta: 6 x 5 x 5.
Per la banda centrale si possono scegliere 6 colori diversi. A questo punto sia per la banda superiore che per quella inferiore restano disponibili 5 colori.

Procediamo ora con un incremento del livello di complessità. Introduciamo il tema delle operazioni combinatorie applicate agli **insiemi**, approfondendo i concetti di **combinazioni e permutazioni**. Questi argomenti ci consentiranno di esplorare in maniera sistematica e rigorosa i diversi modi in cui è possibile organizzare o selezionare elementi all'interno di un insieme.

POTENZA DI UN INSIEME

L'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili di un insieme dato S, si denota come P(s).

Teorema: Per un insieme di n elementi, il numero totale di sottoinsiemi è 2^n. Questo include l'insieme vuoto Ø e l'insieme stesso.

COMBINAZIONI E COEFFICIENTI BINOMIALI

***Combinazioni senza ripetizioni*: Il numero di modi in cui è possibile scegliere k elementi da un insieme di n elementi, senza considerare l'ordine e senza ripetizioni, è pari al coefficiente binomiale**

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Che equivale a calcolare il numero di k combinazioni su un insieme di n elementi.

Che equivale a calcolare il numero di sottoinsiemi di n di cardinalità k.

Che equivale a calcolare il numero di modi diversi in cui posso scegliere k elementi da un insieme di n elementi.

PERMUTAZIONI (SENZA RIPETIZIONE)

Una permutazione è un modo di disporre tutti gli elementi di un insieme in sequenza.
La permutazione è una sequenza ordinata.
Sia X = {a,b,c,d}, il numero totale di permutazioni senza ripetizione di X è

$$|X|!$$

Se ho un insieme di 4 elementi il numero totale di permutazioni di 4 elementi distinti è 4!

Esempio: Quanti modi diversi ci sono per ordinare 3 libri distinti su uno scaffale? 3!

- ***Permutazioni possibili:***
  1. *ABC*
  2. *ACB*
  3. *BAC*
  4. *BCA*
  5. *CAB*
  6. *CBA*

Quando gli elementi sono disposti in cerchio, il numero di permutazioni è (n-1)!

Esempio: Sedere 5 persone attorno a un tavolo rotondo: (5−1)!=4!=24 modi.

PERMUTAZIONI (CON RIPETIZIONE)

- Se abbiamo un insieme di n elementi, dove:
  - n_1 elementi sono uguali tra loro di un tipo,
  - n_2 elementi sono uguali tra loro di un altro tipo,
  - $\ldots$,
  - n_k elementi sono uguali tra loro di un altro tipo,

  con $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$,

  allora il numero di permutazioni con ripetizione è:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Sono le possibili sequenze ordinate di k elementi distinti scelti da un insieme di n elementi distinti, senza ripetizione.

La formula per calcolare il numero di disposizioni semplici di n elementi presi k alla volta è:

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permuta k elementi su n.

Le disposizioni semplici sono fondamentali nel calcolo combinatorio quando si tratta di contare il numero di modi in cui si possono ordinare k **elementi distinti scelti da un insieme di** n **elementi**, **senza ripetizione**.

Se voglio contare il numero di modi in cui posso ordinare/permutare 3=k elementi distinti scelti su un insieme di 4=n elementi:

$$D(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!}$$

X = {A,B,C,D}

Elenchiamo tutte le possibili disposizioni di 3 elementi:

1. **ABC**
2. **ABD**
3. **ACB**
4. **ACD**
5. **ADB**
6. **ADC**
7. **BAC**
8. **BAD**
9. **BCA**
10. **BCD**
11. **BDA**
12. **BDC**
13. **CAB**
14. **CAD**
15. **CBA**
16. **CBD**
17. **CDA**
18. **CDB**
19. **DAB**
20. **DAC**
21. **DBA**
22. **DBC**
23. **DCA**
24. **DCB**

Ogni sequenza è unica e rappresenta una disposizione distinta.

- Quando $k = n$, stiamo disponendo tutti gli elementi dell'insieme.
- **Formula:** $D(n,n) = n!$

A finire … continuiamo con la soluzione di tutti gli esercizi.

Esempio 20.

Quanti numeri di 4 cifre distinte si possono formare con le cifre da 1 a 6?

Risposta: D(6,4).

Esempio 21.

Quante permutazioni si possono fare con le lettere della parola "MAMMA"?

Risposta:

$$\frac{5!}{3! \times 2!}$$

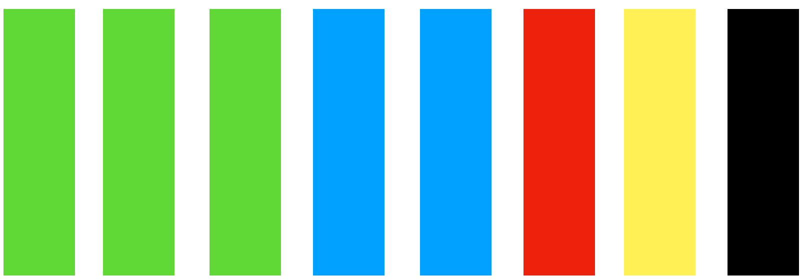
Poiché il numero totale di lettere è 5, la M è uguale per 3 volte e la A uguale per 2 volte, applico la formula delle permutazioni con ripetizione.

Esempio 22 - Sinossi Conteggio .

Ho a disposizione 8 strisce colorate: 3 verdi, 2 blu, 1 rossa, 1 gialla, 1 nera.
Si vogliono utilizzare tutte le 8 strisce per formare una bandiera con 8 strisce.
Quante sono le diverse bandiere possibili?

Risposta:

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!}$$



Esempio 23 - Prova d'esame del 15 gennaio 2024.

Quanti sono i diversi sottoinsiemi di {1, 2, 3, . . . , 10} che contengono esattamente 5 elementi di cui almeno un elemento dispari?

Risposta: Calcolando il totale e sottraendo i casi che **non** soddisfano la condizione richiesta, otteniamo il numero di casi che **soddisfano** la condizione.

$$\binom{10}{5} - 1$$

Vanno bene tutti i sottoinsieme di 5 elementi tranne uno: quello composto da tutti numeri pari.

Esempio 24 - Prova d'esame del 22 febbraio 2024.

Su una parete della nostra azienda vogliamo dipingere una bandiera aziendale. Abbiamo deciso che la bandiera sarà fatta da 4 scacchi affiancati e della stessa dimensione: due superiori e due inferiori. Quante diverse bandiere possiamo dipingere se i quattro scacchi devono avere colore diverso e i colori che possiamo usare sono solo i 6 seguenti: rosso, verde, blu, giallo, nero e bianco?

Risposta: 6 x 5 x 4 x 3.

Si può svolgere l'esercizio in due modi diversi.

Metodo Oriolo: Per un primo scacco si possono scegliere 6 colori diversi. A questo punto per un secondo scacco restano disponibili 5 colori, etc..! Applicando la regola del prodotto la risposta è 6 x 5 x 4 x 3.

Metodo Remoli: Posso calcolare le disposizioni D(6,4), ossia voglio vedere il numero di permutazioni di 6 elementi presi 4 alla volta, senza ripetizione:

$$D(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$$

Quindi:

$$D(6,4) = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1}} = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

Esempio 24-bis - Prova d'esame del 22 febbraio 2024.

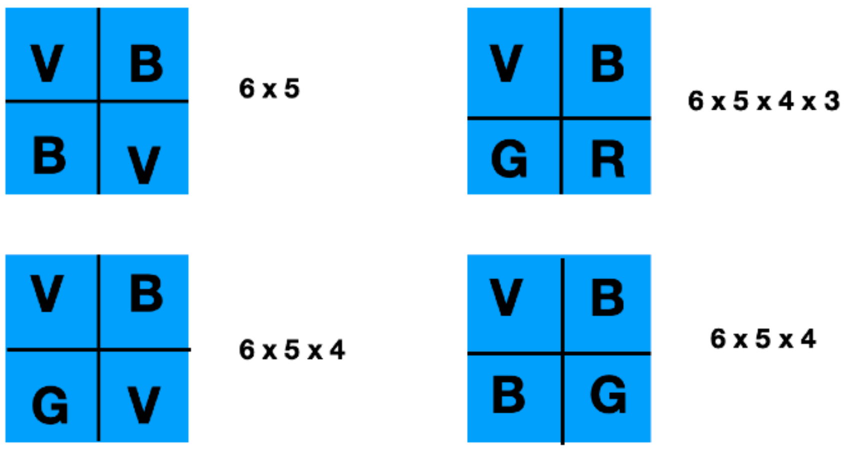
E quante diverse bandiere si possono dipingere se abbiamo deciso che lo scacco nord-ovest e quello sud-est devono avere uno stesso colore x e analogamente lo scacco sud-ovest e quello nord-est devono avere uno stesso colore y, con y != x e nuovamente nell'ipotesi che i colori x e y devono essere scelti tra i 6 seguenti: rosso, verde, blu, giallo, nero e bianco?

Risposta: 6 x 5.
Molto facile questo esercizio.
Per la coppia di scacchi nord-ovest e sud-est si possono scegliere 6 colori diversi. A questo punto per la coppia di scacchi sud-ovest e nord-est restano disponibili 5 colori.

Esempio 24-tris - Prova d'esame del 22 febbraio 2024(*).

Supponi ora che le bandiere che è possibile disegnare sono solo quelle per cui ogni coppia di scacchi adiacenti riceve colore diverso (mentre può capitare che gli scacchi su una stessa diagonale ricevano lo stesso colore). Quante sono le bandiere che è possibile disegnare in questo caso, di nuovo nell'ipotesi che i colori che possiamo usare sono solo i 6seguenti: rosso, verde, blu, giallo, nero e bianco?

Risposta: Più difficile del solito ma non spaventa.
Ci sono 4 casistiche che possono capitare, e sono unite dal connettivo O.



$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 630.$$

Esempio 25 - Prova d'esame del 18 luglio 2024.

In una associazione con 20 soci devo scegliere 1 presidente, 1 segretario e 5 consiglieri. In quanti modi diversi lo posso fare?

Risposta:

$$20 \times 19 \times \binom{18}{5}$$

Il presidente lo posso scegliere in 20 modi diversi.
Il segretario lo posso scegliere in 19 rimanenti, tra i soci, modi diversi.
Dopo aver scelto presidente e segretario, rimangono **18 soci** disponibili.
Dobbiamo scegliere **5 consiglieri** tra questi 18 soci. Poiché i consiglieri non hanno ruoli distinti tra loro (l'ordine non conta), utilizziamo le **combinazioni: il numero di modi diversi che ho di scegliere 5 persone su un insieme di 18 elementi è pari al coefficiente binomiale 18 su 5.**

Esempio 26 - Prova d'esame del 18 luglio 2024.

Uno studente deve rispondere a 6 domande su 11.
Solo 6 su 11.
Quante possibili scelte ha?

Risposta:

$$\binom{11}{6}$$

I modi possibili che ho di scegliere 6 elementi all'interno di un insieme di 11 elementi è pari al coefficiente binomiale 11 su 6.

Esempio 26-bis - Prova d'esame del 18 luglio 2024.

E se l'insieme delle 6 domande ne deve necessariamente includere 2 che sono obbligatorie, quante sono le possibili scelte?

Risposta:

$$\binom{9}{4}$$

In questi due esempi è fondamentale capire cosa sta succedendo.

L'insieme delle domande è il seguente:

D = {d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11}.
E il numero di modi possibili per scegliere (quindi rispondere) a 6 domande su 11 è il coefficiente binomiale di 11 su 6.

Ma se da questo insieme 2 domande sono obbligatorie, queste due domande devono essere necessariamente eliminate perché sono certo che risponderò ad esse.
Pertanto le possibili scelte rimangono sulle rimanenti, ossia coefficiente binomiale di 9 domande su 4.

Esempio 27 - Prova d'esame del 18 luglio 2024.

8 amici, 4 uomini e 4 donne, hanno prenotato a teatro una fila di 8 posti consecutivi. Se vogliono sedere (sui posti prenotati) alternando uomini e donne, quante sono le diverse possibili sistemazioni?
(N.B. consideriamo due sistemazioni diverse se e solo se ci sono due amici che in una sistemazione sono seduti affianco e nell'altra no.)

Risposta: 4! x 4!

Nel problema, si chiede in quanti modi gli 8 amici possono sedersi alternando uomini e donne. **Non viene specificato se la sequenza deve iniziare con un uomo o con una donna**, e **non viene richiesto di considerare entrambe le opzioni.**
Quindi si assume che la disposizione sia fissa, cioè che **la sequenza di genere sia predefinita**. Questo significa che consideriamo **solo una** delle due possibili sequenze di alternanza, ad esempio:
Donna, Uomo, Donna, Uomo, Donna, Uomo, Donna, Uomo.

Le donne possono essere disposte in questi posti in 4! modi diversi.
Gli uomini possono essere disposti in questi posti in 4! Modi diversi.

Quindi la risposta del professore è corretta perché considera una sola sequenza di alternanza, poiché le due possibili sequenze sono considerate equivalenti o perché si assume una sequenza predefinita.

Nota Aggiuntiva: Se consideriamo le due possibili sequenze di alternanza (iniziando con una donna o con un uomo) come **distinte**, allora dovremmo moltiplicare per 2:

$$2 \times (4! \times 4!)$$

Esempio 28 - Prova d'esame del 16 settembre 2024.

Un esame prevede che rispondiate ad alcune domande che potete scegliere da due diversi insiemi di domande:
l'insieme A e l'insieme B.
L'insieme A contiene 100 domande e l'insieme B ne contiene 50.
Le domande di A sono tutte diverse tra loro, le domande di B sono tutte diverse tra loro e le domande di A sono tutte diverse da quelle di B. In ognuno dei seguenti casi, indicate quante sono le diverse scelte che avete a disposizione?

Nota: Dovete rispondere contemporaneamente ***a esattamente 10 domande di A e esattamente 8 domande di B***.

Risposta:

$$\binom{100}{10} \cdot \binom{50}{8}$$

Il numero di modi possibili/il numero di scelte possibili per scegliere 10 domande da un insieme di 100 elementi è dato dal coefficiente binomiale di 100 su 10.
Il numero di modi possibili/il numero di scelte possibili per scegliere 8 domande da un insieme di 50 elementi è dato dal coefficiente binomiale di 50 su 8.
Questo perché l'insieme A = {d1,d2,d3,d4,….,d100} e B = {d1,d2,d3,d4,….,d50}.
Il numero di modi per scegliere k elementi da un insieme n è esattamente cof.bin di n su k.
Siccome sono ipotesi che valgono contemporaneamente unite dal connettivo "E" (discusso sopra), viene applicata, tra i due coefficienti binomiali, la **regola del prodotto**.

Esempio 28-bis - Prova d'esame del 16 settembre 2024.

Dovete rispondere a esattamente 10 domande di A oppure a esattamente 8 domande di B.

Risposta:

$$\binom{100}{10} + \binom{50}{8}$$

Veramente banale, regola della somma.

Esempio 28-tris - Prova d'esame del 16 settembre 2024.

Dovete rispondere ad esattamente 18 domande che potete liberamente scegliere da A e/o da B
(quindi va bene scegliere tutte domande in A, oppure tutte in B, oppure un po' e un po').

Risposta:

Secondo il principio combinatorio, il numero totale di modi per scegliere 18 domande da 150 è dato da $\binom{150}{18}$.

Se consideriamo gli insiemi A e B come un unico insieme di 150 domande, il numero totale di modi per scegliere 18 domande è semplicemente:

$$\binom{150}{18}$$

Esempio 29 Prova d'esame del 16 settembre 2024.

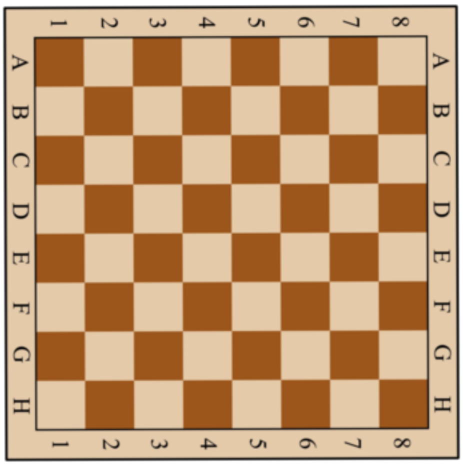
Considerate una scacchiera con 8 righe A,B,C, . . . , H e 8 colonne 1, 2, 3, . . . 8. Volete disporre sulla scacchiera 8 torri colorate con 8 colori diversi. Ogni torre occupa esattamente una e una sola casella, ma dovete soddisfare il seguente vincolo: **non potete disporre su una stessa riga o su una stessa colonna due torri**. Quante sono le diverse possibili disposizioni?

(N.B. consideriamo diverse due disposizioni che possono ottenersi l'una dall'altra attraverso una rotazione della scacchiera).

Risposta:

$$8! \times 8! \times 7! \times 7! \times 6! \times 6! \times \ldots \times 1! \times 1!$$

È utile rappresentare graficamente.



Dobbiamo determinare il numero di modi in cui possiamo disporre 8 torri di colori diversi su una scacchiera 8×8, assicurandoci che nessuna torre si trovi sulla stessa riga o colonna di un'altra.

Poiché nessuna torre può condividere la stessa riga o colonna, ogni torre deve occupare una combinazione unica di riga e colonna. Questo problema è equivalente a trovare tutte le possibili permutazioni delle righe e delle colonne.

Il numero di modi per disporre la prima torre nelle righe è 8! (permutazioni delle 8 righe).
Il numero di modi per disporre la prima torre nelle colonne è 8! (permutazioni delle 8 colonne).
Il numero di modi per disporre la seconda torre nelle righe è 7! (Una riga è già occupata dalla prima torre) (permutazioni delle 7 righe).
Il numero di modi per disporre la seconda torre nelle colonne è 7! (Una colonna è già occupata dalla prima torre) (permutazioni delle 7 colonne).
Il numero di modi per disporre la terza torre nelle righe è 6! (permutazioni delle 6 righe).

Il numero di modi per disporre la terza torre nelle colonne è 6! (permutazioni delle 6 colonne).

Il numero di modi per disporre la quarta torre nelle righe è 5! (permutazioni delle 5 righe).

Il numero di modi per disporre la quarta torre nelle colonne è 5! (permutazioni delle 5 colonne).

Il numero di modi per disporre la quinta torre nelle righe è 4! (permutazioni delle 4 righe).

Il numero di modi per disporre la quinta torre nelle colonne è 4! (permutazioni delle 4 colonne).

Il numero di modi per disporre la sesta torre nelle righe è 3! (permutazioni delle 3 righe).

Il numero di modi per disporre la sesta torre nelle colonne è 3! (permutazioni delle 3 colonne).

Il numero di modi per disporre la settima torre nelle righe è 2! (permutazioni delle 2 righe).

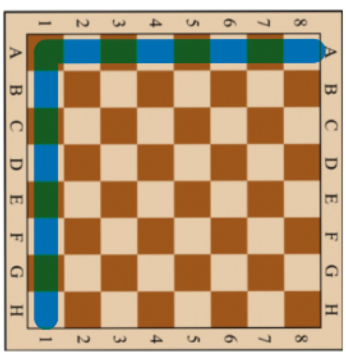
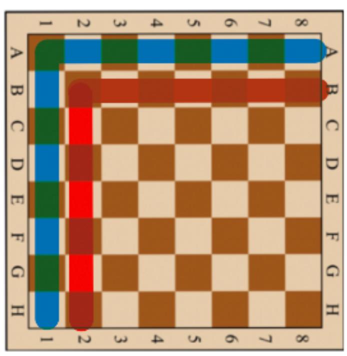
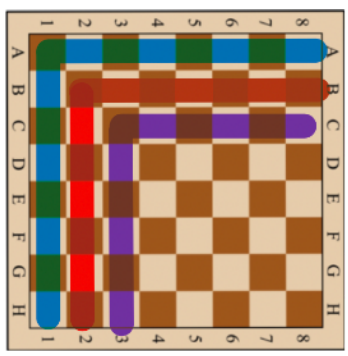
Il numero di modi per disporre la settima torre nelle colonne è 2! (permutazioni delle 2 colonne).

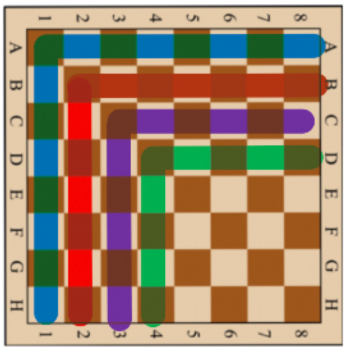
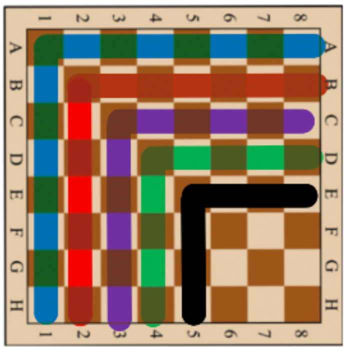
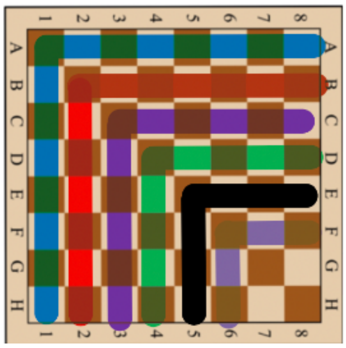
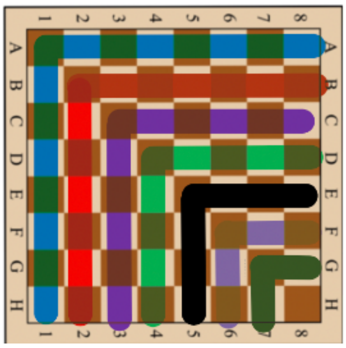
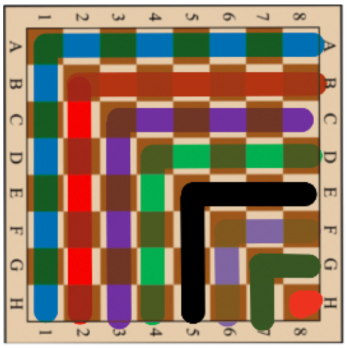
Il numero di modi per disporre la ottava torre nelle righe è 1! (permutazioni delle 1 righe).

Il numero di modi per disporre la ottava torre nelle colonne è 1! (permutazioni delle 1 colonne).

Ad ogni passo, il numero di colori disponibili diminuisce di uno, poiché ogni colore può essere usato solo una volta. Tuttavia, notiamo che i colori sono già stati considerati nelle permutazioni delle torri. Dato che ogni torre è unica per colore, quando permutiamo le torri stiamo già considerando le diverse assegnazioni di colori.

```
Col = {c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8};
Row = {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8};
```

DEVONO VALERE TUTTE CONTEMPORANEAMENTE: REGOLA DEL PRODOTTO.
SONO DISTINGUIBILI LE TORRI.

Esempio 29-bis Prova d'esame del 16 settembre 2024.

Supponete ora che le torri abbiano tutte lo stesso colore e quindi siano indistinguibili.
Ferme restando le altre ipotesi, quante sono le diverse possibili disposizioni?

Le torri sono **indistinguibili**, quindi non importa quale torre occupa una certa posizione; importa solo **quali caselle** sono occupate.
Risposta: 8!
Poiché nessuna torre può condividere la stessa riga o colonna, ogni torre occupa una riga e una colonna uniche.
Possiamo rappresentare le posizioni delle torri come permutazioni delle colonne (o delle righe).
Il numero totale di permutazioni delle colonne è 8!, poiché abbiamo 8 colonne e ogni torre occupa una colonna diversa.
Ogni permutazione rappresenta una disposizione unica delle torri sulla scacchiera.

Devo stare molto attenta nel vedere se si tratta di oggetti diversi (in quel caso la disposizione cambia) o sono oggetti identici (in quel caso non cambia la disposizione) !!

Esempio 30 - Prova d'esame anni passati.

Dovete disporre 6 oggetti diversi in 6 scatole diverse, in modo che in ogni scatola ci sia esattamente un oggetto. Quanti sono i diversi modi in cui potete effettuare questa disposizione?

Risposta: 6!

Facilissimo.

Insieme = {Scatola1,Scatola2,Scatola3,Scatola4,Scatola5,Scatola6}
Il fattoriale ci fornisce tutte le permutazioni dell'insieme avendo una disposizione per volta non ripetuta.

Esempio 30-bis - Prova d'esame anni passati.

Supponete ora di dover disporre 8 oggetti identici in 6 scatole diverse, in modo tale che in una scatola ci siano 3 oggetti e nelle altre 5 uno.
Quanti sono i diversi modi in cui potete effettuare questa disposizione?

Risposta: 6.
NOTA: NO 6!.

SPIEGAZIONE DOVEROSA: Poiché le scatole sono distinte, il numero di modi per assegnare le quantità **{3,1,1,1,1,1}** alle 6 scatole è dato dal numero di permutazioni di queste quantità.

Tuttavia 6! sarebbe impensabile poiché ci sarebbero ripetizioni.

Formula per le permutazioni di elementi con ripetizioni:

$$\text{Numero di permutazioni} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

dove:

- n è il numero totale di elementi (scatole).
- n_i è il numero di volte che ogni quantità distinta appare.

$$\frac{6!}{1! \times 5!}$$

Esempio 31 - Prova d'esame anni passati[PIÙ DIFFICILE DEL SOLITO].

Quanti diversi numeri con esattamente 7 cifre si possono scrivere utilizzando solo le cifre 3,4,6,8 assumendo che una cifra si ripeta esattamente 2 volte, un'altra cifra si ripeta esattamente 3 volte e le altre cifre esattamente una volta?

Risposta:

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}$$

In quanti modi la mia prima cifra può occupare 3 posizioni date le 7 iniziali ?

$$\binom{7}{3}$$

Sto contando il numero di modi possibile per disporre 3 elementi in un insieme da 7.
Nota che siamo in questa situazione:

3	3	3	4	4	6	8
1	2	3	4	5	6	7

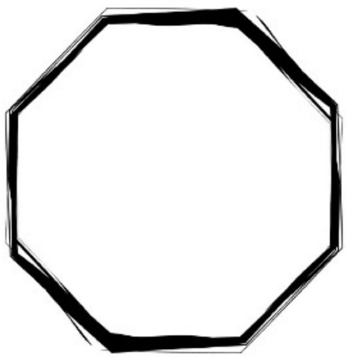
Quindi ora da un insieme di 7 elementi, ci riduciamo ad un insieme di 4 elementi.
Quindi ora contiamo il numero di modi possibili per disporre 2 elementi all'interno di un insieme di 4 elementi (dato che solo sue cifre si ripetono).

$$\binom{4}{2}$$

L'insieme diventa di 2 elementi e si procede sino alla fine.

Esempio 32 - Prova d'esame anni passati.

Considerate un ottagono regolare. Scegliete quindi un punto su ognuno degli 8 lati (per semplicità evitate i vertici dell'ottagono).
Quanti triangoli potete formare unendo 3 dei punti che avete scelto?



Risposta:

$$\binom{8}{3}$$

In quanti modi diversi posso prendere 3 punti su 8 lati?
Quanti triangoli posso formare?

Le due domande sono equivalenti.

Lati = punti = {l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8};

Esempio 32-bis - Prova d'esame anni passati.

E se ne scelgo 2 di punti su ogni lato?

Risposta:

$$\binom{16}{3}$$

È ovvio che sia così.
Ora l'insieme dei punti si raddoppia.
Punti = {p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11,p12,p13,p14,p15,p16}

Quindi la domanda a cui dobbiamo rispondere è:
"In quanti modi diversi posso scegliere 3 elementi (un triangolo) da un insieme di 16 punti?".
La risposta è proprio il coefficienti binomiale di 16 su 3.

Esempio 32-tris - Prova d'esame anni passati.

E se ne scelgo 3 di punti su ogni lato?

Risposta:

$$\binom{24}{3} - 8$$

I triangoli **non possono** essere formati se i 3 punti scelti sono **allineati**, cioè se sono tutti sullo stesso lato dell'ottagono.

Esempio 33 - Prova d'esame anni passati.

Dovete disporre 8 **oggetti diversi** in 6 scatole diverse, in modo che in una scatola ci siano esattamente 3 oggetti. Quanti sono i diversi modi in cui potete effettuare questa disposizione?

Risposta:

Questi oggetti potrebbero stare nella prima o nella seconda scatola etc.. Quindi ho 6 modi per disporli !!

$$\binom{8}{3} * 6 * 5!$$

Permutazione degli altri cinque oggetti !!

Numero di modi in cui posso scegliere i tre oggetti tra gli 8

Ci sono 6 scatole, e il numero di modi per scegliere la scatola che conterrà i 3 oggetti è 6, poichè questi oggetti potrebbero stare nella prima scatola, nella seconda, nella terza, nella quarta, nella quinta o nella sesta.

Il numero di modi per disporre 3 oggetti su 8 è pari a:

$$\binom{8}{3}$$

Rimangono gli ultimi 5 oggetti.
Poiché sia gli oggetti che le scatole sono diversi, il numero di modi per assegnare gli oggetti alle scatole è dato dalle **permutazioni** dei 5 oggetti: 5!.

Esempio 33 - Prova d'esame 24 gennaio 2023.

Nel gioco della tombola ogni cartella riporta un insieme di 15 numeri, compresi tra 1 e 90, partizionati in 3 sottoinsiemi di 5 numeri che sono disposti su 3 file (in ogni fila i numeri sono poi ordinati in modo crescente da sinistra a destra).

In prima battuta, supponete di considerare due cartelle diverse solo se esse non hanno lo stesso insieme di 15 numeri (quindi due cartelle che hanno gli stessi 15 numeri ma questi sono divisi diversamente nelle tre file sono da considerarsi uguali).
Quante sono le cartelle diverse in questa ipotesi?

Risposta:

$$\binom{90}{15}$$

Per calcolare il numero di modi diversi in cui possiamo scegliere 15 numeri distinti tra 90, utilizziamo il **coefficiente binomiale.**

Esempio 33-bis - Prova d'esame 24 gennaio 2023.

Supponete ora di considerare diverse anche due cartelle che hanno lo stesso insieme di 15 numeri ma questi 15 numeri non sono divisi negli stessi 3 sottoinsiemi di 5 numeri

(ovvero, c'è almeno una coppia di numeri che in una cartella appartiene ad una stessa fila e nell'altra cartella no).
Quante sono le cartelle diverse in questa ipotesi?

Risposta:

$$\binom{90}{5} \times \binom{85}{5} \times \binom{80}{5}$$

Si calcola il numero di modi diversi in cui possiamo scegliere 5 numeri distinti tra i 90, 5 numeri distinti tra i rimanenti 85 e 5 numeri distinti tra i rimanenti 80.

Esempio 33-tris - Prova d'esame 24 gennaio 2023.

Supponete infine di considerare diverse anche due cartelle che hanno lo stesso insieme di 15 numeri divisi negli stessi 3 sottoinsiemi di 5 numeri, ma per cui cambia la disposizione di questi sottoinsiemi sulle tre file (per esempio, in una cartella i numeri 13, 45, 52, 67, 88 occupano la fila superiore, mentre nell'altra cartella gli stessi numeri occupano la fila centrale).
Quante sono le cartelle diverse in questa ipotesi?

Risposta:

$$\binom{90}{15} \cdot \binom{15}{10} \cdot \binom{10}{5} \cdot 3!$$

Aggiungiamo solo la moltiplicazione a tutte le disposizioni possibili.
Insieme={sopra, centro, sotto};
Può stare sopra, al centro o sotto la disposizione di ciascun sottoinsieme.

Esempio 34 Prova d'esame 28 settembre 2016.

In quanti modi diversi 7 buste possono essere assegnate a 7 persone, se ognuna di esse riceve esattamente una busta?

Risposta: 7!.

Esempio 34-bis Prova d'esame 28 settembre 2016.

In quanti modi diversi 7 buste identiche possono essere assegnate a 7 persone, se non è richiesto che ogni persona riceva una busta?

Risposta: È veramente facile, basta utilizzare la formula della distribuzione di n oggetti indistinguibili tra k destinatari.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Nel nostro caso,
n=7 (buste)
k=7 (persone)
Sostituendo i valori nella formula:

$$\binom{7+7-1}{7-1} = \binom{13}{6}$$

Esempio 35 - Prova d'esame 28 settembre 2016.

16 Giocatori di tennis decidono di giocare un doppio. Quante coppie distinte si possono formare?

Risposta:

$$\binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2}$$

La prima coppia può essere scelta in coefficiente binomiale di 16 su 2 modi diversi, etc…!

Esempio 35-bis Prova d'esame 28 settembre 2016.

Una volta formate le 8 coppie, quante distinte partite (coppia contro coppia) si possono giocare?

Risposta:

$$\binom{8}{2}$$

Insieme = {C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}
e voglio contare il numero possibili di modi che ho di scegliere 2 coppie in un insieme di 8 coppie, questo corrisponde alle partite distinte.

Esempio 36 - Prova d’esame 4 luglio 2015.

La password per accedere ad un sito `e una stringa di 8 caratteri XY XY XY XY dove X è una lettera dell’alfabeto italiano e Y è una cifra.
Quante sono le diverse possibili password?
Quante sono quelle che iniziano per A e terminano per 9?

Risposta 1: 21^4 x 10^4.
Risposta 2: 21^3 x 10^3.

Esempio 37 - Prova d’esame 26 gennaio 2022.

Lungo una circonferenza sono segnati cinque punti rossi, quattro punti verdi, due punti gialli.
Quanti triangoli si possono ottenere scegliendo tre vertici di colore diverso?

Risposta: 5 x 4 x 2.

Il primo vertice lo posso scegliere in 5 modi diversi.
Il secondo vertice lo posso scegliere in 4 modi diversi.
Il terzo vertice lo posso scegliere in 2 modi diversi.

Esempio 37-bis - Prova d’esame 26 gennaio 2022

Lungo una circonferenza sono segnati cinque punti rossi, quattro punti verdi, due punti gialli. Quanti triangoli si possono ottenere scegliendo due vertici dello stesso colore ed il terzo di un altro colore?

Risposta:

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{4}{1}$$

* * * * *   * * * *   * *

Casi Possibili: Due rossi e un verde OPPURE due rossi e un giallo OPPURE due verdi e un rosso OPPURE due verdi e un giallo OPPURE due gialli e un rosso OPPURE due gialli e un verde.

Esempio 38 - Prova d'esame 26 gennaio 2022.

Una gelateria offre 15 gusti di gelato differenti. Quante coppe diverse posso formare se ognuna contiene esattamente 3 palline di gusti differenti tra loro?

Risposta:

$$\binom{15}{3}$$

Esempio 38-bis Prova d'esame 26 gennaio 2022.

Una gelateria offre 15 gusti di gelato differenti. Quante coppe diverse posso formare se ognuna contiene esattamente 3 palline ma sono libero anche di ripetere più volte lo stesso gusto?

Risposta:

Usando la formula per calcolare il numero di combinazioni con ripetizione:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Nel nostro caso:
n=15 (gusti di gelato)
k=3 (palline per coppa)

$$\binom{17}{3}$$

Oppure in modo alternativo,
le coppe con un solo gusto sono 15,
mentre quelle con 2 gusti sono $15 \cdot 14$ perchè dobbiamo prima scegliere il gusto con 2 palline e poi il gusto con una pallina.
Quindi:

$$\binom{15}{3} + 15 \cdot 14 + 15$$

Il risultato è sempre 680.

Per formare una coppa di 3 palline, considerando che i gusti possono essere ripetuti, ci sono **tre possibili casi**:

1. **Tutti e tre i gusti sono diversi.**
2. **Due gusti sono uguali e uno è diverso.**
3. **Tutti e tre i gusti sono uguali.**

Fine.