Simone Remoli

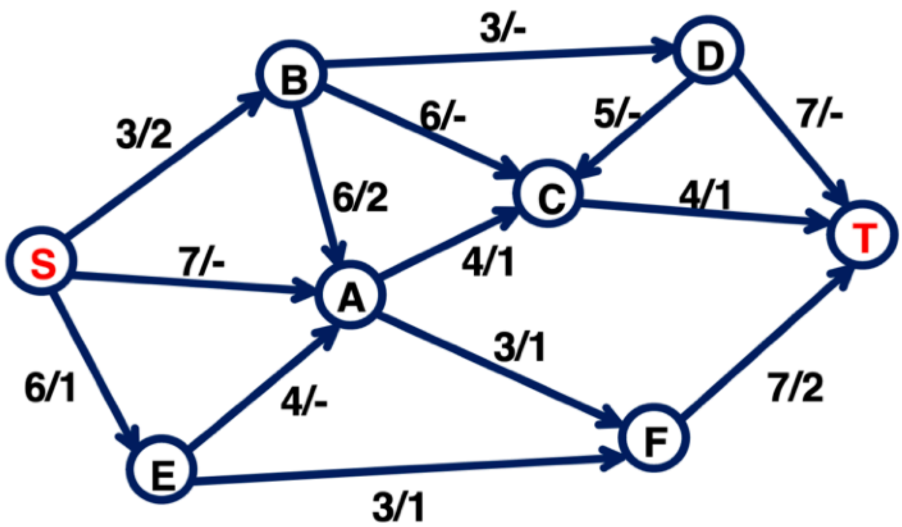
INTRODUZIONE

Questo documento si prefigge di fugare ogni incertezza riguardo ai problemi concernenti il flusso massimo. Saranno affrontate e risolte alcune prove d'esame assegnate nel 2024 dal Professor Gianpaolo Oriolo.

15 Gennaio 2024

Si consideri la rete orientata in figura:

per ogni arco è indicata ***prima la capacità*** e poi il **valore del flusso iniziale.** Individuare un flusso s-t di valore massimo, *utilizzando l'algoritmo dei cammini aumentanti a partire dal flusso iniziale dato*. Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, è sufficiente indicare tutti i cammini aumentanti scelti con l'indicazione per ogni arco di quanto è aumentato o diminuito il valore del flusso. **Certificare inoltre la massimalità del flusso.**

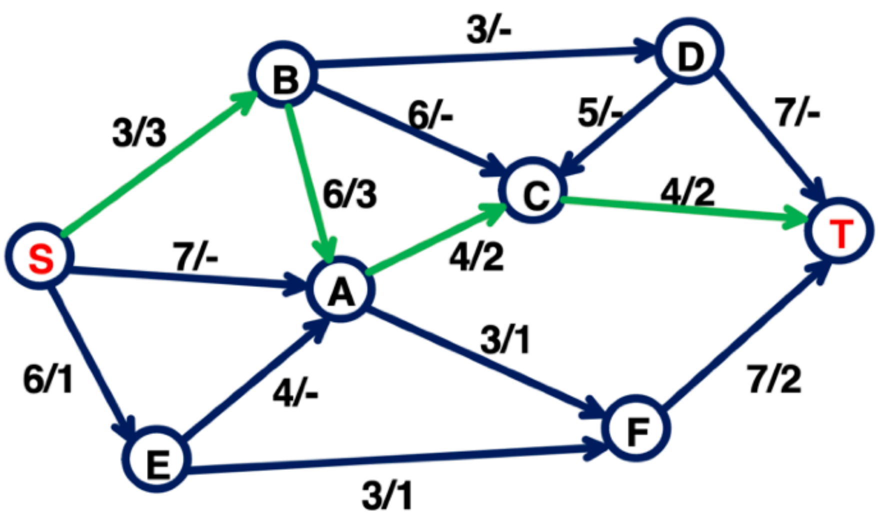


Svolgimento.

Il procedimento è di somma semplicità.

Anzitutto, muoviamo dall'identificazione del valore del flusso in questa rete. Per le trattazioni già discorse, il valore iniziale del flusso in tale rete risulta val(f) = 3. Non sappiamo, tuttavia, se questo valore rappresenti un flusso massimo.

Ora applichiamo l'algoritmo dei cammini aumentanti per raggiungere la massimalità: ricordiamo che esistono due tipologie di cammini per l'applicazione di tale algoritmo, il primo cammino costituito da tutti archi diretti non saturi e il secondo costituito da archi diretti non saturi e archi opposti non vuoti.



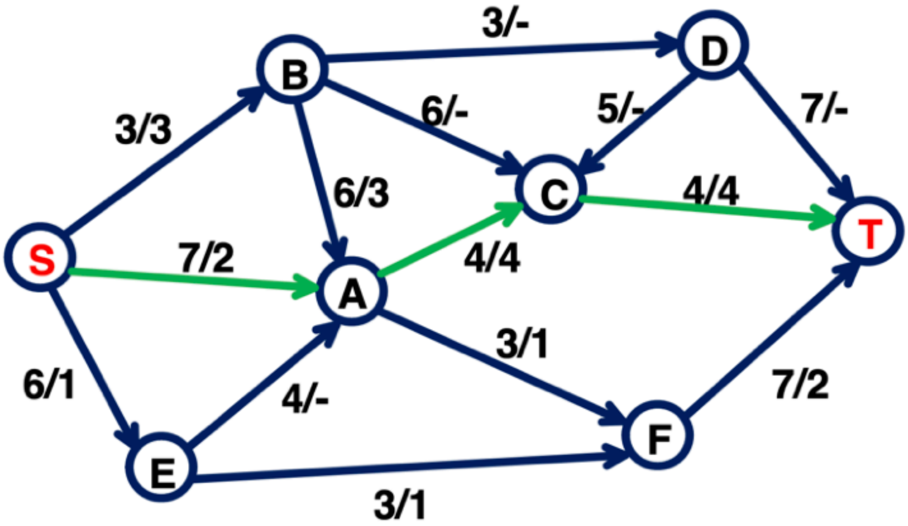
Il primo cammino è costituito dai nodi **S->B->A->C->T**.

Per questo cammino sull'arco S->B la capacità residua è unitaria pertanto aumentiamo di un valore unitario il valore del flusso.

Val(f) = 3 + 1 = 4;

L'aumento è stato effettuato lungo tutti gli archi che formano il percorso.

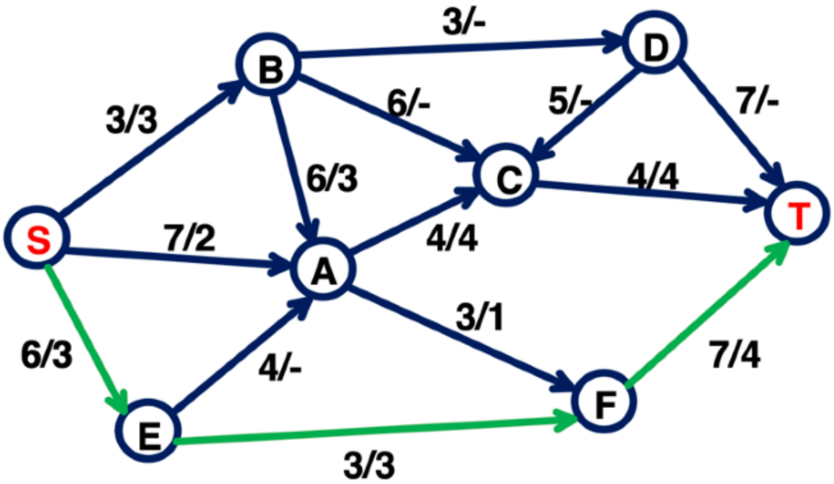
Il secondo cammino è costituito dai nodi **S->A->C->T**.



Per questo cammino c'è una capacità residua come "collo di bottiglia" pari a due sugli archi A->C e C->D, pertanto il valore del flusso aumenta di due.

Val(f) = 4 + 2 = 6;

Il terzo cammino è costituito dai nodi **S->E->F->T**.

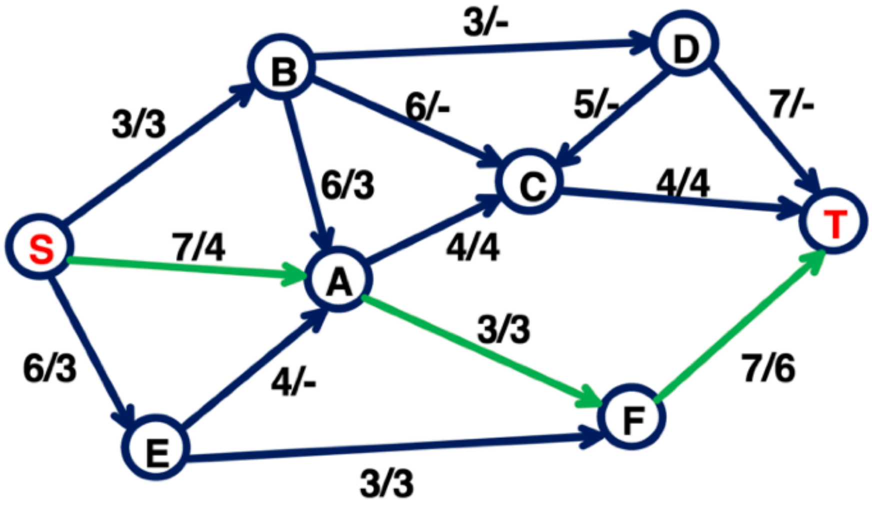


Il collo di bottiglia di questo cammino è due poiché l'arco E->F presenta una capacità residua di doppia unità.

Il valore del flusso aumenta di due.

Val(f) = 6 + 2 = 8;

Il quarto cammino è costituito dai nodi **S->A->F->T;**

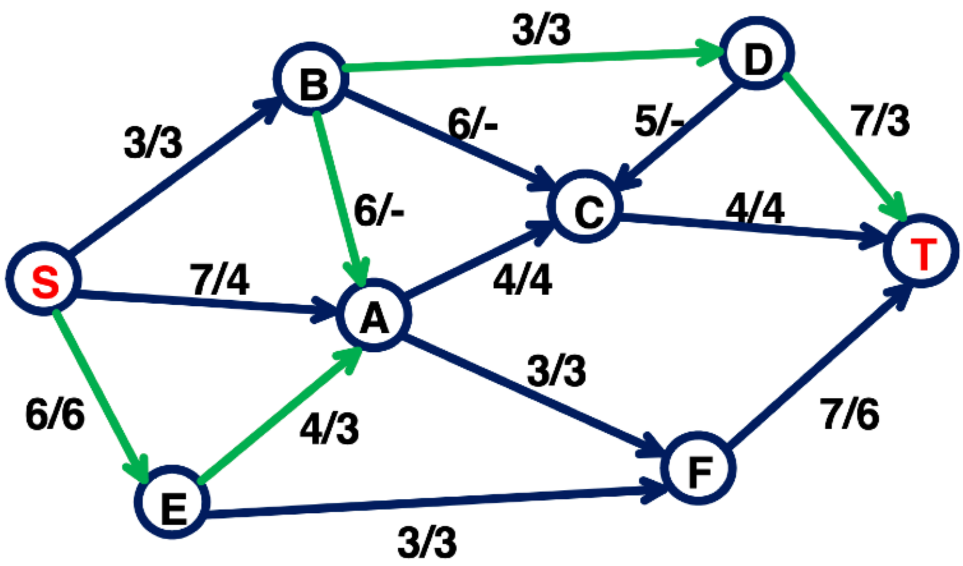


L’arco A->F presenta una capacità residua pari a due.

Il valore del flusso viene aumentato di due.

Val(f) = 8 + 2 = 10;

Il quinto cammino è un cammino del secondo tipo ed è estremamente discriminante perché è possibile addirittura aumentare e diminuire di tre gli archi opposti: **S->E->A<-B->D->T;**



Come è facile notare il val(f) = 10 + 3 = 13.

Non esistono più cammini del primo e del secondo ordine.

L’algoritmo dei cammini aumentati si arresta.

Il valore del flusso massimo è 13.

Ora è d’uopo fornire un certificato che assicuri l'impossibilità di superare tale valore; pertanto, individueremo il taglio indotto unicamente dai vertici accessibili con cammini aumentanti.

Il certificato che stiamo cercando è un taglio.

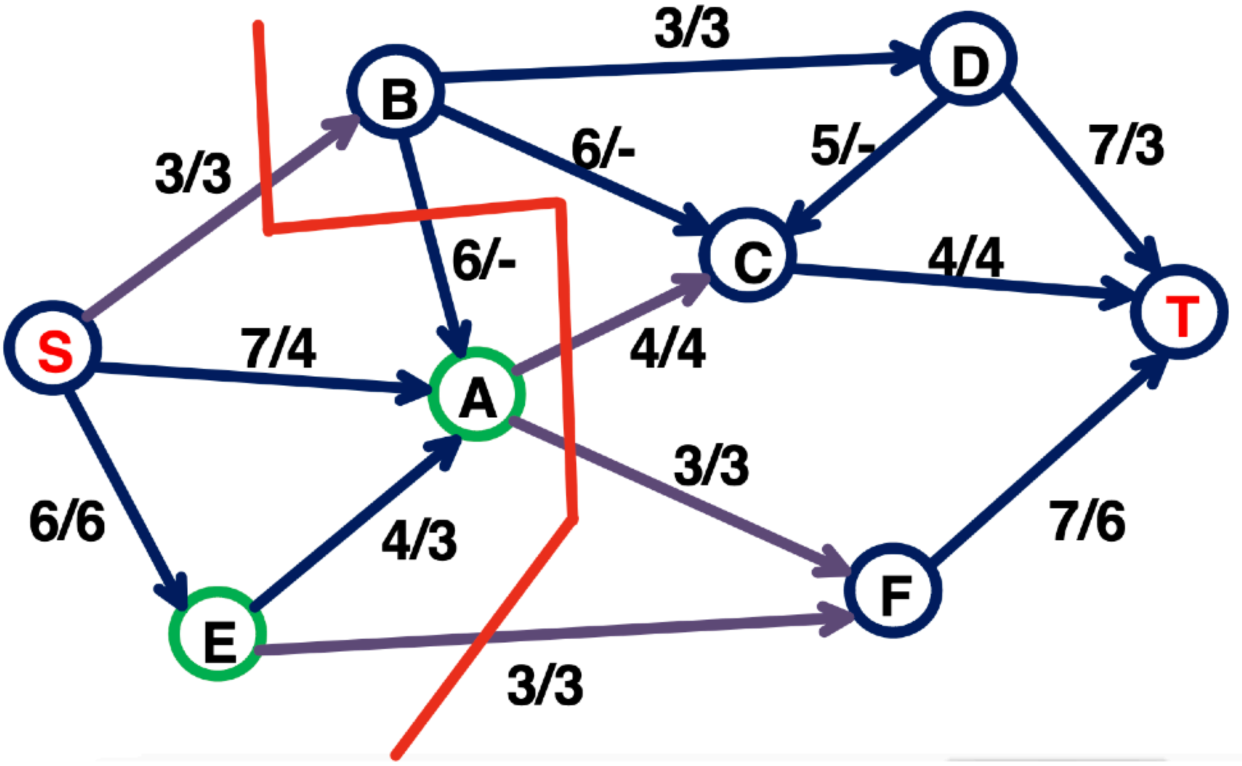
Il taglio è indotto.

Tutti gli archi diretti di questo taglio devono essere saturi.

Tutti gli archi opposti di questo taglio devono essere vuoti.

La capacità di questo taglio è uguale al valore del massimo flusso.

Il taglio che **certifica l'ottimalità** del flusso è il seguente:

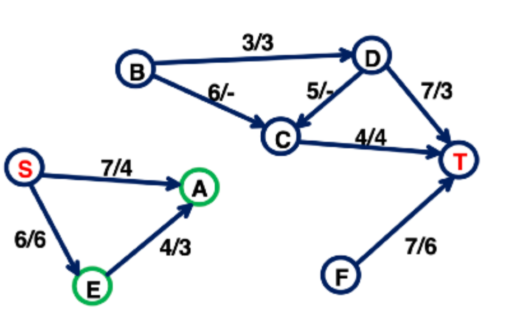


V1 = {S,A,E} V2 = {B,C,D,F,T}.

La capacità di questo taglio è pari a 3 + 4 + 3 + 3 = 13.

Capacità taglio = Valore flusso massimo.

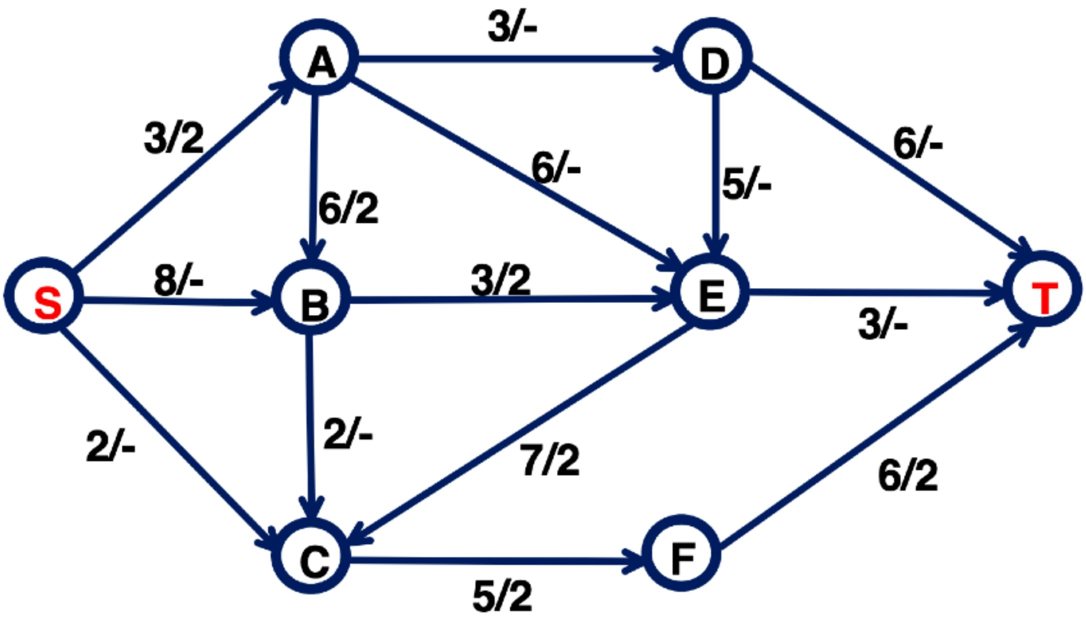
Fine.



18 luglio 2024

Si consideri la rete orientata in figura:

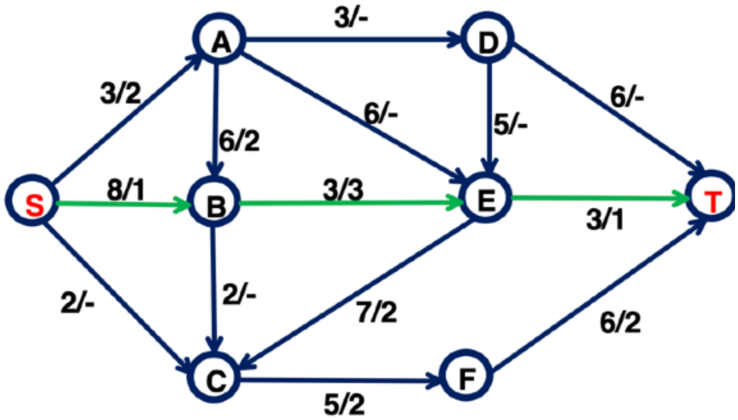
per ogni arco è indicata ***prima la capacità*** e poi il **valore del flusso iniziale.** Individuare un flusso s-t di valore massimo, *utilizzando l'algoritmo dei cammini aumentanti a partire dal flusso iniziale dato*. Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, è sufficiente indicare tutti i cammini aumentanti scelti con l'indicazione per ogni arco di quanto è aumentato o diminuito il valore del flusso. **Certificare inoltre la massimalità del flusso.**

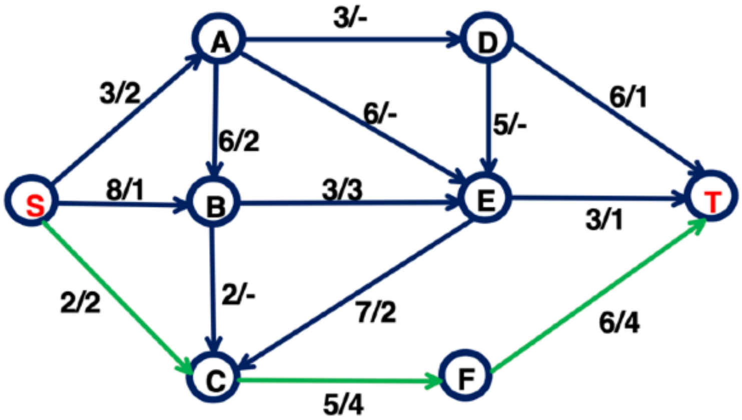


Svolgimento.

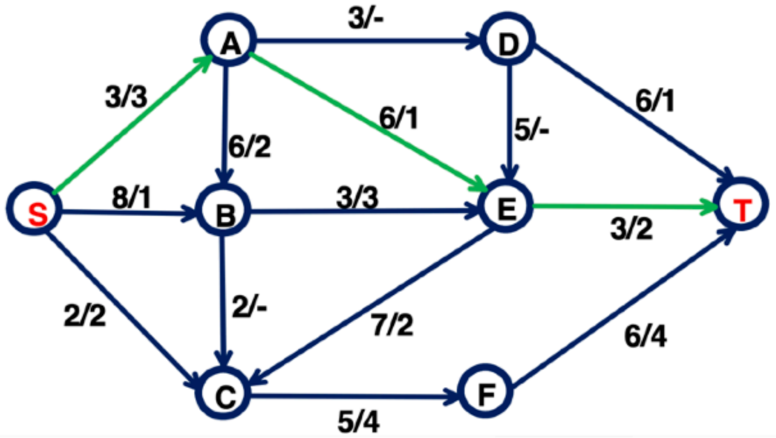
Si può procedere nel medesimo modo già intrapreso poc'anzi, giacché il procedimento è interamente identico. Occorre tener presente, tuttavia, che in questa occasione l'algoritmo dei cammini aumentanti verrà condotto con celerità.

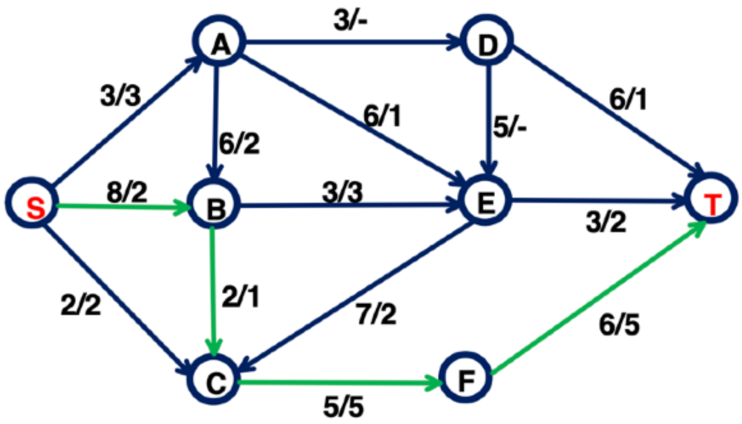
Il val(f) di partenza = 2.



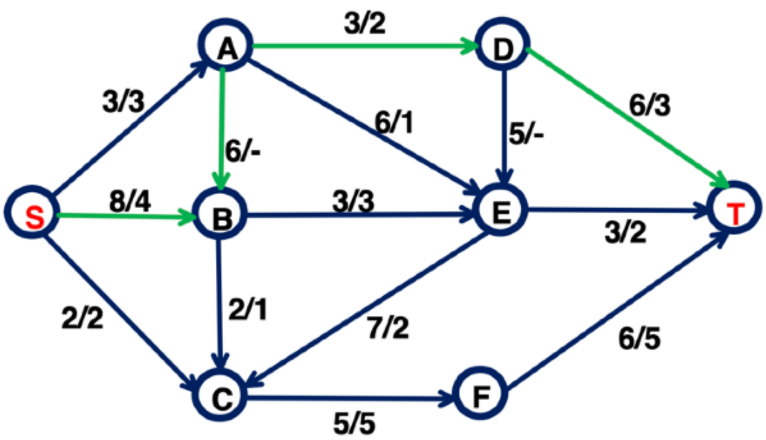


Val(f) = 2 + 1(sx) + 2(dx) = 5;

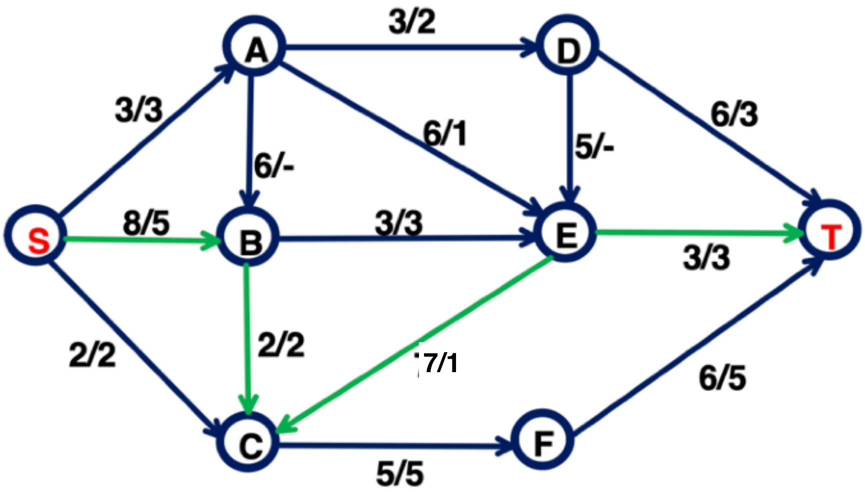




Val(f) = 5 + 1(sx) + 1(dx) = 7;



Val(f) = 7 + 2 = 9;



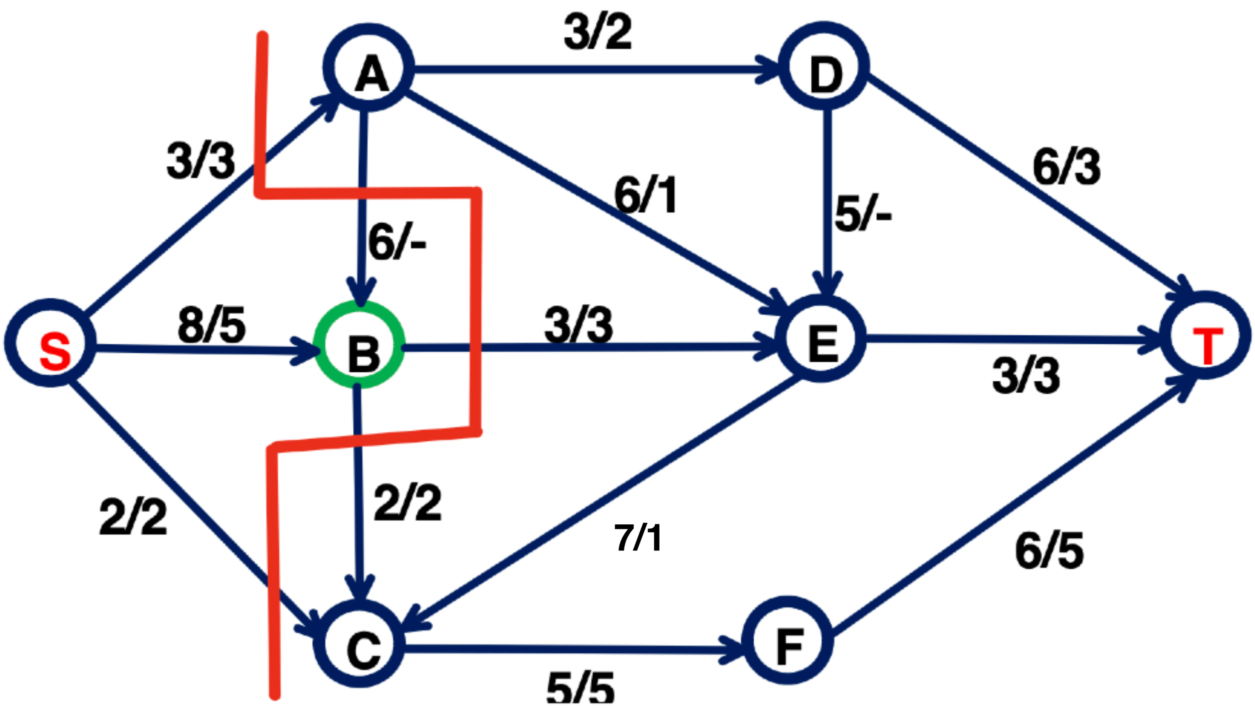
Val(f) = 9 + 1 = 10;

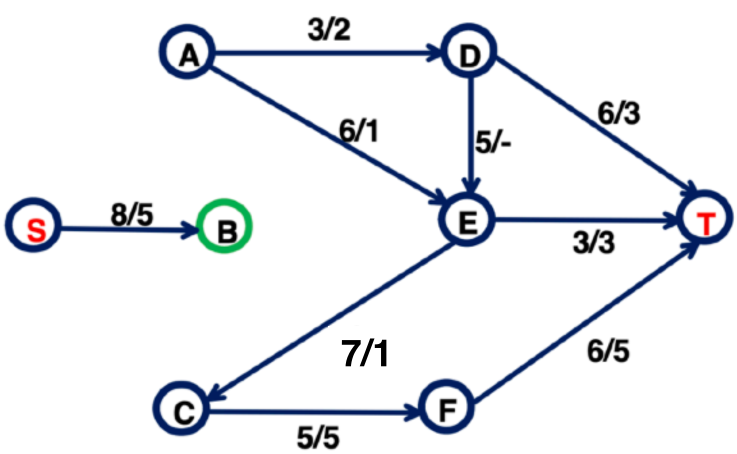
Non esistono più cammini.

L'algoritmo dei cammini aumentanti si arresta.

Il valore del massimo flusso è 10.

Il taglio che **certifica l'ottimalità** del flusso è il seguente:





V1 = {S,B} V2 = {A,D,E,C,F,T}.

La capacità di questo taglio è pari a 3 + 3 + 2 + 2 = 10.

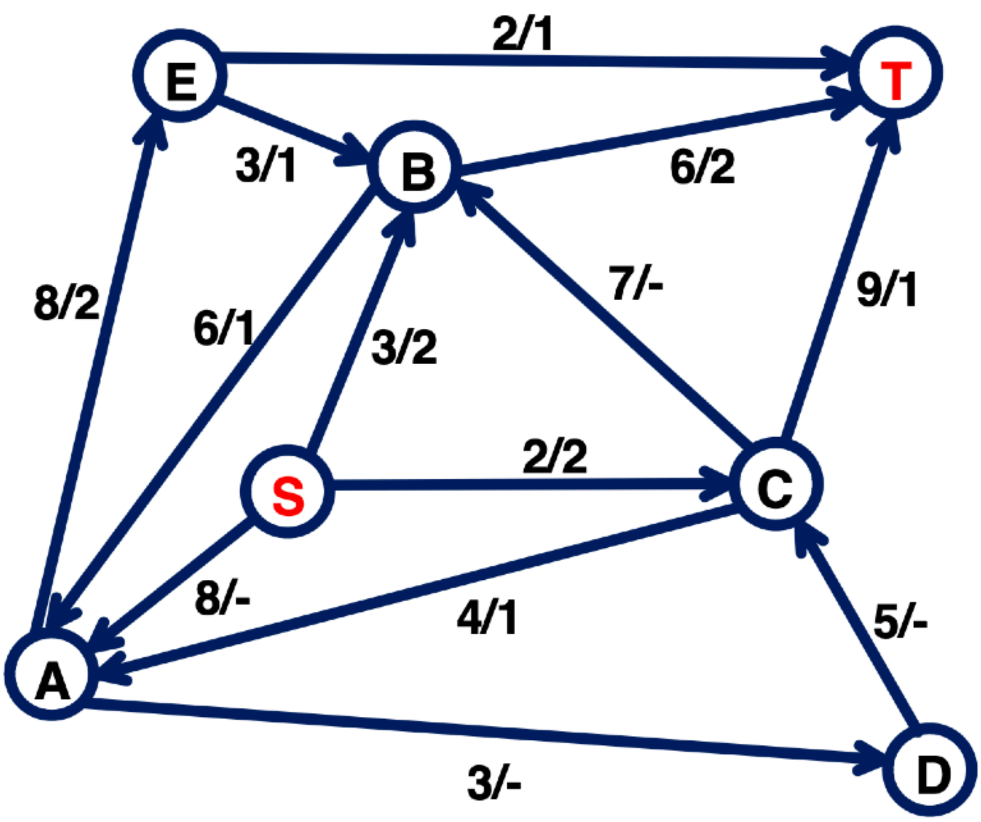
Capacità taglio indotto = valore massimo flusso = 10.

Non c'è altro da aggiungere.

16 Settembre 2024

Si consideri la rete orientata in figura:

per ogni arco è indicata ***prima la capacità*** e poi il **valore del flusso iniziale.** Individuare un flusso s-t di valore massimo, *utilizzando l'algoritmo dei cammini aumentanti a partire dal flusso iniziale dato.* Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, è sufficiente indicare tutti i cammini aumentanti scelti con l'indicazione per ogni arco di quanto è aumentato o diminuito il valore del flusso. **Certificare inoltre la massimalità del flusso.**

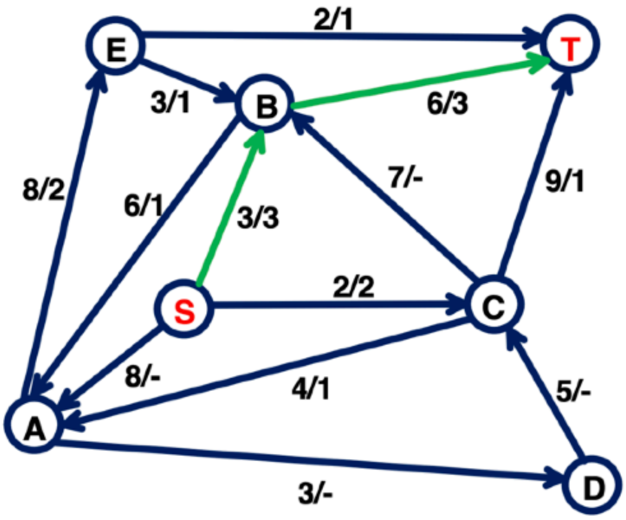


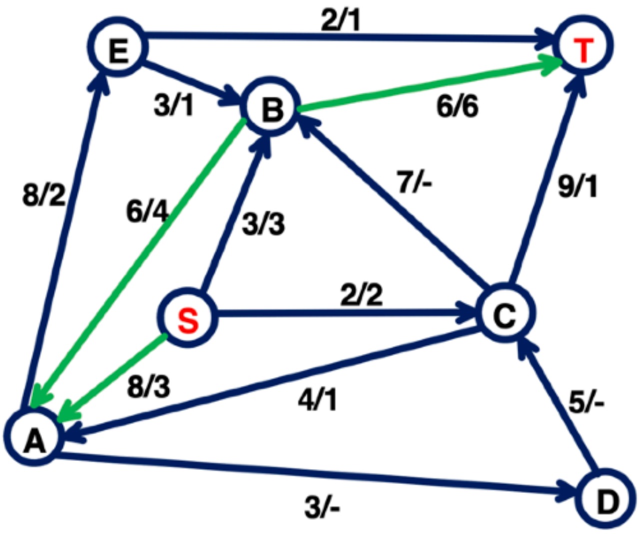
Come di consueto, applichiamo **<u>l'algoritmo dei cammini aumentanti</u>**.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, l'algoritmo sarà illustrato con somma rapidità. Conviene porre in evidenza che questo esercizio fu personalmente trattato dal professore in sede di lezione.

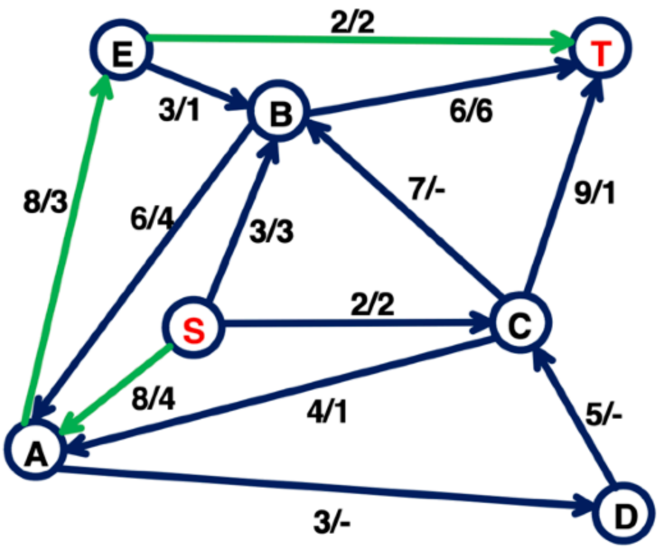
Il valore del flusso base è = 4.

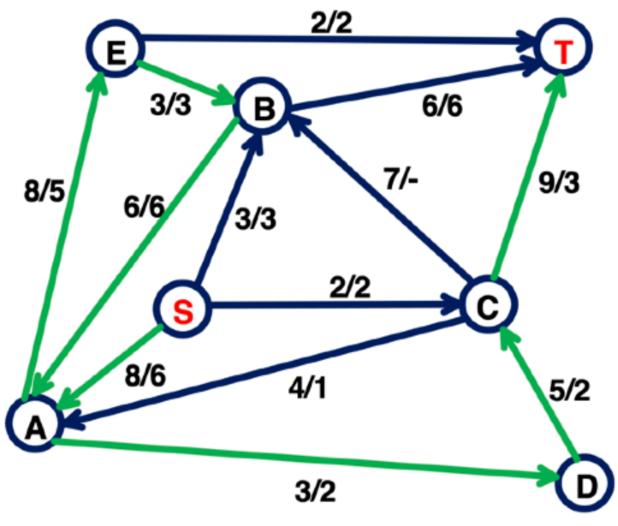
Vogliamo capire se questo flusso è massimo.



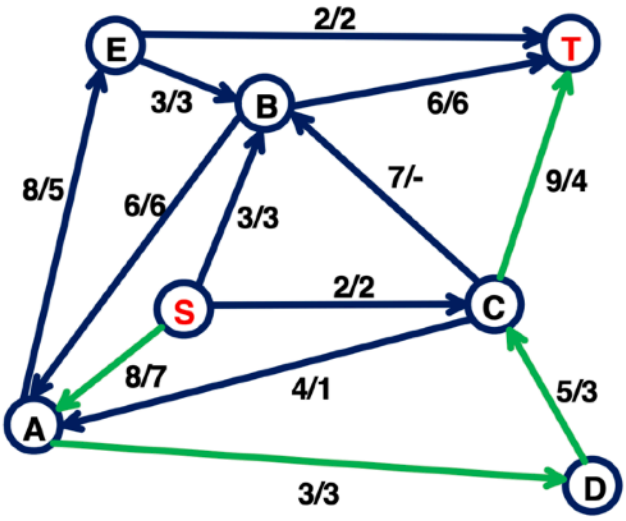


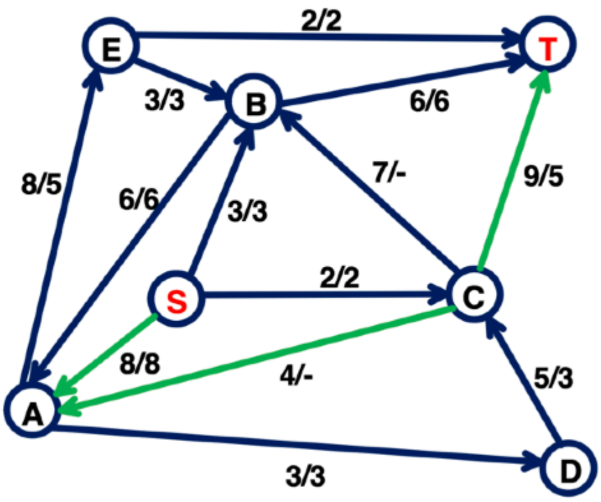
Val(f) = 4 + 1(sx) + 3(dx) = 8;





Val(f) = 8 + 1(sx) + 2(dx) = 11;



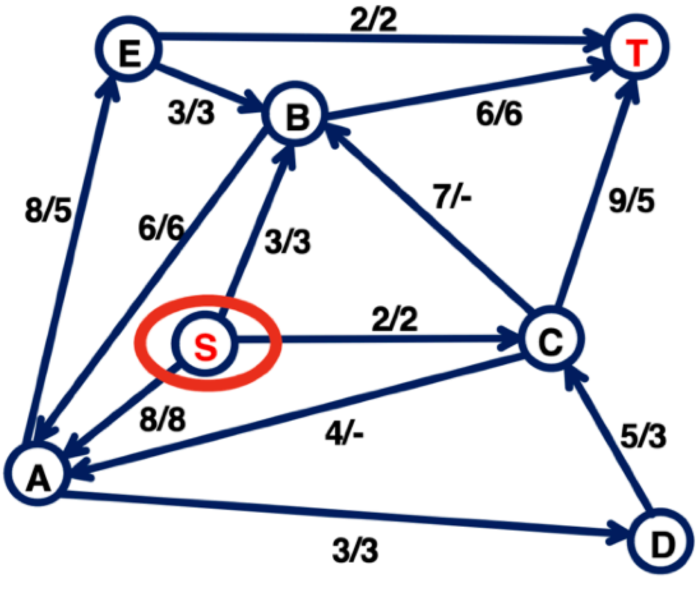


Val(f) = 11 + 1(sx) + 1(dx) = 13.

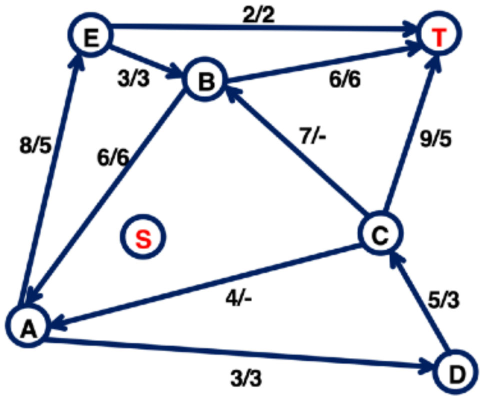
Non esistono più cammini aumentanti.

Il flusso massimale è di valore 13.

Il taglio che **certifica l'ottimalità** del flusso è il seguente:



Questo caso è nato per un colpo di fortuna. Il taglio minimo, altresì detto taglio indotto, è quello che isola S e, per necessità, la capacità di tale taglio sarà eguale al valore del flusso massimo. Erigere questo particolare taglio indotto fu cosa di somma facilità, poiché nessun vertice può essere raggiunto per via di cammini aumentanti partendo da S.



Il valore del flusso massimo è pari alla capacità del taglio minimo.

Certificato ottenuto.

Nulla da aggiungere.

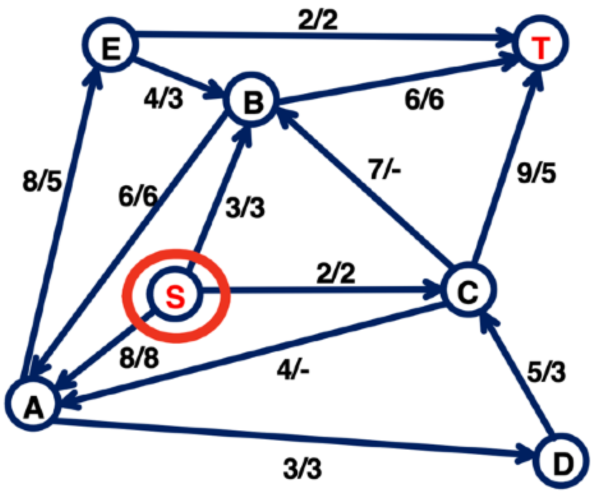
MODIFICA ALL'ESERCIZIO

Si supponga ora di aumentare la capacità dell'arco (E, B) di una unità. Dire quindi se il valore del massimo flusso aumenta giustificando la risposta attraverso un opportuno certificato.

Soluzione

Si rammenti che a un unico vettore di flusso corrispondono molteplici insiemi di cammini, mentre a ciascun insieme di cammini è associato un singolo vettore di flusso. Questo solo argomento è sufficiente a stabilire che, se il ragionamento concerne la variazione delle capacità senza intaccare i valori del flusso, allora è chiaro che il valore del flusso massimo resta invariato, e a maggior ragione la capacità del taglio permane immutata.

So che fede non mi presti, veggiamolo in sembianza grafica.



Non c'è inganno. Non ho "regalato" capacità ad alcun arco che potesse essere raggiunto da S; dunque, se l'esercizio l'avesse imposto, avrei potuto accrescere il taglio minimo inglobando un numero maggiore di vertici, e nondimeno giungere alla certezza di un taglio la cui capacità resterebbe sempre immutabilmente pari al valore del flusso massimo.

In sostanza non sarebbe cambiato nulla.

Piccola raccomandazione: I cammini aumentanti, in questo caso, sono stati individuati "a occhio," il che non reca errore; tuttavia, conviene rammentare che, qualora la dimensione del grafo fosse smisurata, sarebbe opportuno ricorrere all'implementazione di un algoritmo per la loro individuazione.

Invece di cercare dei cammini aumentanti nella rete fornita dal problema si cercano dei cammini orientati nella **rete residua**.

La rete residua è un grafo che dispone di tutte le combinazioni di nodi per ogni loro coppia.

Non è necessario per affrontare l'esame però è opportuno ricordare che ad occhio non si risolve nessun problema.