INTRODUZIONE

La dissertazione sui problemi di flusso che verrà qui intrapresa non volgerà il proprio sguardo ai fondamenti dei grafi, ma si inoltrerà in una trattazione di maggior finezza analitica e minore semplicità basilare. Si demanda, dunque, a corsi introduttivi la riscoperta dei principi essenziali che soggiacciono alla nozione di grafo.

L'illustre corso è tenuto dal Professore Gianpaolo Oriolo;

La presente trattazione è a cura del sottoscritto Simone Remoli.

PROBLEMI DI MASSIMO FLUSSO SUI GRAFI "ORIENTATI"

Che cos'è un problema di flusso?

Un **problema di flusso** è un tipo di problema di ottimizzazione su grafi.

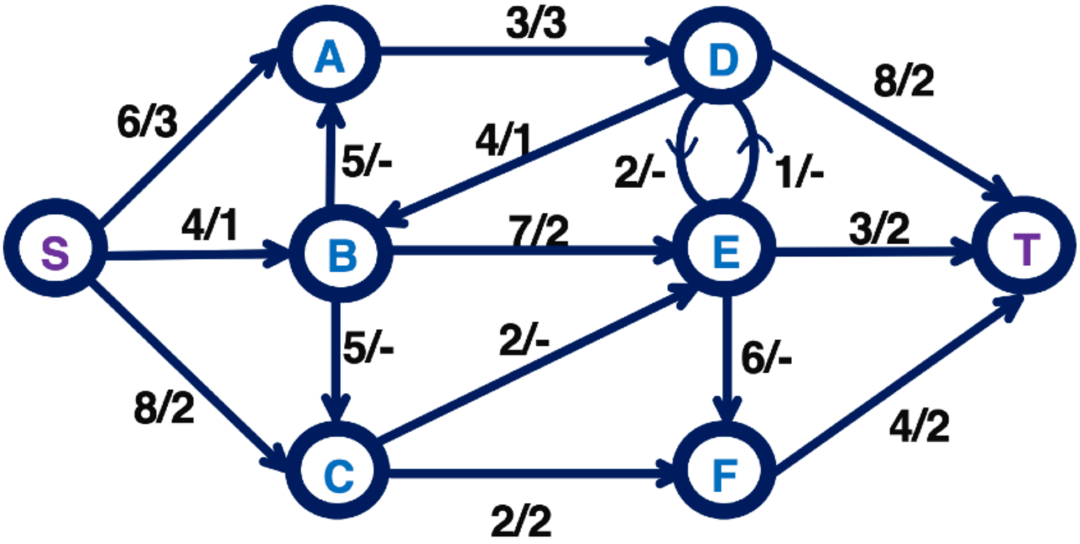
Qual'è il suo scopo?

Determinare il modo migliore per far passare la maggiore quantità di "flusso" attraverso un sistema di nodi e archi, rispettando determinate limitazioni.

Più precisamente?

Su ogni arco del grafo orientato è presente una **capacità** e il valore del **flusso corrente** su quell'arco. Questa capacità rappresenta un vincolo che ci limita la quantità di "bene" che può transitare su di esso.

Mostrami un esempio.



In un problema di flusso massimo, i nodi S (sorgente) e T (destinazione) sono due nodi speciali nel grafo che rappresentano rispettivamente l'inizio e la fine del percorso attraverso cui vogliamo far passare il flusso.

Per chiarire, l’arco ***S->A*** ha una capacità di 6, quindi un flusso di 7 non potrà mai transitare su di esso: allo stato attuale l’arco S-A ha una capacità residua di 3, che è data dalla differenza della capacità (6) e il flusso attuale (3).

In questa rete in figura esiste quindi un **vettore di flusso**. Possiamo ottenere in comodato il concetto di vettore in informatica e visualizzare il nostro vettore di flusso:

[3, 1, 2, 3, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2].

Dato questo flusso, fornito dal problema, vogliamo trovare un flusso S-T di **valore massimo** utilizzando l’algoritmo dei cammini aumentanti.

AMMISSIBILITÀ

Il vettore f di flusso S-T si definisce "**ammissibile**" se rispetta due proprietà fondamentali:

- Vincolo di capacità;

  Il valore del flusso su un arco deve essere minore (o uguale) alla capacità di quell'arco.

- Vincolo di conservazione del flusso (o bilanciamento);

  Per ogni nodo della rete diverso da S e da T, la somma del flussi sugli archi entranti deve essere uguale alla somma dei flussi sugli archi uscenti.

Un vettore di flusso che soddisfa queste due proprietà si definisce "ammissibile".

FLUSSO NETTO USCENTE DA UN NODO DIVERSO DA S,T

Si definisce flusso netto uscente da un nodo come la differenza fra la somma dei flussi sugli archi uscenti e la somma dei flussi sugli archi entranti.

Ed è palese per propria natura grazie al vincolo di conservazione del flusso che **il flusso netto uscente da un qualunque nodo diverso da S e T è zero.**

VALORE DEL FLUSSO: Val(f).

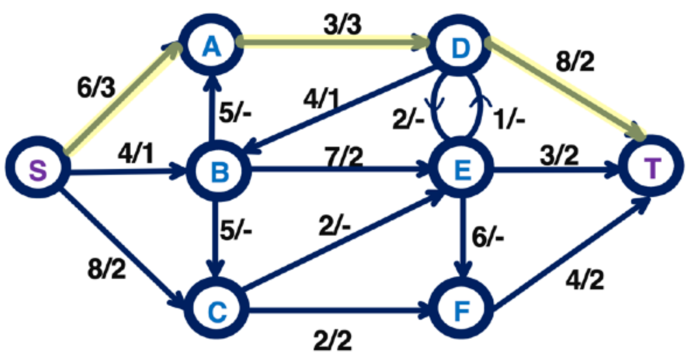
Dato un vettore di flusso S-T ammissibile definiamo il "**valore del vettore di flusso**" come la *differenza fra la somma dei flussi*

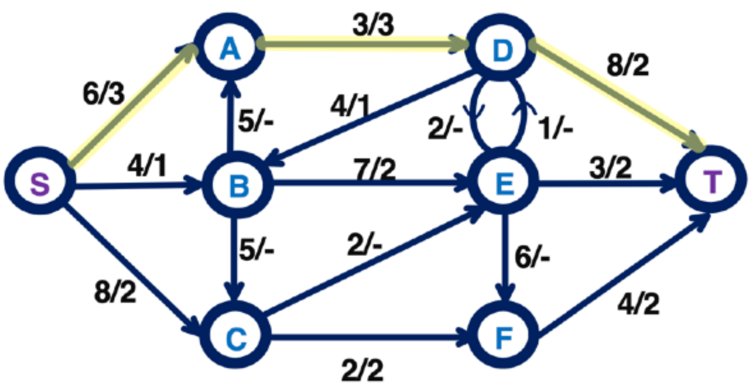
<u>sugli archi uscenti da S e la somma dei flussi sugli archi entranti su S</u>.

Nell'esempio in figura, il valore del flusso è pari a 3 + 1 + 2 = 6.

VIABILITÀ STRADALE

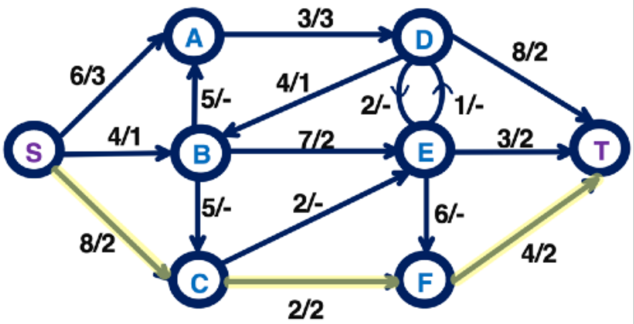
Se immaginiamo la rete raffigurata come una *<u>viabilità stradale</u>* percorsa da automezzi, appare evidente come questi ultimi debbano **necessariamente conoscere un percorso per giungere alla propria meta**. Il nodo T è, al momento, singolare, e dunque la destinazione è univoca. È tuttavia rilevante ricordare che i flussi assegnati nella rete non sono affatto casuali: essi scaturiscono da un insieme di cammini ben definiti.

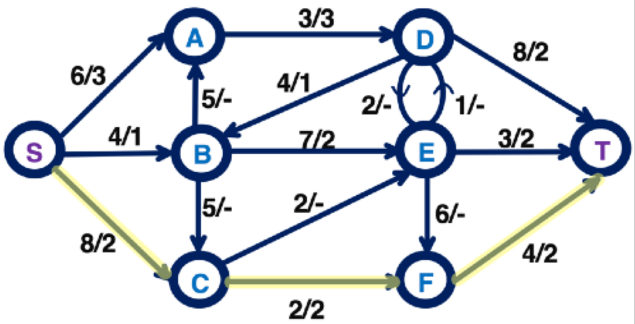




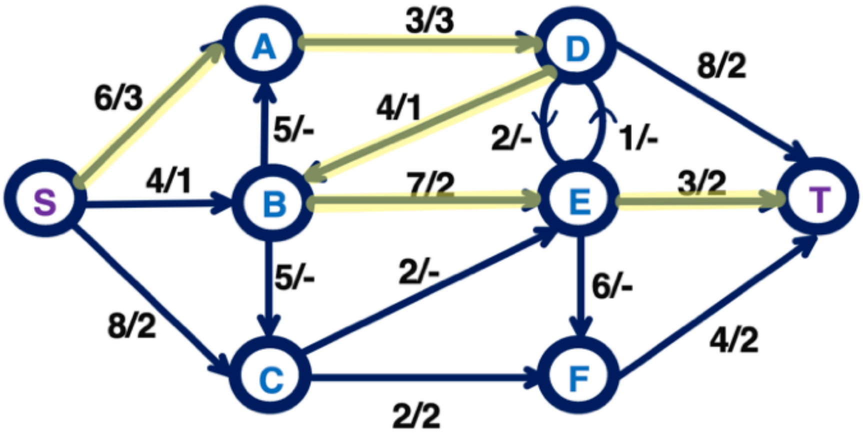
Si può scegliere 2 volte il cammino **S->A->D->T**.

Posso scegliere lo stesso cammino sino ad un massimo di due volte fermo restando i vincoli di capacità. L'arco D->T ci impone, come collo di bottiglia, di prendere questo cammino due volte.

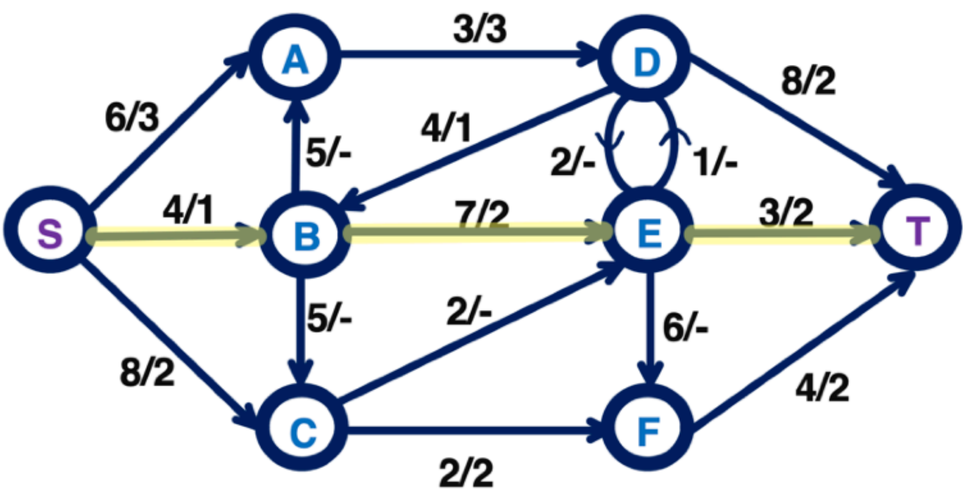




Si può scegliere due volte il cammino **S->C->F->T** per lo stesso identico motivo.



Considerando che ora gli archi S->A e A->D sono già stati “occupati” dal transito di due camion poiché la capacità residua di questi archi è singola (pari a 1) si può scegliere una volta sola il percorso **S->A->D->B->E->T**.



L'arco S->B presenta una capacità residua di 3, l'arco B->E di 5, mentre l'ultimo arco del percorso, E->T, ha una capacità residua di 1. È proprio quest'ultima limitazione a ridurre la possibilità di selezionare più volte tale percorso; di conseguenza, il cammino **S->B->E->T** risulta praticabile una sola volta.

Abbiamo individuato sei cammini e ci siamo arrestati. Senza dubbio, avremmo potuto conseguire un risultato più pregevole.

Lo scopo è trovare una soluzione che MASSIMIZZI IL NUMERO DI CAMMINI.

Per questa rete, il valore del flusso ammissibile è pari a 6; tuttavia, non è noto se tale valore rappresenti un flusso massimo.

Teorema: Il valore del flusso S-T di valore massimo è uguale al valore del flusso dopo aver applicato l'algoritmo dei cammini aumentanti.

(Da tenere a mente, dopo verrà dimostrato).

Teorema: Quando il problema del valore del flusso S-T di valore massimo sarà risolto e conoscerò bene il valore del massimo flusso, potrò scomporre i percorsi come voglio, le soluzioni fornite saranno del tutto equivalenti.

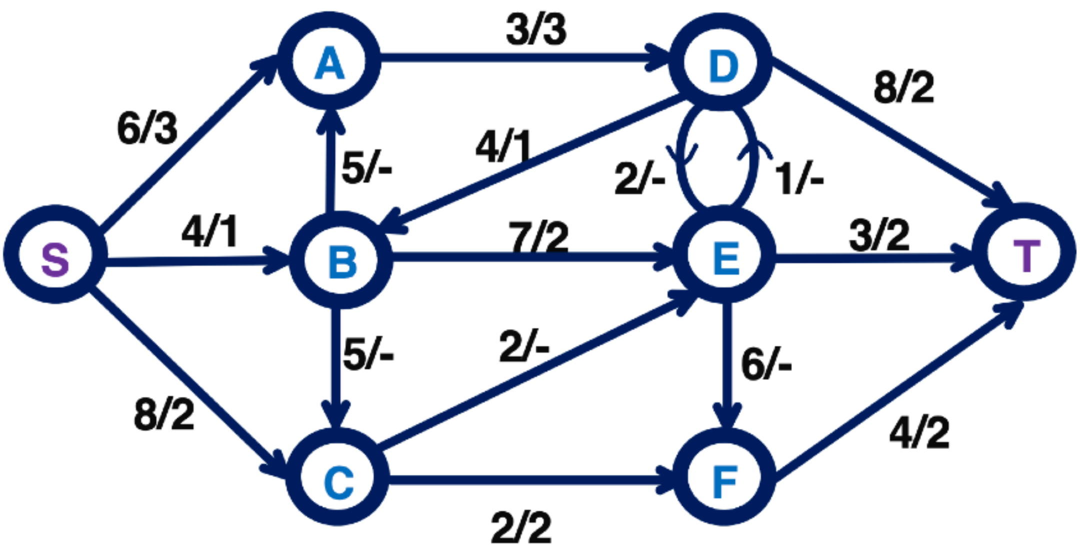
L'algoritmo che si applica è "**l'algoritmo di decomposizione del flusso in cammini**".

Conseguenza del teorema: Un vettore di flusso massimo può corrispondere a più set di cammini, ma un set di cammini può corrispondere ad un'unico vettore di flusso.

Morale: **IL VETTORE DI FLUSSO È UNICO.**

ALGORITMO DI DECOMPOSIZIONE DEL FLUSSO

Supponiamo di non conoscere i cammini che precedentemente abbiamo trovato e supponiamo di avere solo come monito la rete raffigurata.

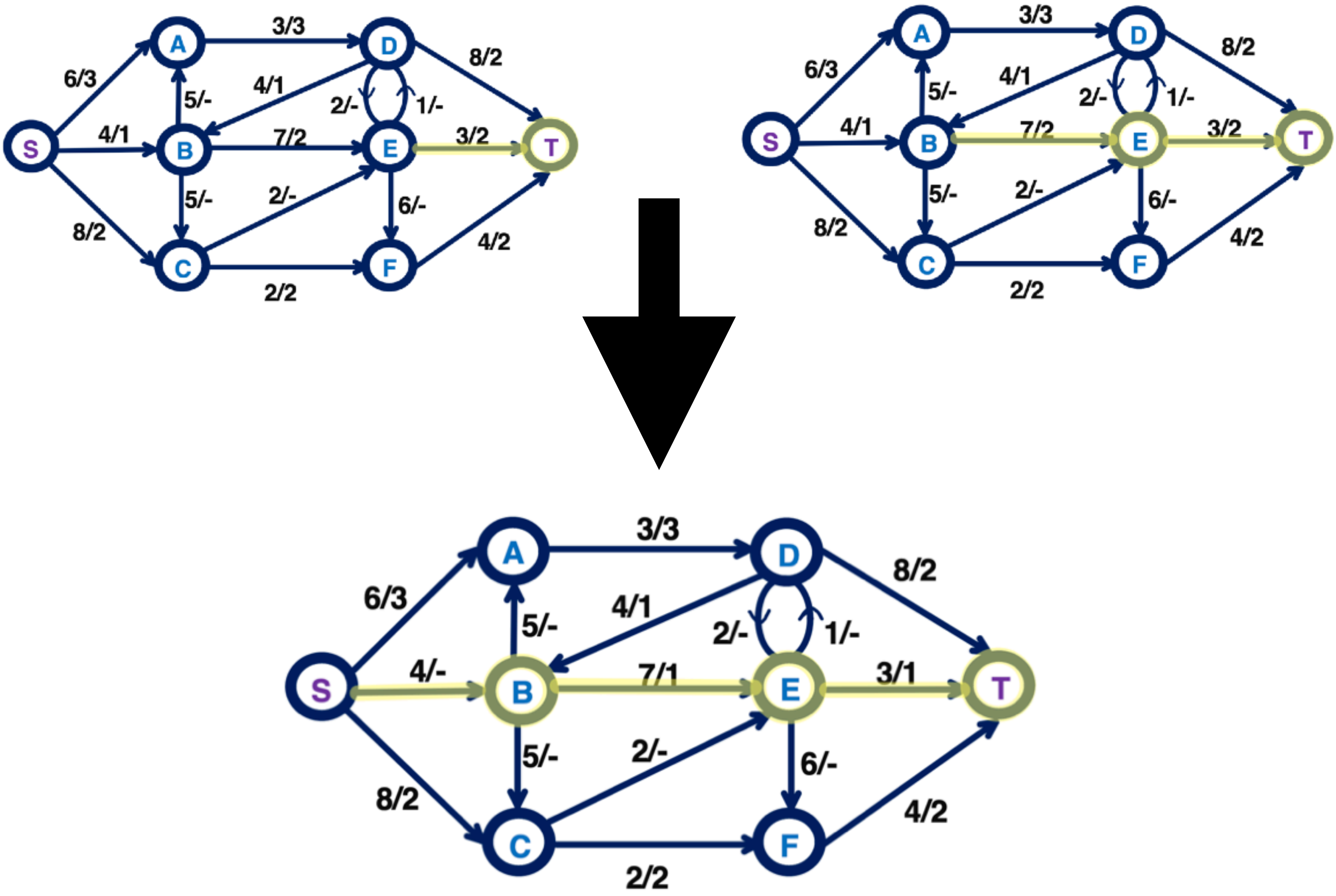


- Applichiamo la decomposizione del flusso e dimostriamo che i cammini sono identici (in numero e in percorso) a quelli precedentemente trovati.
- Si parte da T che ha un flusso netto di -6. Questo vuol dire che c'è qualche flusso su qualche arco entrante in T che ha contribuito. Ebbene, ci sono 3 archi che contribuiscono: D->T, E->T e F->T. Scelgo, in maniera del tutto casuale, l'arco E->T. Ripetiamo il procedimento per E a ritroso. Se ci sono due unità di flusso che escono da E, ci devono essere almeno due unità di flusso che entrano in E, questo è rappresentato dall'arco B->E. Ripetiamo il procedimento per B a ritroso. E l'arco S->B è quello

che fornisce flusso a B.

Abbiamo trovato un cammino S->B->E->T.

- Appena trovo un cammino devo diminuire i valori del flusso.



Il valore del flusso è diminuito di uno: val(f) = 5.

L'algoritmo termina quando il vettore dei flussi è NULLO oppure

preferibilmente se il val(f) = 0;

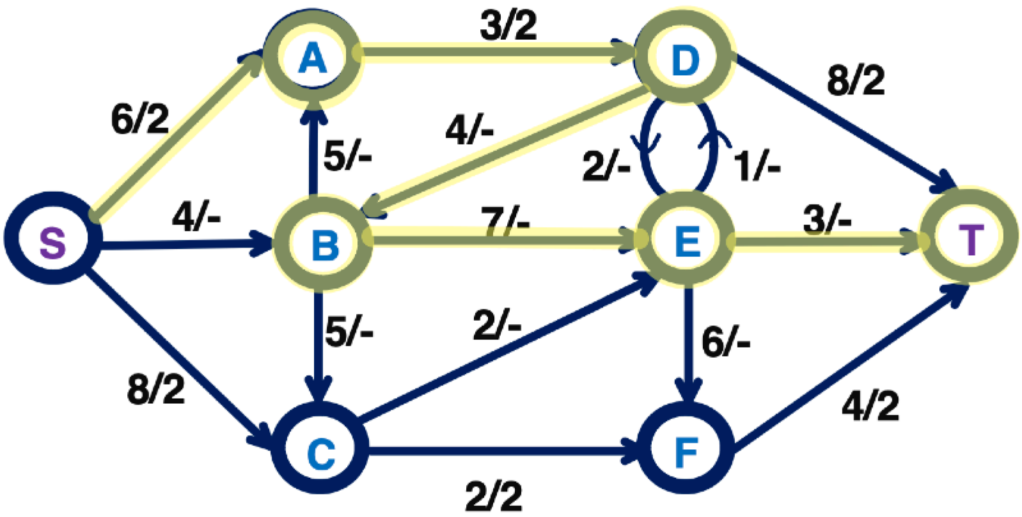
Cosa restituisce questo algoritmo?

L'algoritmo ci restituisce un'insieme di cammini la cui cardinalità è pari al valore del vettore di flusso.

Se il val(f) = 0 significa che l'insieme dei cammini è vuoto.

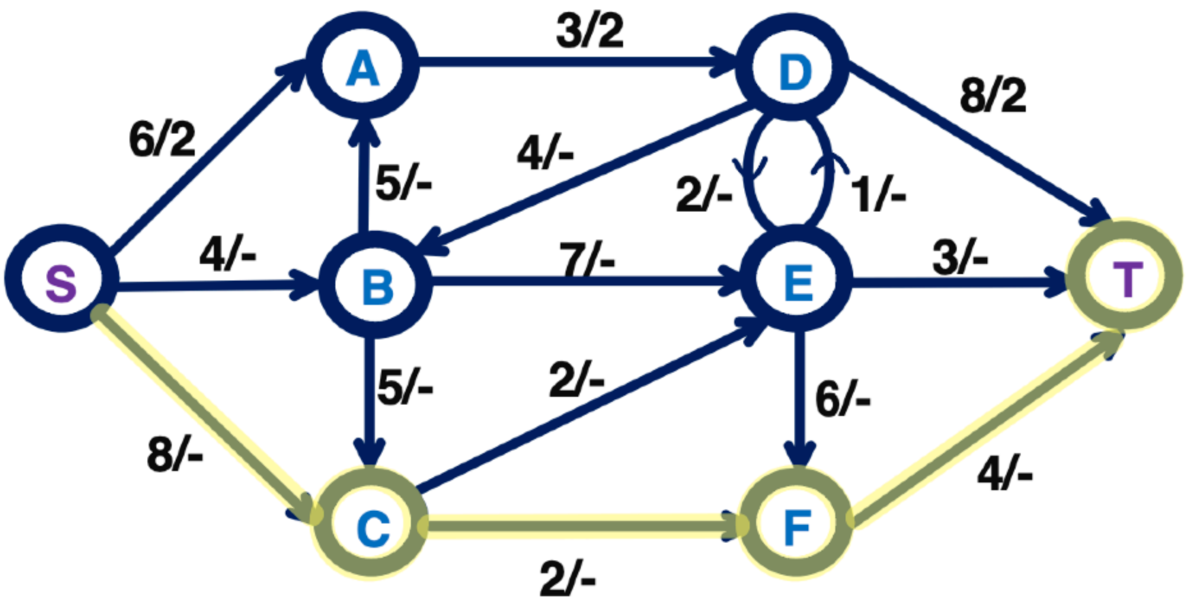
Ora si procede nuovamente con T, possiamo selezionare ancora l’arco E->T, qualcuno manda il flusso ad E, sicuramente l’arco B->E, su B agisce per forza l’arco D->B, su D agisce A->D e su A agisce S->A.

Ho trovato un secondo cammino.

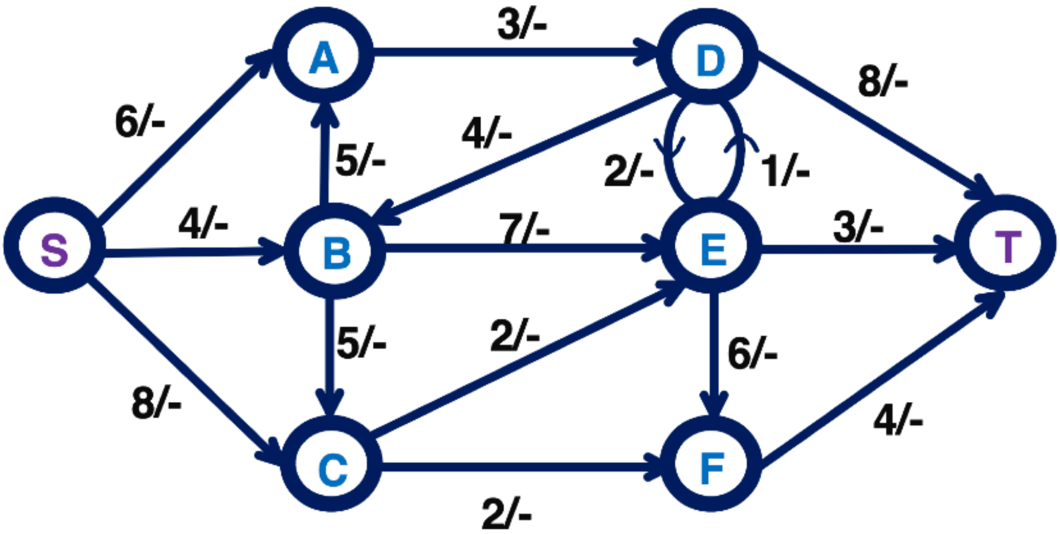


Il valore del flusso viene decrementato di 1: val(f) = 4;

Ora ho due unità di flusso da consumare nel percorso S->C->F->T e posso scegliere questo percorso due volte.



Il



valore del flusso viene decrementato di 2: val(f) = 2;

A questo punto è rimasto l’ultimo percorso da prendere due volte, ossia il percorso S->A->D->T e l’algoritmo si ferma.

Il valore del flusso è pari a zero: val(f) = 0.

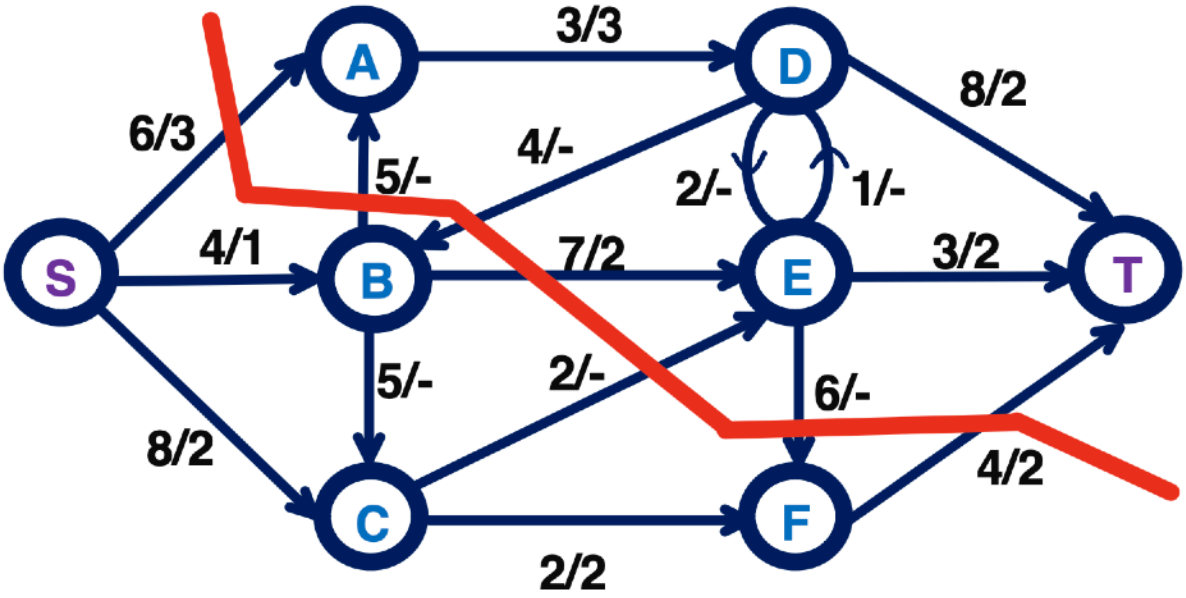
Il vettore dei flussi è nullo su ogni arco.

Abbiamo ricostruito i sei cammini che precedentemente erano stati trovati:

1. **S->B->E->T**
2. **S->A->D->B->E->T**
3. **S->C->F->T**
4. **S->C->F->T**
5. **S->A->D->T**
6. **S->A->D->T**

TAGLIO S-T

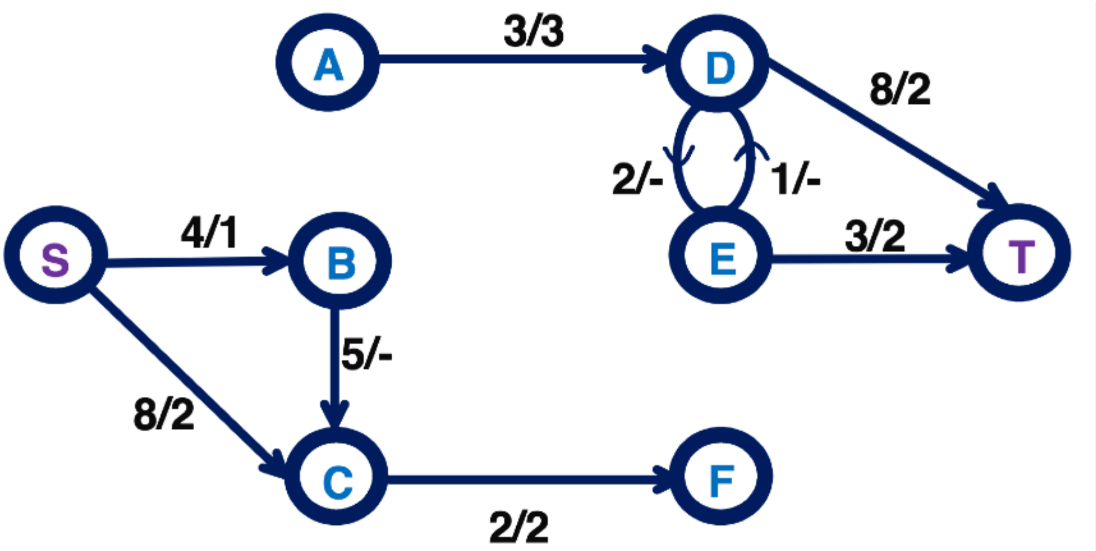
Un taglio S-T costituisce un metodo per suddividere la mappa in due sezioni, separando il nodo di partenza S dal nodo di arrivo T, come se si tracciasse una linea ideale tra i due nodi.



Questo è un TAGLIO S-B-C-F. L'insieme dei nodi viene diviso in due insiemi disgiunti la cui unione fornisce l'insieme di partenza.

V1 = {S, B, C, F} e V2 = {A, E, D, T}.

S e T sono separati.



Gli archi concordi <u>del taglio</u> sono tutti quegli archi che collegano un nodo dall'insieme di V1 ad un nodo nell'insieme di V2;

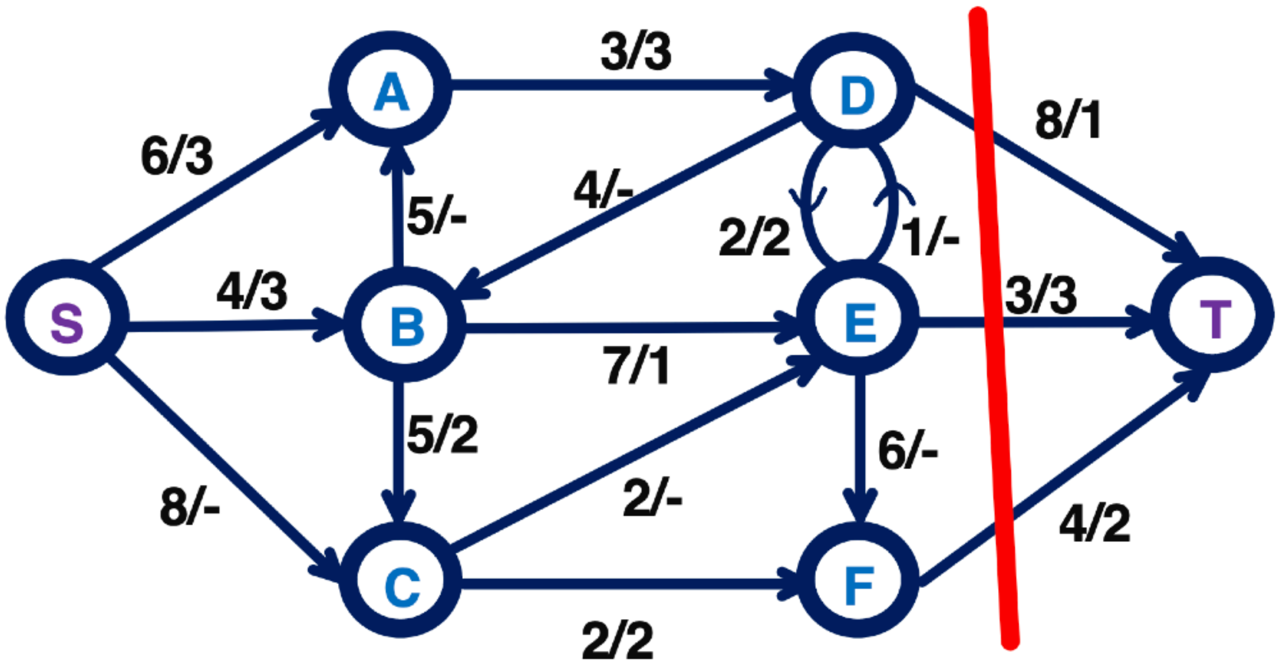
Gli archi discordi <u>del taglio</u> sono tutti quegli archi che collegano un nodo dall'insieme di V2 ad un nodo nell'insieme di V1.

DEFINIZIONE DI "FLUSSO NETTO ATTRAVERSO IL TAGLIO".

<u>Il flusso "netto" attraverso il taglio è la somma dei flussi sugli archi concordi sottratto alla somma dei flussi sugli archi discordi.</u>

<u>Dato un vettore di flusso ammissibile, il flusso netto attraverso qualunque taglio è uguale al valore del flusso.</u>

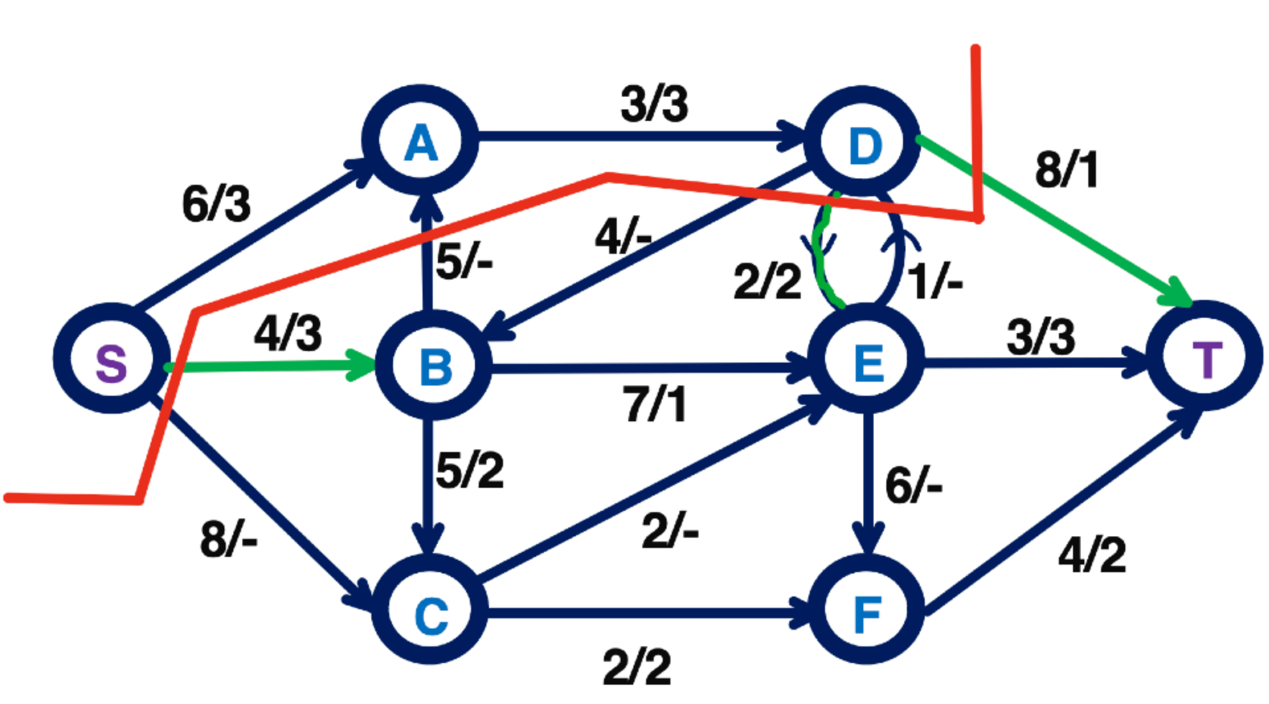
Forniamo un esempio con un vettore di flusso ammissibile e una rete:



Il flusso netto attraverso il taglio è esattamente pari a 6.

Ma 6 è anche il val(f). Per definizione di "flusso netto" i due valori sono uguali.

Ma se prendo un qualsiasi altro taglio questo principio continua a valere.



Come è possibile notare anche qui, il flusso netto attraverso il taglio è pari a 6, che è anche pari al valore del flusso.

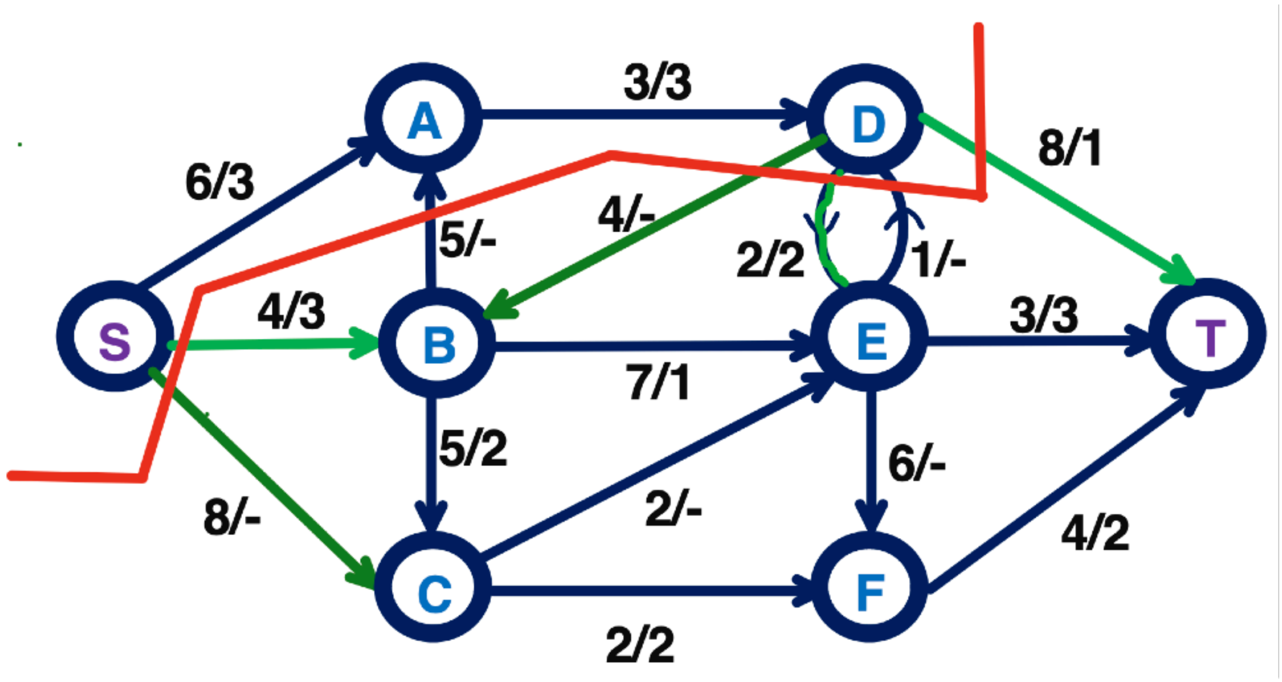
[*Rileggi la definizione del val(f)*]

I tagli ci indicano qualcosa di interessante anche nel momento in cui andiamo a guardare la capacità.

Il taglio può aiutarci a stimare il valore del massimo flusso.

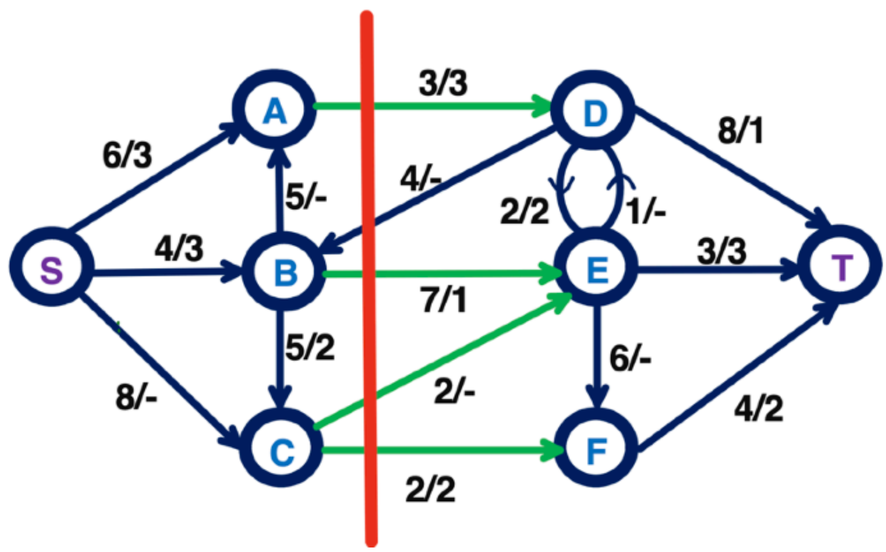
TEOREMA: ***Il valore del massimo flusso è uguale alla capacità del minimo taglio***.

Definizione: La capacità del taglio è la somma delle capacità degli archi diretti (S->T, concordi) per quel taglio.



La capacità di questo taglio è pari a 8+4+4+2+8 = 26.

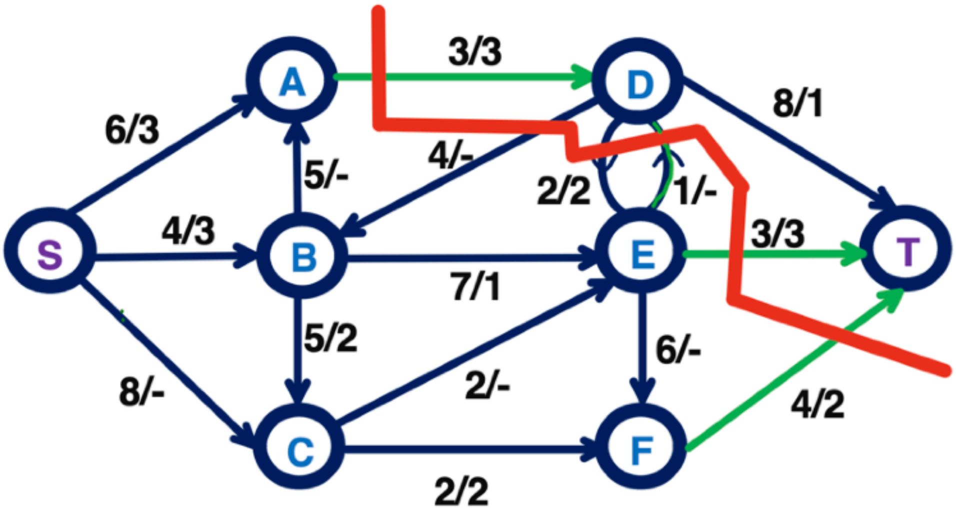
Qualora si scorga tuttavia un taglio di capacità inferiore, possiamo dedurre che vi sia un valore di flusso massimo certamente inferiore a 26.



La capacità di quest'ultimo taglio è pari a 3 + 7 + 2 + 2 = 14.

Quindi possiamo dire che il valore del massimo flusso non è più di 14.

Possiamo fare di meglio?



La capacità di questo taglio è pari ad 11 = 3 + 1 + 3 + 4.

Possiamo dire che il valore del massimo flusso non è più di 11.

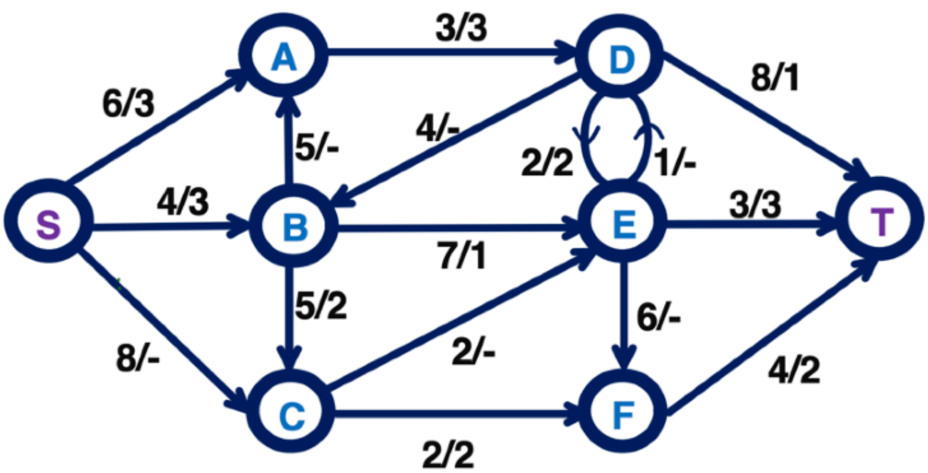
Può essere 11 ma abbiamo circoscritto il campo d'indagine.

Fine premessa.

Cerchiamo il valore del flusso massimo e, a partire da esso, esibiamo un **certificato** che ne sancisca la piena massimalità.

MASSIMO FLUSSO

Partiamo dalla seguente rete con un valore di flusso (val(f)) = 6.



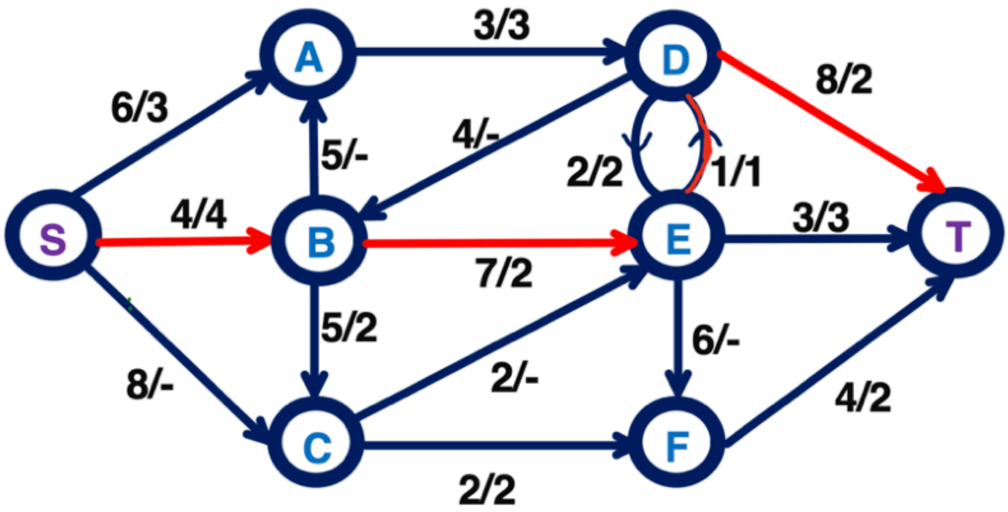
L'intento è ora di scoprire dei "cammini" che conducono da S a T avvalendoci dell'**algoritmo dei cammini aumentanti**. Al compimento di questo processo, l'algoritmo restituirà sempre, quale esito, un flusso di valore massimo corredato di un attestato che ne attesti la piena massimalità.

Bisogna trovare due tipi di cammini:

- **Cammini formati da tutti archi diretti da S a T non saturi;**
- **Cammini formati da archi opposti non vuoti e da archi diretti non saturi;**

Iniziamo a cercare cammini del primo tipo.

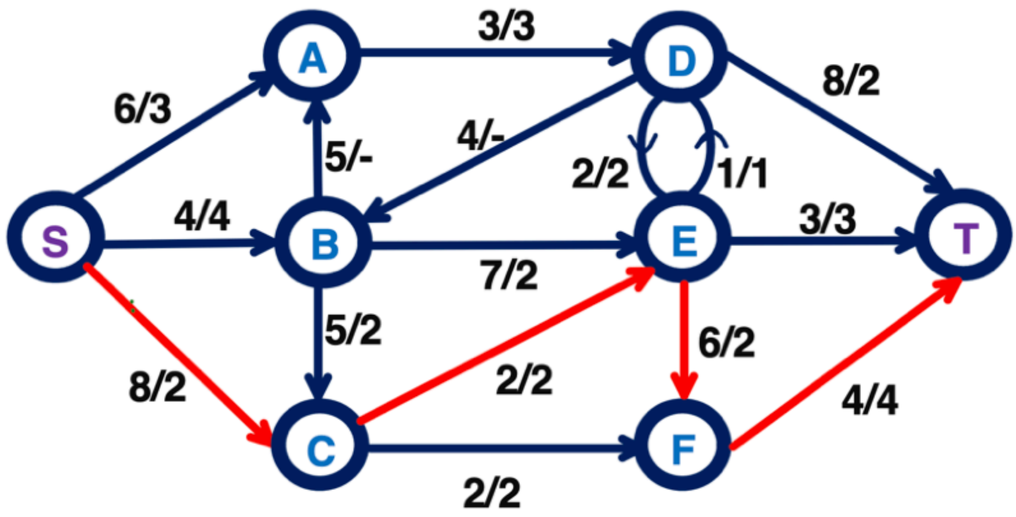
Il primo cammino è **S->B->E->D->T.**



E lungo questo cammino aumento il valore del flusso di una costante, in questo caso aumento di uno per via del collo di bottiglia della capacità residua che c'era da S a B e da E verso D.

Val(f) = 6 + 1 = 7.

Il secondo cammino è **S->C->E->F->T.**

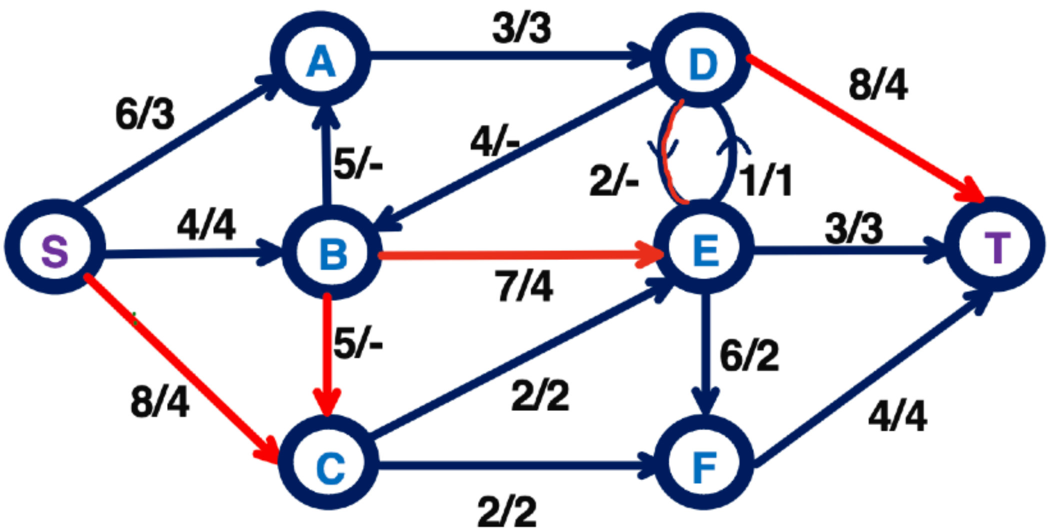


In questo caso il valore del flusso viene aumentato di due unità poiché avevo un collo di bottiglia di valore due nell'arco C->E.

Val(f) = 7 + 2 = 9.

Ora cammini del primo tipo non ci sono più. Procediamo con cammini del secondo tipo.

Il terzo cammino è **S->C<-B->E<-D->T.**



Sugli archi concordi con la percorrenza sommo, sugli archi discordi con la percorrenza sottraggo.

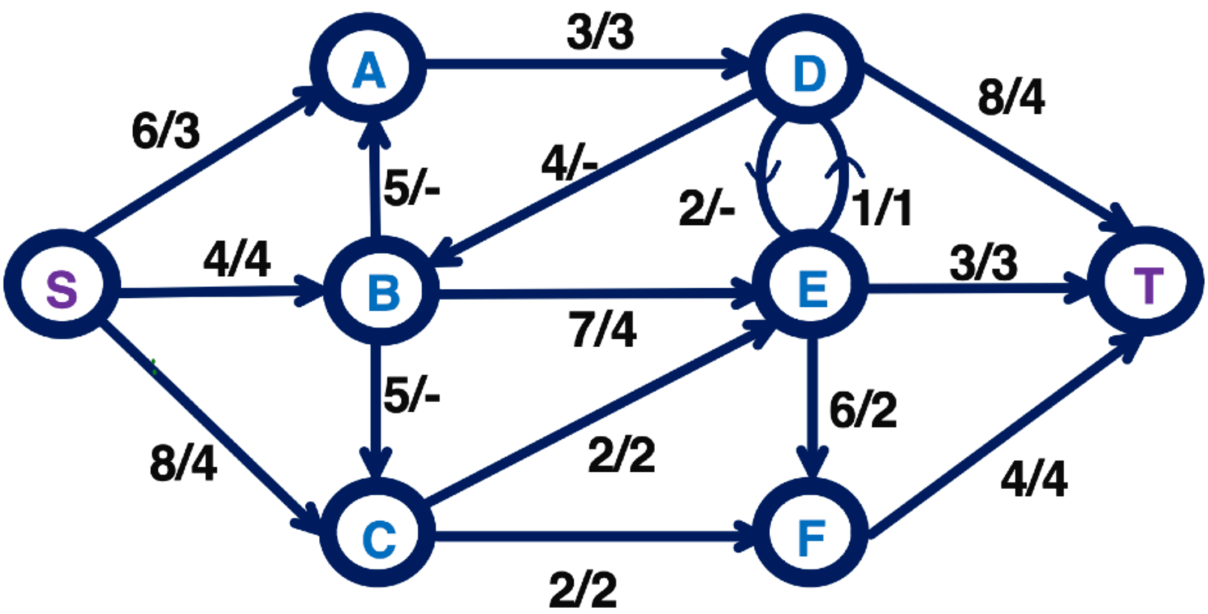
Quanto sommo/sottraggo?

Posso aumentare/diminuire di due.

Quindi aumento di due il valore del flusso.

Val(f) = 9 + 2 = 11.

Ora guardiamo la rete ottenuta. Esistono ancora cammini del primo tipo o del secondo tipo?

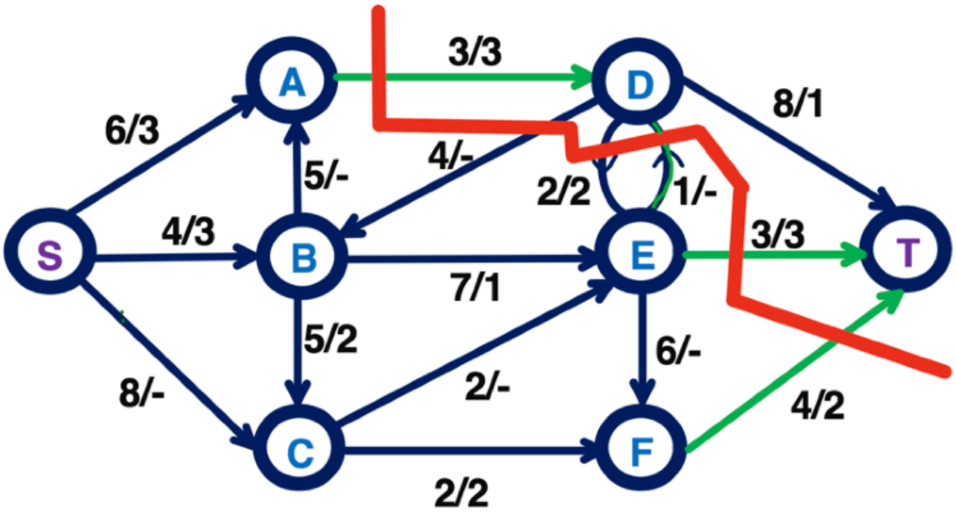


NO, non vi sono più cammini. L'algoritmo dei cammini aumentanti giunge al suo termine. Tale procedimento è noto come "algoritmo di Ford-Fulkerson".

Ho finito, il val(f) è un flusso massimo.

Il valore del flusso massimo è 11.

Se ora controlliamo il val(f) con la regola analitica che ci siamo precedentemente imposti, ossia come la <u>*differenza fra la somma dei flussi sugli archi uscenti da S e la somma dei flussi sugli archi entranti su S,*</u> <u>***notiamo che il valore di questo flusso è esattamente pari ad 11.***</u>



Il taglio rinvenuto poc'anzi era un "taglio minimo". Tuttavia, badiamo bene: tale taglio è stato individuato in modo fortuito e non attesta la massimalità del flusso. Il taglio che conferisce dignità di certezza alla massimalità del flusso non è quello scoperto con un colpo di sorte.

CERTIFICATO DI OTTIMALITÁ DEL FLUSSO.

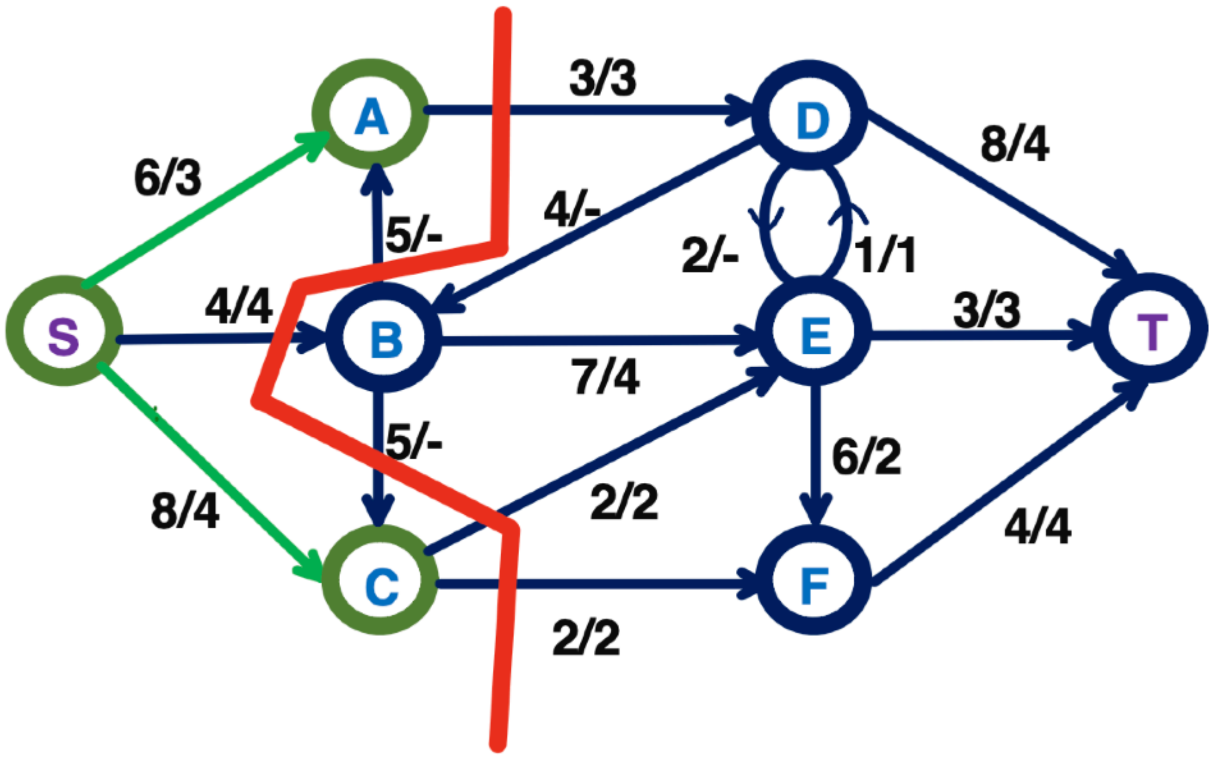
- **Partendo dall'ultima rete, quali sono i nodi (escludendo T) che posso raggiungere con cammini diretti con la percorrenza tali che gli archi sono non saturi, o con cammini non orientati tali che gli archi opposti sono non vuoti e i diretti non saturi?**

- PARTO DA S
- S lo posso sempre raggiungere.
- Posso raggiungere A perché è non saturo.
- Posso raggiungere C perché è non saturo.
- NON posso raggiungere B.

Costruisco il taglio indotto dai nodi raggiungibili tramite cammini aumentanti non saturi: questo prende il nome di <u>taglio minimo</u>.

L'algoritmo di aggiunta dei vertici finisce con un insieme di vertici che sono raggiungibili direttamente, ossia {S,A,C}.

Bisogna costruire il taglio indotto su S-A-C.



Il taglio individuato da questi vertici è un taglio la cui capacità è uguale al valore del flusso corrente, che è quello massimo attualmente.

<u>Tutti</u> gli archi diretti di questo taglio saranno "saturi".

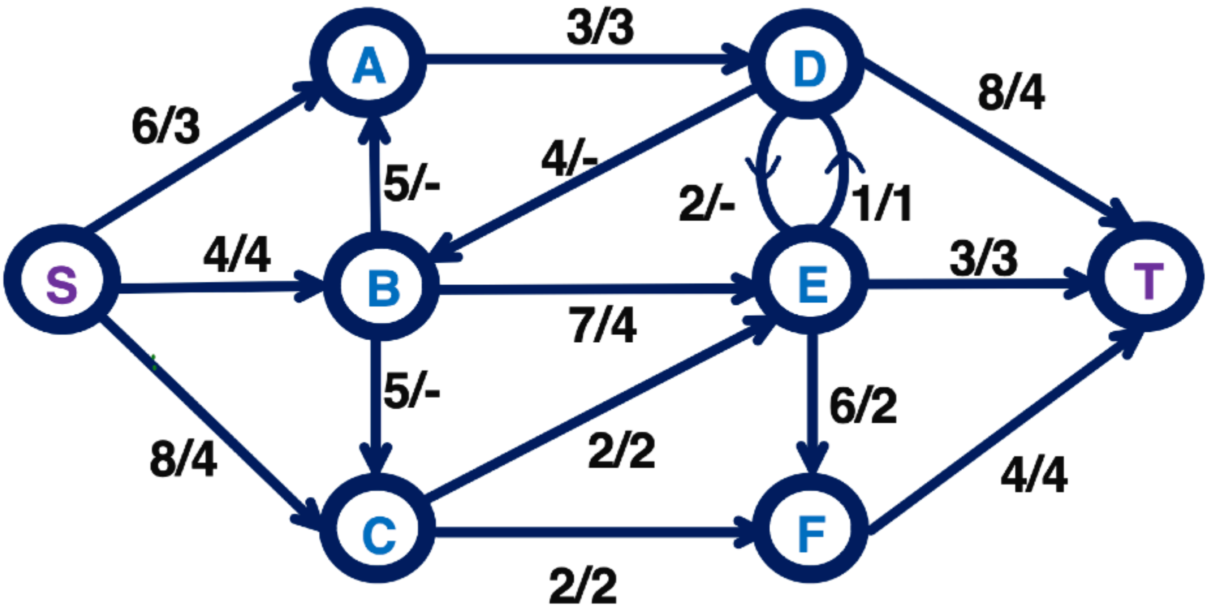
<u>Tutti</u> gli archi opposti di questo taglio saranno "vuoti".

Questo è il certificato che possiamo esibire per garantire l'ottimalità del flusso.

TEOREMA: Se il certificato (ossia il taglio individuato) non è lo stesso del valore del massimo flusso, qualcosa è andato storto.

Adesso quali sono gli undici cammini?

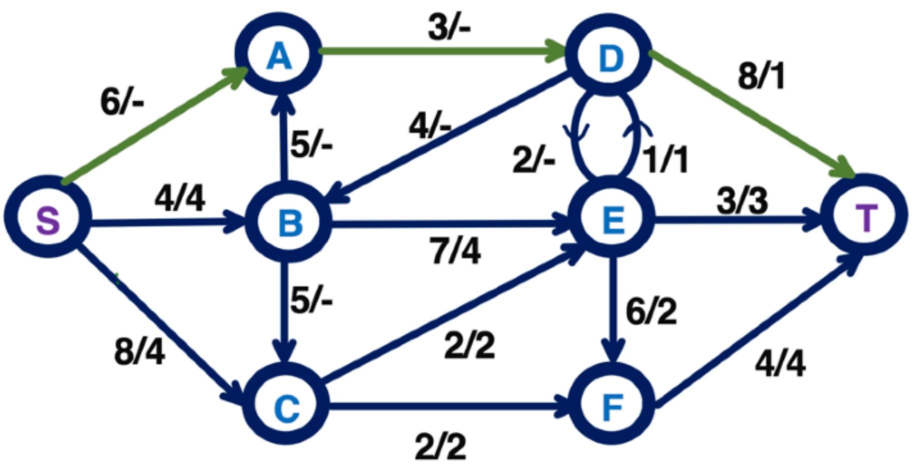
Applichiamo l'algoritmo di decomposizione del flusso.



val(f)max = 11.

Il cammino S->A->D->T lo prendo 3 volte.

Diminuisco di 3 il valore del flusso.

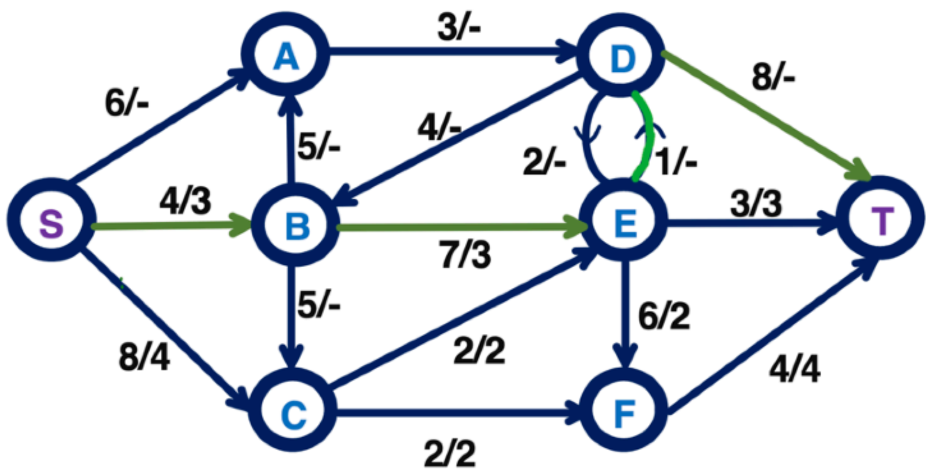


Val(f) = 11-3 = 8;

Ho diminuito il valore del flusso di 3 su tutto il percorso.

Il cammino S->B->E->D->T lo prendo 1 volta.

Diminuisco di 1 il valore del flusso.

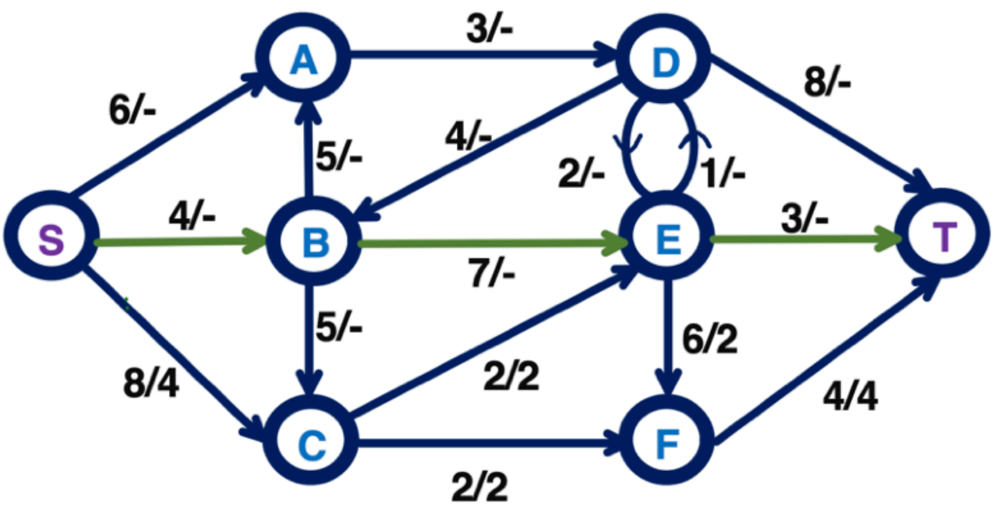


Val(f) = 8-1 = 7;

Ho diminuito il valore del flusso di 1 su tutto il percorso.

Il cammino S->B->E->T lo prendo 3 volte.

Diminuisco di 3 il valore del flusso.

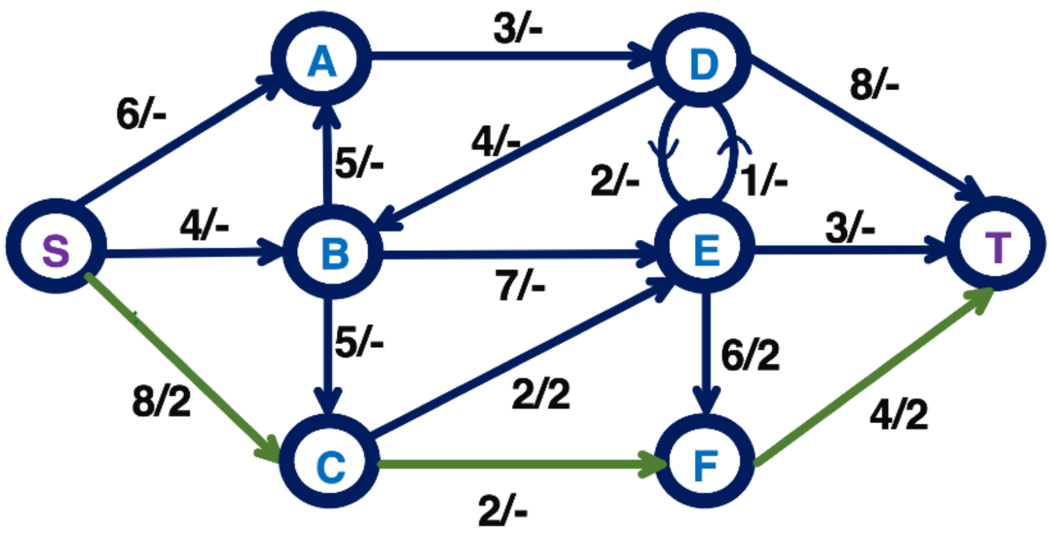


Val(f) = 7-3 = 4;

Ho diminuito il valore del flusso di 3 su tutto il percorso.

Il cammino S->C->F->T lo prendo due volte.

Diminuisco di 2 il valore del flusso.

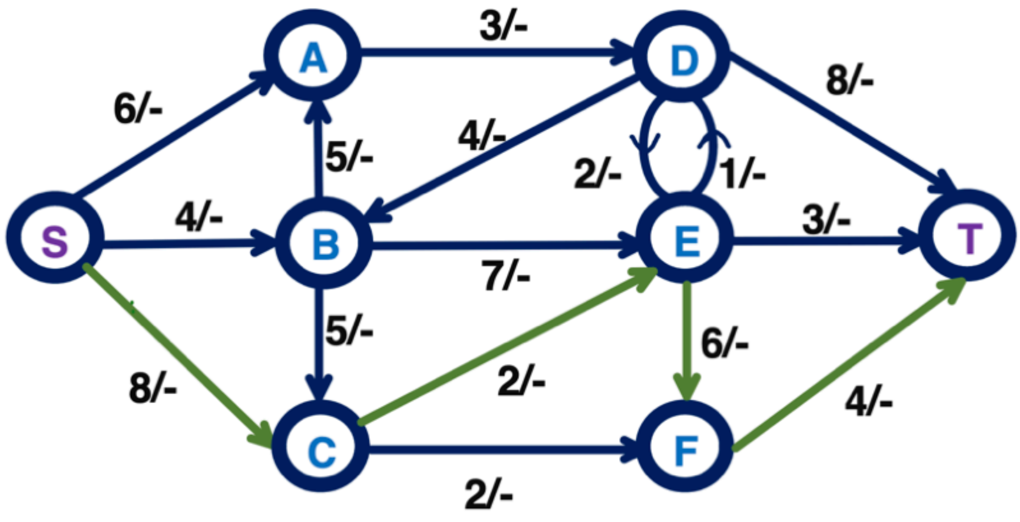


Val(f) = 4-2 = 2;

Ho diminuito il valore del flusso di 2 su tutto il percorso.

L'ultimo cammino S->C->E->F->T lo prendo due volte.

Diminuisco e azzero il valore del flusso.



Val(f) = 0.

Fine algoritmo.

Tramite il flusso abbiamo trovato tramite l'algoritmo dei cammini

aumentanti un valore di flusso massimo, abbiamo esibito un certificato che ne attesta l’ottimalità e abbiamo mostrato gli 11 cammini (la quantità massima di bene).

Gli 11 cammini sono:

1. S->A->D->T
2. S->A->D->T
3. S->A->D->T
4. S->B->E->D->T
5. S->B->E->T
6. S->B->E->T
7. S->B->E->T
8. S->C->F->T
9. S->C->F->T
10. S->C->E->F->T
11. S->C->E->F->T

11 cammini in una rete dove il flusso massimo è 11 che è pari alla capacità del taglio indotto.

Non c’è altro da aggiungere.