Documento a cura di Simone Remoli.

LA PROGRAMMAZIONE LINEARE.

La **programmazione lineare** (PL) rappresenta uno degli strumenti fondamentali della **ricerca operativa** e costituisce una metodologia matematica utilizzata per risolvere problemi di ottimizzazione in cui l'obiettivo è massimizzare o minimizzare una funzione lineare, detta **funzione obiettivo.**

La programmazione lineare è utilizzata per risolvere problemi di ottimizzazione, tra cui massimizzare il profitto, minimizzare i costi di produzione, ottimizzare l'uso delle risorse.

I problemi di programmazione lineare sono tipicamente risolti con metodi come il **metodo del simplesso** o con algoritmi polinomiali come l'**algoritmo dei punti interni.** Questi metodi consentono di trovare soluzioni ottimali anche per problemi complessi e di grandi dimensioni.

Entriamo nel dettaglio.

Un tipico problema di programmazione lineare è rappresentato da tre punti focali:

- **Variabili di decisione**;
- **Funzione obiettivo**;
- **Vincoli**;

Variabili di decisione.

Sono variabili x1,x2,x3, … , xn.

Una **variabile di decisione** rappresenta una scelta o una quantità che vogliamo determinare per risolvere un problema.

Funzione obiettivo.

Rappresenta una funzione lineare da ottimizzare (massimizzare o minimizzare).

Quando l'obiettivo è **massimizzare** la funzione obiettivo, stiamo cercando di ottenere il valore più alto possibile per questa funzione, entro i limiti imposti dai vincoli.

Quando l'obiettivo è **minimizzare** la funzione obiettivo, stiamo cercando di ottenere il valore più basso possibile, sempre rispettando i vincoli.

Quando si formula un problema di programmazione lineare, si specifica se l'obiettivo è "**max**" o "**min**" nella funzione obiettivo, e quindi si risolve il problema per trovare i valori delle variabili di decisione che ottimizzano (massimizzano o minimizzano) questo obiettivo.

z = c1x1 + c2x2 + ……… + cn xn;

Z è il valore della **funzione obiettivo** in un problema di programmazione lineare (PL) ed è l'espressione che rappresenta ciò che vogliamo **ottimizzare**. Può essere sia **massimizzato** che **minimizzato**, a seconda degli obiettivi del problema.

Inoltre c1,c2,c3,…cn sono i coefficienti associati a ciascuna variabile x1,x2,x3,…xn.

Vincoli.

Un insieme di equazioni o disequazioni lineari che limitano i valori che le variabili di decisione possono assumere. Questi vincoli rappresentano le risorse disponibili o le restrizioni operative.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

Non devo trovare una soluzione, bensì *un modello* *lineare* per risolverla.

Esempio.

In ogni prova d'esame del corso di Ricerca Operativa, è incluso un problema di programmazione lineare. Di seguito vi presenterò un esempio classico di "modellizzazione" di un problema di PL: osservate che tale esempio è già stato strutturato, e pertanto il nostro intento sarà, in un primo momento, formulare la funzione obiettivo e i vincoli modellando sapientemente il problema.

Esercizio 5 Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 - x_2 + 3x_3:\\
&\quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2\\
&\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4\\
&\quad x_1 + x_2 - 2x_3 = 3\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Questo è ciò che intende il professore come problema di programmazione lineare modellato.

Le variabili di decisione sono X1,X2 e X3.

La funzione obiettivo è massimizza = X1-X2+3X3.

I vincoli sono:

2x1-2x2+x3<=-2, 2x1-x2+3x3<=4, x1+x2-2x3=3 e x1,x2>=0.

(*Consiglio*: una volta trovata una possibile situazione devo chiedermi se posso ancora ridurre)

Fine premessa.

ESERCIZIO D'ESAME 15 GENNAIO 2024.

(Anche in 4_07_16).

Devi allocare delle risorse a tre diversi project-manager che lavorano per te.

Le risorse sono **ore uomo** e **capitale**, disponibili rispettivamente in quantità **350 ore** e **1000 euro**.

Il primo manager segue la produzione di un bene A: ogni unità di A richiede 6 ore uomo e 25 euro.

Il secondo manager segue la produzione di un bene B: ogni unità di B richiede 8 ore uomo e 20 euro.

Il terzo manager segue la produzione di un bene C: ogni unità di C richiede 7 ore uomo e 23 euro.

Formula il PL che devi risolvere per **massimizzare** la quantità di beni A, B e C complessivamente prodotta rispettando le disponibilità delle risorse (per semplicità assumi che i beni siano frazionabili).

Scrivere il PL, con funzione obiettivo e vincoli, indicando in particolare il significato di ogni variabile utilizzata.

Svolgimento.

Rompiamo subito il ghiaccio: elenchiamo i passi che si devono affrontare per risolvere un problema di programmazione lineare.

0. Non giocare a carte.

1. Leggere il problema.

2. Chiarire cosa si desidera ottenere (se minimizzare o massimizzare).

3. Identificare le variabili di decisione.

4. Scrivere una **funzione obiettivo** che esprima ciò che vogliamo ottimizzare (massimizzare o minimizzare).

5. Scrivere le equazioni o disequazioni che rappresentino le limitazioni del problema. I vincoli devono essere scritti in termini delle variabili di decisione.

È fondamentale capire che in questo esercizio si richiede di massimizzare il profitto.

Identifichiamo le variabili di decisione: possiamo identificare **tre variabili di decisione** X1,X2 e X3.

x1 = "Produzione di un bene A da parte del primo manager";

x2 = "Produzione di un bene B da parte del secondo manager";

x3 = "Produzione di un bene C da parte del terzo manager";

Scriviamo la funzione obiettivo.

Max x1 + x2 + x3;

La funzione obiettivo così descritta deve massimizzare la quantità di beni e, pertanto, è possibile sommare le tre variabili di decisione.

I vincoli sono:

6x1+8x2+7x3<=350;

25x1+20x2+23x3<=1000;

Dove x1,x2,x3 >=0;

Poiché anche il testo del problema ci indica di considerare i due beni frazionabili, il primo vincolo indica la produzione delle ore uomo inferiori (o uguali) a 350 e il secondo vincolo indica la produzione del capitale inferiore (o uguale) a 1000.

In sintesi il problema di programmazione lineare è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + x_2 + x_3: & \\
& 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 \leq 350 \\
& 25x_1 + 20x_2 + 23x_3 \leq 1000 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO D'ESAME 18 LUGLIO 2024.

Un'azienda realizza un prodotto p utilizzando due impianti di produzione A e B.

Dal punto di vista della realizzazione del prodotto i due impianti sono identici, per cui ciascuna unità di p può essere indifferentemente prodotta nell'impianto A o nell'impianto B.

Le capacità produttive sono però diverse:

A può produrre fino a 1000 unità di p al mese, **mentre B può produrre fino a 1300 unità di p al mese**.

Infine i due impianti di produzione A e B dispongono di un unico magazzino condiviso.

All'inizio del mese di Agosto ci saranno 800 unità di p in magazzino.

Inoltre è nota la domanda per i prossimi mesi, che per semplicità assumiamo sia sempre concentrata l'ultimo giorno del mese: **alla fine di Agosto dovranno essere consegnate a dei clienti 1000 unità di p; alla fine del mese di Settembre 2600 unità; alla fine di Ottobre 1400 unità.**

L'azienda vorrebbe organizzare la produzione nei mesi di Agosto, Settembre e Ottobre in modo da **minimizzare** il costo di immobilizzo in magazzino: **ogni unità di prodotto, che è presente all'inizio di un mese in magazzino, ha un costo mensile di 300 euro.**

Sapete scrivere un problema di programmazione lineare che aiuti l'azienda a organizzare la produzione?

(Suggerimento: la quantità di scorte presente all'inizio di un mese i è uguale alla quantità presente all'inizio del mese i-1 più la quantità prodotta nel mese i nei due impianti meno la domanda consegnata alla fine del mese i-1).

Per illustrare lo svolgimento dell'esercizio, scrivere il PL, con funzione obiettivo e vincoli, indicando in particolare il significato di ogni variabile utilizzata. Per semplicità si assuma che tutte le variabili possano assumere valore frazionario.

Svolgimento.

Le variabili di decisione sono:

x1: "Numero di unità (**presenti nel magazzino**) di P all'inizio di agosto"; SETTEMBRE

x2: "Numero unità (**presenti nel magazzino**) di P all'inizio di settembre"; OTTOBRE

x3: "Numero di unità (**presenti nel magazzino**) di P all'inizio di ottobre"; NOVEMBRE

ProduzioneAgosto: "Unità prodotte nel mese di agosto";

ProduzioneSettembre: "Unità prodotte nel mese di settembre";

ProduzioneOttobre: "Unità prodotte nel mese di Ottobre";

Funzione obiettivo:

Min 300x1+300x2+300x3;

Che può essere scritto come:

Min 300(x1+x2+x3);

Ora bisogna scrivere correttamente i vincoli:

x1 = 800 + ProduzioneAgosto - 1000;

x2 = x1 + ProduzioneSettembre - 2600;

x3 = x2 + ProduzioneOttobre - 1400;

ProduzioneAgosto <= 1000+1300;

ProduzioneSettembre <= 1000+1300;

ProduzioneOttobre <= 1000+1300;

x1, x2, x3, ProduzioneAgosto, ProduzioneSettembre, ProduzioneOttobre >=0;

ESERCIZIO D'ESAME 22 FEBBRAIO 2024.

Un'azienda realizza due prodotti X e Y utilizzando due macchine A e B.

Ciascuna unità di **X richiede 50 minuti di elaborazione sulla macchina A e 30 minuti di elaborazione sulla macchina B.**

Ciascuna unità di **Y richiede 24 minuti di elaborazione sulla macchina A e 33 minuti di elaborazione sulla macchina B.**

All'inizio della prossima settimana ci saranno già **30 unità di X** e **90 unità di Y** in magazzino. Inoltre alla fine della settimana **dovranno essere consegnate a dei clienti** complessivamente **75 unità di X e 95 unità di Y .**

Infine il tempo di elaborazione disponibile la settimana prossima per produrre **X e Y sarà di 40 ore sulla macchina A e di 35 ore sulla macchina B.**

La politica aziendale è quella di massimizzare la somma complessiva delle unità di X e delle unità di Y presenti in magazzino alla fine della settimana dopo le consegne ai clienti.

Sapete scrivere un problema di programmazione lineare che aiuti l'azienda a quantificare la produzione di X e Y la settimana prossima in modo da rispettare i vincoli e rispettare la politica aziendale?

Scrivere il PL, con funzione obiettivo e vincoli, indicando in particolare il significato di ogni variabile utilizzata. Per semplicità si assuma che tutte le variabili possano assumere valore frazionario.

Svolgimento.

40 ore sono 2400 minuti.

35 ore sono 2100 minuti.

$X1$ = "Numero di unità di X prodotte nella settimana";

$X2$ = "Numero di unità di Y prodotte nella settimana";

Max $X1+30-75+X2+90-95$

Le unità in magazzino di X sono: $X1 + 30 - 75$ (Dove 30 sono le unità X già presenti all'inizio della settimana dentro il magazzino e 75 sono le unità da togliere per darle al cliente).

Le unità in magazzino di Y sono: $X2 + 90 - 95$ (Dove 90 sono le unità Y già presenti all'inizio della settimana dentro il magazzino e 95 sono le unità da togliere per darle al cliente).

Ora eliminando le costanti la **funzione obiettivo** diventa:

Max X1 + X2;

$X1 + 30 >= 75;$

$X2 + 90 >= 95;$

$50\ X1 + 24\ X2 <= 2400;$

$30\ X1 + 33\ X2 <= 2100;$

$X1,X2 >=0;$

ESERCIZIO D'ESAME 16 SETTEMBRE 2016.

Un aereo cargo (aereo che trasporta solo merce) ha tre diversi scomparti per il carico:

anteriore, centrale e posteriore.

Il comparto anteriore ha capacità di carico di 10 tonnellate (in termini di peso) e di 6800 metri cubi (in termini di spazio).

Il comparto centrale ha capacità di 16 tonnellate e 8700 metri cubi.

Il comparto posteriore ha capacità di 8 tonnellate e 5300 metri cubi.

Per motivi di equilibrio, in ogni comparto bisogna mantenere lo stesso rapporto tra il peso caricato effettivamente e la capacità dello scomparto in termini di peso.

I seguenti quattro carichi sono disponibili per la spedizione sull'aereo:

Carico	*Tonnellate*	*Volume* (*metri cubi per tonnellata*)	*utile* (*euro per tonnellata*)
A	18	480	310
B	15	650	380
C	23	580	350
D	12	390	285

Potete spedire una qualsiasi quantità di ciascun carico (per esempio: 8 tonnellate di A, nessuna di B, 23 di C e 7.5 di D) e potete dividere queste quantità nei diversi compartimenti (per esempio, le precedenti 8 tonnellate di A possono essere divise in questo modo: 4.5 nel comparto anteriore, 0 nel comparto centrale e 3.5 nel comparto posteriore). Formulare con la programmazione lineare il problema di decidere come caricare l'aereo in modo da massimizzare il profitto del volo rispettando i vincoli di capacità e di equilibrio.

Svolgimento.

Xaa = "Tonnellate A nello scomparto anteriore";

Xab = "Tonnellate A nello scomparto centrale";

Xac = "Tonnellate A nello scomparto posteriore";

Xba = "Tonnellate B nello scomparto anteriore";

Xbb = "Tonnellate B nello scomparto centrale";

Xbc = "Tonnellate B nello scomparto posteriore";

Xca = "Tonnellate C nello scomparto anteriore";

Xcb = "Tonnellate C nello scomparto centrale";

Xcc = "Tonnellate C nello scomparto posteriore";

Xda = "Tonnellate D nello scomparto anteriore";

Xdb = "Tonnellate D nello scomparto centrale";

Xdc = "Tonnellate D nello scomparto posteriore";

Max 310(Xaa+Xab+Xac)+380(Xba+Xbb+Xbc)+350(Xca+Xcb+Xcc)+285(Xda+Xdb+Xdc).

Scompartimento A,C e P:

Xaa+Xba+Xca+Xda <= 10

Xab+Xbb+Xcb+Xdb <= 16

Xac+Xbc+Xcc+Xdc <= 8

Tonnellate A,B,C,D:

Xaa+Xab+Xac <= 18

Xba+Xbb+Xbc <= 15

Xca+Xcb+Xcc <= 23

Xda+Xdb+Xdc <= 12

480Xaa+650Xba+580Xca+390Xda <= 6800

480Xab+650Xbb+580Xcb+390Xdb <= 8700

480Xac+650Xbc+580Xcc+390Xdc <= 5300

ESERCIZIO D’ESAME PLI 1 MARZO 2023.

Avete a disposizione un budget di 100.000 euro che volete investire in acquisto di azioni.

Dopo un attento esame del mercato, avete selezionato 10 fondi che ritenete affidabili. Ciascun fondo i ∈{1, ..., 10} ha un livello minimo e massimo di investimento pari a **li** e **ui**, rispettivamente, e promette un tasso di rendimento annuale **ri**. Per ragioni di diversificazione del portafoglio, avete deciso di ripartire il vostro budget **tra 3 fondi tra i 10 candidati.**

Si scriva, in termini di Programmazione Lineare Intera, il problema di decidere in quali fondi investire e quanto investire in ciascuno fondo in maniera tale da massimizzare il ritorno atteso totale

Svolgimento.

Per ogni fondo i= 1, ..., 10, si considerino le variabili xi (binaria, pari a 1 se decido di investire nel fondo i) e yi (quanto investo nel fondo i).

xi : variabile binaria per ogni fondo i∈{1,…,10}

Se xi = 1 significa che il fondo i è stato scelto.

Yi = variabile continua che rappresenta l'ammontare di investimento nel fondo i, espresso in euro.

$$
\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{i=1}^{10} r_i y_i \text{ tale che}\\
&\quad \textstyle\sum_{i=1}^{10} y_j = 100000;\\
&\quad \textstyle\sum_{i=1}^{10} x_i = 3;\\
&\quad y_i \geq l_i x_i, \text{ per ogni } i = 1,..,10;\\
&\quad y_i \leq u_i x_i, \text{ per ogni } i = 1,..,10;\\
&\quad y_i \geq 0 \text{ e } x_i \in \{0,1\}, \text{ per ogni } i = 1,...,10.
\end{aligned}
$$

PROBLEMA DELLA DIETA.

Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di **calorie**, **proteine** e **calcio**, intese come fabbisogni minimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base:

pane, latte, uova, carne, dolce.

Tali fabbisogni **minimi** giornalieri sono di **2000 calorie, 50 g. di proteine, 700 mg. di calcio.**

Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di **calorie** (in cal.), **proteine** (in g.), **calcio** (in mg.) per ogni chilogrammo/porzione di ciascun alimento: I costi (in euro) per Kg (come singola porzione) e il numero massimo di chili tollerati giornalmente sono i seguenti:

	pane	latte	uova	carne	dolce
calorie	110	160	180	260	420
proteine	4	8	13	14	4
calcio	2	285	54	80	22

	pane	latte	uova	carne	dolce
costo	2	3	4	19	20
numero max porzioni	4	8	3	2	2

Formuliamo un problema di programmazione lineare che ci permette di individuare la dieta che soddisfi le prescrizioni richieste e sia a costo **minimo**.

Svolgimento.

Il problema che mi interessa è quello di disegnare la mia dieta in modo tale da rispettare il fabbisogno di calorie, proteine e calcio, non superare il numero massimo di porzioni per ciascuno dei miei cinque alimenti, in modo da MINIMIZZARE il costo di questa dieta.

Prima ancora di risolvere il problema dobbiamo scrivere/modellare questo problema di PL usando un approccio modellistico e non algoritmico.

Se vengono scelte le variabili giuste scrivere la funzione obiettivo è sempre facile, diversamente se vengono scelte variabili sbagliate non è semplice.

Se sono state scelte le variabili giuste i vincoli riescono ad esprimersi in maniera naturale.

X1 = “Porzione di pane”;

X2 = “Porzione di latte”;

X3 = “Porzione di uova”;

X4 = “Porzione di carne”;

X5 = “Porzione di dolce”;

Min 2X1+3X2+4X3+19X4+20X5

110X1+160X2+180X3+260X4+420X5 >= 2000 (fabbisogno in termini di **calorie**)

4X1+8X2+13X3+14X4+4X5 >= 50 (fabbisogno in termini di **proteine**)

2X1+285X2+54X3+80X4+22X5 >= 700 (fabbisogno in termini di **calcio**)

X1<=4, X2<=8, X3<=3, X4<=2, X5<=2;

X1,X2,X3,X4,X5>=0;

Problema della produzione.

Un’acciaieria dispone di laminatoio che lavora lastre di acciaio e può produrre due tipi di semilavorati:

bande (B) oppure tondini di acciaio (T).

Il laminatoio produce 3 tonnellate di bande al minuto oppure 2 tonnellate di tondini al minuto e può passare da una produzione all’altra in ogni istante, senza soluzione di continuità. **Inoltre la settimana prossima il laminatoio è disponibile per 40 ore.**

In ogni caso, per problemi di magazzino, *la produzione della prossima settimana non può superare le 6000 tonnellate di bande e le 4000 tonnellate di tondini*.

Sapendo che il profitto associato alla vendita delle bande è di 25 euro a tonnellata mentre quello per **i tondini di 30 euro a tonnellata,**

volete programmare la produzione della settimana prossima in modo da massimizzare il profitto ottenibile dalla vendita delle bande e dei tondini d nel rispetto dei vincoli precedenti.

Formuliamo un problema di ottimizzazione che ci permette di programmare la produzione in modo da soddisfare i vincoli e massimizzare il profitto.

Svolgimento (1. Soluzione).

X1 = "Numero di tonnellate di bande prodotte"

X2 = "Numero di tonnellate di tondini prodotti".

max 25X1+30X2

40 ore sono = 40*60 = 2400 minuti.

$$x_1 \leq 6000$$

$$x_2 \leq 4000$$

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 2400$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Il laminatoio può produrre 3 tonnellate di bande al minuto e 2 tonnellate di tondini al minuto.

Se produciamo x1 tonnellate di bande, il tempo richiesto per produrre queste tonnellate è dato da:

X1/3 + X2/2 <= 2400 perché il laminatoio produce 3 tonnellate al minuto.

Quindi, per ottenere x1 tonnellate, servirà il tempo necessario per raggiungere questa quantità a un ritmo di 3 tonnellate al minuto.

Teorema: Nella **funzione obiettivo** di un problema di programmazione lineare (PL) è normale e frequente avere **numeri costanti** che moltiplicano una variabile. Questi numeri rappresentano, in genere, il **coefficiente di contributo** di ciascuna variabile al valore totale della funzione obiettivo. In pratica, ciascun coefficiente indica **quanto ogni unità della variabile contribuisce all'obiettivo** (sia esso di massimizzazione o minimizzazione).

2. Soluzione (del prof)

X1 = "Numero di minuti della prossima settimana che dedicheremo complessivamente alla produzione di Bande";

X2 = "Numero di minuti della prossima settimana che dedicheremo complessivamente alla produzione di Tondini";

Max 25*3 X1 + 30*2 X2 = 75 X1 + 60 X2;

Ogni banda la vendo a 25 e ogni tondino a 30.

Unito i costi e il numero di tonnellate prodotte al minuto.

X1+X2 <= 2400;

3X1 <=6000; (**numero complessivo di tonnellate di bande** <= 6000)

E dedichiamo x1 minuti alla produzione di bande.

2X2 <=4000;

X1,X2 >=0;

Problema delle assunzioni.

Un negozio ha deciso di effettuare una grande svendita la prossima settimana, rimanendo aperto 7 giorni su 7 in unico turno dalle 11 alle 19.

Per questa settimana, il negozio può assumere tre tipi di commessi/e:

- **Commessi di tipo A:** disponibili a lavorare per esattamente **5 giorni consecutivi qualsiasi**, ovvero la proprietà può scegliere quali, guadagnando 50 euro al giorno per l'intero turno dalle 11 alle 19;
- **Commessi di tipo B:** disponibili a lavorare **solo nei 2 giorni del weekend (sabato e domenica)** per 70 euro al giorno per l'intero turno dalle 11 alle 19;
- **Commessi di tipo C:** disponibili a lavorare **solo un giorno qualsiasi della settimana**, ovvero la proprietà può scegliere quale, tranne sabato e domenica, per l'intero turno dalle 11 alle 19 con guadagno di 60 euro.

La proprietà ha valutato che per far fronte al gran numero di clienti atteso è necessario avere per ogni giorno della settimana il numero di commessi indicato dalla seguente tabella:

	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
commessi	6	7	8	10	12	16	14

Formuliamo un problema di ottimizzazione che ci permetta di risolvere il problema di decidere quanti commessi assumere in modo da coprire le necessità giornaliere e **minimizzare** il costo delle assunzioni.

Svolgimento.

Xa1 = "Commessi di tipo A che lavorano dal lunedì al venerdì."

Xa2 = " Commessi di tipo A che lavorano dal martedì al sabato."

Xa3 = "Commessi di tipo A che lavorano dal mercoledì al domenica."

Xb = “Commessi di tipo B che lavorano nei due giorni del weekend”

Xc1 = “Commessi di tipo C che lavorano il lunedì”

Xc2 = “Commessi di tipo C che lavorano il martedì"

Xc3= “Commessi di tipo C che lavorano il mercoledì"

Xc4 = “Commessi di tipo C che lavorano il giovedì"

Xc5 = “Commessi di tipo C che lavorano il venerdì”

Ricorda che i commessi di tipo a ci costano 50 euro e lavorano 5 giorni a settimana.

I commessi di tipo b ci costano 70 euro e lavorano solo due giorni il weekend.

I commessi di tipo c ci costano 60 euro ma lavorano 1 giorno a settimana.

Min 5*50(Xa1+Xa2+Xa3)+2*70Xb+1*60(Xc1+Xc2+Xc3+Xc4+Xc5);

Xa1+Xc1 >= 6;

Xa1+Xa2+Xc2 >=7;

Xa1+Xa2+Xa3+Xc3 >= 8;

Xa1+Xa2+Xa3+Xc4 >= 10;

Xa1+Xa2+Xa3++Xc5 >= 12;

Xa2+Xa3+Xb >= 16;

Xa3+Xb >= 14;

Xa1,Xa2,Xa3,Xb,Xc1,Xc2,Xc3,Xc4,Xc5 >= 0;