Documento a cura di Simone Remoli.

CONTEGGIO – ATTO FINALE

Prova d'esame - 1 marzo 2023.

Dovete organizzare una cena presso un **ristorante messicano** che ha in carta 5 **tapas**, 7 **tacos** e 4 **dolci**. Il menù a cui avete pensato prevede 9 piatti estratti dalla carta: **3 tapas, 4 tacos e 2 dolci**. Quanti sono i diversi menù che potete comporre se l'ordine dei 9 piatti non è importante?

Risposta:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{4}{2}$$

Il motivo è molto semplice: desidero calcolare il numero di combinazioni possibili per scegliere 3 tapas da un gruppo di 5, 4 tacos da un gruppo di 7 e 2 dolci da un gruppo di 4.

Prova d'esame - 1 marzo 2023.

Supponete di dover disporre 8 **oggetti** diversi in 6 **scatole** diverse, in modo tale che in una scatola ci siano esattamente 3 oggetti e nelle altre cinque uno. Quanti sono i diversi modi in cui potete effettuare questa disposizione?

Risposta:

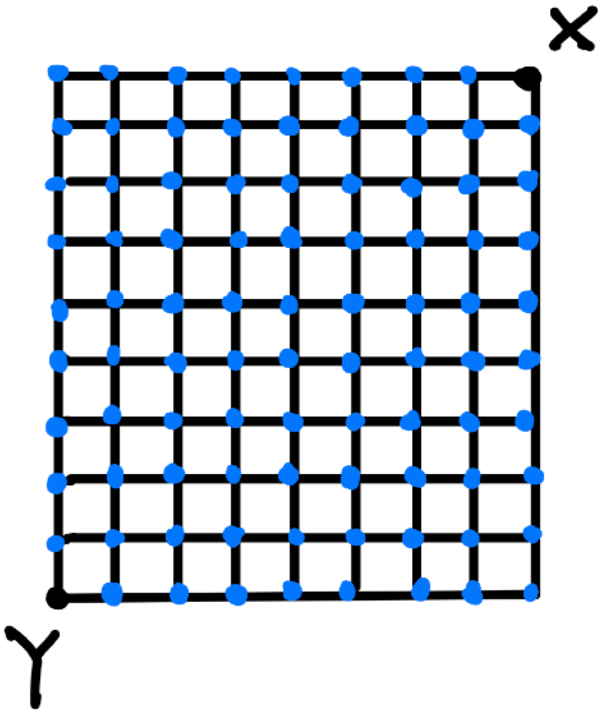
$$\binom{8}{3} \cdot 6!$$

Il coefficiente binomiale rappresenta il numero di modi in cui scegliere i 3 oggetti tra gli 8 disponibili per la scatola con 3 oggetti. **Il punto chiave che giustifica il** $6!$ nella soluzione è che **la scatola che contiene i 3 oggetti non è predeterminata.** Infatti, **i 3 oggetti possono essere messi in una qualunque delle 6 scatole,** e quindi bisogna considerare anche questa scelta. (Altrimenti era 5!).

Prova d'esame - 1 marzo 2023.

Considerate la griglia disegnata qui sotto. Supponete di dovervi spostare dal punto X in alto a destra al punto Y in basso a sinistra. Di volta in volta, potete spostarvi di un passo a sinistra (se consentito) oppure di un passo in basso (se consentito).

Quanti sono i diversi percorsi possibili?



Risposta:

$$\binom{17}{8}$$

Ogni percorso è un sequenza di 17 passi di cui 8 a sinistra e 9 in giù. Devo scegliere in quale posizione metto le S e in quale posizione metto le D.

Insieme = {S,S,S,S,S,S,S,S,G,G,G,G,G,G,G,G,G}.

Tra le 17 posizioni totali scelgo 8 posizioni in cui mettere le mie S, oppure tra le 17 posizioni totali scelgo 9 posizioni in cui mettere le mie S.

Il dilemma delle pizze al party dei matematici.

Alfredo, un appassionato di combinatoria, organizza un party per **7** amici (incluso lui) dove ordina **5 pizze diverse**: **Margherita**, **Diavola**, **Quattro Formaggi**, **Funghi**, e **Carbonara**.

In quanti modi *Alfredo* può distribuire le pizze tra i suoi amici, **tenendo conto che la Carbonara può essere assegnata solo a 2 amici specifici**?

Risposta:

$$2 \cdot \binom{5}{4} \cdot 4!$$

1. **Scelta di chi mangia la Carbonara:2 modi.**
2. **Scelta di chi mangia le altre 4 pizze:** binomiale.
3. **Permutazione delle pizze tra le 4 persone scelte: 4!=24 modi.**

Prova d'esame - 20 luglio 2016.

Per la gara olimpica dei cento metri stile libero femminili si sono qualificate 64 atlete.
Per selezionare le 8 finaliste si svolgeranno prima 8 batteria con 8 atlete e poi due semifinali cui accederanno le prime due classificate di ciascuna batteria. Infine, le prime 4 classificate di ciascuna semifinale accederanno alla finale.

Quanti sono i possibili diversi insieme di finaliste? (Due insiemi di finaliste sono diversi se esiste almeno una atleta che è in finale per un insieme ma non per l'altro.)

Risposta:

$$\binom{64}{8}$$

Curioso l'esercizio.
64 atlete si sfidano in 8 batteria da 8 atlete l'una.
Accedono 2 x 8 (batteria) = 16 semifinaliste.
Di queste 16 semifinaliste 8 svolgono la prima semifinale e 8 svolgono la seconda semifinale.
Da ciascuna semifinale se ne qualificano 4 e, dato che le semifinali sono 2, si qualificano 4 x 2 = 8 atlete finaliste.
Quindi devo contare il numero di modi che ho di scegliere 8 atlete da un insieme totale di 64.

Prova d’esame - 20 luglio 2016 - BIS

Vuoi ora contare non semplicemente i possibili diversi insiemi di finaliste (come al punto precedente), ma più esattamente le diverse griglie di partenza della finale, ovvero i diversi modi di assegnare le 8 corsie delle finale alle diverse atlete. In questo senso, due griglie di partenza sono diverse se esiste almeno una corsia a cui le due griglie assegnano atlete diverse.
Quante sono le diverse possibili griglie della finale?

Risposta:

$$\binom{64}{8} \cdot 8!$$

Insieme delle corsie = {C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}.

8!: Rappresenta le possibili permutazioni (disposizioni) delle 8 atlete nelle corsie.

Esercizio lieve difficoltà.

Carlo, Andrea e Giacomo in una partita segnano complessivamente 5 reti. Quante sono le possibili distribuzioni delle reti tra loro?

Risposta:

$$\binom{7}{2}$$

Il numero di soluzioni non negative è dato dalla formula delle combinazioni con ripetizione:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Con n oggetti (reti) = 5 e k destinatari = 3.

Esercizio lieve difficoltà.

Ho un’associazione con 50 soci. Devo scegliere 5 membri che compongano il comitato direttivo. Quante possibili scelte ci sono?

Risposta:

$$\binom{50}{5}$$

Esercizio difficoltà misera.

In quanti modi diversi posso anagrammare le seguenti parole:
vita, amore, mamma, assassini, prosperoso?

Risposta:

Vita = 4!.
Amore = 5!.

Mamma:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

Assassini:

$$\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Prosperoso:

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Esercizio lieve difficoltà.

Quanti numeri di 5 cifre posso scrivere usando solo 1, 3, 5, 7, 9 senza ripetizioni? E con ripetizioni?

Risposta: Senza ripetizioni = 5!.

Con ripetizioni:

$$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$$

Esercizio discreta difficoltà.

In quanti modi diversi posso distribuire 20 palline uguali in 5 scatole diverse? E 5 palline uguali in 20 scatole diverse?

Risposta:

$$\binom{24}{4} \qquad \binom{24}{19}$$

Esercizio discreta difficoltà.

In quanti modi posso distribuire 4 palline numerate in 3 scatole diverse?

Risposta:

$$3^4 = 81$$

Ogni pallina ha 3 possibili scatole in cui può essere messa.

Esercizio easy.

In quanti modi diversi 3 bambini possono spartirsi 7 caramelle?

Risposta:

$$\binom{9}{2}$$

Esercizio difficoltà media.

Quante bandiere a 3 strisce verticali di colore diverso posso formare se ho a disposizione il rosso, il bianco, il verde e il blu? E se posso ripetere i colori?

Risposta: 4!, 4 x 4 x 4.

Esercizio difficoltà misera.

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 3 paia di pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Risposta: 2 x 3 x 5.

Esercizio difficoltà considerevole.

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 per 2 volte e la cifra 2 per 2 volte?

Risposta:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot 2!$$

1. $\binom{6}{2}$: Numero di modi per scegliere le posizioni delle due cifre 1.
2. $\binom{4}{2}$: Numero di modi per scegliere le posizioni delle due cifre 2 tra le rimanenti.
3. $\binom{7}{2}$: Numero di modi per scegliere le due cifre aggiuntive (da $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$).
4. $2!$: Modi per disporre le due cifre aggiuntive nelle due posizioni disponibili.

Perché 7 x 7 non funziona?

Questa proposta errata considera solo il numero di modi per scegliere 2 cifre aggiuntive da {3,4,5,6,7,8,9}, ma **non tiene conto della disposizione delle cifre** nel numero a 6 cifre.
Non c'è scritto che la cifra 1 è esattamente la seconda, quindi devo considerare le disposizioni.

Esercizio difficoltà lieve.

Quanti sono i numeri di 5 cifre divisibili per 5, minori di 50000 e contenenti solo le cifre 1, 3, 5 e 7?

***Suggerimento (suggerimento mio, non del Prof)*: la prima cifra deve essere 1 o 3 (perché se fosse 5 o 7, il numero sarebbe maggiore o uguale a 50000).**

Risposta: 2 x 4 x 4 x 4 x 1.

Ci sono **128 numeri di 5 cifre** divisibili per 5, <50k e contenenti le cifre 1,3,5,7.

Esercizio difficoltà notevole.

Quante parole di 4 consonanti (tutte distinte) e 3 vocali (tutte distinte) posso creare scegliendo tra 7 consonanti e 5 vocali?

Mio suggerimento: nel calcolo si considera anche il **modo di disporre le consonanti e le vocali nella parola**, cioè non solo si selezionano e si ordinano le lettere, ma si tengono in conto tutte le possibili permutazioni di consonanti e vocali nella parola

Risposta:

$$\binom{7}{4} \cdot 4! \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 7!$$

Le consonanti si possono ordinare tra loro in 4! modi.
Le vocali si possono ordinare tra loro in 3! modi.
Le 4 consonanti e le 3 vocali possono essere disposte tra loro in tutte le possibili permutazioni di 7 lettere, 7!.

Esercizio difficoltà altina (per la seconda parte).

Uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Solo 5 su 10. Quante possibili scelte ha?
E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

Risposta:

$$\binom{10}{5}$$

Per la seconda domanda, è più semplice calcolare **tutte le combinazioni possibili** (senza restrizioni) e **sottrarre i casi non validi**, cioè quelli in cui lo studente sceglie **meno di 2 domande tra le prime 5**.
Ci sono due casi in cui lo studente sceglie **meno di 2 domande** tra le prime 5:

1. Sceglie 0 tra le prime 5:

Ossia tutte e cinque le domande vengono scelte tra le ultime 5, (6,7,8,9,10).

$$\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{5}$$

2. Sceglie 1 tra le prime 5.

Ossia le cinque domande vengono scelte in maniera unitaria tra le prime 5, e 4 tra le ultime 5.

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{4}$$

Risposta finale:

$$\binom{10}{5} - \left[\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{5} + \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{4}\right]$$

Esercizio difficoltà lieve.

Se 12 persone sono divise a formare 3 commissioni di 3, 4 e 5 persone, quante possibili suddivisioni?

Risposta:

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$$

Esercizio difficoltà lieve.

In una associazione con 100 soci devo scegliere 1 presidente, 1 segretario e 2 consiglieri. In quanti modi diversi lo posso fare?

Risposta:

$$100 \cdot 99 \cdot \binom{98}{2}$$

Fine.

Il motivo che mi ha spinto a creare questi quattro documenti in formato PDF dedicati al conteggio risiede nella necessità di avere una visione d'insieme delle possibili tipologie di esercizi che il Professore potrebbe proporre in un tipico esame di Ricerca Operativa.

Il conteggio rappresenta un tema di notevole rilevanza, poiché ogni prova d'esame include sempre almeno un esercizio di questa natura. Di conseguenza, chi aspira a conseguire la valutazione di 30 deve necessariamente padroneggiare tale argomento in maniera approfondita.

Confido che questo materiale possa essere di supporto al maggior numero possibile di studenti, aiutandoli a comprendere il funzionamento e la logica applicativa sottesa a esercizi che, sebbene possano apparire banali, celano spesso una complessità significativa.

Ho dedicato una parte considerevole del mio tempo a elaborare una raccolta che affronti ogni casistica immaginabile, con l'obiettivo di coprire l'intero spettro delle formule e delle tecniche necessarie.

In tal modo, ho cercato di offrire agli studenti uno strumento che consenta di dissipare eventuali dubbi durante la prova d'esame.

Gli esercizi qui presentati riflettono un livello di difficoltà coerente con il programma accademico dell'anno 2024-2025, durante il quale ho frequentato il corso. Non escludo, tuttavia, che in anni futuri il conteggio possa evolvere in un argomento più avanzato.
Per esempio, quest'anno non è stato trattato il *Pigeonhole Principle*.

Con queste premesse, auspico che questo lavoro possa contribuire a chiarire le idee e a stimolare ragionamenti logici più ampi, aprendo nuove prospettive di apprendimento per tutti coloro che desiderano affrontare questo argomento con successo.

In rete si possono trovare milioni di documenti in formato PDF redatti in lingua italiana, i quali verranno di seguito elencati:

https://profmilizia.weebly.com/uploads/2/0/3/7/20371287/unita_8__il___calcolo_combinatorio_.pdf

https://quimatematica.it/wp-content/uploads/2021/03/Calcolo_combinatorio___esercizi.pdf

https://elena-vuk.unibs.it/Materiale_PS_2017/Esercitazioni%20di%20Probabilit%C3%A0%26Statistica_a.a.2017%3A18/01.Calcolo%20combinatorio%202017-18.pdf

https://www.dsi.unive.it/~bergamasco/teachingfiles/Esercizi_calcolo_combinatorio.pdf

https://www.micheleraucci.it/blog/wp-content/uploads/2019/08/esercizicalcomb.pdf

https://www.matematicamente.it/staticfiles/esercizi_svolti/puddu-calcolo-combinatorio-probabilita-44.pdf

https://www.matematicaescuola.it/materiale/calcolocombinatorioeprobabilita/calcolo_combinatorio_6es_20110131.pdf

Ciao :)