Documento a cura di Simone Remoli

CONTEGGIO TRIS

Insisto notevolmente sul conteggio.

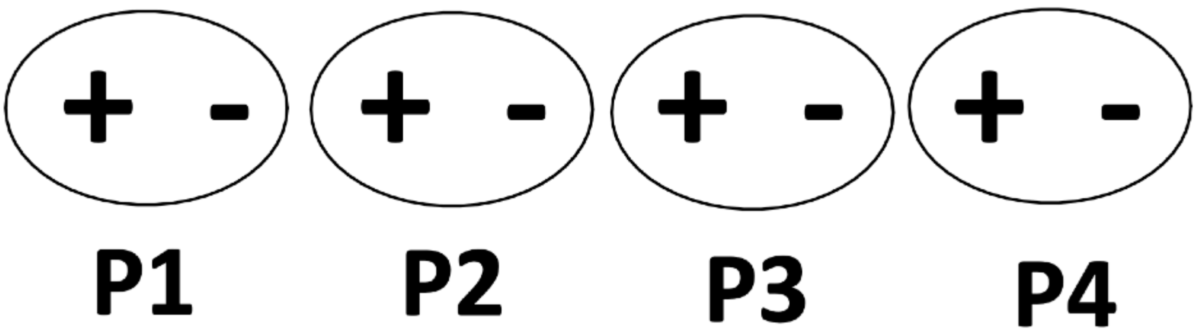
Prova d'esame - 12 gennaio 2022.

In una scatola elettrica arrivano otto fili, quattro hanno il segno **+** e quattro hanno il segno **-**. Un elettricista decide di collegarli a 2 a 2 in modo che ogni **+** sia collegato con un **-**.
Qual è il numero di possibili diversi accoppiamenti che l'elettricista può fare?

(Due accoppiamenti sono diversi se esistono almeno due fili che in un caso sono collegati e nell'altro no).
NGR.

Soluzione: 4!.

Il numero di possibili accoppiamenti tra i fili **+** e **-** è **4!**, poiché stiamo considerando tutte le possibili permutazioni dei fili con segno **-** rispetto a quelli con segno **+**.
Possiamo visualizzare la coppia (+,-) come una coppia UNICA:



E il numero totale di accoppiamenti è dato dalle possibili permutazioni di queste 4 coppie.

Prova d'esame - 12 gennaio 2022 BIS.

In una scatola elettrica arrivano otto fili, quattro hanno il segno + e quattro hanno il segno -. Un elettricista decide di collegarli a 2 a 2 a caso (quindi per esempio può succedere che un + sia collegato con un +).

Qual è il numero di possibili diversi accoppiamenti che l’elettricista può fare?

(Due accoppiamenti sono diversi se esistono almeno due fili che in un caso sono collegati e nell’altro no).
NGR.

Soluzione 1:

$$\frac{8!}{2^4 \cdot 4!}$$

Oppure in alternativa il Professore ha fornito la seguente risposta.

Soluzione 2:

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{4!}$$

Le due soluzioni sono perfettamente equivalenti.

Spiegazione della prima soluzione.

Esiste una formula standard nel conteggio, che è la seguente:

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Essa **rappresenta il numero di accoppiamenti perfetti di un insieme di 2n elementi** (qui n=4), in cui gli elementi sono suddivisi in coppie **senza distinzione di ordine** (cioè, l'ordine interno delle coppie e tra le coppie stesse non conta).
In parole povere: Questa formula calcola il numero di modi in cui è possibile dividere un insieme di 2n elementi in n gruppi di 2 elementi ciascuno, considerando che l'ordine all'interno di ogni gruppo non conta e l'ordine tra i gruppi stessi non conta.

La parte (2n)! conta tutte le permutazioni dei 2n elementi, che include tutti i possibili modi di ordinare gli elementi.

Dividere per 2^n: ogni gruppo contiene 2 elementi, e il loro ordine non importa. Ci sono 2^n permutazioni inutili da eliminare.

Dividere per n!: Anche l'ordine tra gli n gruppi non conta, quindi eliminiamo n! permutazioni.

Questa struttura è specifica per gruppi di 2.

Qui l'insieme è 2n = {+,+,+,+,-,-,-,-}.

Se volessi dividere $k \cdot n$ elementi in n gruppi di k elementi ciascuno (dove $k > 2$), la formula sarebbe:

$$\frac{(k \cdot n)!}{(k!)^n \cdot n!}$$

***Spiegazione della seconda soluzione*.**

Calcolare il numero di accoppiamenti possibili dividendo 8 elementi in 4 coppie, senza considerare l'ordine delle coppie.

$$\binom{8}{2}$$

Si sceglie la prima coppia di elementi tra gli 8 disponibili.

$$\binom{6}{2}$$

Si sceglie la seconda coppia di elementi tra i 6 disponibili.

$$\binom{4}{2}$$

Si sceglie la terza coppia di elementi tra i 4 disponibili.

$$\binom{2}{2}$$

Gli ultimi due elementi formano automaticamente l'ultima coppia.

Perché divido per 4!?

La divisione per 4! serve a eliminare le **permutazioni tra le coppie**, che non sono gestite dai coefficienti binomiali.

I coefficienti binomiali eliminano l'ordine **all'interno delle coppie**, ma non l'ordine **tra le coppie**.

$$A = \{+1, +2, +3, +4, -1, -2, -3, -4\}$$

Cosa succede con il prodotto dei coefficienti binomiali?

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$$

Questo prodotto tiene conto dell'ordine in cui le coppie vengono formate.

1. $((+1, +2), (+3, -1), (-2, -3), (-4, +4))$,
2. $((+3, -1), (+1, +2), (-2, -3), (-4, +4))$.

Queste due disposizioni risultano distinte, ma appartengono allo stesso insieme, Per rimuovere questa duplicazione, dobbiamo **dividere per 4!**, il numero di modi di permutare le 4 coppie.

Soluzione 3:
Scegliamo in modo arbitrario un primo filo, questo può essere collegato in 7 modi diversi. A questo punto scegliamo in modo arbitrario un secondo filo tra i 6 residui, questo può essere collegato in 5 modi diversi. Infine scegliamo in modo arbitrario un terzo filo tra i 4 residui, questo può essere collegato in 3 modi diversi.
Naturalmente per l'ultimo collegamento non c'è nulla da scegliere e quindi la risposta è $7 \cdot 5 \cdot 3$.

Errore tipico:
Dare come risposta

$$\binom{8}{2}$$

Quando calcoli questo coefficiente binomiale stai considerando solo la scelta della prima coppia, ma questo non tiene conto del fatto che devi formare più coppie successive.

Prova d'esame - 10 febbraio 2021.

Si consideri un mazzo di 40 carte con 10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi (e.g. le carte napoletane). Quanti diversi insiemi di 5 carte possono avere 4 assi?

Soluzione: 36.

A1 A2 A3 A4 CARTA_QUALUNQUE

A1,A2,A3,A4 li posso scegliere in 1 modo solo. La carta qualunque in 36 modi diversi tolti i 4 assi dall'insieme di 40.

Prova d'esame - 10 febbraio 2021 BIS.
Quanti diversi insiemi di 5 carte possono avere 4 carte di uguale valore?

Soluzione: 36 X 10.

C C C C X

C la posso scegliere in 10 modi diversi per via del valore.
X la posso scegliere in 40 - 4 = 36 modi diversi.

Prova d'esame - 10 febbraio 2021 TRIS.
Quanti diversi insiemi di 5 carte possono avere esattamente 2 assi?

Soluzione:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{3}$$

Errore fuorviante: 1 x 1 x 38 x 37 x 36.
Quest'ultima soluzione non è corretta.
Se io possiedo le seguenti carte:

A1 = Asso 1,
A2 = Asso 2,
C1 = Carta diversa da entrambi gli assi,
C2 = Carta diversa dagli assi e diversa da C1,
C3 = Carta diversa dagli assi e diversa da C2,

allora se considero la sua combinazione applicando la regola del prodotto il risultato potrebbe essere:

A1 A2 C1 C2 C3 .

Ma posso ottenere anche la seguente soluzione:

A2 A1 C2 C1 C3 .

Queste due soluzioni sono considerate diverse se utilizzo l'approccio fuorviante.
In questo esempio, nel ragionamento applicato, stiamo vedendo queste due soluzioni come **distinte**, quando in realtà sono **uguali** per il problema combinatorio.
L'ordine non conta, pertanto parliamo di combinazioni.

Prova d'esame - 10 febbraio 2021 quattro.

Quanti diversi insiemi di 5 carte possono avere esattamente due coppie di carte di uguale valore?

Soluzione:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 32$$

1. Scegliere i due valori per le coppie.
Per formare le due coppie, dobbiamo scegliere 2 valori distinti tra i 10 disponibili.
2. Scegliere le carte per ciascuna coppia.
Ogni valore scelto ha 4 carte (una per ciascun seme). Per formare una coppia, dobbiamo scegliere 2 carte da queste 4. Poiché ci sono due coppie si prende due volte.
3. Scegliere la quinta carta.

Dopo aver formato le due coppie, abbiamo già utilizzato 2 valori tra i 10. Rimangono 10−2=8 valori possibili per la quinta carta. Ogni valore rimanente ha 4 carte disponibili, quindi il numero di modi per scegliere la quinta carta è 8 x 4.

Quindi, ci sono **51840 diversi insiemi di 5 carte** che contengono esattamente due coppie di carte di uguale valore.

Prova d'esame - 16 Settembre 2016

Sia G il grafo bipartito completo con 7 vertici in ciascuna classe (ovvero il grafo bipartito con 14 vertici divisi in due classi di 7 vertici e tale che ogni vertice di una classe sia adiacente ad ogni vertice dell'altra classe).
Quanti sono i diversi cicli di lunghezza 6 di G?

Soluzione:

$$6 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{7}{3}$$

Siano V_1 e V_2 le due classi della bipartizione di G. Fissato un insieme Q_1 di tre vertici qualsiasi di V_1 e un insieme Q_2 di tre vertici qualsiasi di V_2 esistono esattamente 6 cicli (di lunghezza 6) che usano tutti e soli quei vertici: infatti, in ogni tale ciclo, ogni vertice di V_1 è non adiacente a esattamente un vertice di V_2 e ogni vertice di V_2 è non adiacente a esattamente un vertice di V_1. Queste "non-adiacenze" determinano un matching perfetto nel grafo bipartito completo con classi Q_1 e Q_2 e infatti c'` e una corrispondenza 1-a-1 tra i diversi cicli con vertici in $V_1 \cup V_2$ e i diversi matching perfetti nel grafo bipartito completo con classi Q_1 e Q_2 e questi ultimi sono proprio in numero proprio pari a 6.

Prova d'esame - 13 Settembre 2022

Un palazzo per uffici ha 3 piani: piano terra, primo piano, secondo piano. In ogni piano poi ci sono 4 corridoi A, B, C, D e infine in ogni corridoio ci sono 4 uffici rispettivamente di colore **Rosso**, **Blu**, **Verde**, **Bianco**. Ci sono quindi in totale 48 uffici diversi.

Il lunedì si recano a lavorare 15 dipendenti e ognuno può scegliere un qualunque ufficio, ma non possono esserci due dipendenti in uno stesso ufficio.

In quanti modi diversi si possono disporre i 15 dipendenti?

Soluzione 1: P(48,15).

Facilissimo.

Soluzione 2:

$$\binom{48}{15} \cdot 15!$$

Scegliere 15 uffici dai 48 disponibili:
Il primo passo è scegliere quali 15 uffici saranno occupati dai 15 dipendenti. Una volta scelti i 15 uffici, dobbiamo assegnare i 15 dipendenti a questi uffici, 15!.

Prova d'esame - 13 Settembre 2022 BIS

Supponete ora che i 15 dipendenti debbano distribuirsi in modo tale che in ogni piano ci siano esattamente 5 dipendenti. In quanti modi diversi i 15 dipendenti possono distribuirsi tra i 3 piani?
NB:Non considerate la distribuzione negli uffici ma appunto solo sui piani.

Soluzione:

$$\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5}$$

Prova d'esame - 13 Settembre 2022 TRIS

Supponete nuovamente che i 15 dipendenti debbano distribuirsi in modo tale che in ogni piano ci siano esattamente 5 dipendenti ma ora guardate anche la distribuzione negli uffici. In particolare, supponete nuovamente che comunque non ci possano essere due dipendenti in uno stesso ufficio. In quanti modi diversi potete disporre i 15 dipendenti?

Soluzione:

$$C(15,5) \cdot P(16,5) \cdot C(10,5) \cdot P(16,5) \cdot P(16,5)$$

C(15,5): Modi per scegliere i 5 dipendenti del primo piano.
P(16,5): Modi per assegnare gli uffici ai dipendenti del primo piano.
C(10,5): Modi per scegliere i 5 dipendenti del secondo piano.
P(16,5): Modi per assegnare gli uffici ai dipendenti del secondo piano.

P(16,5): Modi per assegnare gli uffici ai 5 dipendenti del terzo piano.

1. **Distribuzione dei 15 dipendenti nei piani:** C(15, 5)ossia

   Il numero di modi per scegliere 5 dipendenti dal gruppo di 15 per assegnarli al primo piano.
   Dopo aver scelto i primi 5, ne restano 10

2. **Distribuzione negli uffici del primo piano:** P(16, 5).

   Una volta scelti i 5 dipendenti per il primo piano, dobbiamo assegnarli a 5 uffici distinti tra i 16 disponibili. Questo è dato da una permutazione, poiché l'ordine degli uffici è importante.

3. **Distribuzione dei dipendenti per il secondo piano:** C(10,5). Il numero di modi per scegliere altri 5 dipendenti dai 10 rimasti per il secondo piano.

4. **Distribuzione negli uffici del secondo piano:** P(16, 5)

   Anche in questo caso, assegnamo i 5 dipendenti scelti a 5 uffici distinti tra i 16 disponibili.

5. **Distribuzione degli ultimi 5 dipendenti e uffici del terzo piano:**

   Rimangono automaticamente gli ultimi 5 dipendenti per il terzo piano, e li assegnamo a 5 uffici distinti tra i 16 disponibili. Questo è di nuovo dato da P(16, 5).

Prova d’esame - 13 Settembre 2022 Quattro

Il martedì si recano a lavorare 48 dipendenti e ognuno può scegliere un qualunque ufficio, ma non possono esserci due dipendenti in uno stesso ufficio.
In quanti modi diversi si possono disporre i 48 dipendenti?

Soluzione: 48!.

Prova d’esame - 13 settembre 2023

Una partita di calcio tra la squadra A e la squadra B è finita 4 a 3 per A. In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti?

Soluzione:

$$\binom{7}{4}$$

Prova d’esame - 13 settembre 2023

Un bambino possiede dei mattoncini lego colorati: ne ha 6 rossi, 4 gialli, 1 verde e 1 blu. In quanti modi il bambino può arrangiarli in colonna a formare una torre?

Soluzione:

$$\frac{12!}{6!4!}$$

Se i 6 mattoncini rossi e i 4 gialli fossero distinguibili la risposta sarebbe 12!. Siccome non lo sono dobbiamo dividere 12! per il numero di possibili permutazioni dei mattoncini rossi e il numero di possibili permutazioni dei mattoncini gialli.

Prova d’esame - 13 settembre 2023

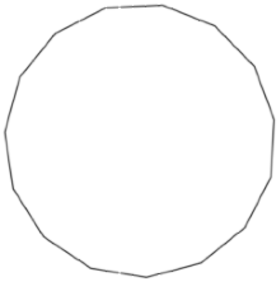
Una serratura si apre con un codice decimale di tre cifre. Sapendo che due cifre sono dispari, scelte tra {1, 3, 5, 7,9}, e una pari, scelta tra {0, 2, 4, 6}, trovare il numero massimo di tentativi che bisogna effettuare per essere sicuri di aprire la serratura.

Soluzione: 5 x 5 x 4 **+** 4 x 5 x 5 **+** 5 x 4 x 5

La cifra pari può trovarsi in prima, seconda o terza posizione. Una volta scelta la posizione della cifra pari, la prima cifra dispari può essere scelta in 5 modi diversi, la seconda cifra dispari può essere scelta in 5 modi diversi, la cifra pari può essere scelta in 4 modi diversi.

Prova d'esame - 13 settembre 2023

Si consideri un poligono convesso con 15 lati. Quante sono le diverse diagonali del poligono?



Soluzione:

Per calcolare il numero di diagonali di un poligono convesso con n lati, utilizziamo la seguente formula combinatoria:

$$\text{Numero di diagonali} = \binom{n}{2} - n$$

Quindi,

$$\binom{15}{2} - 15$$

Fine.