Documento a cura di Simone Remoli.

IL METODO DEL SIMPLESSO

Il metodo è stato sviluppato da **George Dantzig** nel 1947, come un algoritmo per risolvere problemi di programmazione lineare.

Questo esercizio, essendo tra i più semplici e privo di particolari difficoltà concettuali, sarà trattato in maniera estremamente sintetica. Si procederà direttamente all'analisi delle prove d'esame, presupponendo che il lettore sia già pienamente a conoscenza dei passaggi necessari per la risoluzione.

Okay lo ammetto, sarebbe opportuno soffermarsi su quanto avviene graficamente nello spazio delle soluzioni durante ciascuna iterazione dell'algoritmo. Tuttavia, dubito fortemente che il lettore abbia un reale interesse a soffermarsi su tali dettagli.

Let's hit the ground running.

PROVA D'ESAME - 15 GENNAIO 2024

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare P :

$$\begin{aligned} \max -x_1 + 5x_3 &: \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &\leq 4 \\ -x_1 - 5x_2 + 5x_3 &\leq 2 \\ -2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Individuare una soluzione ottima, se esiste, attraverso il metodo del simplesso. In caso in una iterazione ci siano più variabili candidate a entrare in base, far entrare quella con il costo ridotto più alto. Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, riportare la sequenza dei diversi dizionari e le opportune considerazioni finali.

Svolgimento.

Introduco una variabile di slack per ogni disuguaglianza (ad eccezione del vincolo di non negatività) e trasformo le disuguaglianze in uguaglianze.

$$\begin{aligned} &\max\ -x1 + 5x3 \\ &x1 + x2 - 4x3 + x4 = 4 \\ &-x1 - 5x2 + 5x3 + x5 = 2 \\ &-2x2 + 2x3 + x6 = 6 \\ &x1, x2, x3, x4, x5, x6 = 0 \end{aligned}$$

Il primo dizionario è il seguente:

$$z = -x1 + 5x3$$
$$x4 = 4 - x1 - x2 + 4x3$$
$$x5 = 2 + x1 + 5x2 - 5x3$$
$$x6 = 6 + 2x2 - 2x3$$

Variabili in base = x4,x5,x6.
Variabili fuori base = x1,x2,x3.

Soluzione dizionario: (0,0,0,4,2,6);

Z = 0;

A questo punto guardiamo la Z.
Quale variabile posso aumentare per far crescere la mia funzione obiettivo? Ovviamente x3.
Quindi x3 entra in base.
Chi esce?
Nell'equazione di x4, x3 può aumentare all'infinito.
Nell'equazione di x5, tenendo fisso x1,x2 = 0, x3 può aumentare fino a 5/2.
Nell'equazione di x6, tenendo fisso x2=0, x3 può aumentare fino a 3.
Pertanto il valore più piccolo è 5/2, ed **uscirà la variabile x5 per favorire l'entrata di x3.**

$$z = 2 + 5x2 - x5$$
$$x3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}x1 + x2 - \frac{1}{5}x5$$
$$x4 = \frac{28}{5} - \frac{1}{5}x1 + 3x2 - \frac{4}{5}x5$$
$$x6 = \frac{26}{5} - \frac{2}{5}x1 + \frac{2}{5}x5$$

Variabili in base = x3,x4,x6.
Variabili fuori base = x1,x2,x5.

Soluzione dizionario: (0,0,2/5,28/5,0,26/5);

Z = 2;

Ora guardiamo la funzione obiettivo.
Teoricamente la variabile x2 sarebbe candidata ad entrare in base ma, nella realtà, questa variabile può aumentare all'infinito sia nell'equazione di x3 che di x4. In x6 non è nemmeno presente.
Il problema è illimitato superiormente.

PROVA D'ESAME - 16 SETTEMBRE 2024

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare P :

$$
\begin{aligned}
\max\ & -4x_1 + 10x_2 - 3x_3: \\
& -2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 1 \\
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Individuare una soluzione ottima, se esiste, attraverso il metodo del simplesso. In caso in una iterazione ci siano più variabili candidate a entrare in base, far entrare quella con il costo ridotto più alto. Per illustrare lo svolgimento dell'algoritmo, riportare la sequenza dei diversi dizionari e le opportune considerazioni finali.

Soluzione.

La soluzione ottima è (7/2,2,0).

Il metodo del simplesso è sempre uguale.

Fine.