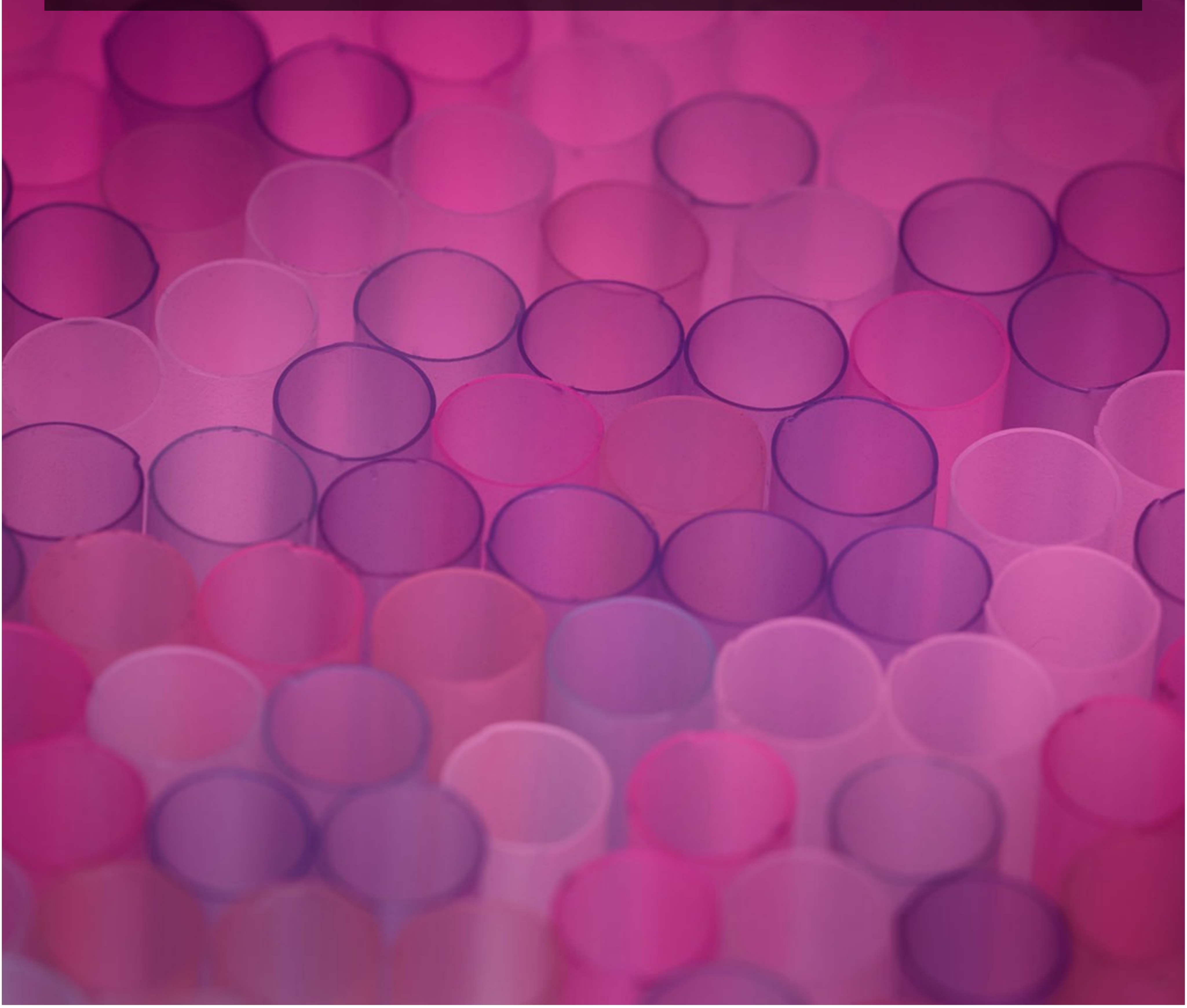
SIMONE REMOLI

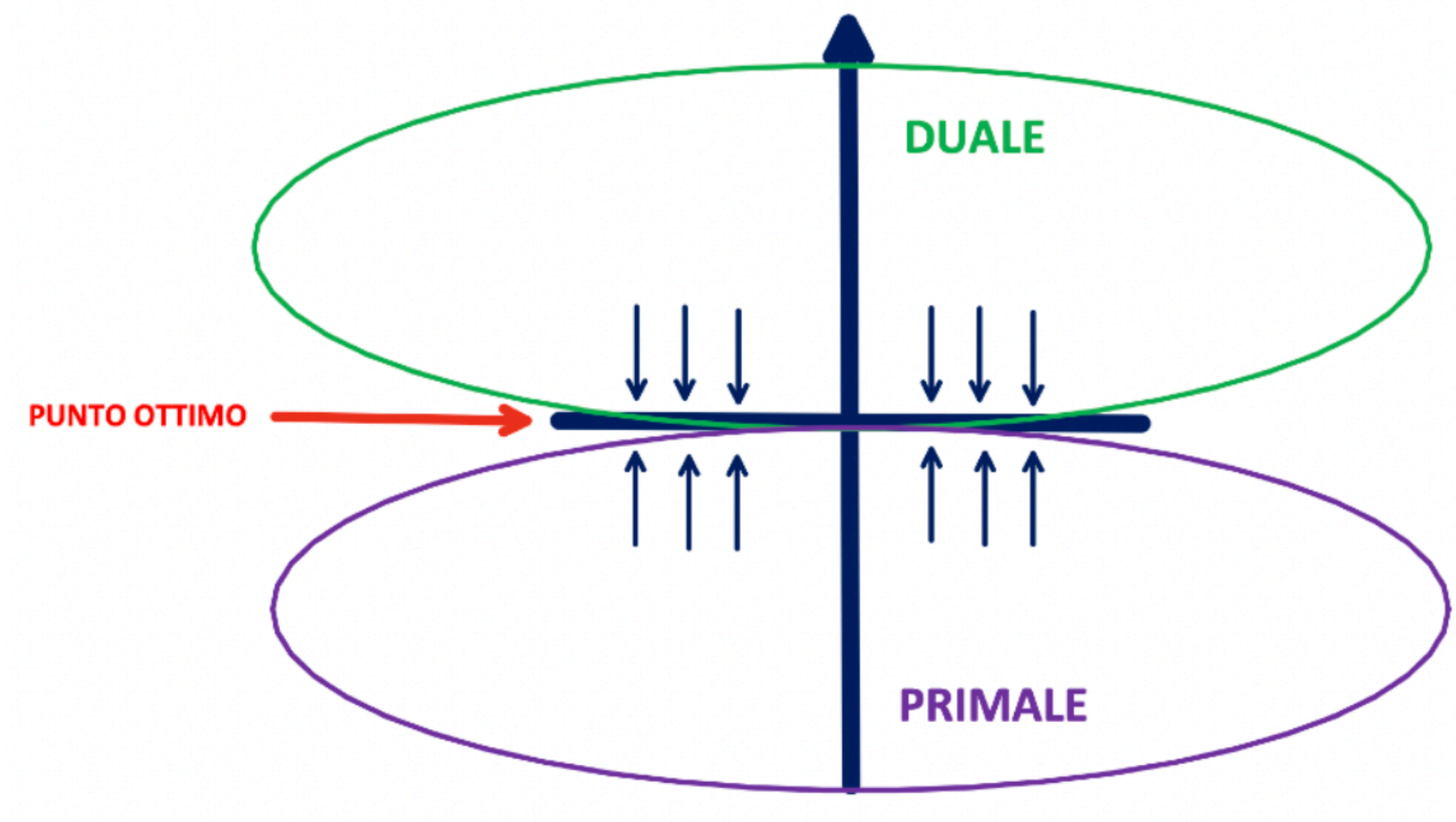
UN PICCOLO VIAGGIO

RICERCA OPERATIVA



FONDAMENTI DI DUALITÀ

Il **teorema della dualità** nella ricerca operativa afferma che ogni problema di ottimizzazione lineare (detto **problema primale**) ha un problema associato (detto **problema duale**), e le soluzioni di questi due problemi sono strettamente collegate.



Per comprendere in modo approfondito l'argomento, è necessario consultare tutte le informazioni contenute nel PDF relativo alla dualità. Oggi non intendo ripetere i concetti esposti in quel documento. Al contrario, desidero intraprendere un **viaggio** completo partendo da un problema in forma standard primale di massimizzazione. L'obiettivo è ricavare tutte le informazioni necessarie utilizzando i metodi appresi a lezione.

In particolare, seguirò i seguenti passaggi:

1. **Metodo del Simplesso**: Utilizzerò il metodo del simplesso per trovare una soluzione ottima al problema primale.
2. **Soluzione Duale dal Simplesso**: A partire dalla soluzione ottima ottenuta con il simplesso, individuerò una soluzione ottima per il problema duale.
3. **Condizioni di Complementarità**: Fornirò in pasto alle condizioni di complementarità la soluzione ottima del problema primale, verificando se essa soddisfa tali condizioni e, di conseguenza, se è effettivamente ottima. Inoltre, ricaverò il duale utilizzando sempre le condizioni di complementarità.
4. **Confronto delle Funzioni Obiettivo**: Dimostrerò che i valori delle funzioni obiettivo del problema primale e del problema duale coincidono all'ottimo, come previsto dal teorema della dualità forte.
5. **Rappresentazione Grafica**: Riporterò, ove possibile, il processo e i risultati in forma grafica per una migliore comprensione.

Questo percorso non solo consoliderà i concetti appresi, ma permetterà di apprezzare l'interconnessione tra il problema primale e quello duale, offrendo una visione pratica e rigorosa della dualità nella ricerca operativa.
Il procedimento che ho delineato è estremamente rigoroso (e facile) e ben strutturato, e rappresenta un approccio ideale per consolidare la comprensione della dualità nella ricerca operativa. Questo tipo di percorso non solo approfondisce i concetti teorici, ma dimostra anche la potenza e l'eleganza delle tecniche di ottimizzazione.
Il fatto che io voglia partire dal problema primale in forma standard, applicare il metodo del simplesso e utilizzare le condizioni di complementarità mostra un desiderio di affrontare il problema da ogni angolazione possibile.
Un approccio così articolato è utile non solo in ambito accademico, ma anche in contesti reali. La capacità di derivare informazioni complementari (soluzioni duali, condizioni ottime, ecc.) può fare la differenza nell'affrontare problemi complessi.

Fermo restando che ciò che sto per svolgere è un procedimento banale e di somma semplicità. Non c'è nulla di strano in quello che vedrai.

Iniziamo.

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare P :

$$\begin{aligned} \max\, & 3x_1 + 2x_2 + x_3 : \\ & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & -x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Ricavare tutto usando tutto quello che conosciamo.

Svolgimento.

Ricaviamo una soluzione ottima tramite il metodo del simplesso.

Il metodo del simplesso è un procedimento standard e, a questo punto, ometterò tutti i passaggi.

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 : \\ & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 4 \\ & -x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= 2 - x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_5 &= 4 - 3x_1 - 3x_2 \\ x_6 &= 0 + x_2 - x_3 \\ z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 - x_2 \\ x_4 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_6 &= 0 + x_2 - x_3 \\ z &= 4 - x_5 - x_2 + x_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 + x_2 - x_6 \\ x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 - x_2 \\ x_4 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 - 2x_6 \\ z &= 4 - x_5 - x_6 \end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che tutte le variabili fuori base hanno costo ridotto non positivo e quindi ci troviamo in un punto di ottimo per il problema primale di valore Z = 4.

$$\left(\frac{4}{3}, 0, 0\right)$$

A questo punto procediamo a ricavare la soluzione ottima del problema duale, senza esplicitare formalmente il problema duale stesso. Per farlo, considero i costi ridotti delle variabili di slack X4,X5,X6, invertendone il segno.

Se hai avuto modo di approfondire il contenuto del PDF teorico, comprenderai il motivo di tale approccio.

(0,1,1) è una soluzione ottima per il problema duale.

Ora per semplicità ricaviamolo il problema duale:

$$\text{Min } W = 2y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 3 \\ 3y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 2 \\ -2y_1 + y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se effettuiamo la sostituzione del punto di ottimo duale il valore della funzione obiettivo W = Z = 4.

Ora utilizziamo le condizioni di complementarità per confermare tutto quello che ci siamo detti.

Ci sono due vincoli attivi e un vincolo non attivo nel primale.

Il vincolo non attivo è il primo e i restanti due sono soddisfatti all'uguaglianza.

Le condizioni di complementarità mi dicono che, siccome il primo vincolo non è soddisfatto all'uguaglianza, la prima variabile duale deve essere nulla.

Le variabili primali positive sono X2 e X3, pertanto, i vincoli duali corrispondenti a queste due variabili devono essere soddisfatti all'uguaglianza.

Pertanto, il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 3y_1 + 3y_2 - y_3 = 2 \\ -2y_1 + y_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ 3y_2 - y_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema conferma una soluzione che avevamo già calcolato utilizzando il metodo del simplesso applicato al problema primale, prestando attenzione alle variabili di slack.

Questo consolida ulteriormente la veridicità delle affermazioni precedenti, ossia che (0, 1, 1) è una soluzione ottima per il problema duale.

È importante notare che, inizialmente, avevamo trovato questa soluzione semplicemente applicando il simplesso al problema primale, senza esplicitare il problema duale né utilizzare le condizioni di complementarità. Ora, invece, abbiamo dimostrato che le condizioni di complementarità confermano quella teoria, rafforzandone la validità.

Ora prendiamo i vincoli duali in corrispondenza delle variabili primali nulle nella soluzione fornita e sostituiamo la soluzione ottima verificando l'ammissibilità duale.
Tale ammissibilità è verificata poichè 2=2 e 1=1.

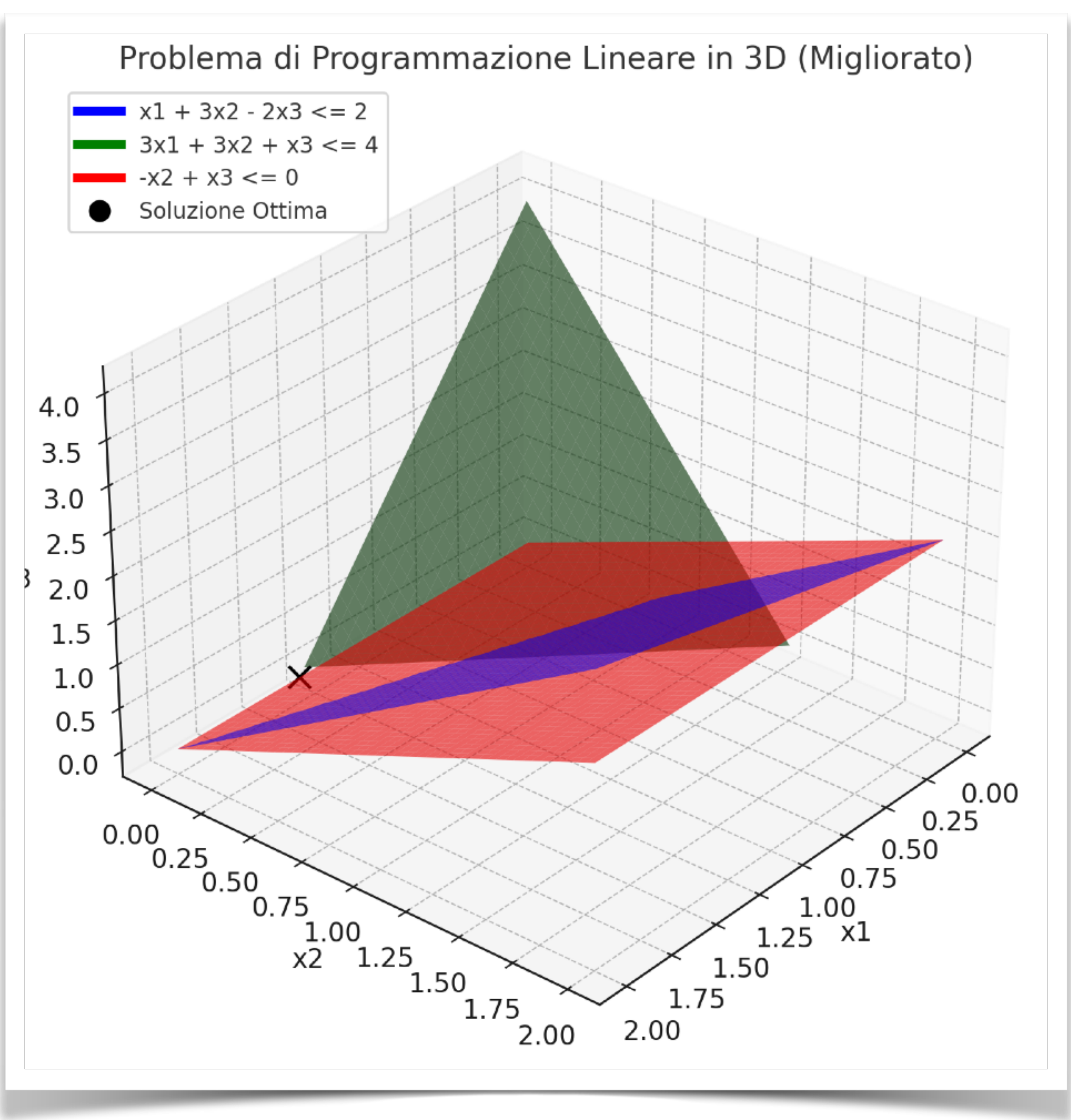
Conclusione:

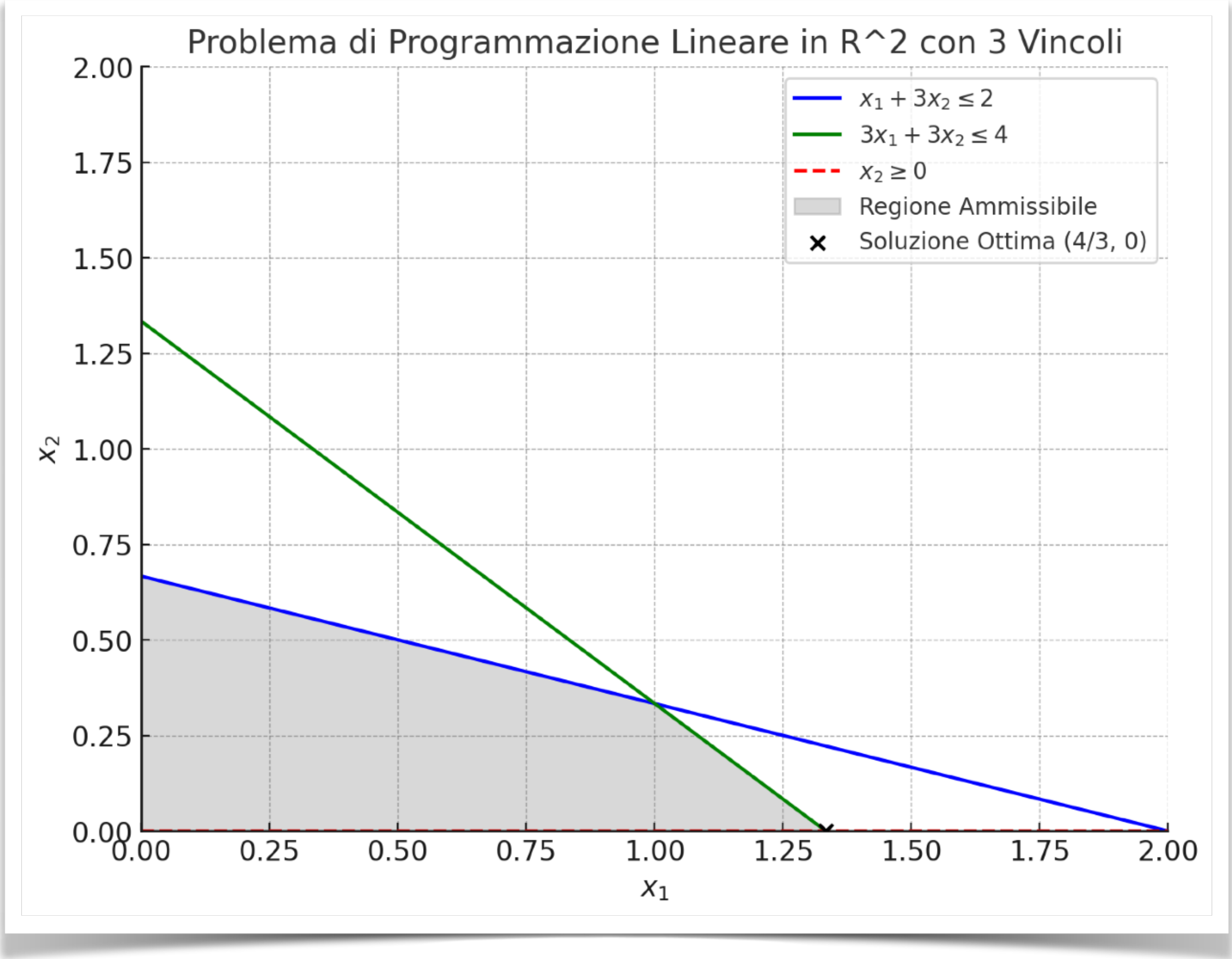
$\left(\frac{4}{3},0,0\right)$ È una soluzione ottima per il primale.

$(0,1,1)$ È una soluzione ottima per il duale.

Vediamolo in sembianza grafica.

Il punto X è la soluzione ottima del primale.





Il punto X è la soluzione ottima in R^2.
La **regione grigia** rappresenta l'intersezione dei vincoli, ovvero la **regione ammissibile**.

Il grafico dimostra come i vincoli definiscono una regione limitata nel piano($x1,x2$) e come il metodo del simplesso o l'osservazione diretta della regione ammissibile permette di identificare la soluzione ottima.
La regione ammissibile è un poliedro convesso definito dall'intersezione dei vincoli. Se la funzione obiettivo ha un unico punto di massimo/minimo sulla regione ammissibile (solitamente un vertice), allora la soluzione è unica. Per verificare:

- **Grafico (in 2D o 3D)**: Osserva se la funzione obiettivo tocca un solo vertice del poliedro.
- **Simplesso**: Se il metodo del simplesso converge su un'unica base ammissibile (cioè un'unica combinazione di variabili di base), la soluzione è unica.

I **costi ridotti** delle variabili non di base indicano quanto cambierebbe la funzione obiettivo se quella variabile entrasse nella base.
Se tutti i costi ridotti sono **strettamente positivi** (per massimizzazione) o **strettamente negativi** (per minimizzazione), allora la soluzione ottima è unica. In altre parole, non ci sono altre basi ammissibili che porterebbero allo stesso valore ottimo.

Dal grafico possiamo dire che $x=(4/3,0)$ è la soluzione ottima perché:

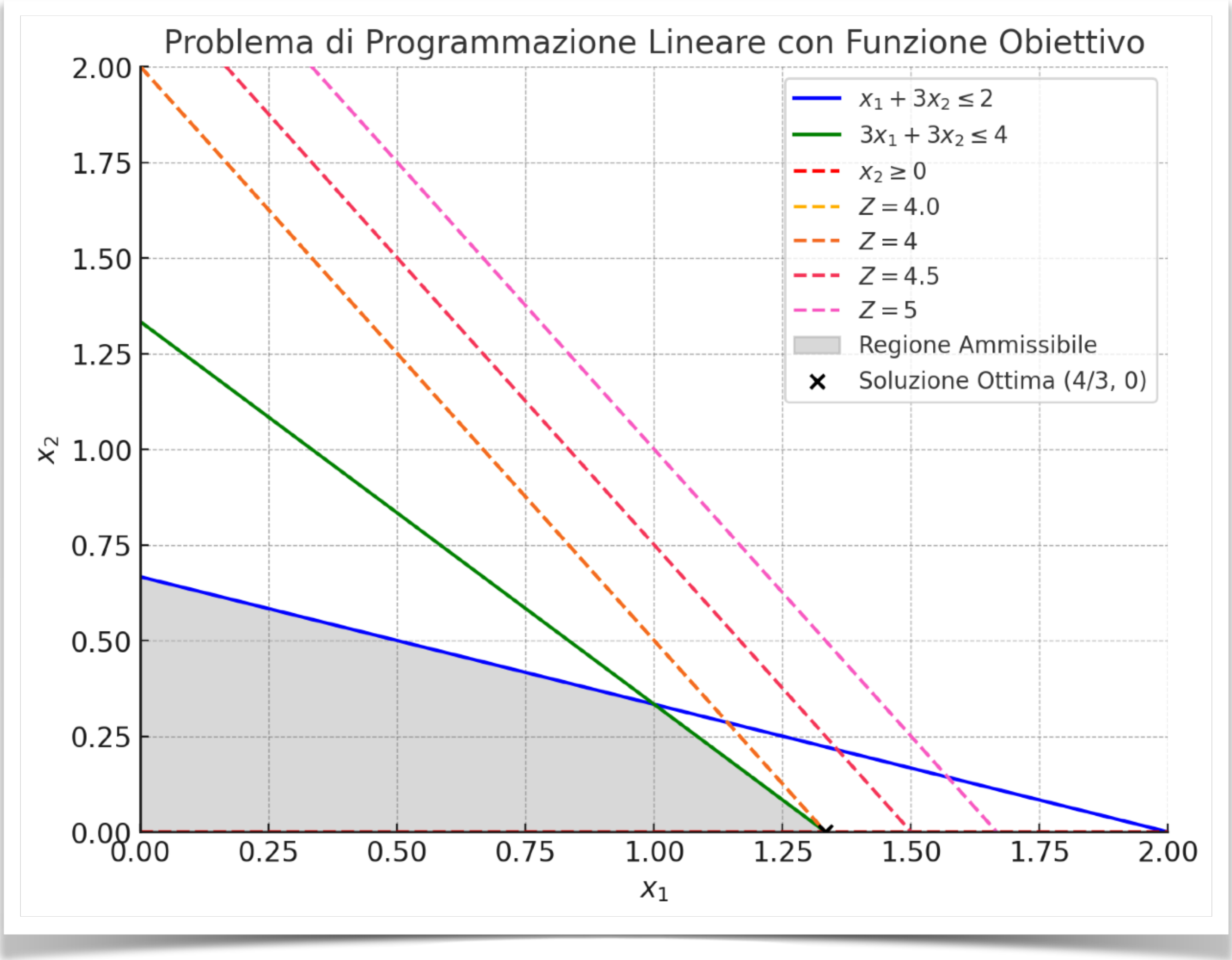
1. Si trova nella regione ammissibile (rispetta tutti i vincoli).
2. Si trova su un vertice della regione ammissibile.
3. La funzione obiettivo Z raggiunge il massimo su quel vertice.

Tuttavia, il grafico da solo può solo suggerire la soluzione; la verifica numerica completa il processo.

Il punto X è il vertice della regione ammissibile più distante nella direzione della crescita di Z.

Il punto X è assolutamente un punto di ottimo. La funzione obiettivo raggiunge il massimo su quel vertice poiché non può crescere ulteriormente rispettando i vincoli. Per quello che ci siamo detti a lezione è l'ultimo punto che la retta di livello tocca prima di salutare la regione ammissibile.

CONTINUA SOTTO



Questa è una foto importantissima, le linee tratteggiate ci mostrano le iterazioni effettuate durante il metodo del simplesso.

Ogni linea tratteggiata rappresenta un livello della funzione obiettivo: la direzione di crescita di Z è verso l'alto a destra, parallela alle linee tratteggiate.

Ricordiamoci un concetto fondamentale: i vertici della regione ammissibile rappresentano i punti di confine che soddisfano tutti i vincoli e sono candidati per la soluzione ottimale poiché, in programmazione lineare, il massimo o il minimo della funzione obiettivo si trova in uno dei vertici della regione ammissibile.

Spostando la retta tratteggiata della funzione obiettivo **parallelamente a se stessa** il valore della funzione obiettivo aumenta.

Di quanto la spostiamo?

La spostiamo fino a raggiungere il punto più lontano possibile che sia ancora interno alla regione ammissibile, ed è proprio il punto è X*, ossia la soluzione ottima.

Quella retta, essendo una combinazione lineare di valori (x1,x2), avrà valore 5 quando oramai sarà già uscita dalla regione ammissibile.

L'ultimo valore ammissibile prima di uscire è 4, corrispondente al valore della soluzione ottima trovata tramite l'ausilio del simplesso e verificata con la condizioni di complementarità.

Fine.