Documento a cura di Simone Remoli.
Il presente scritto ancor si volge al tema del conteggio nell'arte della ricerca operativa, su tal argomento insisto con veemenza, essendo esso il cuore pulsante dei saperi richiesti per affrontare senza inciampi la prova.

CONTEGGIO BIS

Prima di proseguire con la trattazione, è opportuno delineare chiaramente la differenza tra elementi distinguibili ed elementi non distinguibili in un problema di conteggio.

Consiglio.

Prima di scegliere la formula corretta, è essenziale determinare se gli oggetti da distribuire sono **distinti** o **indistinti**.
Una volta identificate le caratteristiche del problema, applicare la formula combinatoria corretta.

Definizione oggetti distinti: oggetti che possono essere **identificati individualmente.** Ogni oggetto ha caratteristiche uniche che lo distinguono dagli altri.
Ad esempio persone (es. Alice, Bob, Carlo), numeri su una cartella della tombola (es. 1, 2, 3, …) oppure carte da gioco specifiche (es. Re di cuori, Asso di picche)

Definizione oggetti indistinguibili: oggetti che **non possono essere identificati individualmente.** Non vi è alcuna differenza tra un oggetto e l'altro.
Ad esempio palline identiche in una scatola, buste identiche distribuite a persone o gelati dello stesso gusto e dimensione.

La distinzione tra oggetti distinti e indistinti influisce sulle **formule di conteggio** da utilizzare.

Per gli oggetti **distinti** vale la seguente tabella:

Situazione	Formula Combinatoria	Esempio Numerico
Permutazioni: Ordinare k su n	$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P(5,3) = 60$
Combinazioni: Selezionare k su n	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C(16,2) = 120$

Per gli oggetti **indistinti** vale la seguente tabella:

Situazione	Formula Combinatoria	Esempio Numerico
Combinazioni con Ripetizione: n in k	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{13}{6} = 1716$
Distribuzione senza Restrizioni	Varia a seconda delle condizioni	-

Esempio 1.

Voglio contare il numero di modi in cui posso raggruppare 10 elementi da un insieme di 100 elementi in maniera ordinata.

Risposta:

Maniera ordinata: l'ordine in cui gli elementi sono raggruppati **conta.**
Elementi distinti. Senza ripetizione.

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

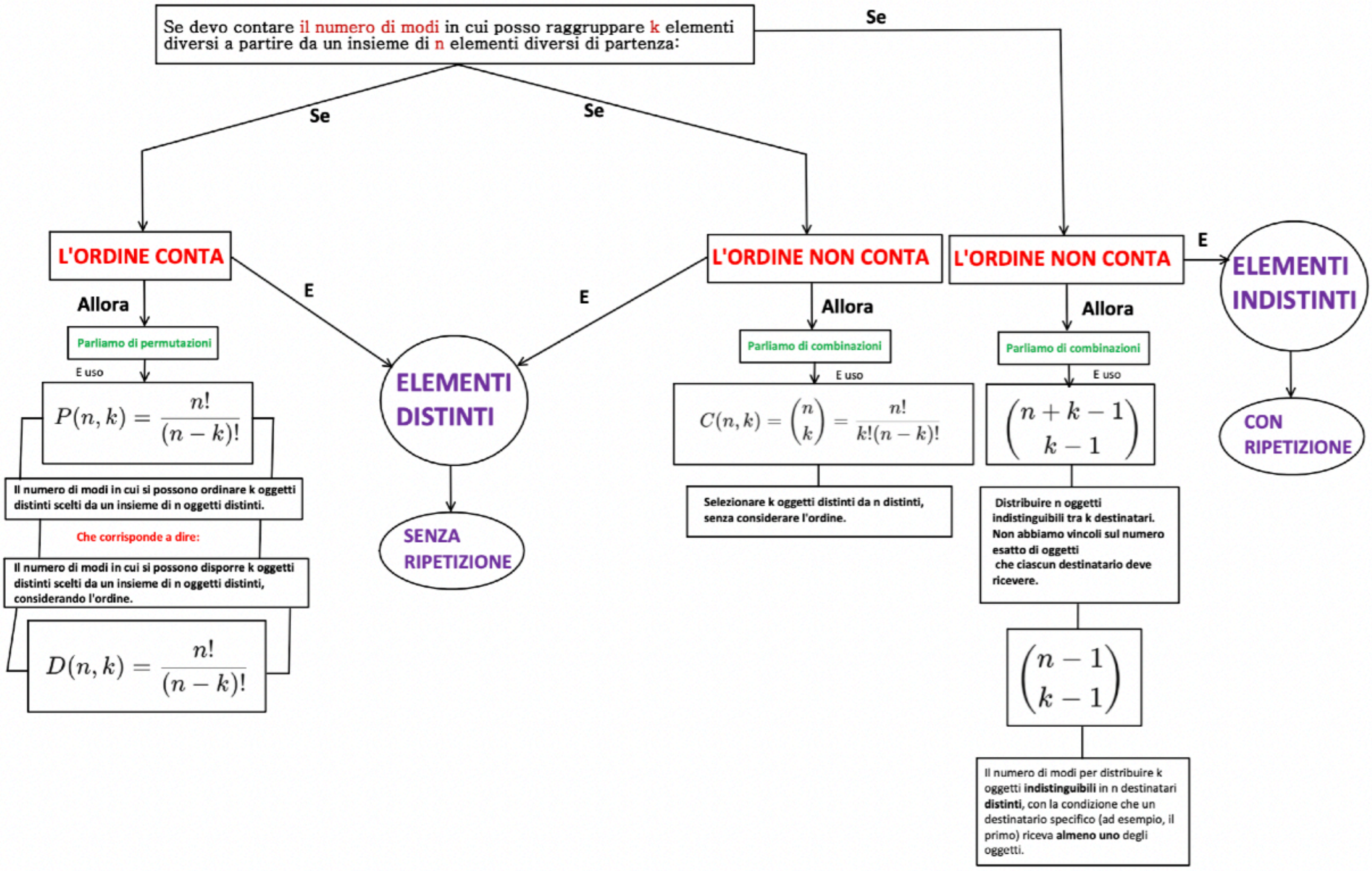
$$P(100,10) = \frac{100!}{(100-10)!} = \frac{100!}{90!}$$

Se non ci fosse stata la condizione "in maniera ordinata" avremmo adottato una soluzione basata sui **coefficienti binomiali** (combinazioni).

Maniera non ordinata: l'ordine in cui gli elementi sono raggruppati **non conta.**

$$\binom{100}{10} \approx 17{,}310{,}309{,}456{,}440$$

Vedi lo schema nella pagina successiva.



Se l'insieme è **ordinato** ha questo seguente problema:

Sequenze: (A, B, C) e (B, A, C) sono sequenze diverse.

Se l'insieme **non è ordinato** ha questo problema:

La combinazione $\{A, B, C\}$ è la stessa di $\{B, A, C\}$.

Due insiemi con gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine, sono considerati **uguali**.

Esempio 2.

Se hai 4 sedi e vuoi assegnare 2 manager distinti a ciascuna sede, quante sono le possibili scelte?

Risposta:

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$$

Se avessi scritto come risposta D(4,2) non sarebbe stato corretto perché questo calcolo avrebbe rappresentato il numero di **disposizioni ordinate** di 2 manager distinti scelti da un totale di **4 manager**, non l'assegnazione di **2 manager a ciascuna delle 4 sedi**.

Tipicamente se hai elementi indistinti hai elementi con ripetizione: nota che tipicamente, quando si lavora con elementi indistinti, si considera anche la possibilità di ripetizione.

Definizione: Quando si selezionano elementi con ripetizione, significa che ogni elemento può essere scelto più di una volta nella selezione finale.

Scegliere 3 gusti di gelato da un menu dove puoi avere più di una pallina dello stesso gusto (es. 2 vaniglia e 1 cioccolato)

Definizione: Quando si selezionano elementi senza ripetizione, significa che ogni elemento può essere scelto al massimo una volta nella selezione finale.

Esempio 3.

Una gelateria offre 5 gusti distinti.
Quante coppe di 3 palline si possono formare, permettendo gusti ripetuti?

Risposta:

$$\binom{5+3-1}{3}$$

Esempio 4.

Hai 7 caramelle identiche da distribuire a 4 bambini distinti.
Ogni bambino può ricevere più caramelle (con ripetizione).
Quante sono le possibili distribuzioni?

Risposta:

$$\binom{7+4-1}{4-1}$$

E se ogni bambino può ricevere **al massimo** una caramella?
(Senza ripetizione, ne riceve una).

Non puoi distribuire 7 caramelle a 4 bambini senza ripetizioni. Se limitato a un caramella per bambino, puoi distribuire al massimo 4 caramelle.

Risposta: 4.

Esempio 5.

In quanti modi diversi possono essere sistemati su una libreria 7 libri scelti da 20 di cui si dispone ?

Risposta: D(20,7).

Esempio 6.

Nell'ippica è denominata "corsa Tris" una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2° e 3° posto. Supponendo che partano 10 cavalli, quanti sono i possibili ordini d'arrivo nelle prime tre posizioni?

Risposta: 10 x 9 x 8.

Esempio 7.

Tra tutti i numeri di 6 cifre, tutte diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime 3 cifre sono dispari e le restanti 3 pari?

Risposta: D(6,3) x D(6,3).

Devo disporre in ordine, senza ripetizioni, tre cifre pari scelte tra 5 (0,2,4,6,8) e poi , ad ognuna di queste 60 disposizioni, devo "accodare" una qualsiasi delle altre disposizioni delle tre cifre dispari, ordinate e senza ripetizioni, scelte tra 5.

Esempio 8.

15 squadre di calcio disputano un torneo all'italiana, in cui ognuna incontra tutte le altre in un girone di andata e ritorno (equivalente a dire che si deve giocare sia Inter-Milan che Milan-Inter), cioè che due accoppiamenti differiscono anche in base all'ordine con cui vengono disposte le squadre).
Quant'è il numero di partite totale?

Risposta: D(15,2).

Esempio 9.

Le targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, 3 cifre, 2 lettere. Sapendo che le lettere possono venire scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, si calcoli quante targhe differenti possono essere ottenute e quindi quante automobili possono essere immatricolate?

Risposta: $26^2 \times 10^3 \times 26^2$.

Esempio 10.

Una partita di calcio tra la squadra A e B è finita 4 a 3. In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti?

Risposta:

$$\frac{7!}{4!3!}$$

= 35.

Ecco tutte le 35 sequenze possibili, dove:
A rappresenta una rete della **squadra A**.
B rappresenta una rete della **squadra B**.

1. **AAAABBB**
2. **AAABABB**
3. **AAABBAB**
4. **AAABBBA**
5. **AABAABB**
6. **AABABAB**
7. **AABABBA**
8. **AABBABB**
9. **AABBBAB**
10. **AABBBBA**
11. **ABAAABB**
12. **ABAABAB**
13. **ABAABBA**
14. **ABABAAB**
15. **ABABABA**
16. **ABABBBA**
17. **ABBAAAB**
18. **ABBAABA**
19. **ABBABAA**

20. **ABBBAAA**

21. **BAAAABB**

22. **BAAABAB**

23. **BAAABBA**

24. **BAABAAB**

25. **BAABABA**

26. **BAABBBA**

27. **BABAAAB**

28. **BABABAA**

29. **BABBBAA**

30. **BBAAAAB**

31. **BBAAABA**

32. **BBAABAA**

33. **BBABAAB**

34. **BBABABA**

35. **BBABBBA**

Esempio 11.

Nel Poker si distribuiscono, ad ogni giocatore, 5 carte estratte da un mazzo di 32. In quanto modi diversi si possono ricevere le carte?

Risposta: C(32,5).

Non mi interessa dell'ordine.

Esempio 12.

Quale è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio omogeneo di 3° grado in 4 variabili x,y,z,t ?

Risposta: Non voglio considerare l'ordine.

$$:\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}$$

Devo distribuire 4 oggetti indistinguibili tra 4 scatole (ossia x,y,z,t).

Esempio 13.

In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne in 5 cassetti? (ogni cassetto può contenere da 0 a 12 penne e le 12 penne possono essere considerate indistinguibili)

Risposta:

$$\binom{16}{4}$$

Se ora pongo la condizione che in ogni cassetto ci debba essere almeno una penna ?

Risposta:

$$\binom{11}{4}$$

Esempio 14.

Ho un'associazione con 50 soci. Devo scegliere 5 membri che compongano il comitato direttivo. Quante possibili scelte?

Risposta:

$$\binom{50}{5}$$

Esempio 15.

Quanti numeri di 5 cifre posso scrivere usando solo 1, 3, 5, 7, 9 senza ripetizioni?

Risposta: 5 x 4 x 3 x 2 x 1.

E con ripetizioni?

Risposta: 5 x 5 x 5 x 5 x 5.

Esempio 16.

In quanti modi diversi posso distribuire 20 palline uguali in 5 scatole diverse?

Risposta:

$$\binom{24}{4}$$

E 5 palline uguali in 20 scatole diverse?

Risposta:

$$\binom{24}{19}$$

Esempio 17.

14 amici si mettono in viaggio. Hanno a disposizione 1 vettura a 7 posti, una a 5 e una moto. Considerando che i proprietari dei 3 mezzi vogliono guidarli, in quanti modi diversi si possono comporre gli equipaggi?

Risposta: coefficiente binomiale di 11 su 6 x coefficiente binomiale di 5 su 4 x coefficiente binomiale 1 su 1

$$\binom{11}{6} \times \binom{5}{4} \times \binom{1}{1}$$