

PROJECT MANAGEMENT

Ultimo documento a cura di Simone Remoli.

Siamo giunti alla conclusione del corso di Ricerca Operativa. Quanto segue rappresenta l'ultimo argomento trattato dal Prof. Gianpaolo Oriolo nelle ultime tre lezioni, svoltesi dal 17 al 19 dicembre 2024. Dopo aver affrontato temi talvolta meno intuitivi, possiamo finalmente tirare un sospiro di sollievo, poiché la trattazione seguente risulterà, a mio avviso, più chiara e accessibile a tutti gli studenti.

Il corso, a mio parere, è stato straordinario: il Professore ha esposto i concetti in modo eccellente e cristallino, dissipando ogni eventuale dubbio. Tuttavia, alcuni argomenti sono risultati meno immediati e più complessi per alcuni, come ad esempio il conteggio combinatorio, alcuni esercizi di formulazione sulla Programmazione Lineare o la teoria sottostante alla dualità, che, a una prima lettura, può apparire ostica.

Se l'obiettivo è semplicemente superare l'esame imparando a memoria, è sufficiente memorizzare alcuni procedimenti: i PDF che ho redatto durante l'anno saranno più che adeguati a tale scopo. Tuttavia, auspico che il corso venga affrontato con un approccio diverso, poiché in caso contrario si perderebbe gran parte della sua ricchezza, bellezza e complessità.

Concludo avviandomi alla trattazione di questo ultimo argomento, corredato dalla risoluzione di alcune prove d'esame. Procederò passo passo, spiegando con chiarezza i ragionamenti sottesi. Buona lettura!

Cosa rappresenta un problema di Project Management?

Un problema di **project management** nella **ricerca operativa** riguarda l'ottimizzazione di risorse, tempi e costi per completare un progetto rispettando vincoli specifici.

Mostrami un esempio di progetto.

ID Attività	Descrizione Attività	Precedenze Immediate	Durata (settimane)
A	ESCAVAZIONI	-	2
B	GETTARE LE FONDAMENTA	A	4
C	TIRARE SU LE MURA	B	10
D	TIRARE SU IL TETTO	C	6
E	INSTALLARE TUBATURE ESTERNE	C	4
F	INSTALLARE TUBATURE INTERNE	E	5
G	RIVESTIRE TETTO	D	7
H	PITTURAZIONI ESTERNE	E,G	9
I	LAVORI ELETTRICI	C	7
J	RIVESTIMENTO PARETI	F,I	8
K	INSTALLARE PAVIMENTI	J	4
L	PITTURAZIONI INTERNA	J	5
M	FINITURE ESTERNE	H	2
N	FINITURE INTERNE	K, L	6

Un progetto può essere la **costruzione di una casa** descritto dalle attività che devono essere effettuate. Oppure, per esempio, **cucinare gli spaghetti aglio, olio e peperoncino**.

ID Attività	Descrizione Attività	Precedenze Strette	Tempo (min)
A	BOLLIRE ACQUA IN UNA PENTOLA	-	10
B	SPELLARE SPICCHIO D'AGLIO E SCHIACCIARLO	-	1
C	RIMUOVERE SEMI E FILAMENTI DA UN PEPERONCINO	-	1
D	LAVARE E TRITARE PREZZEMOLO	-	5
E	METTERE SUL FUOCO PADELLA CON OLIO, AGLIO SCHIACCIATO E PEPERONCINO	B,C	1
F	AGGIUNGERE PREZZEMOLO IN PADELLA	D,E	2
G	AGGIUNGERE 3 CUCCHIAI ACQUA BOLLENTE E POCO DOPO SPEGNERE FUOCO SOTTO PADELLA	A,F	2
H	SALARE ACQUA	A	1
I	METTERE SPAGHETTI IN ACQUA BOLLENTE E SALATA E CUOCERLI MOLTO AL DENTE	H	11
L	SCOLARE SPAGHETTI	I	1
M	RIACCENDERE FUOCO SOTTO PADELLA, MANTECARE SPAGHETTI CON FILO OLIO E SPEGNERE	G, L	2
N	SERVIRE	M	1

Se proprio non vi piacciono si può optare con gli **spaghetti con le vongole.**

ID Attività	Descrizione Attività	Precedenze Strette	Tempo (min)
A	RISCALDARE PADELLA CON OLIO	-	1
B	AGGIUNGERE SPICCHIO D'AGLIO SCHIACCIATO	A	1
C	RIMUOVERE SEMI E FILAMENTI DA UN PEPERONCINO	-	1
D	AGGIUNGERE PEPERONCINO	B, C	1
E	SPURGARE LE VONGOLE	-	45
F	AGGIUNGERE LE VONGOLE SPURGATE	B, E	1
G	SFUMARE CON VINO BIANCO SECCO E FAR APRIRE VONGOLE	D, F	2
H	ESTRARRE LE VONGOLE DALLA PADELLA E SGUSCIARLE	G	2
I	SPEGNERE FUOCO PADELLA E FILTRARNE LIQUIDO	H	2
J	BOLLIRE ACQUA IN UNA PENTOLA	-	15
K	SALARE ACQUA	J	1
L	CUOCERE SPAGHETTI MOLTO AL DENTE	K	12
M	SCOLARE SPAGHETTI	L	1
N	LAVARE E TRITARE PREZZEMOLO	-	5
O	AGGIUNGERE PREZZEMOLO IN PADELLA, RIACCENDERE FUOCO	I, N	1
P	MANTECARE SPAGHETTI IN PADELLA, AGGIUNGERE FILO OLIO	M, O	2
Q	SPEGNERE FUOCO, RIAGGIUNGERE VONGOLE, MANTECARE	P	1

Oppure posso farvi da consulente in amore e creare un progetto su come **"dichiararvi"** alla persona della vostra vita.

ID Attività	Descrizione Attività	Precedenze Immediate	Durata (giorni)
A	Identificare i tuoi sentimenti	-	2
B	Costruire un piano	A	3
C	Preparare un regalo o gesto speciale	B	5
D	Trovare il momento e il luogo giusto	A	2
E	Chiedere un appuntamento	D	1
F	Organizzare la conversazione	C, E	4
G	Scegliere le parole da usare	F	2
H	Incontrarla	E	1
I	Parlare dei tuoi sentimenti	G, H	1
J	Rispondere alle sue reazioni	I	2
K	Continuare a costruire la relazione	J	5

Spero che ora sia chiaro. Veramente banale.
Ho deliberatamente scelto di affrontare l'argomento con un tono scherzoso.

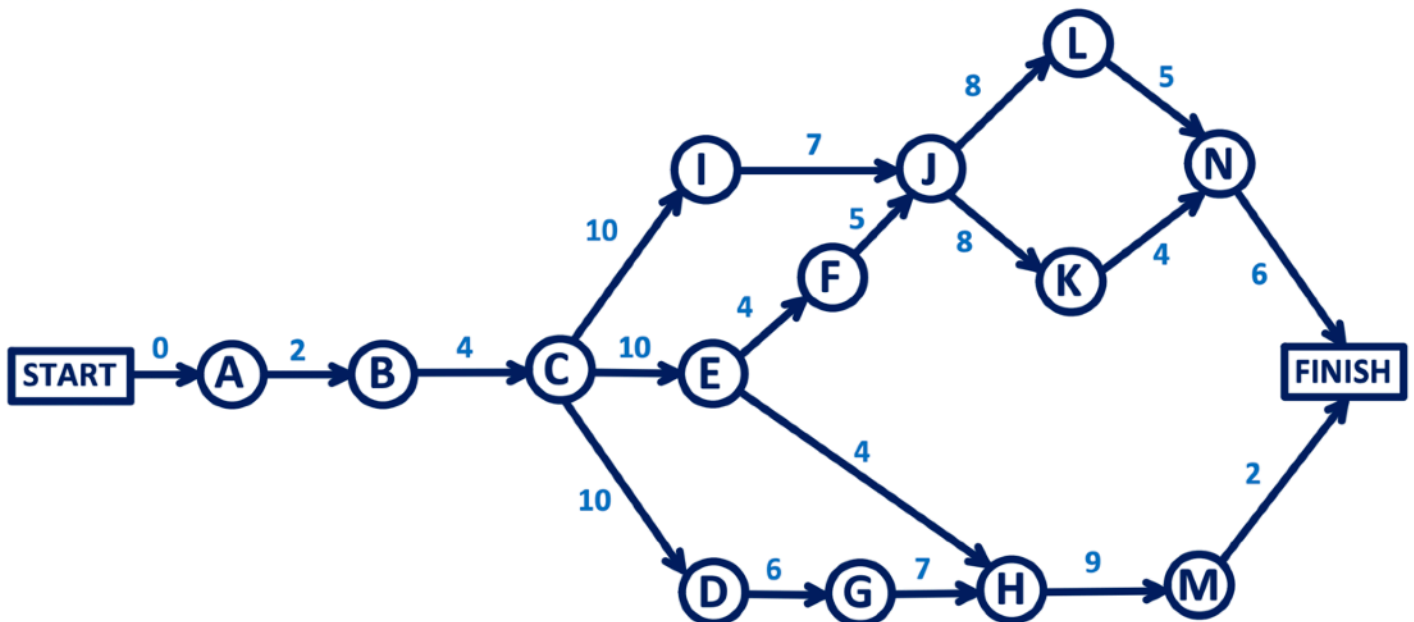
Torniamo seri.

Tutti questi progetti condividono un denominatore comune: possono essere rappresentati attraverso dei nodi che descrivono le attività, costruendo un **grafo orientato aciclico**.

Riprendiamo l'attività della costruzione della casa:

ID Attività	Descrizione Attività	Precedenze Immediate	Durata (settimane)
A	ESCAVAZIONI	-	2
B	GETTARE LE FONDAMENTA	A	4
C	TIRARE SU LE MURA	B	10
D	TIRARE SU IL TETTO	C	6
E	INSTALLARE TUBATURE ESTERNE	C	4
F	INSTALLARE TUBATURE INTERNE	E	5
G	RIVESTIRE TETTO	D	7
H	PITTURAZIONI ESTERNE	E,G	9
I	LAVORI ELETTRICI	C	7
J	RIVESTIMENTO PARETI	F,I	8
K	INSTALLARE PAVIMENTI	J	4
L	PITTURAZIONI INTERNA	J	5
M	FINITURE ESTERNE	H	2
N	FINITURE INTERNE	K,L	6

Il grafo che descrive l'attività è il seguente:



Un nodo corrisponde ad una specifica attività.
Per ogni nodo esiste un arco uscente con il valore della durata corrispondente a quella attività.
Il grafo è orientato ed è aciclico.

In esempi di questo tipo, il grafo **deve necessariamente essere orientato e aciclico**. Se non fosse orientato, non saremmo in grado di distinguere un'attività precedente da una successiva; qualora invece non fosse aciclico, la presenza di cicli orientati implicherebbe la possibilità di tornare a svolgere un'attività già completata. Questo rappresenterebbe un'anomalia, poiché il nostro obiettivo è che le attività vengano eseguite in sequenza, una dopo l'altra, progredendo in modo lineare verso la successiva.

Pertanto, un progetto ben concepito garantirà che il grafo risultante sia un grafo orientato e aciclico, rispondendo così ai criteri di correttezza richiesti da chi commissiona il lavoro.

Teorema aciclicità: Se un grafo orientato è aciclico, allora esiste necessariamente almeno un nodo con grado entrante nullo, ossia un nodo privo di predecessori.

Il nostro grafo è aciclico perché il nodo start non ha predecessori.

NUMERAZIONE TOPOLOGICA

Una numerazione topologica è un modo per ordinare i nodi di un grafo orientato aciclico in modo che ogni nodo venga elencato **dopo tutti i suoi predecessori**. In altre parole, se c'è un arco da un nodo A a un nodo B, allora A sarà numerato prima di B.

Teorema ->: Se esiste una numerazione topologica il grafo è aciclico.

Teorema <-: Se il grafo è aciclico esiste una numerazione topologica.

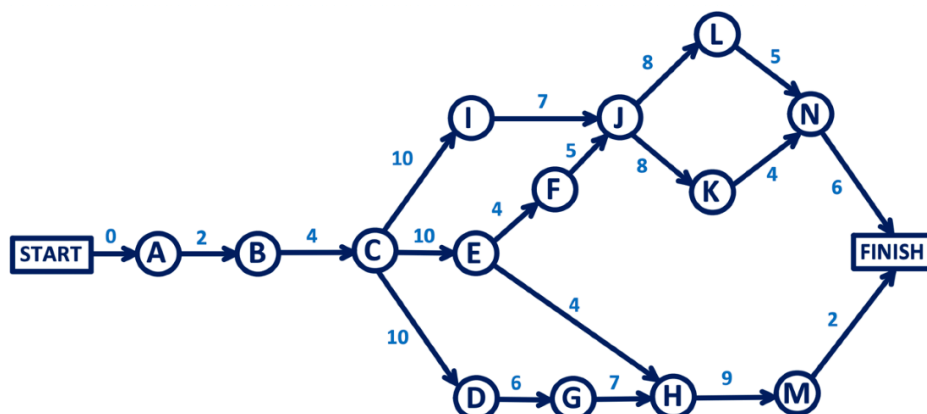
In altre parole, un grafo è aciclico se e solo se esiste una numerazione topologica.

Teorema della non unicità: In un grafo orientato aciclico può esistere più di una numerazione topologica.

Proprietà della numerazione topologica: In una numerazione topologica, quando assegniamo etichette ai nodi di un grafo orientato aciclico, ogni arco segue una regola fondamentale: **l'arco collega un nodo con etichetta i a un nodo con etichetta j , dove $i < j$.**

Esempio - Trovare una numerazione topologica del grafo e verificare la proprietà della numerazione.

Consideriamo il grafo:

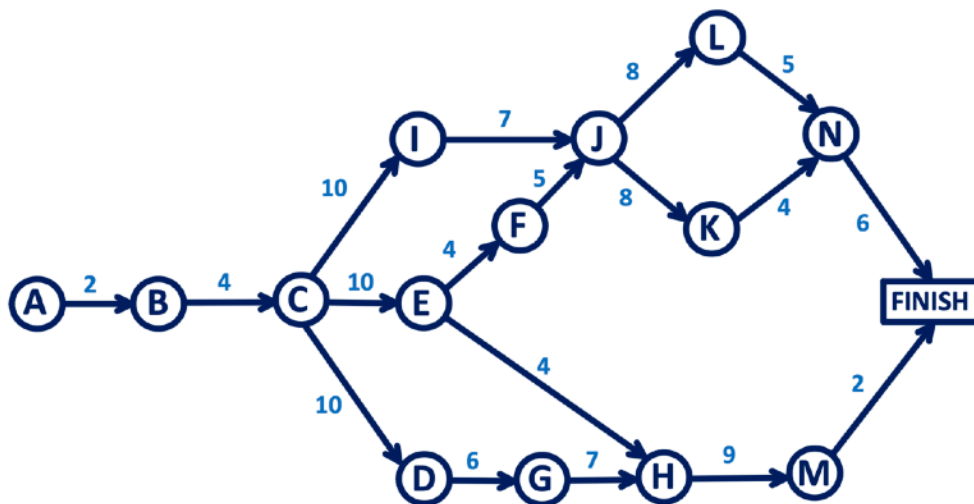


Il grafo è aciclico, quindi esiste una numerazione topologica.

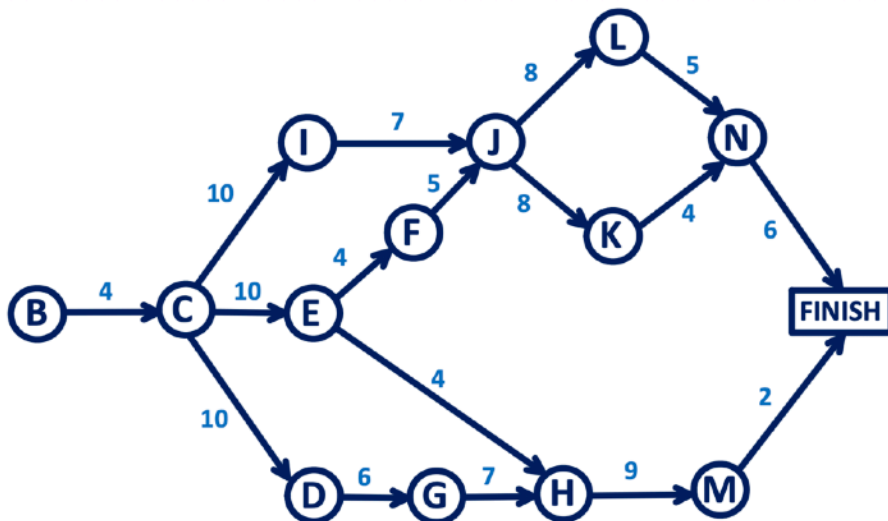
Eliminiamo il nodo (e il rispettivo arco) che non ha predecessori, ossia START.

Questa è la prima eliminazione, **START=1**.

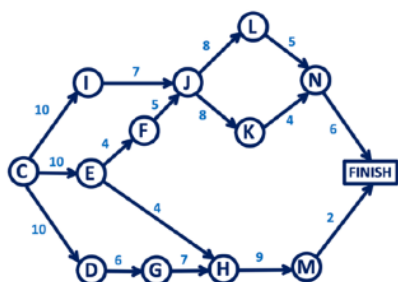
Il grafo rimanente è ancora aciclico ed è il seguente:



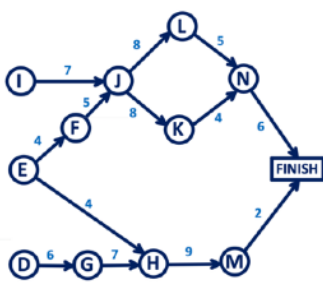
Eliminiamo il nodo che non ha predecessori, **A=2**.



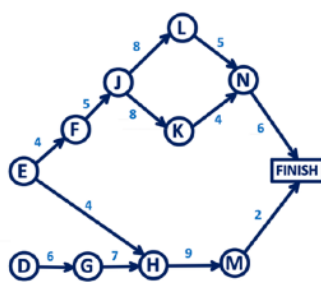
Procediamo iterativamente:



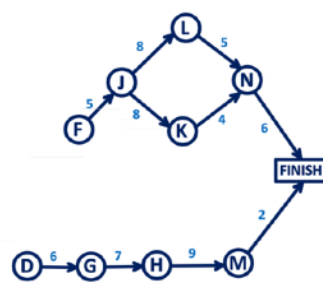
B=3



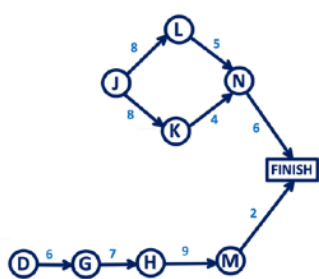
C=4



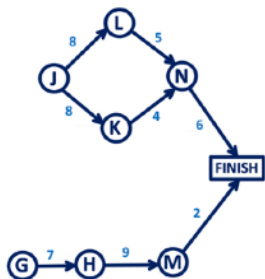
I=5



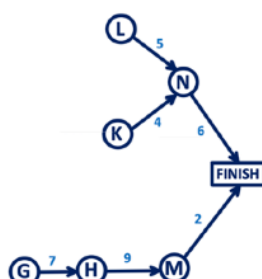
E=6



F=7



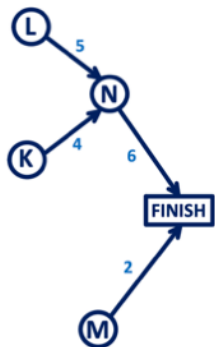
D=8



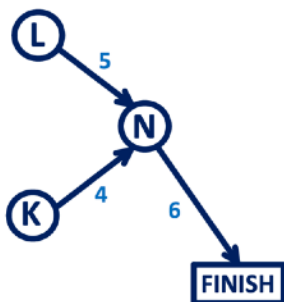
J=9



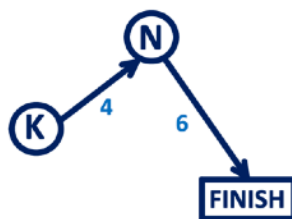
G=10



H=11



M=12



L=13



K=14

N=15

FINISH=16

La numerazione topologica dei nodi è la seguente:

START=1

A=2

B=3

C=4

I=5

E=6

F=7

D=8

J=9

G=10

H=11

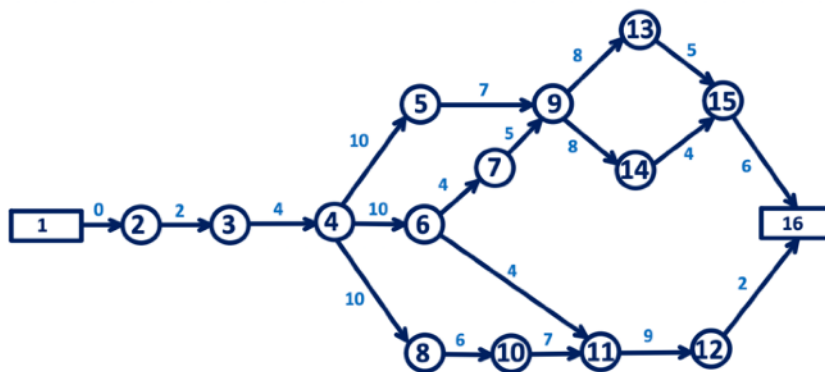
M=12

L=13

K=14

N=15

FINISH=16



La nuova rete aggiornata è la figura sopra.

La proprietà della numerazione topologica è verificata.

Okay, questa era solo la premessa.

La domanda a cui dobbiamo rispondere ora è la seguente: **"Quanto dura questo progetto?"**

Definizione: La lunghezza del progetto corrisponde alla lunghezza del cammino massimo da START a FINISH.

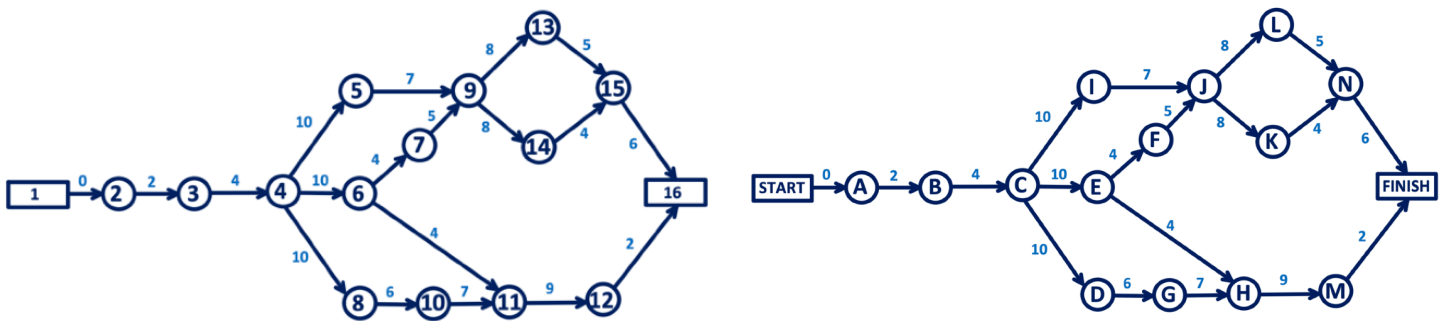
Ciò corrisponde esattamente al **tempo di completamento** del progetto.

Quello che ci siamo detti prima ora ha un senso perché:

La numerazione topologica serve per risolvere un problema di massimo.

ALGORITMO PER TROVARE IL CAMMINO MASSIMO.

L'algoritmo scandisce i nodi secondo l'ordinamento topologico.



I due grafi sono identici, a sinistra il grafo numerato secondo la notazione topologica derivata dall'analisi del grafo di destra.

Visito il nodo START.

Il percorso massimo sino a $START = 0$.

$Precedente(START) = NIL$.

START raggiunge A.

$Precedente(A) = START$.

Su riga di A = (0, START)

Visito il nodo A.

A raggiunge B.

$PercorsoMaxfinoB = 0 + lunghezza_arco(a \rightarrow b) = 0 + 2 = 2$;

$Precedente(B) = A$.

Su riga di B = (2, A).

Visito il nodo B.

B raggiunge C.

$PercorsoMaxfinoC = PercorsoMaxfinoB + l(B \rightarrow C) = 2 + 4 = 6$;

Prec(C) = B.
Su riga di C = (6,B).

Visito il nodo C.

C raggiunge E.
 $\text{PercorsoMaxfinoE} = \text{PercorsoMaxfinoC} + l(C \rightarrow E) = 6 + 10 = 16.$
Precedente(E) = C.
Su riga di E = (16,C).

C raggiunge I.
 $\text{PercorsoMaxfinoI} = \text{PercorsoMaxfinoC} + l(C \rightarrow I) = 6 + 10 = 16.$
Su riga di I = (16,C).

C raggiunge D.
 $\text{PercorsoMaxfinoD} = \text{PercorsoMaxfinoC} + l(C \rightarrow D) = 6 + 10 = 16.$
Su riga D = (16,C).

Visito il nodo I.

I raggiunge J.
 $\text{PercorsoMaxfinoJ} = \text{PercorsoMaxfinoI} + l(I \rightarrow J) = 16 + 7 = 23.$
Su riga J = (23,I).

Visito il nodo E.

E raggiunge F.
 $\text{PercorsoMaxfinoF} = \text{PercorsoMaxfinoE} + l(E \rightarrow F) = 16 + 4 = 20.$
su riga di F = (20,E).

E raggiunge H.
 $\text{PercorsoMaxfinoH} = \text{PercorsoMaxfinoE} + l(E \rightarrow H) = 16 + 4 = 20.$
Su riga di H = (20,E).

Visito il nodo F.

F raggiunge J.
 $\text{PercorsoMaxfinoJ} = \text{PercorsoMaxfinoF} + l(F \rightarrow J) = 20 + 5 = 25.$

25 > 23. OK. Lo riporto in tabella.

Visito il nodo D.

D raggiunge G.
 $\text{PercorsoMaxfinoG} = \text{PercorsoMaxfinoD} + l(D \rightarrow G) = 16 + 6 = 22.$
Su riga di G = (22,D).

Visito il nodo J.

J raggiunge L.
 $\text{PercorsoMaxfinoL} = \text{PercorsoMaxfinoJ} + l(J \rightarrow L) = 25 + 8 = 33.$
Su riga di L = (33,J).

J raggiunge K.
 $\text{PercorsoMaxfinoK} = \text{PercorsoMaxfinoJ} + l(J \rightarrow K) = 25 + 8 = 33.$
Su riga di K = (33,J).

G raggiunge H.

Visito il nodo H.

Visito il nodo M.

Visito il nodo L.

Visito il nodo K.

$38 > 37$, vale quello sopra.

Su riga di $N = (37, K)$.

N raggiunge FINISH.

$$44 > 40$$

	IN	ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>START</i> = v_1	0, 0	0, ST	2, A	6, B	16, C 16, C 16, C	22, D	20, E 20, E	25, F	29, G	38, H	I	33, J 33, J	37, K	38, L	40, M	44, N
<i>A</i> = v_2	-∞, -1															
<i>B</i> = v_3	-∞, -1															
<i>C</i> = v_4	-∞, -1															
<i>D</i> = v_5	-∞, -1															
<i>E</i> = v_6	-∞, -1															
<i>F</i> = v_7	-∞, -1															
<i>G</i> = v_8	-∞, -1															
<i>H</i> = v_9	-∞, -1															
<i>I</i> = v_{10}	-∞, -1															
<i>J</i> = v_{11}	-∞, -1															
<i>K</i> = v_{12}	-∞, -1															
<i>L</i> = v_{13}	-∞, -1															
<i>M</i> = v_{14}	-∞, -1															
<i>N</i> = v_{15}	-∞, -1															
<i>FINISH</i> = v_{16}	-∞, -1															

Ora ricaviamo il cammino massimo leggendo la tabella.

Leggiamo la tabella dall'ultima riga:

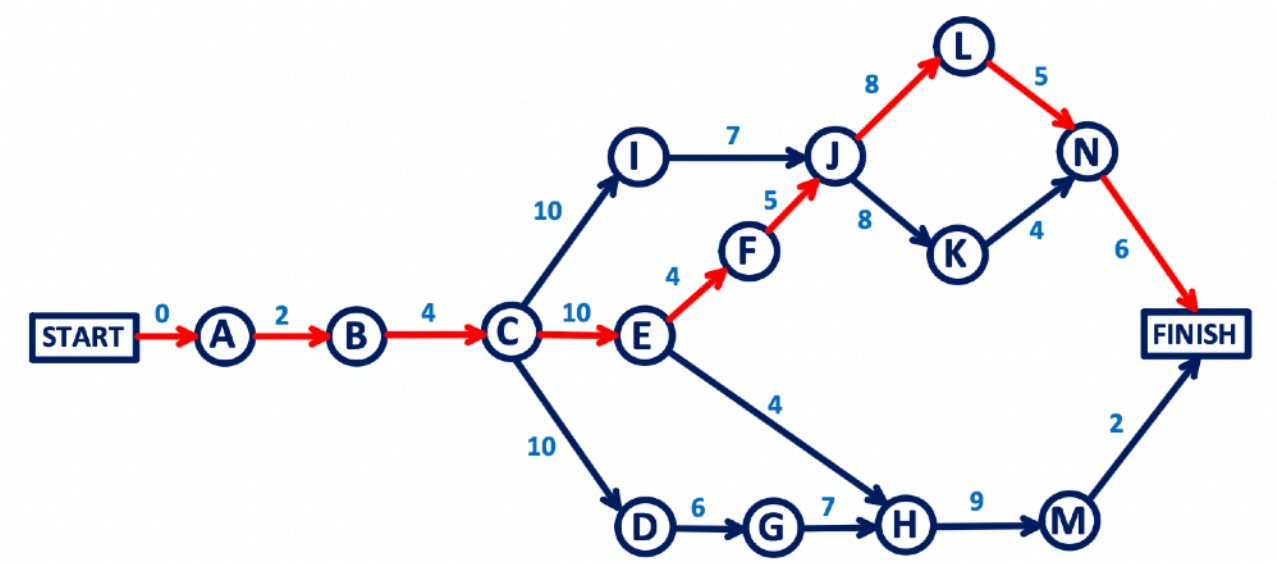
	IN	ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
START = v ₁	0, 0															
A = v ₂	-∞, -1	0, ST														
B = v ₃	-∞, -1		2, A													
C = v ₄	-∞, -1			6, B												
D = v ₅	-∞, -1				16, C											
E = v ₆	-∞, -1				16, C											
F = v ₇	-∞, -1						20, E									
G = v ₈	-∞, -1															
H = v ₉	-∞, -1					22, D	20, E		29, G							
I = v ₁₀	-∞, -1				16, C											
J = v ₁₁	-∞, -1							25, F								
K = v ₁₂	-∞, -1											33, J				
L = v ₁₃	-∞, -1											33, J				
M = v ₁₄	-∞, -1									38, H			37, K	38, L		
N = v ₁₅	-∞, -1														40, M	
FINISH = v ₁₆	-∞, -1															44, N

Dall'ultima riga ultima colonna:

Il predecessore di F è N.
 Mi sposto sulla riga di N.
 Il predecessore di N è L.
 Mi sposto sulla riga di L.
 Il predecessore di L è J.
 Mi sposto sulla riga di J.
 Etc...

Quindi il percorso massimo è il seguente:

START->A->B->C->E->F->J->L->N->FINISH.



Che ha un peso totale di 44, che corrisponde al tempo di completamento del progetto: 44 settimane.

Fine.