RIEPILOGO ESERCIZI D'ESAME/SINOSSI SU CONDIZIONE DI HALL, MATCHING E PROBLEMI DI FLUSSO (con soluzioni).

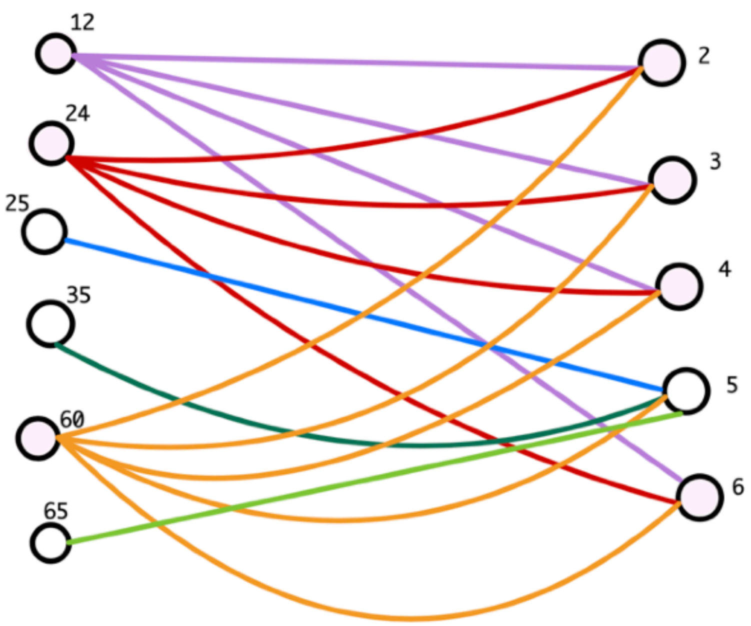
Documento a cura di Simone Remoli.

1. Esercizio: Condizione di Hall.

Si consideri **l'insieme X** dei seguenti numeri {12,24,25,35,60,65} e **l'insieme Y** dei numeri {2,3,4,5,6}.
Si consideri il grafo bipartito G(X **∪** Y, E) dove l'arco {x,y} **∈** E, x **∈** X, y **∈** Y, se e solo se x è un multiplo di y.
Esibire un matching *Y-Completo* oppure un certificato, tra quelli visti a lezione, che dimostri che tale matching non esiste.
Non è richiesto di giustificare la risposta.

Soluzione.

Innanzitutto disegniamo il grafo bipartito richiesto.



Può esistere un matching di valore 6?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo basarci sulla condizione di Hall.
Affinché tale matching non possa esistere, dobbiamo trovare un sottoinsieme **Q ⊆ X** tale che il numero di nodi adiacenti a Q (indicato come N(Q)) sia inferiore alla cardinalità di Q.
Dal corso di algebra e logica è noto che il numero massimo di sottoinsiemi di un'insieme con cardinalità |Y| è pari a $2^{|Y|}$.
Chiamasi *insieme delle parti*.

L'insieme delle parti annovera altresì l'insieme vuoto {Ø}, ma, ai nostri fini, esso risulta non necessario, poiché un insieme vacuo sarà sempre inferiore per cardinalità a qualsivoglia insieme non vuoto. Pertanto, il numero massimo di sottoinsiemi di Y si attesta a 31.

Or dunque, poiché questa è la prima volta che mi accingo a siffatto esercizio, esporrò tutti i sottoinsiemi. Tuttavia, sia chiaro: sarebbe impensabile, in un contesto d'esame, elencarli in modo completo.

I possibili sottoinsiemi di Y sono:

1. $\{2\}$
2. $\{3\}$
3. $\{4\}$
4. $\{5\}$
5. $\{6\}$
6. $\{2, 3\}$
7. $\{2, 4\}$
8. $\{2, 5\}$
9. $\{2, 6\}$
10. $\{3, 4\}$
11. $\{3, 5\}$
12. $\{3, 6\}$
13. $\{4, 5\}$
14. $\{4, 6\}$
15. $\{5, 6\}$

16. $\{2,3,4\}$

17. $\{2,3,5\}$

18. $\{2,3,6\}$

19. $\{2,4,5\}$

20. $\{2,4,6\}$

21. $\{2,5,6\}$

22. $\{3,4,5\}$

23. $\{3,4,6\}$

24. $\{3,5,6\}$

25. $\{4,5,6\}$

26. $\{2,3,4,5\}$

27. $\boldsymbol{\{2,3,4,6\}}$

28. $\{2,3,5,6\}$

29. $\{2,4,5,6\}$

30. $\{3,4,5,6\}$

31. $\{2,3,4,5,6\}$

Mi basta considerare l'insieme Q = {2,3,4,6} per dimostrare che |N(Q)| = 3, pertanto |N(Q)| < |Q|, e ciò dimostra che **non può esistere un matching Y-Completo.**

Se avessimo voluto ampliare l'esercizio alla ricerca di un matching X-Completo, avrei potuto similmente dichiarare che anche tal matching non sussiste, e insieme avrei esibito un secondo attestato a comprovarne l'inesistenza, Q = {25,35,65} la cui N(Q) = 1.

2. Esercizio: Condizione di Hall.

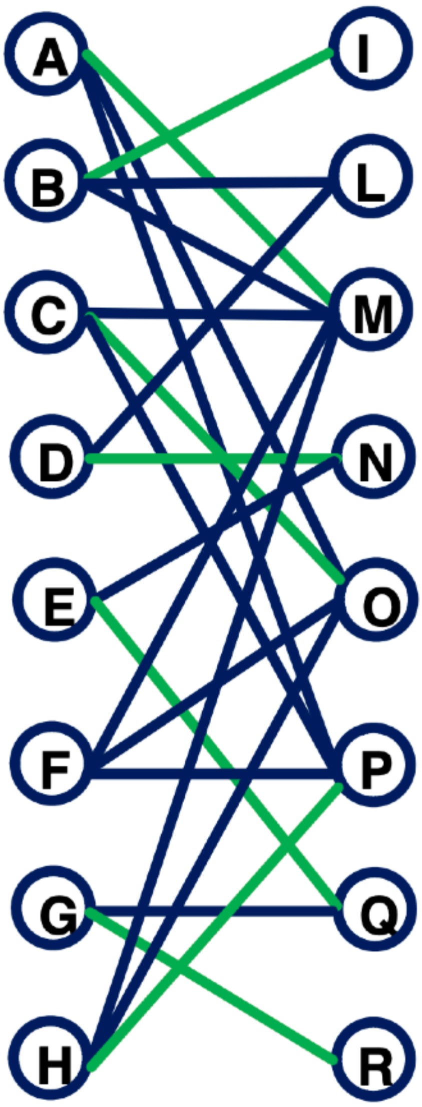
Si consideri il grafo bipartito $G(V_1 \cup V_2, E)$ con insieme dei vertici $\mathbf{V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}}$, $\mathbf{V_2 = \{i, l, m, n, o, p, q, r\}}$ e l'insieme degli spigoli E definito attraverso le seguenti liste di adiacenza (per ogni nodo $x \in V_1$, la lista di adiacenza riporta l'insieme dei vertici $j \in V_2$ tali che $i\ j \in E$): ad j[a] = {m, o, p}; ad j[b] = {i, l, m}; ad j[c] = {m, o, p}; ad j[d] = {l, n}; ad j[e] = {n, q}; ad j[f] = {m, o, p}; ad j[g] = {q, r}; ad j[h] = {m, o, p}.

Si consideri il matching **M = {am, bi, co, dn, eq, gr, hp}**. Si certifichi la sua ottimalità oppure si fornisca un cammino aumentante per il problema di flusso associato.

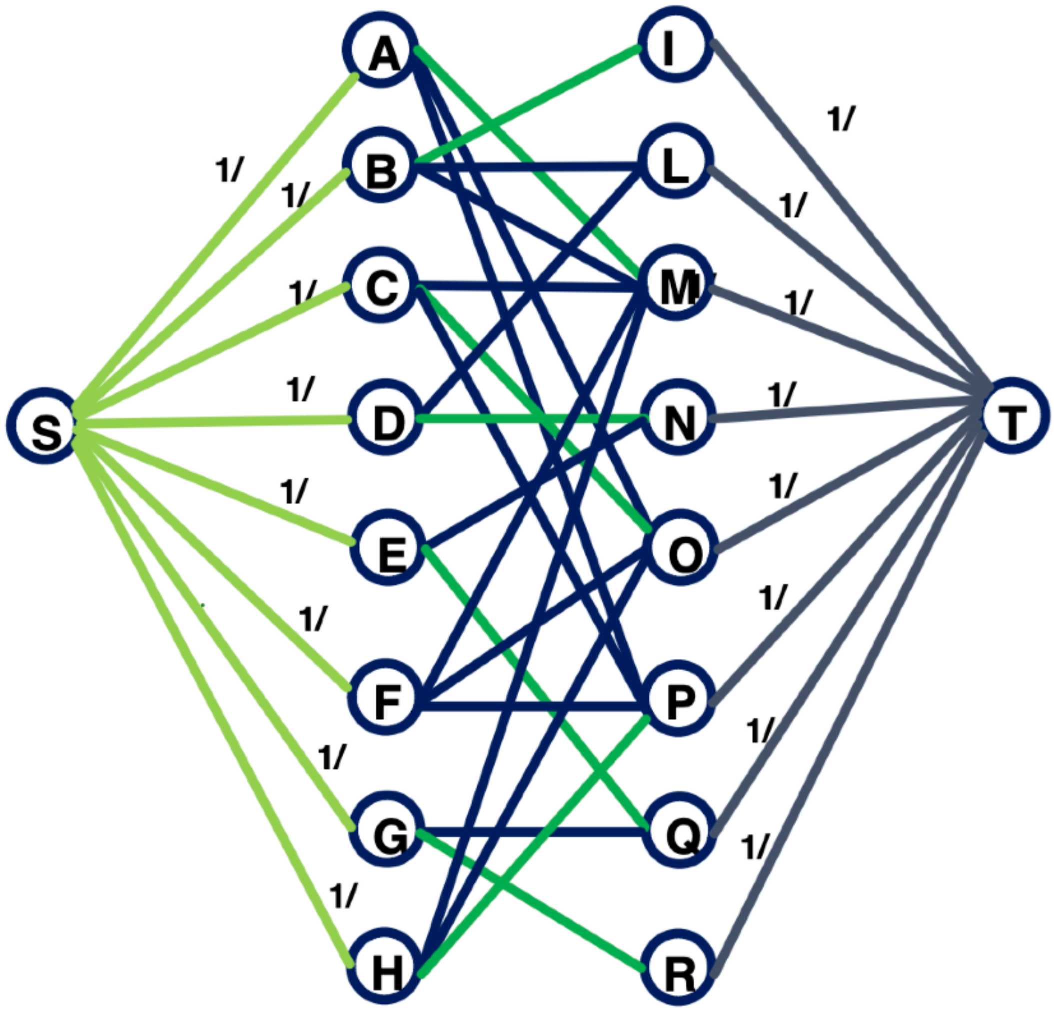
Dire quindi se **G ammette un matching V_1-completo**, ovvero un matching tale che ogni vertice di V_1 è estremo di uno spigolo del matching, oppure fornire un sottoinsieme Q di V_1 che viola la condizione di Hall.

Soluzione.

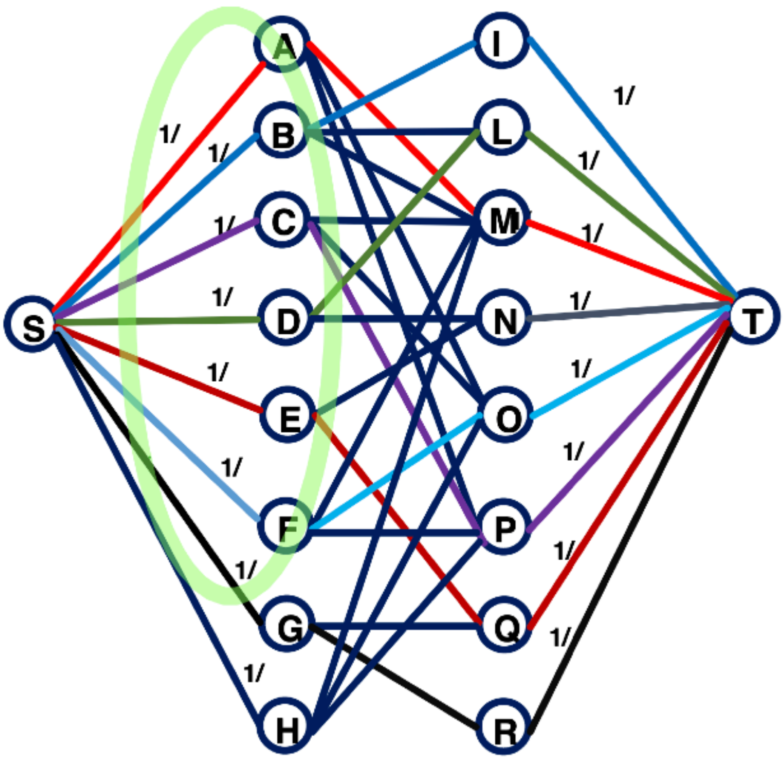
Il grafo richiesto è il seguente:



L'esercizio è molto semplice, proviamo a trasformarlo in un problema di massimo flusso.



Ora applichiamo l'algoritmo dei cammini aumentanti.



Utilizzando l'algoritmo del flusso dei cammini aumentanti(ad esempio, Ford-Fulkerson), possiamo calcolare il flusso massimo tra s e t.

Il valore del flusso di questo grafo su problema S-T è pari a 7.

La capacità del flusso massimo ci dice se il matching dato è massimo.

Il valore del flusso di questo grafo su problema S-T è pari a 7.

Se non esistono più **cammini aumentanti** (percorsi lungo i quali possiamo incrementare il flusso) da **s** a **t**, significa che il flusso trovato è massimo.

Quindi il matching di cardinalità **|M| = 7** assegnato dal problema è un **matching di cardinalità massima.**

È importante notare che il grafo G non ammette un matching V1-Completo perché preso l'insieme Q = {A,C,F,H}, N(Q) = {M,O,P}, quindi risulta:

|Q| = 4, |N(Q)| = 3;

Pertanto: |N(Q)|<|Q|.

Quindi **non esiste un matching V1-Completo.**

Tale verità si rendeva altresì manifesta quando abbiamo ricondotto il problema del matching a un problema di flusso: se il flusso massimo non raggiunge il valore 8, è vano attendersi un matching di egual valore. Il flusso massimo rivela, invero, che il massimo raggiungibile è un matching di cardinalità pari a |V1| - 1.

Ora, coma troviamo un certificato di ottimalità?

Il **certificato di ottimalità** è dato dal fatto che il **taglio minimo** ha la stessa capacità del flusso massimo.

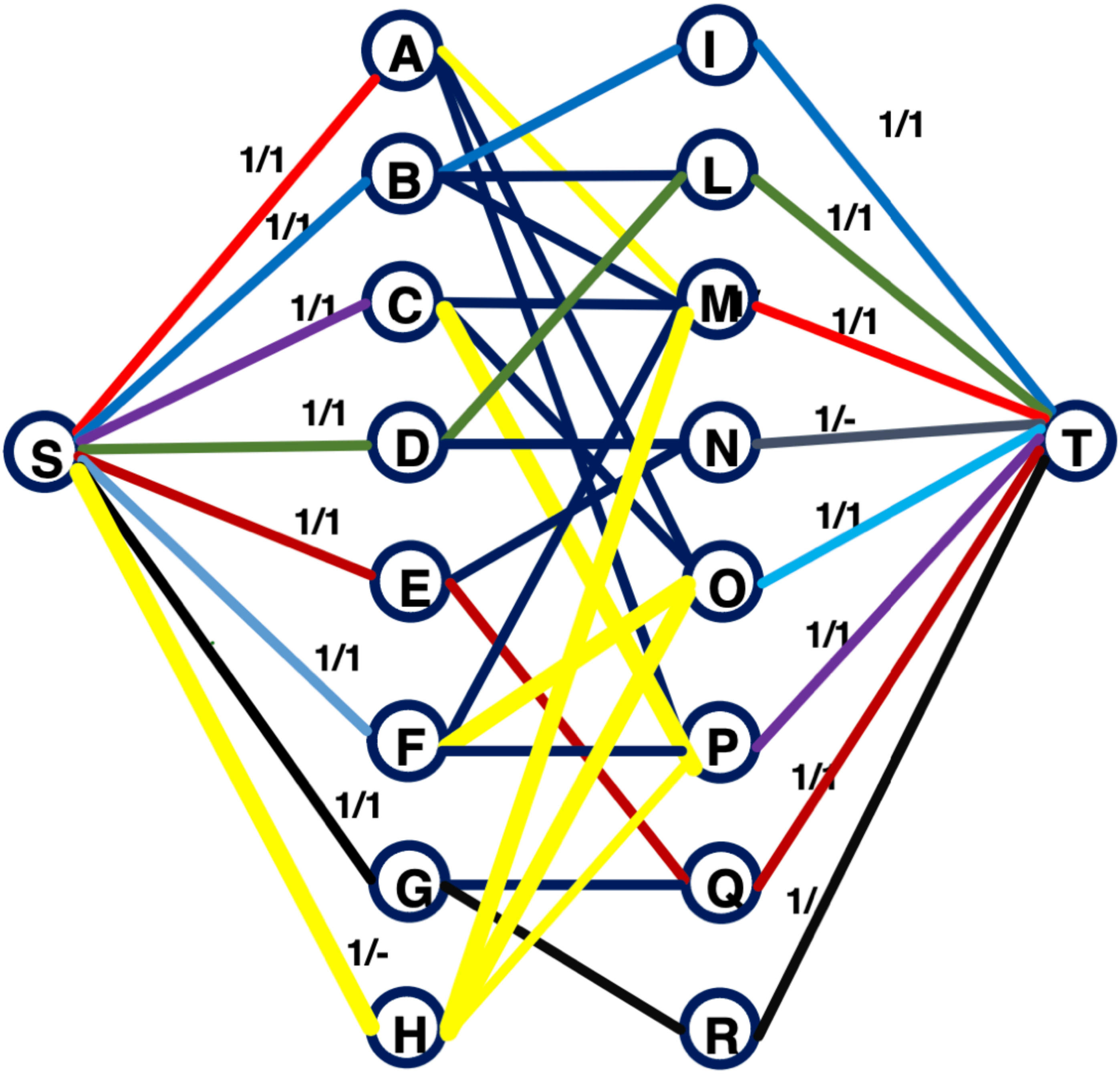
È evidente che in questo esercizio, il taglio minimo ha capacità 7, che coincide con il flusso massimo calcolato.

Attenzione, ora dobbiamo costruire il taglio indotto con i **soli nodi raggiungibili da S con cammini di due tipi:**

1. **Archi diretti non saturi;**
2. **Archi opposti non vuoti;**

Quindi possiamo tornare indietro in un nodo precedente nel taglio indotto purché ci sia già del flusso passante (non vuoto).

Il Flusso giallo rappresenta i nodi raggiungibili:



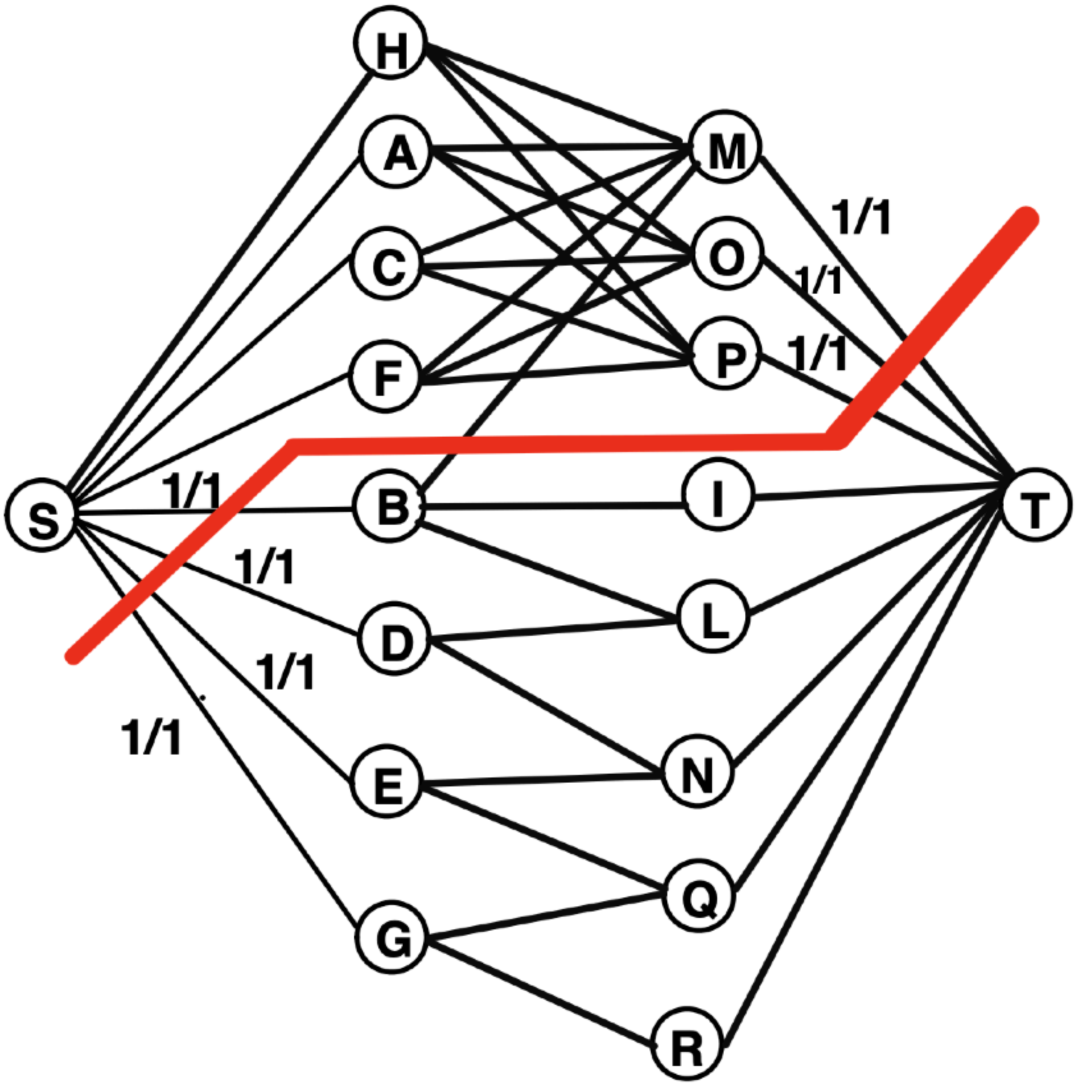
Questo perché da S posso raggiungere H poiché è vuoto, da H posso raggiungere M,O,P e da ciascuno di loro posso tornare indietro su un nodo di V1 purché ci sia almeno una unità di flusso che scorre sull'arco.

Ma allora vale tutto, abbiamo capacità unitaria, flusso unitario su archi intermedi, e questo ci permette di aggiungere anche i nodi C,F ed A.

L'insieme di partenza che costituisce il mio certificato di **taglio minimo è S = {S,H,M,O,P,A,C,F}**.

Il taglio di questo insieme deve necessariamente eguagliare il flusso massimo di questa rete, proprio per definizione di taglio minimo.

Inoltre tutti gli archi diretti di questo taglio saranno "saturi", tutti gli archi opposti di questo taglio saranno "vuoti".



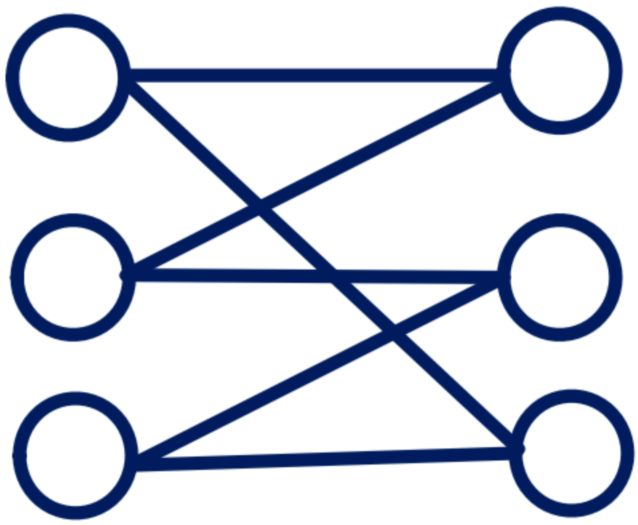
Come è facile notare tutti gli archi che procedono in direzione da S->V1 sono orientati verso l'insieme complementare di S, ossia S', che equivale ai nodi sottostanti al taglio, e proprio per questo motivo sono archi diretti, pertanto sommiamo la loro capacità: ci sono 4 nodi che incidono il taglio e siccome c'è capacità unitaria su ciascun nodo allora la somma sarà 4.
L'arco B->M è entrante nell'insieme S, non è diretto, quindi non influenza la capacità.
I restanti M,O,P sono orientati in uscita da S, pertanto verranno sommati con le loro capacità.
4 + 3 = 7.
Il taglio certifica il flusso.
Fine.

3. Esercizio: Condizione di Hall.

Si consideri un grafo bipartito G(X **U** Y, E) regolare, ovvero tale che tutti i vertici di X **U** Y abbiano lo stesso grado e si assuma che questo grado sia > 0. Dimostrare innanzitutto che in questo caso |X|= |Y |. Dimostrare quindi che il grafo ammette un matching X-completo.

Soluzione.

Dimostriamo il ragionamento preso un "grado" positivo maggiore di 0.



Il grado di ciascun vertice dell'unione è esattamente pari a 2.
È evidente che se non fossero tutti di grado 2 e ci fosse un nodo con un grado minore sicuramente un matching verrebbe meno perché non riusciremmo ad accoppiare tutti i nodi di X con tutti i nodi di Y, in questo caso non esisterebbe un match X-Completo.
È evidente che qualora fosse maggiore di 2 il match X-Completo esisterebbe.

Il numero di spigoli (archi) che incidono X è pari al grado moltiplicato il numero di nodi:

grado * |X|;

Tali spigoli devono essere uguali a quelli incidenti in Y, pertanto:

grado * |X| = grado * |Y|

Se grado = 2,

2 x 3 = 2 x 3
6 = 6.

E la condizione di Hall questa volta non ci garantisce che la carnalità dell'immagine di un sottoinsieme sia minore del sottoinsieme stesso, questo perché ad un nodo sono sempre

associati “gradi” nodi e, pertanto, il numero delle immagini (per un singolo nodo) sarà sempre maggiore del sottoinsieme composto da quel singolo nodo.
Mentre se effettuiamo un passo induttivo e prendiamo almeno 2 nodi come insieme Q comunque si parte da un mino di 2 per ricercare la carnalità di $|N(Q)|$, e 2 non è minore di $|Q| = 2$, questo porta ad una contraddizione e quindi la condizione di Hall non è rispettata e pertanto esiste un match X-Completo sempre.
Fine.

4. Esercizio: Flusso (Facile, evita).

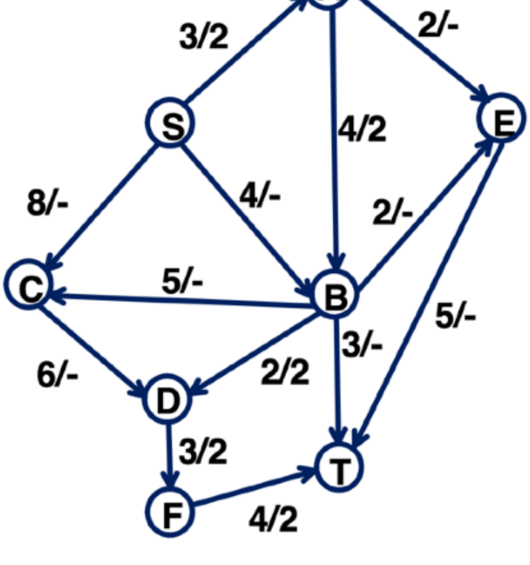
Si consideri la rete con insieme dei nodi N= {s, a, b, c, d, e, f, t}e insieme degli archi A= {(s, a), (s, b), (s, c), (a, b), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (b, t), (c, d), (d, f), (e, t), (f, t)} con capacità: $u_{sa} = 3$, $u_{sb} = 4$, $u_{sc} = 8$, $u_{ab} = 4$, $u_{ae} = 2$, $u_{bc} = 5$, $u_{bd} = 2$, $u_{be} = 2$, $u_{bt} = 3$, $u_{cd} = 6$, $u_{df} = 3$, $u_{et} = 5$, $u_{ft} = 4$.

Individuare un flusso s-t di valore massimo per la rete, partendo dal flusso iniziale:

$x_{sa} = 2$, $x_{sb} = 0$, $x_{sc} = 0$, $x_{ab} = 2$, $x_{ae} = 0$, $x_{bc} = 0$, $x_{bd} = 2$, $x_{be} = 0$, $x_{bt} = 0$, $x_{cd} = 0$, $x_{df} = 2$, $x_{et} = 0$, $x_{ft} = 2$

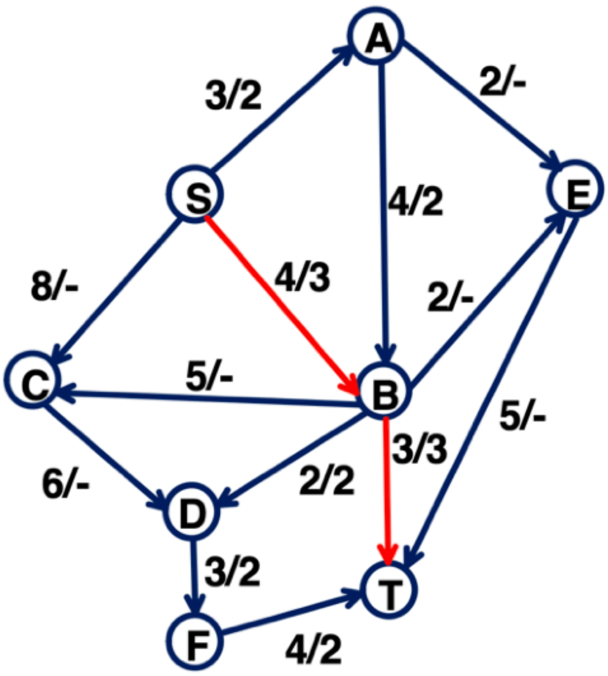
e **certificarne l’ottimalità.** Di quanto varia il valore del massimo flusso se la capacità dell’arco (s,a) aumenta di due unità? Giustificare la risposta.

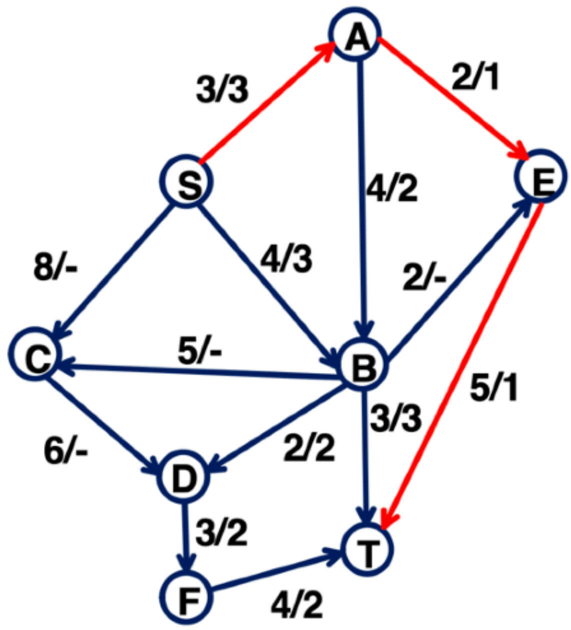
Svolgimento.



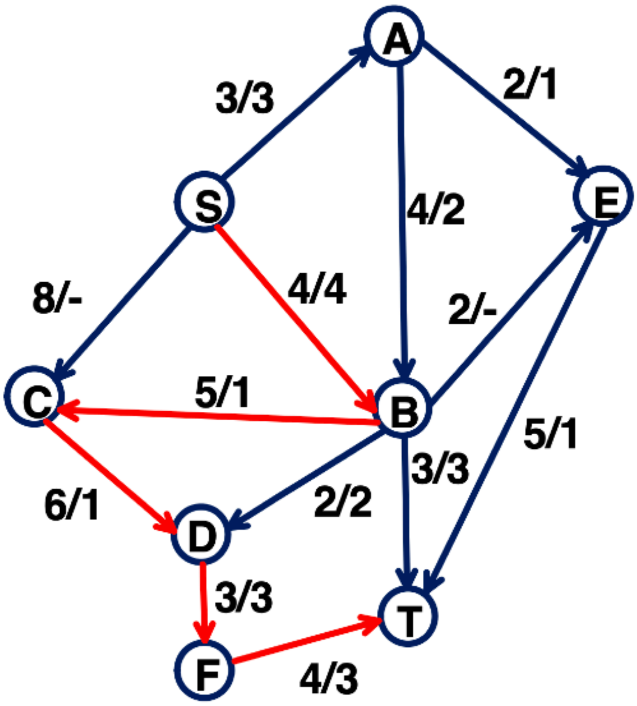
Algoritmo dei cammini aumentanti.

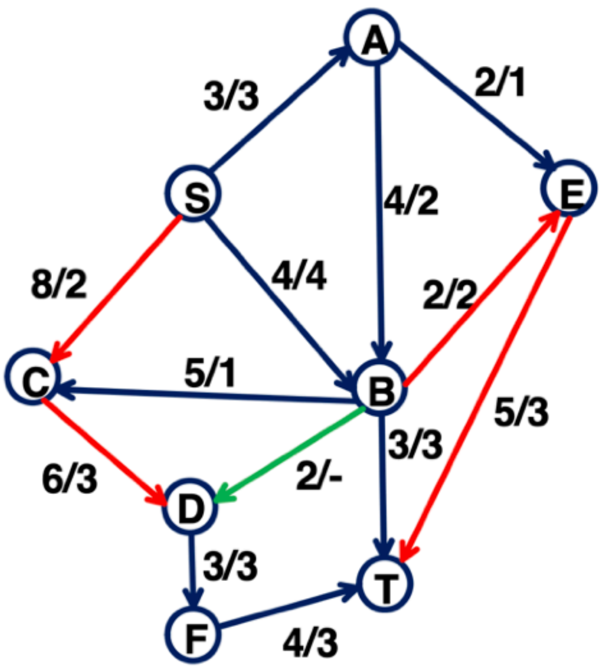
Val(f) = 2;



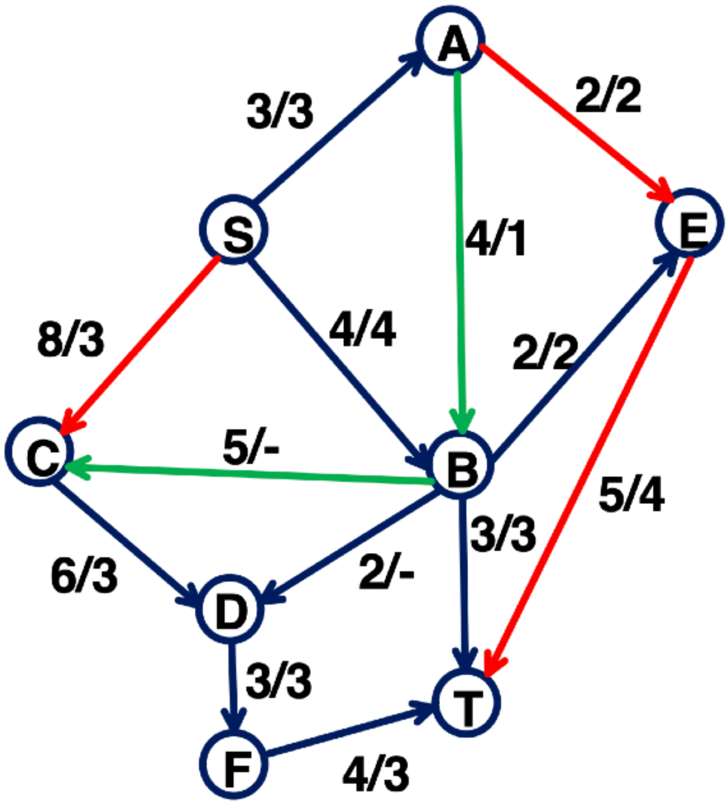


Val(f) = 2 + 3(sx) + 1(sx) = 6;



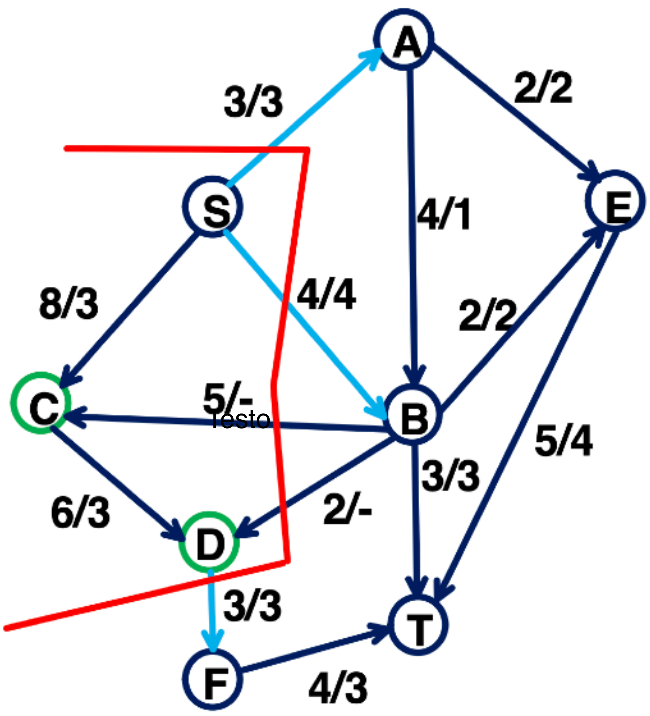


Val(f) = 6 + 1(sx) + 2(dx) = 9;

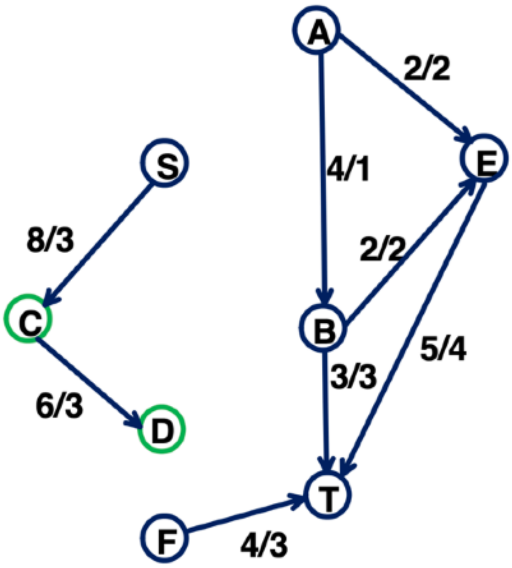


Val(f) = 9 + 1 = 10.
L'algoritmo si ferma.

Costruiamo il taglio indotto dai soli nodi raggiungibili.



Questo è il certificato che dimostra che la somma degli archi incidenti in quell'arco è pari a 3 + 4 + 3 = 10.
Il taglio è:
X = {S,C,D} Y = {A,B,E,T,F}.



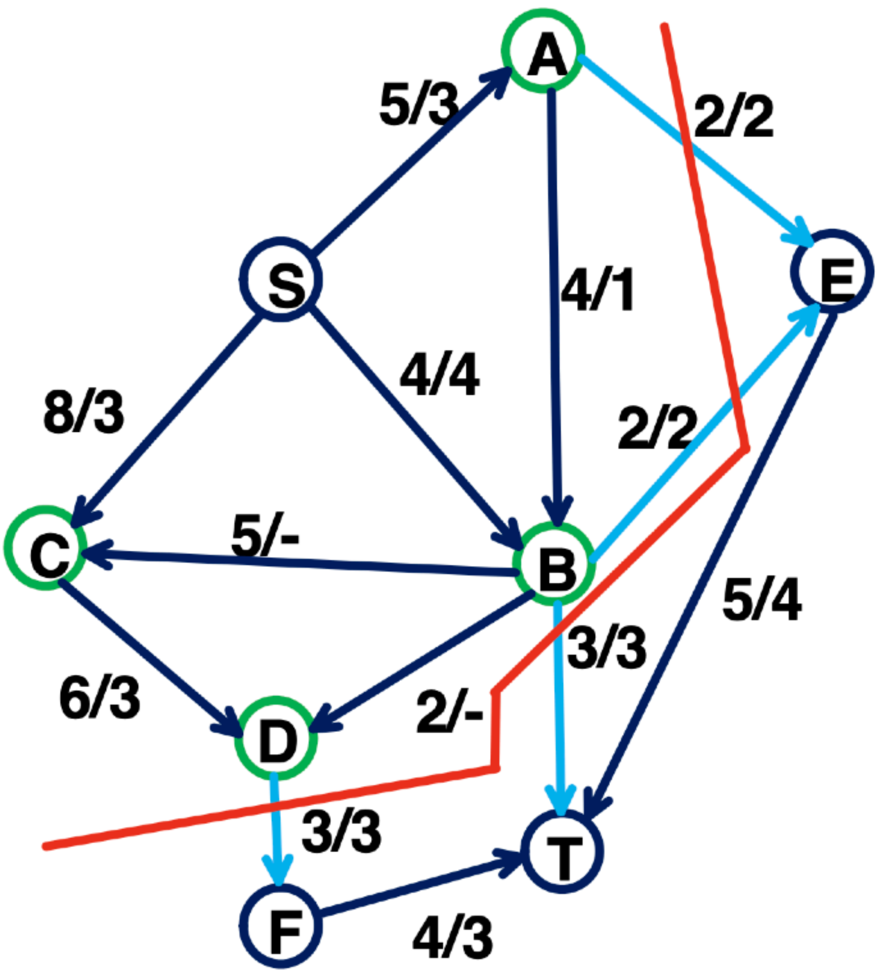
Se la capacità dell'arco S->A cresce di due unità, il valore del massimo flusso non subisce mutamento. È degno di nota, tuttavia, che l'arco S->A incida direttamente sul taglio minimo; ciò potrebbe indurre a credere che esso sia determinante ai fini del flusso massimo. In parte questo è veritiero, ma tale influenza si manifesta solo allorché, per mezzo di quest'aumento, si perviene al nodo T.

Il Professore, durante le lezioni, ha più volte "concesso" capacità aggiuntive ad alcuni archi. Tuttavia, se così facessi per l'arco S->A, non potrei comunque raggiungere il nodo T attraverso cammini aumentanti di primo o di secondo ordine.

E dunque, cosa muta? **Il certificato**. Questo è di somma importanza: se incremento la capacità di un arco, accresce la possibilità di raggiungere ulteriori nodi attraverso di esso e, di conseguenza, il taglio che attesta la massimalità del flusso varia.

Se avessi avuto la possibilità di raggiungere T sarebbe cambiato anche il valore del massimo flusso.

Quindi il nuovo certificato è X = {S,A,B,C,D}.

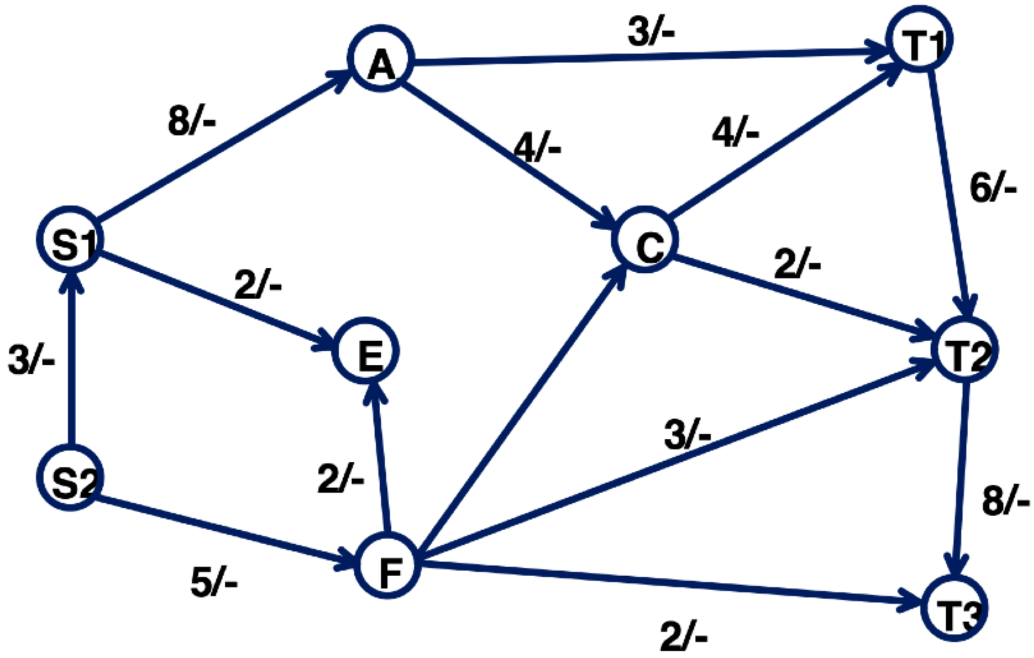


Il taglio ha sempre capacità 10.
Tutto dimostrato.

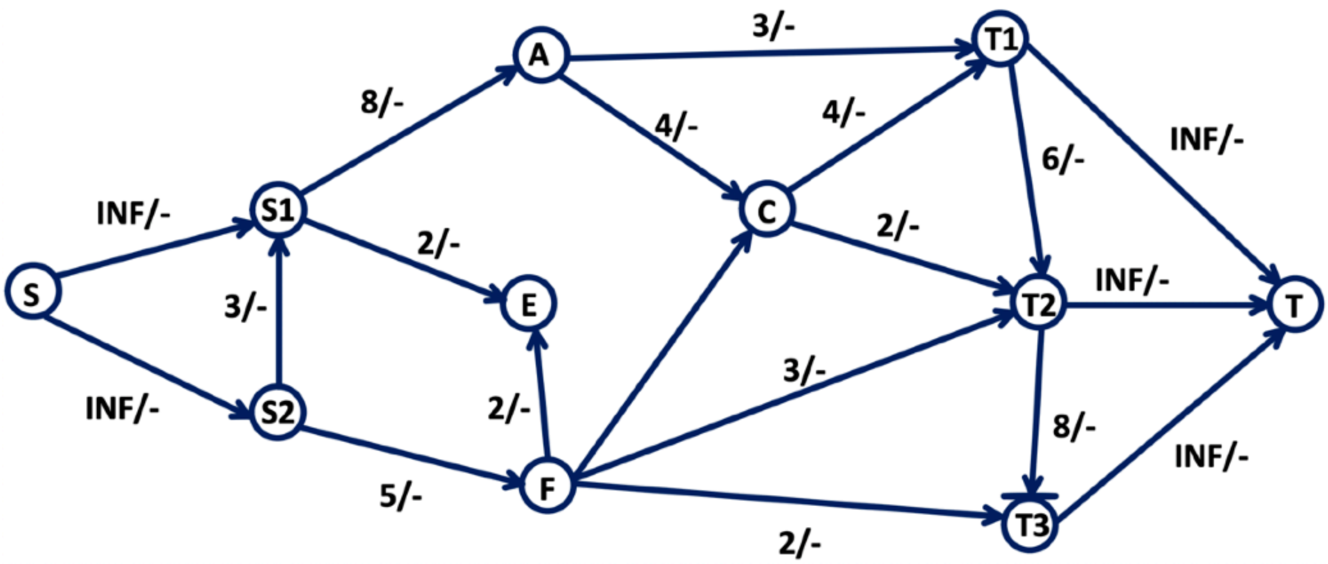
5. Esercizio: Flusso multi sorgente multi destinazione.

Individuare un flusso di valore massimo dalle sorgenti s_1, s_2 alle destinazioni t_1,t_2,t_3 per la rete nella Figura A e certificane l'ottimalità (nella figura ci sono un paio di refusi: i nodo t_1 e t_2 sono anche erroneamente indicati come B e D). Dire quindi se il valore del massimo flusso cambia se si aggiunge l'arco (e, c) di capacità 1.

Svolgimento. (F->C ha capacità 7)



Come primo procedimento dobbiamo effettuare l'aggancio dei nodi S e T.



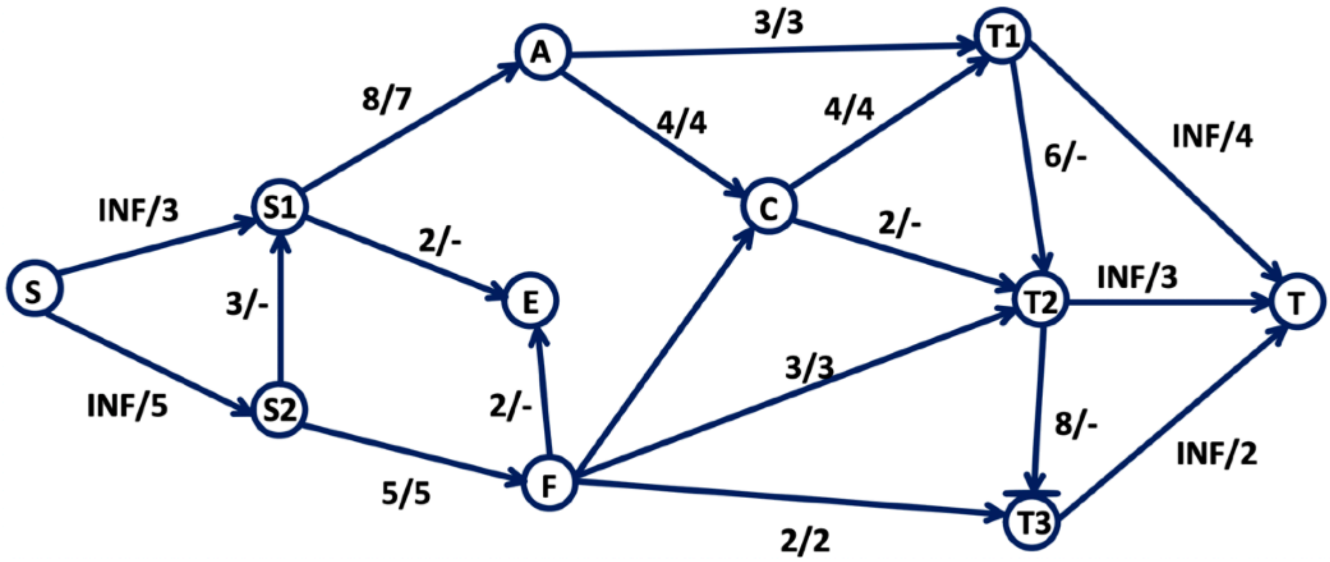
Il valore del flusso iniziale è 0.
Procediamo con i cammini aumentanti.

S->s1->A->T1->T.
Val(f) = 3;

S->s1->A->C->T1->T.
Val(f) = 3 + 4 = 7;

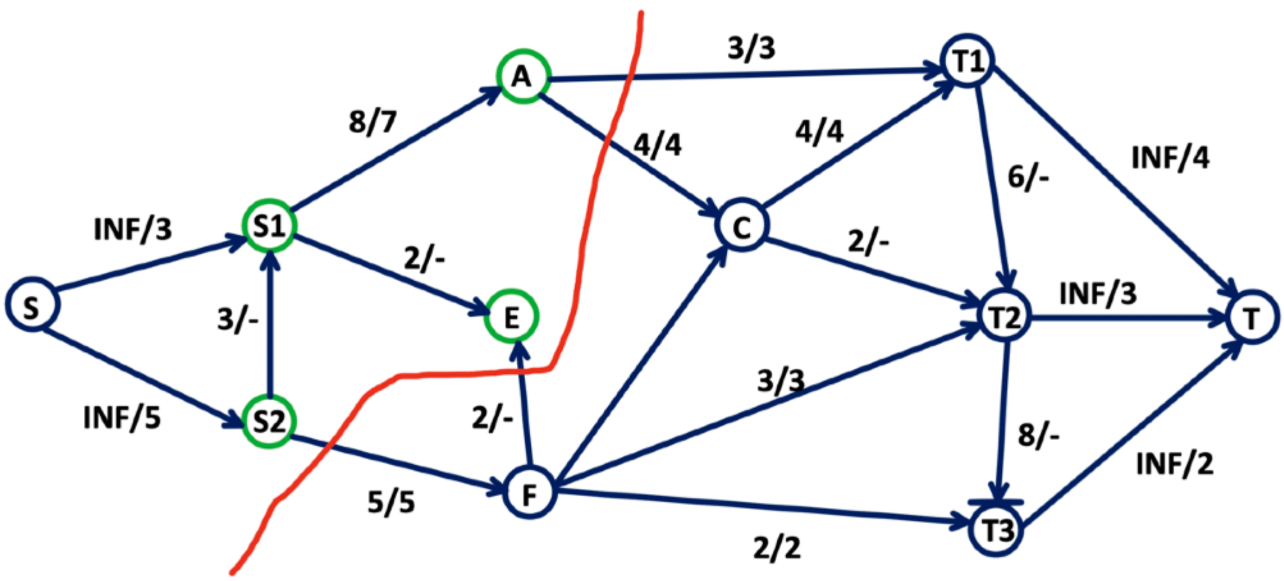
S->s2->F->T3->T.
Val(f) = 7 + 2 = 9;

S->s2->F->T2->T.
Val(f) = 9 + 3 = 12;



Il grafo allo stato attuale è questo.

Non ci sono più cammini.



Questo è il taglio che certifica la massimalità di 12.
Questo è l'esercizio della sinossi ma il professore penso abbia sbagliato.
Esercizio13_Sinossi_Flusso.

Taglio = {S,S1,S2,A,E}.