ESERCIZI SU OPERAZIONI SUI LINGUAGGI, LINGUAGGI REGOLARI, AUTOMI A STATI FINITI E PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI REGOLARI

Docente: Cataldo Musto

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Si ringrazia il prof. Marco de Gemmis
ed il Tutor 2018-2019: *Francesco Paolo Caforio*

Esercizio #1

Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b^k c \mid n \geq k \geq 0\}$$

non è lineare destro

Esercizio #1 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - c
  - ac
  - a^2c
  - a^3c
  - …
  - abc
  - a^2bc
  - a^3bc
  - …

Esercizio #1 - Soluzione

- Supponiamo, <u>per assurdo</u>, che L sia lineare destro
- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
  - Quindi, se L è lineare è anche regolare ed anche a stati finiti
- Quindi: $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)$ FSA su $X = (a, b, c)$ tale che
$$L = T(M)$$
- Sia $p = |Q|$, ossia p è il numero di stati di M
- Per il Pumping lemma sui linguaggi regolari abbiamo che $\forall z \in L$, $|z| \geq p$
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq p$
  - $v \neq \lambda$
  - $\forall k \geq 0: uv^k w \in T(M)$

Esercizio #1 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L
$$z = a^p b^p c$$
- Avremo che
  - $|z| = 2p + 1 > p$
  - z deve essere accettata da M

Esercizio #1 - Soluzione

- L'automa M parte dallo stato q_0 e legge una a per volta
- Dopo aver letto la prima a si porta in q_1, dopo la seconda a in $q_2, \ldots$, dopo la n-sima a si porta in q_p

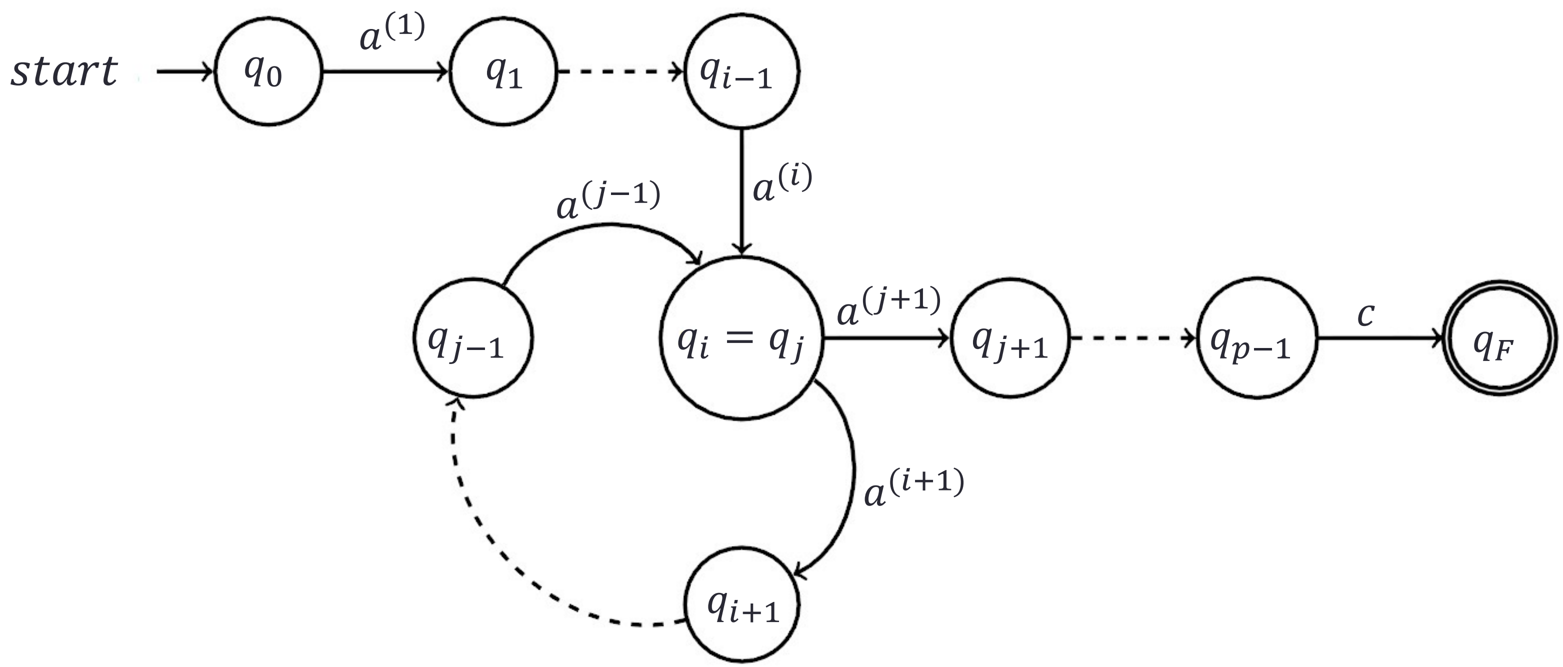
Esercizio #1 - Soluzione

- Per riconoscere le prime p a, l'automa M ha bisogno di transitare in $p+1$ stati

$$p\ a \begin{cases} q_0 \overset{a}{\to} q_1 \\ q_1 \overset{a}{\to} q_2 \\ \dots \\ q_{p-1} \overset{a}{\to} q_p \end{cases}$$

- Poiché M ha solo p stati si deve verificare un ciclo

Esercizio #1 - Soluzione



Trace di M

Esercizio #1 - Soluzione

- Avremo che:
  - z si può scrivere come
$$z = uvw = \underbrace{a^i}_{u}\,\underbrace{a^{j-i}}_{v}\,\underbrace{a^{p-j}b^p c}_{w}$$
  - $|uv| = |a^i a^{j-i}| \leq p$
  - $a^{j-i} \neq \lambda, 0 < j - i \leq p$
- Sia $k = 0$, per il lemma abbiamo che la parola depompata $uv^k w \in T(M)$
$$t = uv^0 w = a^{p-(j-i)} b^p c \in T(M)$$
- Osservazione: $uv^0 w \notin L$, dato che $\#_a(t) < \#_b(t)$

Esercizio #1 - Soluzione

- Abbiamo raggiunto una **contraddizione**
- L non è regolare in quanto $\exists M$ tale che $T(M) = L$
- L non è lineare destro

Esercizio #2

Dimostrare formalmente che il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b c^{3n} | n > 0\}$$

non è lineare destro

Esercizio #2 - Soluzione

- Parole che costituiscono il linguaggio L
  - abc^3
  - a^2bc^6
  - a^3bc^9
  - a^4bc^{12}
  - ...

Esercizio #2 - Soluzione

- Supponiamo, <u>per assurdo</u>, che L sia lineare destro
- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
  - Quindi, se L è lineare è anche regolare ed anche a stati finiti
- Quindi: $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)\ FSA$ su $X = (a, b, c)$ tale che
$$L = T(M)$$
- Sia $p = |Q|$, ossia p è il numero di stati di M
- Per il Pumping lemma sui linguaggi regolari abbiamo che $\forall z \in L,\ |z| \geq p$
  - $z = uvw$
  - $|uv| \leq p$
  - $v \neq \lambda$
  - $\forall k \geq 0: uv^k w \in T(M)$

Esercizio #2 - Soluzione

- Consideriamo una parola in L
$$z = a^p bc^{3p}$$
- Avremo che
  - $|z| = p + 3p > p$
  - z deve essere accettata da M

Esercizio #2 - Soluzione

- L'automa M parte dallo stato q_0 e legge una a per volta
- Dopo aver letto la prima a si porta in q_1, dopo la seconda a in $q_2, \ldots,$ dopo la n-sima a si porta in q_p

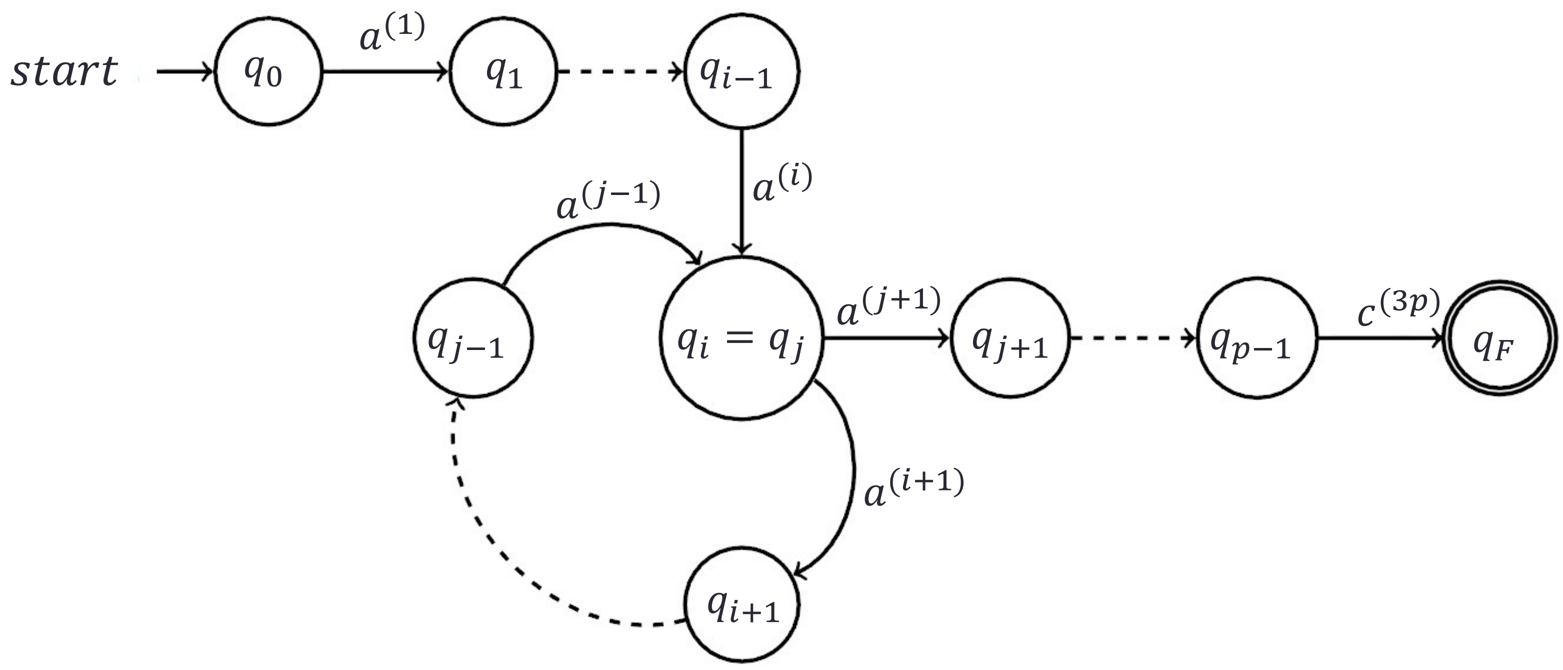
Esercizio #2 - Soluzione

- Per riconoscere le prime p a, l'automa M ha bisogno di transitare in $p+1$ stati

$$p\ a \begin{cases} q_0 \overset{a}{\rightarrow} q_1 \\ q_1 \overset{a}{\rightarrow} q_2 \\ \dots \\ q_{p-1} \overset{a}{\rightarrow} q_p \end{cases}$$

- Poiché M ha solo p stati si deve verificare un ciclo

Esercizio #2 - Soluzione



Trace di M

Esercizio #2 - Soluzione

- Avremo che:
  - z si può scrivere come
$$z = uvw = \underbrace{a^i}_{u}\,\underbrace{a^{j-i}}_{v}\,\underbrace{a^{p-j}bc^{3p}}_{w}$$
  - $|uv| = |a^i a^{j-i}| \leq p$
  - $v \neq \lambda$, infatti $a^{j-i} \neq \lambda, 0 < j - i \leq p$
- Sia $k > 0$, per il lemma abbiamo che la parola pompata $uv^k w \in T(M)$
$$t = uv^k w = a^{p+k(j-i)}bc^{3p} \in T(M)$$
- Osservazione: $uv^k w \notin L$, dato che $\#_c(t) \neq 3\#_a(t)$

Esercizio #2 - Soluzione

- Abbiamo raggiunto una **contraddizione**
- L non è regolare in quanto $\exists M$ tale che $T(M) = L$
- L non è lineare destro

Esercizio #3

Sia L_1 il linguaggio formale su $X = \{a, b\}$ denotato dall'espressione regolare $(a + b)^*$.

Sia L_2 il linguaggio formale su $X = \{a, b\}$ denotato dall'espressione regolare ab.

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$

Esercizio #3 - Soluzione

- $R_1 = (a + b)^*$
  - Troviamo ora $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1

$$S\big((a+b)^*\big) = \big(S(a+b)\big)^* = \big(S(a) \cup S(b)\big)^* =$$
$$= (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a, b\}^*$$

Esercizio #3 - Soluzione

- $R_2 = ab$
  - Troviamo ora $S(R_2)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_2

$$S(ab) = \big(S(a) \cdot S(b)\big) = \{ab\}$$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
  - Sia G_1 grammatica generativa $G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$ t.c. $L_1 = L(G_1)$
    - $X_1 = \{a, b\}$
    - $V = \{S_1\}$
    - S_1 assioma
    - $P_1 = \{S_1 \rightarrow \lambda \,|aS_1|bS_1\}$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
  - Sia G_2 grammatica generativa $G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$ t.c. $L_2 = L(G_2)$
    - $X_2 = \{a, b\}$
    - $V = \{S_2\}$
    - S_2 assioma
    - $P_2 = \{S_2 \to aA, A \to b\}$

Esercizio #3 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $L = L_1 \cdot L_2$
    - $P_1 = \{S_1 \rightarrow \lambda \,|aS_1|bS_1\}$
    - $P_2 = \{S_2 \rightarrow aA, A \rightarrow b\}$

$$G = (X, V - \{S\}, S_1, P)$$
$$P = \{A \rightarrow bB \mid A \rightarrow bB \in P_1\} \cup$$
$$\cup \{A \rightarrow bS_2 \mid A \rightarrow b \in P_1,\ b \neq \lambda\} \cup$$
$$\cup \{A \rightarrow bS_2 \mid A \rightarrow bB \in P_1,\ B \rightarrow \lambda \in P_1\} \cup$$
$$\cup \{S_1 \rightarrow w \mid S_2 \rightarrow w \in P_2,\ S_1 \rightarrow \lambda \in P_1\} \cup P_2$$

- $G = (X, V - \{S\}, S_1, P)$
    - $X = \{a, b\}$
    - $V = \{S_1, S_2, A\}$
    - S_1 assioma
    - $P = \{S_1 \rightarrow aS_1|bS_1|aS_2|bS_2|aA, S_2 \rightarrow aA, A \rightarrow b\}$

Esercizio #4

Sia data la seguente grammatica lineare destra $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{a, b\}, V = \{S, A, b\}, S$$

$$P = \{S \to a|aA|aB, A \to aB|bA, B \to b|bB\}$$

- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti M che riconosce $L(G)$

Esercizio #4 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = (Q, \delta, q_0, F)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = V \cup \{q\} = \{S, A, B\} \cup \{q\}$, $q \notin V$ insieme degli stati
  - $q_0 = S$
  - $F = \{q\} \cup \{B | B \to \lambda \in P\} = \{q\}$

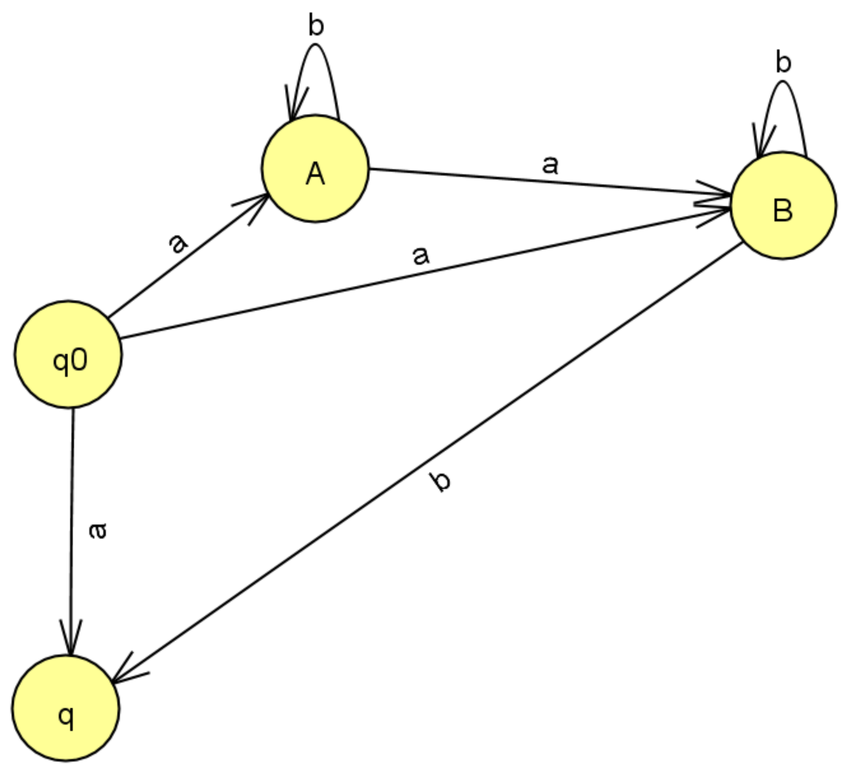
Esercizio #4 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = (Q, \delta, q_0, F)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:
  - $\delta: Q \times V \rightarrow 2^Q$ t.c.
    - $\forall A \rightarrow bC \in P$, allora $C \in \delta(A, b)$
    - $\forall A \rightarrow b \in P$, allora $q \in \delta(A, b)$

δ	S	A	B	q
a	$\{A, B, q\}$	$\{B\}$	$-$	$-$
b	$-$	$\{A\}$	$\{B, q\}$	$-$

Esercizio #4 - Soluzione

- Data la grammatica $G = (X, V, S, P)$ lineare destra, l'automa $M = (Q, \delta, q_0, F)$ t.c. $L = T(M)$ viene costruito come segue:
  - Diagramma degli stati



Esercizio #5

Sia dato il seguente automa riconoscitore a stati finiti non deterministico

$$M = (Q, \delta, q_0, F)$$

con alfabeto di ingresso $X = \{1,2\}$ ove

$$Q = \{q_0, B, C, D\}$$

$\delta(q_0, 1) = \{B, C\}$ $\quad$ $\delta(q_0, 2) = \{D\}$

$\delta(B, 1) = \{B, D\}$ $\quad$ $\delta(B, 2) = -$

$\delta(C, 1) = \{D\}$ $\quad$ $\delta(C, 2) = -$

$\delta(D, 1) = -$ $\quad$ $\delta(D, 2) = \{B\}$

$$F = \{D\}$$

Esercizio #5

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $T(M)$
- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti deterministico equivalente a M

Esercizio #5 - Soluzione

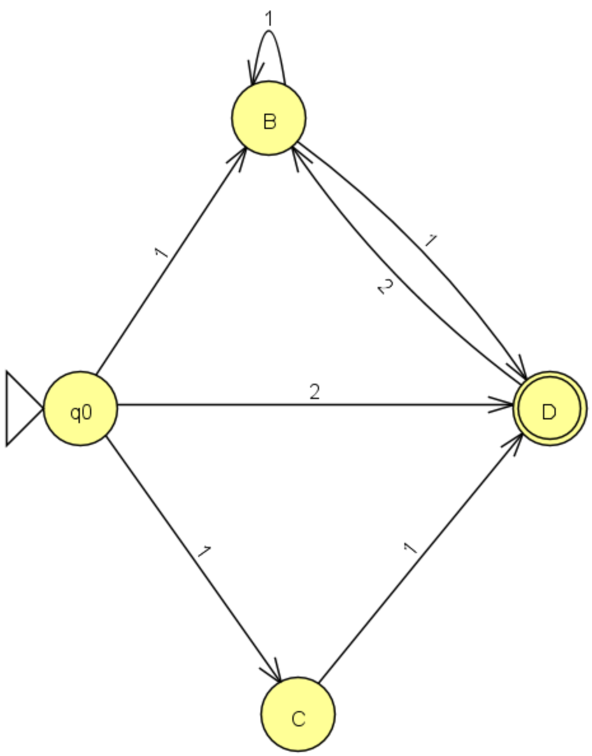
- Determinare una grammatica lineare destra che genera $T(M)$
  - $G = (X, V, S, P)$ t.c. $L(G) = T(M)$ si costruisce secondo il seguente algoritmo
    - $X = \{1,2\}$ coincide con l'alfabeto di ingresso di M
    - $S = q_0$
    - $V = Q = \{q_0, B, C, D\}$

Esercizio #5 - Soluzione

- Determinare una grammatica lineare destra che genera $T(M)$
  - $G = (X, V, S, P)$ t.c. $L(G) = T(M)$ si costruisce secondo il seguente algoritmo
    - $P = \{q \to xq' | q' \in \delta(q, x)\} \cup$
      $\cup \left\{\{q \to x | \delta(q, x) \in F\right\} \cup \{q_0 \to \lambda | q_0 \in F\}$
    - $P = \{S \to 1B|1C|2D|2, B \to 1B|1D|1,$
      $C \to 1D|1, D \to 2B\}$

Esercizio #5 - Soluzione

- Costruire il diagramma di transizione di un automa a stati finiti deterministico equivalente a M



Esercizio #6

Sia dato il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$$

- Di che tipo è L?
  - Il più specifico nella gerarchia di Chomsky
- Giustificare formalmente la risposta

Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$
    - $L_1 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_1 FSA$ t.c. $M_1 = T(M_1)$

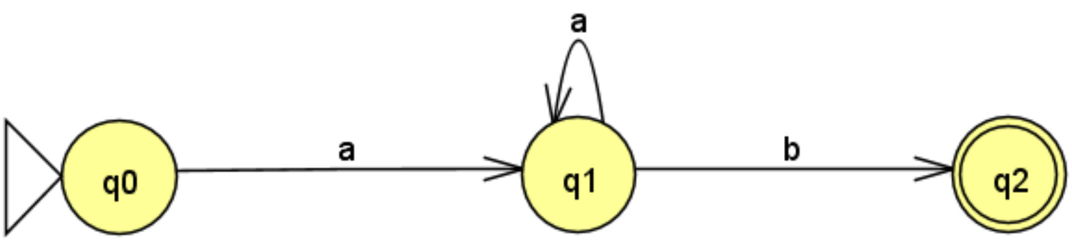
Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$
  - $L_1 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_1 FSA$ t.c. $M_1 = T(M_1)$
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ insieme degli stati,$F = \{q_2\}$ stato finale
  - $\delta: Q \times Q \rightarrow Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_1	$-$
b	$-$	q_2	$-$

Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$



- Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
- Quindi, $L_1 \in \mathcal{L}_3$

Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
    - $L_2 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_2 FSA$ t.c. $M_2 = T(M_2)$

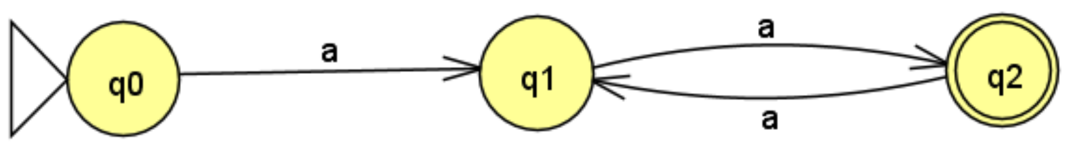
Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
  - $L_2 \in \mathcal{L}_{FSL}$ in quanto $\exists M_2\ FSA$ t.c. $M_2 = T(M_2)$
  - $X = \{a, b\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ insieme degli stati,$F = \{q_2\}$ stato finale
  - $\delta: Q \times Q \rightarrow Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_2	q_1

Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$



  - Per il teorema di Kleene, $\mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{FSL} \equiv \mathcal{L}_{REG}$
  - Quindi, $L_2 \in \mathcal{L}_3$

Esercizio #6 - Soluzione

- Di che tipo è $L = \{a^n b a^{2m} | n, m > 0\}$?
  - $L = L_1 \cdot L_2$ dove $L_1 = \{a^n b | n > 0\}$ e $L_2 = \{a^{2m} | m > 0\}$
- Per il teorema di chiusura, $L \in \mathcal{L}_3$ perché concatenazione di L_1 e L_2 linguaggi lineari destri

Esercizio #7

Progettare, commentando opportunamente, un automa a stati finiti che riconosce il seguente linguaggio:

$$L = \{w \in X^* | \#1(w) = 3k, k > 0\}$$

dove

$X = \{0,1,2\}$

$\#x(w)$ indica il numero delle volte che il simbolo $x \in X$ compare nella stringa w

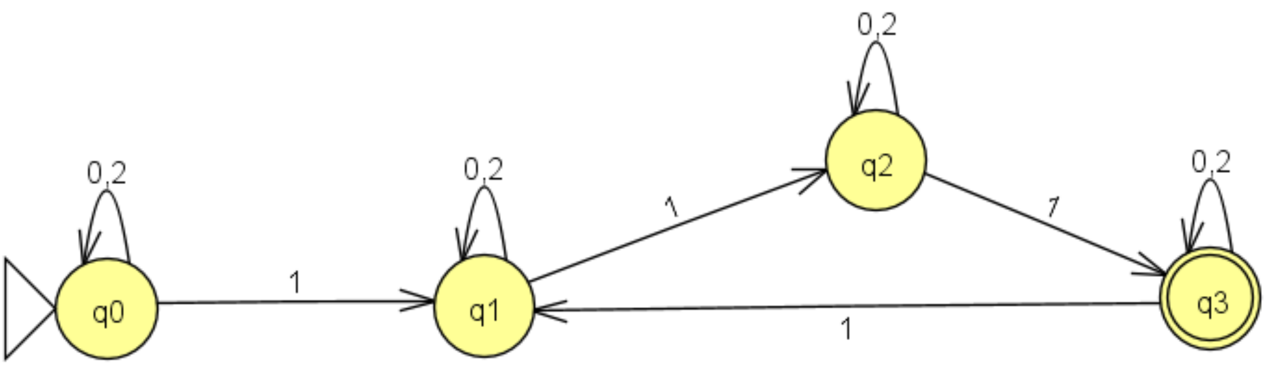
Esercizio #7 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)$ FSA t.c. $L = T(M)$
  - $X = \{0,1,2\}$ alfabeto di ingresso
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ insieme finito e non vuoto di stati
  - $F = \{q_3\}$ insieme degli stati finali

Esercizio #7 - Soluzione

- $L \in \mathcal{L}_{FSL}$ dato che $\exists M = (Q, \delta, q_0, F)\ FSA$ t.c. $L = T(M)$
  - $\delta: Q \times Q \to Q$ funzione di transizione t.c.

δ	q_0	q_1	q_2	q_3
0	q_0	q_1	q_2	q_3
1	q_1	q_2	q_3	q_1
2	q_0	q_1	q_2	q_3



Esercizio #8

Si considerino le seguenti espressioni regolari:

$$R_1 = (01)^* + 1 + 0$$

$$R_2 = 0^*1^*$$

- Determinare $L = S(R_1) \cap S(R_2)$

Esercizio #8 - Soluzione

- $R_1 = (01)^* + 1 + 0$
  - Troviamo ora $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1
    $$S\big((01)^* + 1 + 0\ \big) = S((01)^*) \cup S(1) \cup S(0) =$$
    $$= (S(01))^* \cup S(1) \cup S(0) = \{01\}^* \cup \{1\} \cup \{0\}$$
  - $S(R_1) = \{\lambda, 0,1,01,0101,010101,01010101, \dots\}$

Esercizio #8 - Soluzione

- $R_2 = 0^*1^*$
  - Troviamo ora $S(R_1)$, ossia il linguaggio regolare corrispondente all'espressione regolare R_1

$S(0^*1^*) = S(0^*) \cdot S(1^*) = \big(S(0)\big)^* \cdot \big(S(1)\big)^* = \{0\}^* \cdot \{1\}^*$

  - $S(R_2) = \{\lambda, 0,1,01,001,0001, \dots , 011,0111, \dots\}$

Esercizio #8 - Soluzione

- Determinare $L = S(R_1) \cap S(R_2)$
  - $S(R_1) = \{\lambda, 0,1,01,0101,010101,01010101, \dots\}$
  - $S(R_2) = \{\lambda, 0,1,01,001,0001, \dots, 011,0111, \dots\}$
  - $L = S(R_1) \cap S(R_2) = \{\lambda, 0,1,01\}$
- Calcolare L^2
  - $L^2 = \{\lambda, 0,1,01,00,01,001,10,11,101,010,011,0101\}$

Esercizio #9

Siano dati l'alfabeto $X = \{a, b\}$ ed il linguaggio

$$L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$$

- Determinare un'espressione regolare che denoti L

Esercizio #9 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L = \mathrm{L}_1 \cdot L_2 \cdot L_3$
  - $L_1 = \{w_1 | w_1 \in \{a, b\}^*\}$
  - $L_2 = bb$
  - $L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$

Esercizio #9 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_1 = \{w_1 | w_1 \in \{a, b\}^*\}$
  - $R_1 = (a + b)^*$

Esercizio #9 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_2 = bb$
  - $R_2 = bb$

Esercizio #9 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
  - $R_3 = (aa)^*$

Esercizio #9 - Soluzione

- $L = \{w_1 w_2 w_3 | w_1 \in X^*, w_2 = bb, w_3 = a^{2n}, n \geq 0\}$
  - Determinare un'espressione regolare che denoti L
  - $L_1 = \{w_1 | w_1 \in \{a, b\}^*\}, L_2 = bb, L_3 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
  - $R_1 = (a + b)^*, R_2 = bb, R_3 = (aa)^*$
  - $R = (a + b)^* bb(aa)^*$