ESERCIZI SU ALBERI DI DERIVAZIONE E PUMPING LEMMA

Linguaggi liberi da contesto

Docente: Cataldo Musto

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Si ringrazia il prof. Marco De Gemmis ed
Il tutor Francesco Paolo Caforio per il Materiale

Esercizi

- Dimostrazione di non-libertà dal contesto tramite il Pumping Lemma

Esercizio 1

Sia dato il linguaggio $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$

1. Determinare la grammatica G che genera L
2. Che tipo di grammatica è G?
3. Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che L non è libero da contesto

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Quali sono le parole del linguaggio?

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Quali sono le parole del linguaggio?
  - $L = \{a^1 b^1 c^1, a^2 b^2 c^2, \ldots\} = \{abc, aabbcc, aaabbbccc, \ldots\}$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Quali sono le parole del linguaggio?
  - $L = \{a^1 b^1 c^1, a^2 b^2 c^2, \dots\} = \{abc, aabbcc, aaabbbccc, \dots\}$
  - Ci servono i simboli terminali $X = \{a, b, c\}$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Come ricaviamo le regole di produzione?

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Come ricaviamo le regole di produzione?
- Consideriamo la parola più corta in L, $w = abc$. Una sua possibile derivazione è: $S \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Come ricaviamo le regole di produzione?
- Consideriamo la parola più corta in L, $w = abc$. Una sua possibile derivazione è: $S \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$
- Questa derivazione può essere prodotta dalle regole: $\mathrm{P} = \{S \to aBC,\ aB \to ab,\ bC \to bc\}$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ aB \rightarrow ab,\ bC \rightarrow bc\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2 b^2 c^2$?

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ aB \rightarrow ab,\ bC \rightarrow bc\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2b^2c^2$?
  - Ci serve sicuramente una regola ricorsiva $S \rightarrow aSBC$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ aB \rightarrow ab,\ bC \rightarrow bc\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2b^2c^2$?
  - Ci serve sicuramente una regola ricorsiva $S \rightarrow aSBC$
  - Adesso, $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow \ldots$?

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \to aBC,\ S \to aSBC,\ aB \to ab,\ bC \to bc,\ CB \to BC\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2b^2c^2$?
  - Ci serve sicuramente una regola ricorsiva $S \to aSBC$
  - Adesso, $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow \ldots$?
  - Ci serve anche una regola che effettui uno scambio di nonterminali $CB \to BC$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ aB \rightarrow ab,\ bC \rightarrow bc,\ CB \rightarrow BC\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2b^2c^2$?
  - Ci serve sicuramente una regola ricorsiva $S \rightarrow aSBC$
  - Adesso, $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow \ldots$?
  - Ci serve anche una regola che effettui uno scambio di nonterminali $CB \rightarrow BC$
  - Infine, ci servono le regole $bB \rightarrow bb,\ cC \rightarrow cc$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ aB \rightarrow ab,\ bC \rightarrow bc,\ CB \rightarrow BC,$ $bB \rightarrow bb,\ cC \rightarrow cc\}$
- Come possiamo derivare la parola $a^2b^2c^2$?
  - Adesso, $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow$ $aabbcC \Rightarrow aabbcc$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- $\mathrm{P} = \{S \to aBC,\ S \to aSBC,\ aB \to ab,\ bC \to bc,\ CB \to BC,\ bB \to bb,\ cC \to cc\}$
- Le derivazioni di parole più lunghe non hanno bisogno di altre regole: $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^n(BC)^n \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^nB^nC^n \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^nb^nc^n$

Esercizio 1 – Soluzione (1)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- In conclusione, abbiamo $G = (X, V, S, P)$ con
  - $X = \{a, b, c\}$
  - $V = \{S, A, B, C\}$
  - $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ CB \rightarrow BC,\ aB \rightarrow ab,\ bB \rightarrow bb,\ bC \rightarrow bc,$ $cC \rightarrow cc\}$

Esercizio 1 – Soluzione (2)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- In conclusione, abbiamo $G = (X, V, S, P)$ con
  - $X = \{a, b, c\}$
  - $V = \{S, A, B, C\}$
  - $\mathrm{P} = \{S \rightarrow aBC,\ S \rightarrow aSBC,\ CB \rightarrow BC,\ aB \rightarrow ab,\ bB \rightarrow bb,\ bC \rightarrow bc,\ cC \rightarrow cc\}$
- Che tipo di grammatica è G?

Esercizio 1 – Soluzione (2)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- In conclusione, abbiamo $G = (X, V, S, P)$ con
  - $X = \{a, b, c\}$
  - $V = \{S, A, B, C\}$
  - $\mathrm{P} = \{S \to aBC,\ S \to aSBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
- Che tipo di grammatica è G?
  - È monotona. Per il teorema di equivalenza delle grammatiche monotone e contestuali, esiste una grammatica contestuale G' equivalente a G

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto.

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto.
- Allora, per il Pumping Lemma, $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $\forall z \in L, |z| > p \Rightarrow z = uvwxy$, con le seguenti proprietà:

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto.
- Allora, per il Pumping Lemma, $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $\forall z \in L, |z| > p \Rightarrow z = uvwxy$, con le seguenti proprietà:
  - $|vwx| \leq p$
  - $vx \neq \lambda$
  - $\forall i,\ i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
  - Ovviamente $z \in L$ e $|z| = 3p > p$, quindi il Pumping Lemma può essere applicato.

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
  - Ovviamente $z \in L$ e $|z| = 3p > p$, quindi il Pumping Lemma può essere applicato.
  - Scriviamo $z = uvwxy$, in modo tale che $|vwx| \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
  - Ovviamente $z \in L$ e $|z| = 3p > p$, quindi il Pumping Lemma può essere applicato.
  - Scriviamo $z = uvwxy$, in modo tale che $|vwx| \leq p$
  - Come saranno formate u, v, w, x, y?

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
  - Poiché la stringa $|vwx| \leq p$ abbiamo le seguenti possibilità:

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (1) vwx è formata da sole a

$$\underbrace{\quad u \quad}\ \underbrace{v \qquad w \qquad x}_{a^k,\, 0 < k \leq p}\ \underbrace{\quad y \quad}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (1) vwx è formata da sole a

$$\underbrace{\quad u \quad}_{a^j,\, j \leq p-k} \; \underbrace{v \qquad w \qquad x}_{a^k,\, 0 < k \leq p} \; \underbrace{\quad y \quad}_{a^{p-k-j} b^p c^p}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (2) vwx è formata da sole b

$$\underbrace{\quad u \quad}\ \underbrace{v \qquad w \qquad x}_{b^k,\, 0 < k \leq p}\ \underbrace{\quad y \quad}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (2) vwx è formata da sole b

$$\underbrace{u}_{a^p b^j, j \leq p-k} \; \underbrace{v \quad w \quad x}_{b^k, 0 < k \leq p} \; \underbrace{y}_{b^{p-k-j} c^p}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (3) vwx è formata da sole c

$$\underbrace{\quad u \quad} \; \underbrace{\quad v \qquad w \qquad x \quad}_{c^k,\, 0 < k \le p} \; \underbrace{\quad y \quad}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (3) vwx è formata da sole c

$$\underbrace{}_{a^p b^p c^{p-k-j}}^{u}\ \underbrace{}_{c^k,\,0<k\le p}^{v \quad w \quad x}\ \underbrace{}_{c^j,\,j\le p-k}^{y}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (4) vwx è a cavallo tra a e b

$$\underbrace{\quad u \quad}\ \underbrace{\quad v \qquad w \qquad x \quad}_{a^k b^r,\, 0 < \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{r} \leq p}\ \underbrace{\quad y \quad}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (4) vwx è a cavallo tra a e b

$$\underbrace{u}_{a^{p-k}} \; \underbrace{v \quad w \quad x}_{a^k b^r,\, 0 < {k \atop r} \leq p} \; \underbrace{y}_{b^{p-r} c^p}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (5) vwx è a cavallo tra b e c

$$\underbrace{\quad u \quad}\;\underbrace{\quad v \qquad w \qquad x \quad}_{b^k c^r,\, 0 < \substack{k \\ r} \le p}\;\underbrace{\quad y \quad}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- (5) vwx è a cavallo tra b e c

$$\underbrace{u}_{a^p b^{p-k}}\ \underbrace{v \quad w \quad x}_{b^k c^r,\, 0 < \substack{k \\ r} \le p}\ \underbrace{y}_{c^{p-r}}$$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- Cosa notiamo?

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- Cosa notiamo?
  - vwx non può essere formata contemporaneamente da a, b e c

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^p c^p$.
- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y per ognuno dei 5 casi precedenti

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 1 ($vwx = a^k,\ 0 < k \leq p$):

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 1 ($vwx = a^k,\ 0 < k \leq p$):
  - Stiamo aggiungendo almeno una a, e al massimo p a:
  - $uv^2wx^2y = a^{p+t}b^pc^p,\ 0 < t \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 1 ($vwx = a^k,\ 0 < k \leq p$):
  - Stiamo aggiungendo almeno una a, e al massimo p a:
  - $uv^2wx^2y = a^{p+t}b^pc^p \notin L,\ 0 < t \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 2 ($vwx = b^k,\ 0 < k \leq p$):
  - Stiamo aggiungendo almeno una b, e al massimo p b:
  - $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t} c^p,\ 0 < t \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 2 ($vwx = b^k,\ 0 < k \leq p$):
  - Stiamo aggiungendo almeno una b, e al massimo p b:
  - $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t} c^p \notin L,\ 0 < t \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 3 ($vwx = c^k,\ 0 < k \leq p$):
  - Stiamo aggiungendo almeno una c, e al massimo p c:
  - $uv^2wx^2y = a^p b^p c^{p+t} \notin L,\ 0 < t \leq p$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.

- Caso 4 ($vwx = a^k b^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
  - Abbiamo tre possibilità:
    - (4.1) $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$
    - (4.2) $v \neq \lambda,\ x = \lambda$
    - (4.3) $v = \lambda,\ x \neq \lambda$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 4 ($vwx = a^k b^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
  - Abbiamo tre possibilità:
    - (4.1) $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$
    - (4.2) $v \neq \lambda,\ x = \lambda$
    - (4.3) $v = \lambda,\ x \neq \lambda$
  - Osserviamo che se $v \neq \lambda$, allora v è composta da sole a, e analogamente se $x \neq \lambda$, allora x è composta da sole b. Altrimenti le a e le b si alternerebbero. Per cui:

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 4 ($vwx = a^k b^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
  - (4.1) $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$ $\quad \frac{v}{x}$ composta da sole $\frac{a}{b}$
  - $v = a^{k'},\ 0 < k' \leq k$ e $x = b^{r'},\ 0 < r' \leq r$
  - Da cui abbiamo $uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^{p+r'} c^p \notin L$, poiché $\frac{k'}{r'} > 0$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 4 ($vwx = a^k b^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
    - (4.2) $v \neq \lambda,\ x = \lambda$ v composta da sole a
    - $v = a^{k'},\ 0 < k' \leq k$
    - Da cui abbiamo $uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^p c^p \notin L$, poiché $k' > 0$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Caso 4 ($vwx = a^k b^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
  - (4.3) $v = \lambda,\ x \neq \lambda$ x composta da sole b
  - $x = b^{r'},\ 0 < r' \leq r$
  - Da cui abbiamo $uv^2wx^2y = a^p b^{p+r'} c^p \notin L$, poiché $r' > 0$

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.

- Caso 5 ($vwx = b^k c^r,\ 0 < \frac{k}{r} \leq p$):
  - Analogo al caso 4; si lascia per esercizio

Esercizio 1 – Soluzione (3)

$$L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

- Consideriamo la parola «pompata» uv^2wx^2y.
- Abbiamo mostrato che in ogni caso, $uv^2wx^2y \notin L$, il che è una contraddizione $\rightarrow L$ non è libero da contesto.

Esercizio 2

Sia dato il linguaggio $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$

- Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che L non è libero da contesto

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Alcune parole che costituiscono L:
  - $L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \ldots\}$

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Alcune parole che costituiscono L:
  - $L = \{\lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots\}$
- Sappiamo che se un linguaggio è libero da contesto, allora rispetta sicuramente il pumping lemma
  - Dimostrazione per assurdo

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Ricordiamo il Pumping Lemma:
  - $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che se $z = uvwxy \in L$ e $|z| > p$, allora:
    - (1) $|vwx| \leq p$
    - (2) $vx \neq \lambda$
    - (3) $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Assumiamo per assurdo che il P.L. sia soddisfatto.
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Considieriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - A differenza dell'esempio precedente, non serve sviluppare i diversi casi perché vwx è composta da sole a
  - **Come si applica il pumping lemma in questo caso?**

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - **Come si applica il pumping lemma in questo caso?**
    - **Si ragiona sulla lunghezza delle parole, dimostrando che la parola pompata non appartiene al linguaggio**

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - **Come si applica il pumping lemma in questo caso?**
    - **Si ragiona sulla lunghezza delle parole, dimostrando che la parola pompata non appartiene al linguaggio**
    - Nel nostro caso $|z| = |a^{p^2}| = p^2$

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - **Come si applica il pumping lemma in questo caso?**
    - Nel nostro caso $|z| = |a^{p^2}| = p^2$
    - La parola «successiva» del linguaggio che lunghezza avrà?

    = $(p+1)^2$ - **Verifichiamo che questo non è verificato.**

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - Inoltre, pompando v e x, dobbiamo avere ancora $z \in L$:
    - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx|$

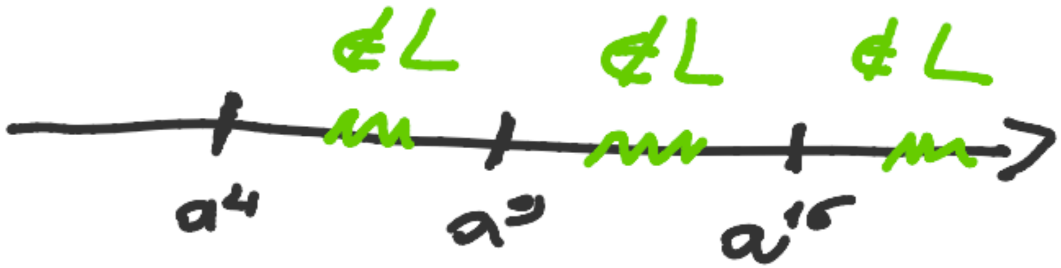
Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - Inoltre, pompando v e x, dobbiamo avere ancora $z \in L$:
    - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$

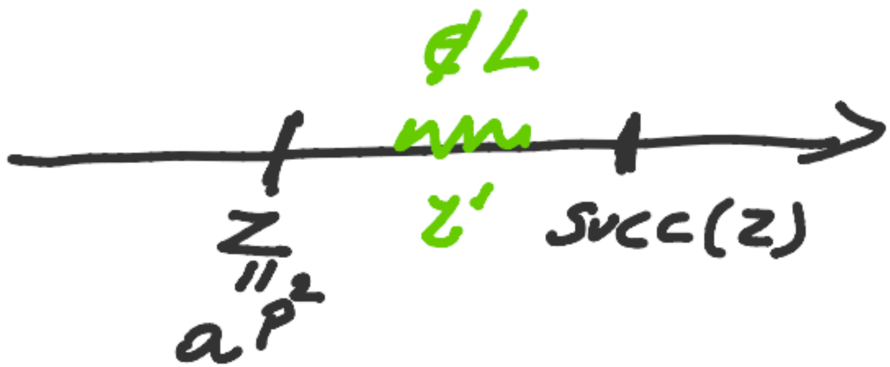
Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Considieriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - Inoltre, pompando v e x, dobbiamo avere ancora $z \in L$:
    - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$
    - Dunque $|uv^2wx^2y| < (p+1)^2$ ma questo è assurdo!

Esercizio 2 - Soluzione



$$z = a^{p^2}$$



$$succ(z) = a^{(p+1)^2}$$

Esercizio 2 - Soluzione

- Dimostrare che $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$ non è libero da contesto
- Consideriamo la parola $z = a^{p^2}$
  - Scriviamo la parola come $z = uvwxy$. Per il PL, $|vwx| \leq p$.
  - Inoltre, pompando v e x, dobbiamo avere ancora $z \in L$:
    - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 \Longrightarrow uv^2wx^2y \notin L$
  - Contraddizione! L non soddisfa il PL per cui non è libero

Esercizio 3

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^j | i = 2^j, \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{j} \geq 0\}$

- Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che L non è libero da contesto

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, i, j \geq 0\}$$

- Analizziamo le parole che costituiscono L:
  - $L = \left\{a^{2^j} b^j \middle| j \geq 0\right\} = \{a, a^2b, a^4b^2, a^8b^3, a^{16}b^4, \dots\}$
  - Già qui si nota che le parole crescono in modo esponenziale e non costante.

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, {}^{i}_{j} \geq 0\}$$

- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto e che quindi valga per L il Pumping Lemma sui linguaggi liberi. Allora:

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{j} \geq 0\}$$

- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto e che quindi valga per L il Pumping Lemma sui linguaggi liberi. Allora:
  - $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che se $z \in L, |z| > p$, allora:
    - $|vwx| \leq p$
    - $vx \neq \lambda$
    - $uv^i wx^i y \in L, \forall i \geq 0$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \substack{i \\ j} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \overset{i}{\underset{j}{,}} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Abbiamo $|z| = 2^p + p > p$. Quindi per il Pumping Lemma, $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Abbiamo $|z| = 2^p + p > p$. Quindi per il Pumping Lemma, $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$
  - Inoltre, la parola «pompata» $uv^i wx^i y, i \geq 0$ sarà ancora in L

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \substack{i \\ j} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Abbiamo $|z| = 2^p + p > p$. Quindi per il Pumping Lemma, $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$
  - A differenza dell'esercizio precedente $|vwx|$ può essere composta da a a e b
  - Non serve però necessario ragionare sui diversi casi, perché quando un linguaggio è «esponenziale» (almeno in una sua parte), ragionando sulle lunghezza delle derivazioni si riesce già a dimostrare l'assurdo.

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, i, j \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Abbiamo $|z| = 2^p + p > p$. Quindi per il Pumping Lemma, $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$
  - Inoltre, la parola «pompata» $uv^i wx^i y, i \geq 0$ sarà ancora in L
  - Prendiamo $uv^2 wx^2 y \in L$
  - Quale lunghezza ha la parola «successiva» del linguaggio?

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, {}^i_j \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Abbiamo $|z| = 2^p + p > p$. Quindi per il Pumping Lemma, $z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$
  - Inoltre, la parola «pompata» $uv^i wx^i y, i \geq 0$ sarà ancora in L
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
    - Quale lunghezza ha la parola «successiva» del linguaggio?
    - $2^{p+1} + p + 1$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \substack{i \\ j} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx|$
  -

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{j} \geq 0\}$$

- Considieriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx|$
  - $\leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p =$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j \mid i = 2^j, \genfrac{}{}{0pt}{}{i}{j} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx|$
  - $\leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p = 2^{p+1} + p < 2^{p+1} + p + 1$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j \mid i = 2^j, \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx|$
  - $\leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p = 2^{p+1} + p < 2^{p+1} + p + 1$

Quindi

$$|uv^2wx^2y| < 2^{p+1} + p + 1$$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j | i = 2^j, \substack{i \\ j} \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx|$
  - $\leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p = 2^{p+1} + p < 2^{p+1} + p + 1$

Quindi

$$|uv^2wx^2y| < 2^{p+1} + p + 1$$

Dunque la stringa pompata non è del tipo $a^{2^j} b^j$, ovvero $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio 3 - Soluzione

$$L = \{a^i b^j \mid i = 2^j, i, j \geq 0\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^{2^p} b^p$
  - Prendiamo $uv^2wx^2y \in L$
  - $|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p = 2^{p+1} + p < 2^{p+1} + p + 1$
  - Dunque la stringa pompata non è del tipo $a^{2^j} b^j$, ovvero $uv^2wx^2y \notin L$
  - Contraddizione. Ne segue che L non è libero da contesto.

Esercizio 4

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Dimostrare che non è L non è libero da contesto utilizzando il Pumping Lemma.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Analizziamo le parole che costituiscono L:
  - $L = \{ab^2, ab^3, ab^4, \dots, a^2b^5, a^2b^6, a^2b^7, \dots, a^3b^{10}, a^3b^{11}, a^3b^{12}, \dots\}$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Analizziamo le parole che costituiscono L:
  - $L = \{ab^2, ab^3, ab^4, \dots, a^2b^5, a^2b^6, a^2b^7, \dots, a^3b^{10}, a^3b^{11}, a^3b^{12}, \dots\}$
- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto. Allora:

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Analizziamo le parole che costituiscono L:
  - $L = \{ab^2, ab^3, ab^4, \dots, a^2b^5, a^2b^6, a^2b^7, \dots, a^3b^{10}, a^3b^{11}, a^3b^{12}, \dots\}$
- Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto. Allora:
  - Per il P.L., $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che se $z = uvwxy \in L, |z| > p$, abbiamo che:
    - $|vwx| \leq p$
    - $vx \neq \lambda$
    - $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$. Vediamo subito che $z \in L$ e $|z| = p + p^2 + 1 > p$. Scriviamo $z = uvwxy$.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$. Vediamo subito che $z \in L$ e $|z| = p + p^2 + 1 > p$. Scriviamo $z = uvwxy$.
- Possiamo trovarci in uno di 3 casi:
  - (1) vwx è formata da sole a
  - (2) vwx è formata da sole b
  - (3) vwx è a cavallo tra a e b
- Lo scopo è mostrare che «pompando» la stringa uv^iwx^iy, essa non appartiene più a L
- Trattiamo i casi separatamente

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a
  - Denotiamo con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo x
  - Per il P.L., sappiamo che $0 < |vwx| \leq p$ e $0 < |vx| \leq p$, per cui vwx è formata da almeno una a e da massimo p a

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a
  - Denotiamo con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo x
  - Per il P.L., sappiamo che $0 < |vwx| \leq p$ e $0 < |vx| \leq p$, per cui per vwx abbiamo $1 \leq \#(a) \leq p$.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a
  - Denotiamo con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo x
  - Per il P.L., sappiamo che $0 < |vwx| \leq p$ e $0 < |vx| \leq p$, per cui per vwx abbiamo $1 \leq \#(a) \leq p$.
- Pompiamo z e consideriamo uv^2wx^2y. Per quest'ultima, abbiamo $p + 1 \leq \#(a) \leq 2p$, e $\#(b) = p^2 + 1$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a
  - Denotiamo con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo x
  - Per il P.L., sappiamo che $0 < |vwx| \leq p$ e $0 < |vx| \leq p$, per cui per vwx abbiamo $1 \leq \#(a) \leq p$.
- Pompiamo z e consideriamo uv^2wx^2y. Per quest'ultima, abbiamo $p + 1 \leq \#(a) \leq 2p$, e $\#(b) = p^2 + 1$
- Quindi $\#(b) = p^2 + 1 < (p + 1)^2 \leq \#(a)^2 \leq 4p^2$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (1): vwx è formata da sole a
  - Denotiamo con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo x
  - Per il P.L., sappiamo che $0 < |vwx| \leq p$ e $0 < |vx| \leq p$, per cui per vwx abbiamo $1 \leq \#(a) \leq p$.
- Pompiamo z e consideriamo uv^2wx^2y. Per quest'ultima, abbiamo $p + 1 \leq \#(a) \leq 2p$, e $\#(b) = p^2 + 1$
- Quindi $\#(b) = p^2 + 1 < (p + 1)^2 \leq \#(a)^2 \leq 4p^2$
- Dunque $r < k^2$ e $uv^2wx^2y \notin L$. Contraddizione.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (2): vwx è formata da sole b

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (2): vwx è formata da sole b
  - Per il P.L., sappiamo che, in vwx, $1 \leq \#(b) \leq p$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (2): vwx è formata da sole b
  - Per il P.L., sappiamo che, in vwx, $1 \leq \#(b) \leq p$
  - Consideriamo uv^0wx^0y. Per quest'ultima, abbiamo $p^2 - p + 1 \leq \#(b) \leq p^2$ e $\#(a) = p$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (2): vwx è formata da sole b
  - Per il P.L., sappiamo che, in vwx, $1 \leq \#(b) \leq p$
  - Consideriamo uv^0wx^0y. Per quest'ultima, abbiamo $p^2 - p + 1 \leq \#(b) \leq p^2$ e $\#(a) = p$
  - Quindi $\#(b) \leq \#(a)^2 = p^2$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (2): vwx è formata da sole b
  - Per il P.L., sappiamo che, in vwx, $1 \leq \#(b) \leq p$
  - Consideriamo uv^0wx^0y. Per quest'ultima, abbiamo $p^2 - p + 1 \leq \#(b) \leq p^2$ e $\#(a) = p$
  - Quindi $\#(b) \leq \#(a)^2 = p^2$
  - Dunque $r \leq k^2$ e $uv^0wx^0y \notin L$. Contraddizione.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3): vwx è a cavallo tra a e b

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3): vwx è a cavallo tra a e b
  - Per il P.L., abbiamo che, in vwx, $0 < \#(a) + \#(b) \leq p$.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3): vwx è a cavallo tra a e b
  - Per il P.L., abbiamo che, in vwx, $0 < \#(a) + \#(b) \leq p$.
  - Notiamo che se $v \neq \lambda$, allora v contiene solo a, e analogamente se $x \neq \lambda$, allora x contiene solo b (qualcuno sa perché?)

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3): vwx è a cavallo tra a e b
  - Per il P.L., abbiamo che, in vwx, $0 < \#(a) + \#(b) \leq p$.
  - Notiamo che se $v \neq \lambda$, allora v contiene solo a, e analogamente se $x \neq \lambda$, allora x contiene solo b
  - Distinguiamo allora 3 casi:
    1. $v \neq \lambda,\ x = \lambda$
    2. $v = \lambda,\ x \neq \lambda$
    3. $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.1): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda,\ x = \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.1): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda$, $x = \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y. Quest'ultima avrà $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1$ e $\#(b) = p^2 + 1$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.1): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda,\ x = \lambda$
    - Consideriamo la parola uv^2wx^2y. Quest'ultima avrà $p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1$ e $\#(b) = p^2 + 1$
    - Quindi $\#(b) = p^2 + 1 < (p + 1)^2 \leq \#(a)^2 \ \rightarrow uv^2wx^2y \notin L$. Assurdo.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.2): vwx è a cavallo tra a e b, $v = \lambda,\ x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^0wx^0y

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.2): vwx è a cavallo tra a e b, $v = \lambda$, $x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^0wx^0y
  - Qui avremo $p^2 + 1 - (p - 1) \leq \#(b) \leq p^2$ e $\#(a) = p$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.2): vwx è a cavallo tra a e b, $v = \lambda,\ x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^0wx^0y
  - Qui avremo $p^2 + 1 - (p - 1) \leq \#(b) \leq p^2$ e $\#(a) = p$
  - Quindi $\#(b) \leq \#(a)^2 = p^2\ \rightarrow uv^0wx^0y \notin L$. Contraddizione.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.3): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.3): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda$, $x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y
  - In questo caso abbiamo, v^2 contiene almeno due a (perché?) e quindi uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1$ a.

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.3): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda$, $x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y
  - In questo caso abbiamo, v^2 contiene almeno due a (perché?) e quindi uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1$ a.
  - Ma $|uv^2wx^2y| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + p^2 + 1 + p = (p + 1)^2 < p + 1 + (p + 1)^2 + 1$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.3): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda$, $x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y
  - In questo caso abbiamo, v^2 contiene almeno due a (perché?) e quindi uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1$ a.
  - Ma $|uv^2wx^2y| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + p^2 + 1 + p = (p+1)^2 < p + 1 + (p+1)^2 + 1$
  - Dunque uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1$ a, ma la sua lunghezza è minore della parola più corta di L avente almeno $p + 1$ a

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- Caso (3.3): vwx è a cavallo tra a e b, $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$
  - Consideriamo la parola uv^2wx^2y
  - In questo caso abbiamo, v^2 contiene almeno due a (perché?) e quindi uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1\ a$.
  - Ma $|uv^2wx^2y| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + p^2 + 1 + p = (p+1)^2 < p + 1 + (p+1)^2 + 1$
  - Dunque uv^2wx^2y contiene almeno $p + 1\ \ a$, ma la sua lunghezza è minore della parola più corta di L avente almeno $p + 1\ a$
  - Ne consegue che $uv^2wx^2y \notin L$

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- In tutti i casi, la proposizione (3) del Pumping Lemma viene violata

Esercizio 4 - Soluzione

$$L = \{a^k b^r | k > 0, r > k^2\}$$

- Consideriamo la parola $z = a^p b^{p^2+1}$
- In tutti i casi, la proposizione (3) del Pumping Lemma viene violata
- L'assurdo deriva dall'aver assunto L libero da contesto. Dunque L non è libero.

Domande?

Esercizio 5 – Senza Soluzione

Sia dato il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k : 0 \leq i < j < k\}$

- Stabilire se L è libero da contesto e giustificare formalmente la risposta