

Logică computațională

Curs 11

Lector dr. Pop Andreea-Diana



Algebre booleene

- introduse de George Boole (1815-1864)
- stau la baza definirii funcțiilor booleene
 - care sunt utilizate în realizarea circuitelor logice

Definirea axiomatică (1)

O *algebră booleană* este o structură $(A, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1)$, unde:

- $|A| \geq 2$, A conținând cel puțin 2 elemente diferite, 0 și 1, $0 \neq 1$
- \wedge, \vee sunt operații binare
- $\overline{}$ este operator unar
- există elementul unic 0 – elementul zero, cu proprietățile:
$$x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0 \text{ și } x \vee 0 = 0 \vee x = x, \forall x \in A$$
- există elementul unic 1 – elementul unitate, cu proprietățile:
$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x \text{ și } x \vee 1 = 1 \vee x = 1, \forall x \in A$$
- elementul zero, 0 și cel unitate, 1 sunt primul respectiv ultimul element, iar \overline{x} este complementul lui x :
$$x \wedge \overline{x} = 0 \text{ și } x \vee \overline{x} = 1, \forall x \in A$$
- dubla negație:
$$\overline{\overline{x}} = x, \forall x \in A$$

Definirea axiomatică (2)

- operațiile \wedge , \vee sunt comutative:
 $x \wedge y = y \wedge x$ și $x \vee y = y \vee x$, $\forall x, y \in A$
- operațiile \wedge , \vee sunt asociative:
 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z (= x \wedge y \wedge z)$ și
 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z (= x \vee y \vee z)$, $\forall x, y, z \in A$
- au loc proprietățile de distributivitate ale operatorilor \wedge și \vee :
 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ și
 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $\forall x, y, z \in A$
- are loc proprietatea de idempotență pentru ambele operații:
 $x \wedge x = x$ și $x \vee x = x$, $\forall x \in A$
- au loc legile lui De Morgan:
 $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ și $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\forall x, y \in A$
- au loc proprietățile de absorbție:
 $x \wedge (x \vee y) = x$ și $x \vee (x \wedge y) = x$, $\forall x, y \in A$

Observații

- Într-o algebră booleană are loc principiul dualității:
„Pentru orice egalitate între două expresii booleene $U = V$, există o nouă egalitate $U' = V'$, obținută prin interschimbarea operațiilor \wedge, \vee și a elementelor: $0, 1$ ”.
- majoritatea axiomelor algebrei booleene, sunt perechi de axiome duale

Algebra booleană binară

$$\mathbf{B} = (B_2 = \{0, 1\}, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1)$$

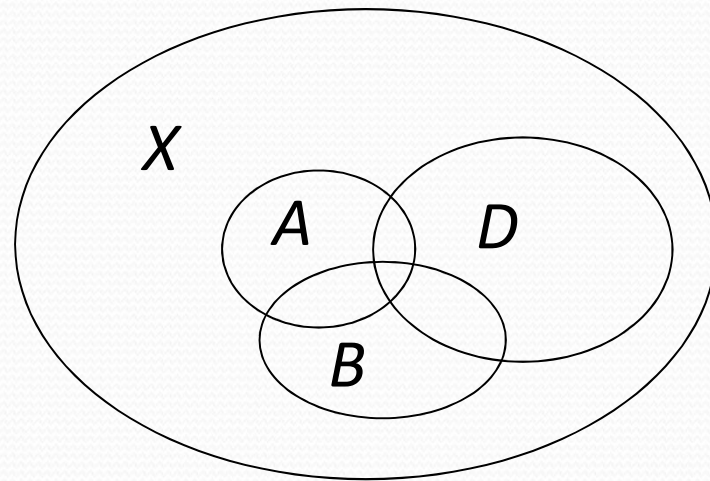
\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

x	\overline{x}
0	1
1	0

Alte exemple de algebre booleene

- $(F_P, \wedge, \vee, \neg, F, T)$
- $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, C, \emptyset, X)$



Problemă practică



- Cine face tortul?

Soluțiile posibile




$x,$

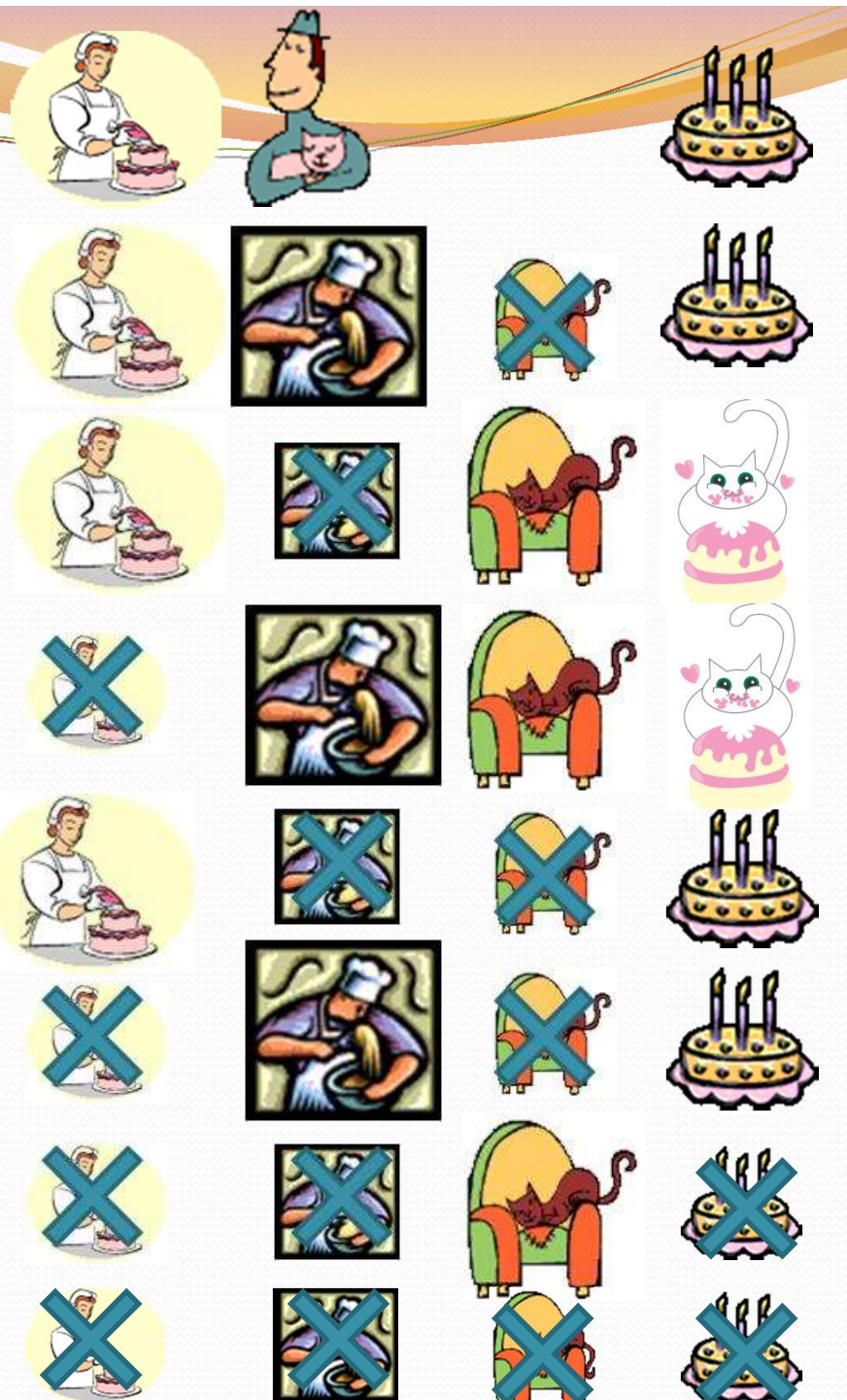


$y,$



z

$$f(x, y, z) =$$




Funcții booleene

Fie $\mathbf{B} = (B_2, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1)$ algebra booleană binară, $B_2 = \{0, 1\}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. O *funcție booleană de n variabile* este o funcție definită recursiv astfel:

1. Funcția *proiecție*: $P_i : B_2^n \rightarrow B_2$, $P_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, care păstrează doar variabila x_i , este o funcție booleană.
2. Dacă avem două funcții booleene $f, g : B_2^n \rightarrow B_2$, atunci $f \wedge g, f \vee g, \overline{f}$ sunt funcții booleene, unde:
$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \wedge g(x_1, \dots, x_n)$$
$$(f \vee g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \vee g(x_1, \dots, x_n)$$
$$\overline{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$$
- Orice funcție booleană este obținută prin aplicarea de un număr finit de ori a regulilor 1 și 2 de mai sus.

Toate funcțiile booleene definite pe
 $B_2^n \rightarrow B_2$
pentru $n=1$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Teoreme

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există 2^{2^n} funcții booleene de n variabile.
- Mulțimea tuturor funcțiilor booleene de $n \in \mathbb{N}^*$ variabile formează o algebră booleană: $(\mathbf{FB}(n), \wedge, \vee, \overline{}, f_0, f_{2^{2^n}-1})$, unde $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ și $f_{2^{2^n}-1}(x_1, \dots, x_n) = 1$ funcțiile constante 0, respectiv 1.

Notatii

- $x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \text{dacă } \alpha = 0 \end{cases}, x \in \{0, 1\}$

- Pentru $x, \alpha \in \{0, 1\}$, au loc: $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$ și
 $0^0 = \bar{0} = 1$; $0^1 = 0$;
 $1^0 = \bar{1} = 0$; $1^1 = 1$

- Astfel, se obține: $x^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = \alpha \\ 0, & \text{dacă } x \neq \alpha \end{cases}, x, \alpha \in \{0, 1\}$

Formele canonice ale funcțiilor booleene (1)

O funcție booleană $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ poate fi transformată în cele două forme echivalente:

- *forma canonică disjunctivă* (FCD):

$$(1) f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- *forma canonică conjunctivă* (FCC):

$$(2) f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\alpha_n}})$$

Formele canonice ale funcțiilor booleene (2)

O funcție booleană $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ este unic determinată de valorile sale $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, unde $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n$:

- forma canonică disjunctivă:

$$(1) \Leftrightarrow (1') f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)=1} (x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n})$$

- forma canonică conjunctivă:

$$(2) \Leftrightarrow (2') f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \text{ și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)=0} (\overline{x_1^{\alpha_1}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\alpha_n}})$$



Observație

- Forma canonică *disjunctivă* este recomandată în caz contrar, când există un *număr mare de zerouri* ale funcției și un număr mic de valori 1.
- Forma canonică *conjunctivă* este utilă când există un număr mic de zerouri și un *număr mare de valori 1* (realizări).
- Funcția booleană f_0 nu poate fi scrisă în forma canonică disjunctivă, deoarece nu ia valoarea 1 pentru niciun argument.
- Funcția booleană $f_{2^{2^n}-1}$ nu poate fi scrisă în forma canonică conjunctivă, deoarece nu ia valoarea 0 pentru niciun argument.

Definiție

Fie $f: (B_2)^n \rightarrow B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ o funcție booleană cu n variabile.

- O conjuncție de variabile se numește **monom**.
- Un monom care conține toate cele n variabile se numește **monom canonic** sau **minterm** de n variabile. Are forma:

$$x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2$$

- Disjuncția care conține toate cele n variabile, având forma:

$$x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}, \alpha_i \in B_2 \text{ se numește } \mathbf{maxterm} \text{ de } n \text{ variabile.}$$

Proprietăți

- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, există exact 2^n maxtermi, notați cu $M_0, M_1, \dots, M_{2^n-1}$ și exact 2^n mintermi, notați cu $m_0, m_1, \dots, m_{2^n-1}$.
- Un *maxterm* este o funcție booleană care ia valoarea 0 doar pentru un argument.
- Un *minterm* este o funcție booleană care ia valoarea 1 doar pentru un argument.



Observație

- Indicele unui minterm de n variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar format cu cifrele ce reprezintă puterile celor n variabile ale expresiei acestuia.
- Indicele unui maxterm de n variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar, format cu dualele cifrelor ce reprezintă puterile celor n variabile ale expresiei acestuia.

Propoziție

- Conjuncția a doi mintermi distincți este 0:

$$m_i \wedge m_j = 0, \forall i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, 2^{n-1}$$

- Disjuncția a doi maxtermi distincți este 1:

$$M_i \vee M_j = 1, \forall i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, 2^{n-1}$$

- Un minterm și un maxterm cu același indice sunt funcții duale.

$$M_i = \overline{m_i}, \quad \overline{M_i} = m_i, \quad \forall i = 0, \dots, 2^{n-1}$$



Observație

- Forma canonică conjunctivă, *FCC*, este conjuncția maxtermilor corespunzători argumentelor pentru care funcția ia valoarea 0.
- Forma canonică disjunctivă, *FCD*, este disjuncția mintermilor corespunzători argumentelor pentru care funcția ia valoarea 1.

Soluțiile posibile




$x,$



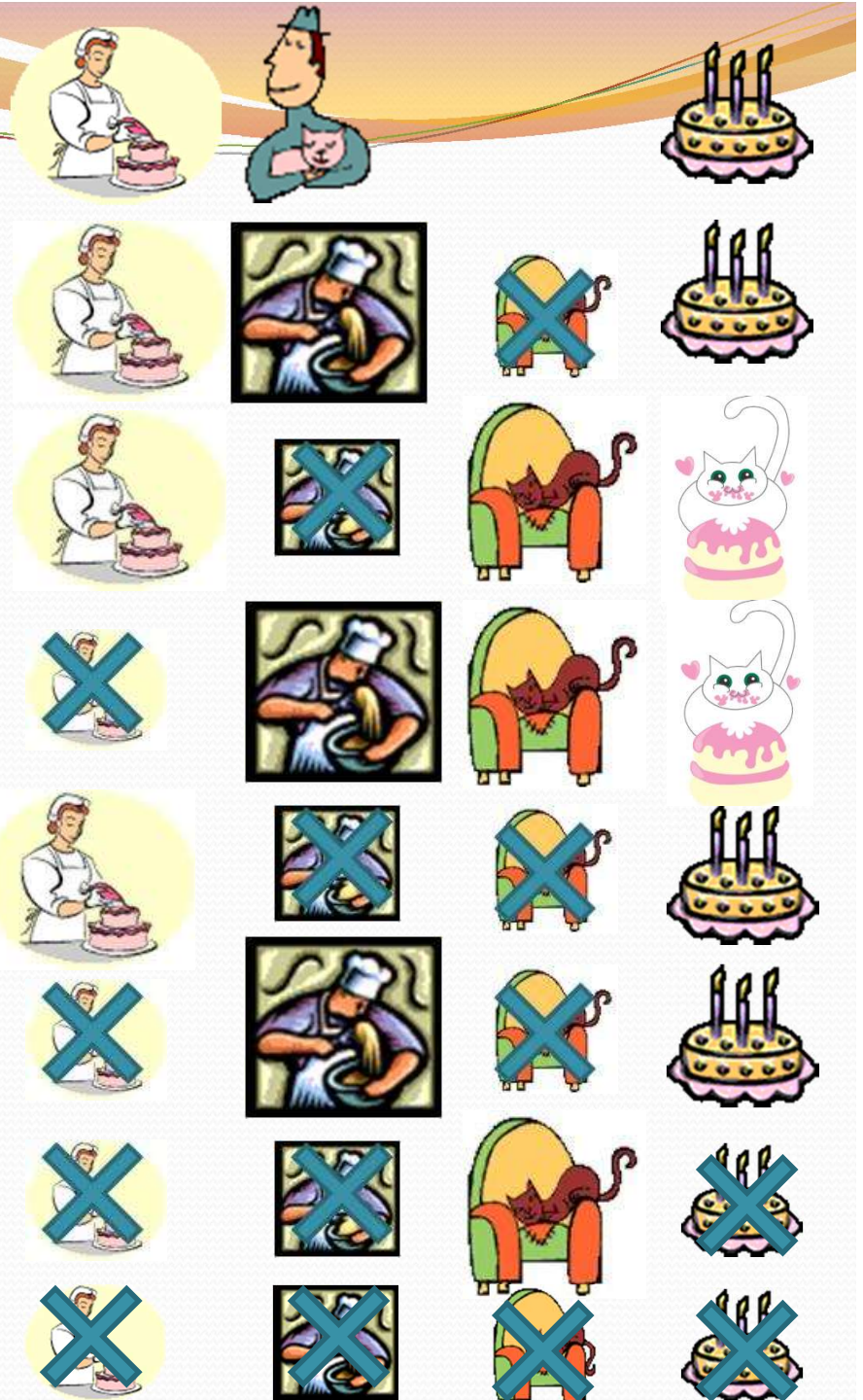
$y,$



z

$$f(x, y, z) =$$


- Putem să le „condensăm”?



Suportul funcției

- *suportul* funcției booleene f 

$$S_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \}$$



$(1, 1, 0) \in S_f$



$(1, 0, 1) \notin S_f$

Relația mai mic sau egal

- Relația *mai mic sau egal* $f \leq g \Leftrightarrow S_f \subseteq S_g$

$$m = x \wedge y \wedge \bar{z}$$

și

$$m' = x \wedge \bar{z}$$



$$S_m = \{(1, 1, 0)\} \subset S_{m'} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$m \leq m'$$

Factorizarea

- *monoame adiacente (vecine)* dacă ele diferă doar prin puterea (semnul: negație sau nu) variabilei cu indicele „ k_i ”:

$$m = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_i} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

$$m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge \overline{x_{k_i}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

- *factorizarea monoamelor m și m'* este operația prin care se obține, eliminând variabila cu indicele „ k_i ”, monomul

$$m \vee m' = x_{k_1}^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x_{k_j}^{\alpha_{k_j}} \wedge x_{k_l}^{\alpha_{k_l}} \wedge \dots \wedge x_{k_s}^{\alpha_{k_s}}$$

mai mare decât m și m' .

Simplificarea

- A *simplifica* o funcție booleană, înseamnă a obține o formă echivalentă a sa cu un număr cât mai mic de apariții de variabile.
- Dacă se pornește de la $FCD(f)$, prin factorizări repetate, într-un număr finit de pași se poate obține o formă simplificată a funcției.

Mulțimea monoamelor maximale

- Mulțimea $M(f)$ se numește *mulțimea monoamelor maximale* ale funcției booleene $f : B_2^n \rightarrow B_2$ dacă:

$$\forall m \in M(f), m \in FB(n), m \leq f;$$

$$\forall m \in M(f), \exists m' \in FB(n), \text{ astfel încât } m < m' \leq f$$

Mulțimea monoamelor centrale

- Mulțimea $C(f)$ se numește *mulțimea monoamelor centrale* ale funcției booleene $f : B_2^n \rightarrow B_2$ dacă:

$$\forall m \in C(f), m \in M(f)$$

$$\forall m \in C(f), \text{ nu are } \text{loc } m \leq \vee m', \text{ unde } m' \in M(f) - \{m\}$$

Algoritmul de simplificare a funcțiilor booleene

Date de intrare: f – o funcție booleană în formă canonică disjunctivă

Date de ieșire: f'_1, f'_2, \dots, f'_k - variantele simplificate ale funcției f

Se determină $M(f)$ și $C(f)$.

dacă $M(f) = C(f)$

atunci $f'_1 = \bigvee_{m \in M(f)} m$ STOP1 // caz 1 --- soluție unică

altfel

dacă $C(f) \neq \emptyset$ *not.*

atunci $g = \bigvee_{m \in C(f)} m$

$f'_i = g \vee h_i, i = \overline{1, k}$, unde h_i este disjuncția unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât $S_{h_i} = S_f - S_g$

STOP2 // caz 2 --- k soluții

altfel // nu există monoame centrale

$f'_i = h_i, i = \overline{1, k}$, unde h_i este disjuncția unui număr cât mai mic de monoame maximale astfel încât $S_{h_i} = S_f$

STOP3 // caz 3 --- k soluții

sf_dacă

sf_dacă

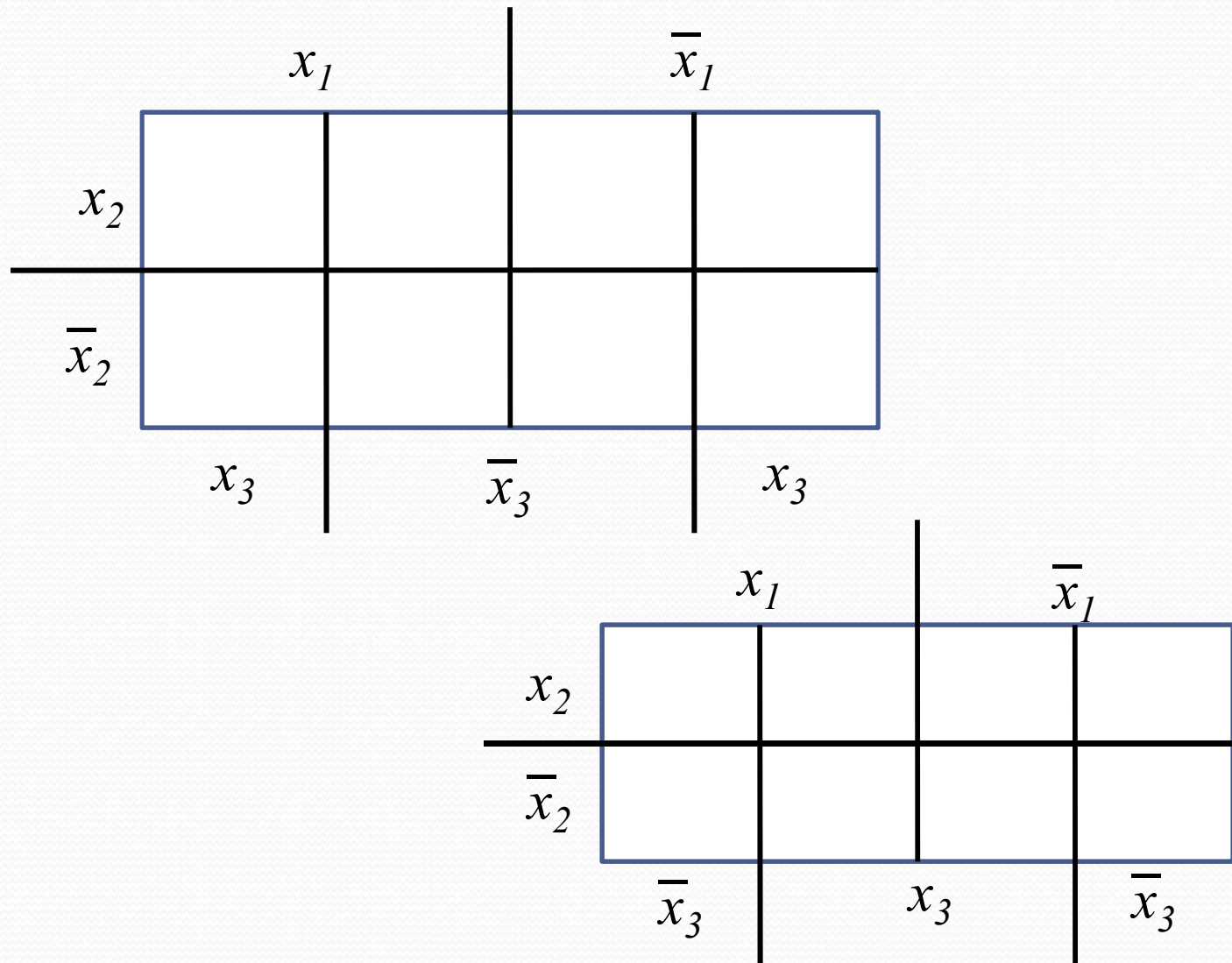
Sf_algoritm



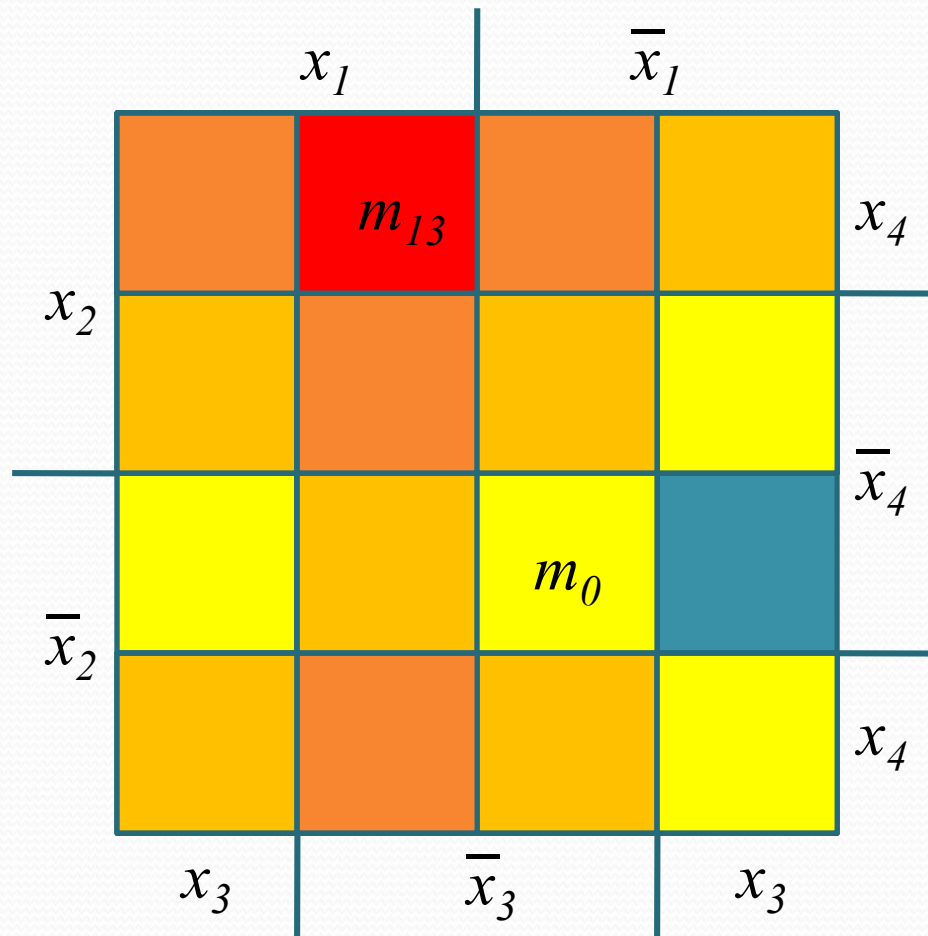
Metoda diagramelor Veitch

- Această metodă se bazează pe reprezentarea grafică, sub forma unei diagrame, a suportului funcției.
- Este foarte utilă pentru funcții cu un număr mic de variabile: 2, 3 sau 4.

Construirea diagramei Veitch



Completarea diagramei



$$m_{13} = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Exercițiu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$\vee x_1 x_2 x_3 x_4$$

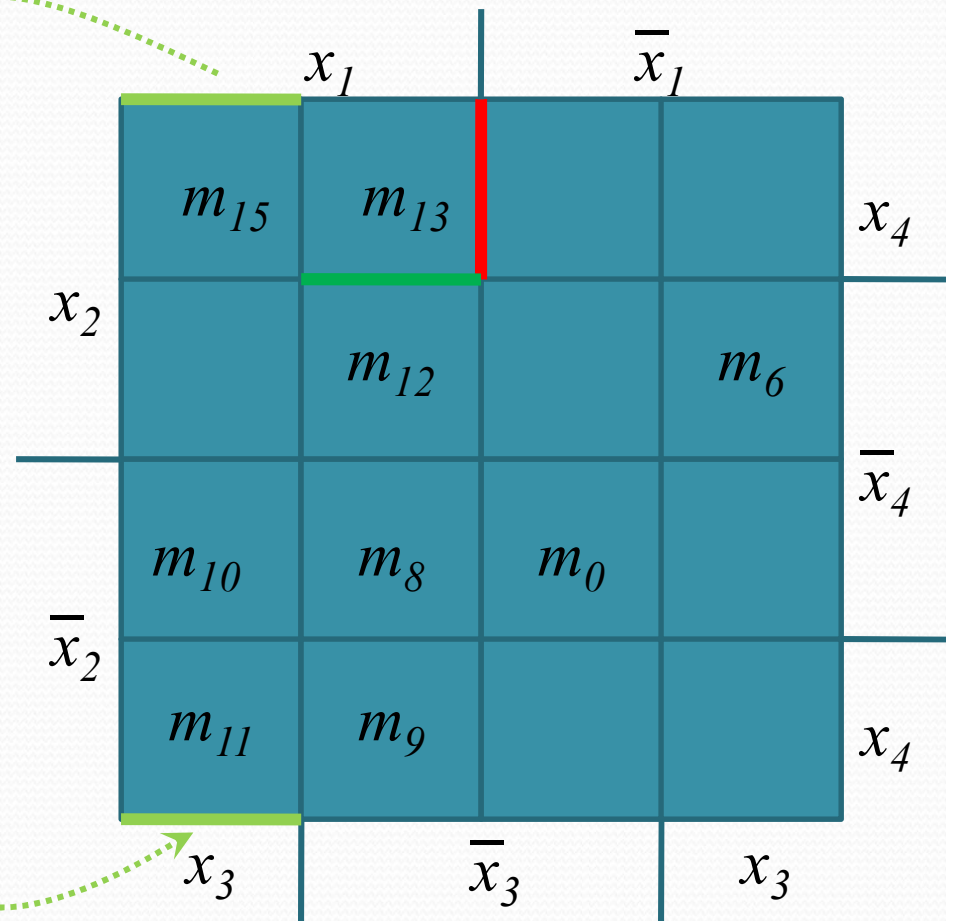
$$\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$\vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

$$\vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$$

	x_1	\bar{x}_1		
	m_{15}	m_{13}		x_4
x_2		m_{12}		m_6
	m_{10}	m_8	m_0	\bar{x}_4
\bar{x}_2	m_{11}	m_9		x_4
	x_3	\bar{x}_3	x_3	

Mintermi adiacenți



Factorizarea (1)

Se grupează 2^k , $k \in \mathbb{N}$ mintermi adiacenți, k – cât mai mare

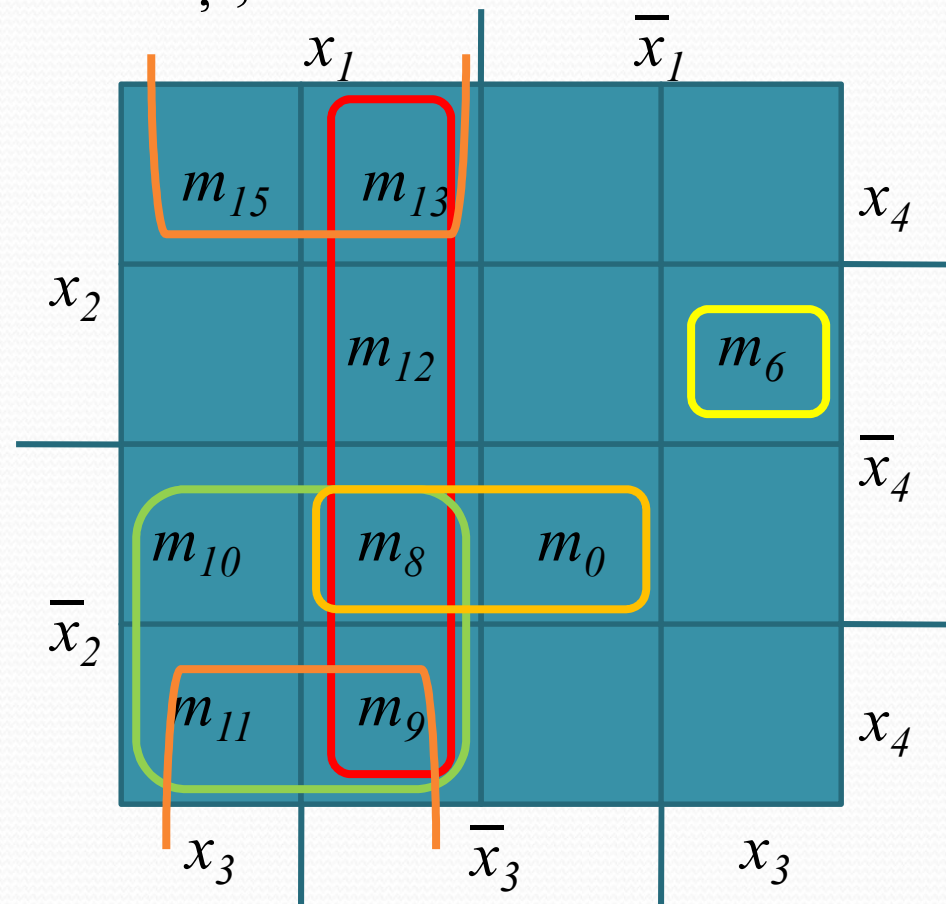
$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9$$

$$max_2 = m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9$$

$$max_3 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13}$$

$$max_4 = m_8 \vee m_0$$

$$max_5 = m_6$$



Factorizarea (2)

- se grupează 2^k , $k \in \mathbf{N}$ mintermi adiacenți
- ! prima și ultima line, prima și ultima coloană sunt vecine!
- același minterm poate fi utilizat de mai multe ori
- ! se neglijează grupurile incluse!
- nu se lasă mintermi neîncercuiți

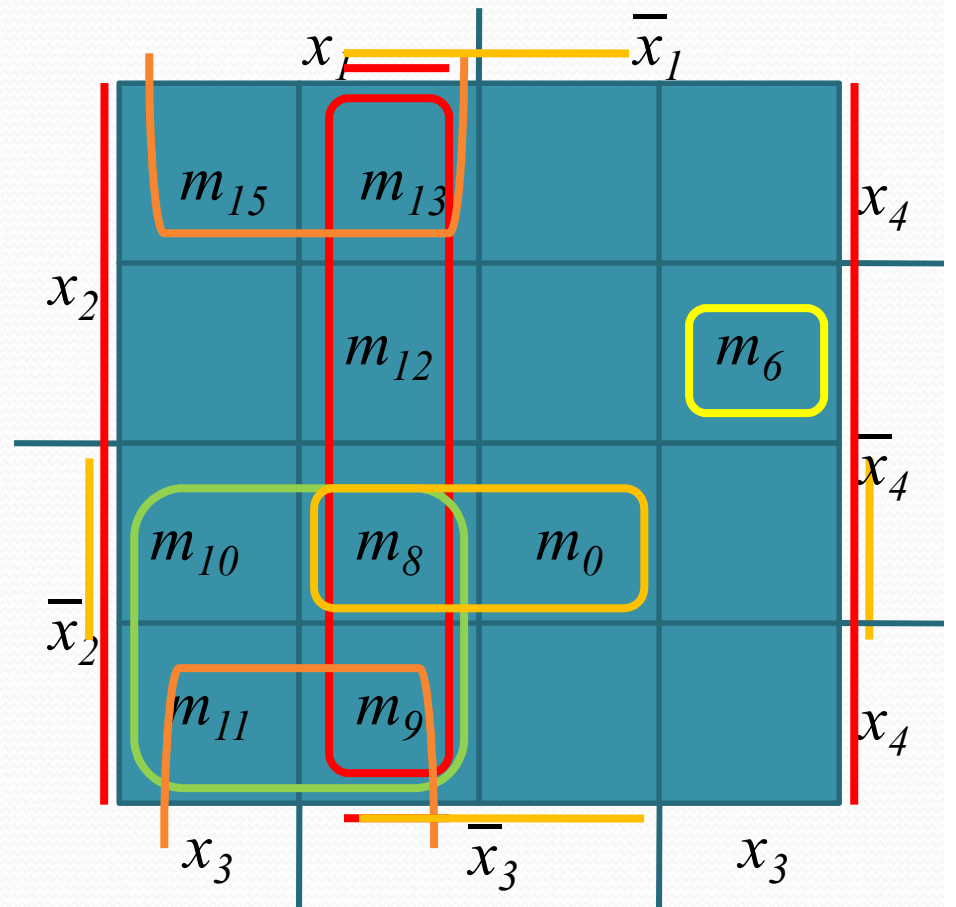
$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9 = x_1 \overline{x_3}$$

$$\begin{aligned} max_2 &= m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9 \\ &= x_1 \overline{x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} max_3 &= m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13} \\ &= x_1 x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} max_4 &= m_8 \vee m_0 \\ &= \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \end{aligned}$$

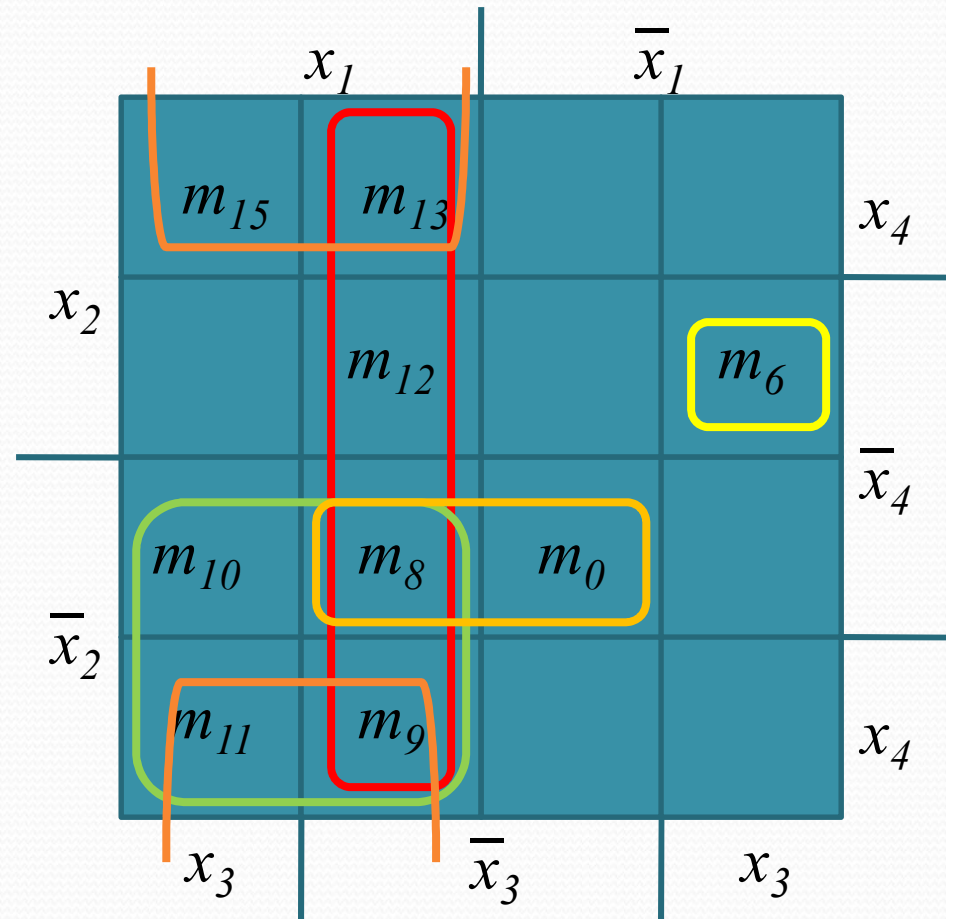
$$max_5 = m_6 = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$$



Mulțimea monoamelor maximale și mulțimea monoamelor centrale

$$M(f) = \{max_1, max_2, max_3, max_4, max_5\}$$

$$M(f) = C(f)$$



Forma simplificată a funcției

- Cazul I al algoritmului de simplificare
- O singură formă simplificată a funcției:

$$f^s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$$

Construirea diagramei Karnaugh

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0				
1				

- ! O singură cifră **distinctă**!