

Logică computațională

Curs 10

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Sistem formal (axiomatic) asociat Rezoluției predicative

- $\text{Res}^{\text{Pr}} = (\sum_{\text{Res}}^{\text{Pr}}, F_{\text{Res}}^{\text{Pr}}, A_{\text{Res}}^{\text{Pr}}, R_{\text{Res}}^{\text{Pr}})$
- $\sum_{\text{Res}}^{\text{Pr}} = \sum_{\text{Pr}} \setminus \{ \forall, \exists, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ – **alfabetul**
- $F_{\text{Res}}^{\text{Pr}} \cup \{ \square \}$ – **mulțimea formulelor bine-formate**
 - $F_{\text{Res}}^{\text{Pr}}$ mulțimea tuturor clauzelor ce se pot forma folosind alfabetul $\sum_{\text{Res}}^{\text{Pr}}$
 - \square - **clauza vidă** care nu conține nici un literal, simbolizează inconsistența
- $A_{\text{Res}}^{\text{Pr}} = \emptyset$ – **mulțimea axiomelor**
- $R_{\text{Res}}^{\text{Pr}} = \{ \text{res}^{\text{Pr}}, \text{fact} \}$ **mulțimea regulilor de inferență** care conține:

Reguli de inferență predicative

- **regula rezoluției predicative:**

$$A \vee l_1, B \vee \neg l_2 \vdash_{res}^{Pr} \theta(A) \vee \theta(B),$$

unde $\theta = mgu(l_1, l_2)$ și $A, B \in F_{Res}^{Pr}$

- $C_1 = A \vee l_1, C_2 = B \vee \neg l_2$ clauzele care rezolvă,

dacă literalii l_1 și l_2 sunt unificabili

- Rezolventul binar $C_3 = \text{Res}_{\theta}^{Pr}(C_1, C_2) = \theta(A) \vee \theta(B)$

- **regula factorizării:**

$$C \vdash_{fact} C', C' - \text{factor al lui } C$$

$$\text{unde } C = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k \vee l_{k+1} \vee \dots \vee l_n,$$

$$\lambda = mgu(l_1, l_2, \dots, l_k)$$

$$C' = \lambda(l_k) \vee \lambda(l_{k+1}) \vee \dots \vee \lambda(l_n)$$

Example

$$C_1 = P(x) \vee \underline{Q(y,b)}$$

$$C_2 = \underline{\neg Q(z,z)} \vee R(g(z))$$

$$\text{Rez}_{\theta}^{\text{Pr}}(C_1, C_2) = \theta(P(x)) \vee \theta(R(g(z))) = P(x) \vee R(g(b))$$

$$\theta = [y \leftarrow z]^{\circ} [z \leftarrow b] = [y \leftarrow b, z \leftarrow b]$$

$$C_3 = \underline{P(x) \vee P(y) \vee P(a)} \vee R(g(z), x)$$

$$\lambda = [x \leftarrow a, y \leftarrow a]$$

$$\text{Fact}_{\lambda}(C_3) = \lambda(\underline{P(a)}) \vee \lambda(R(g(z), a)) = \underline{P(a)} \vee R(g(z), a)$$

Teoremă

Fie U_1, U_2, \dots, U_n și V formule predicative.

- $\vdash V$ dacă și numai dacă $(\neg V)^C \vdash_{res}^{\text{Pr}} \square$
- $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ dacă și numai dacă
$$\{U_1^C, U_2^C, \dots, U_n^C, (\neg V)^C\} \vdash_{res} \square$$

Observație: Variabilele din clauze distincte se recomandă să fie distincte.

Algoritmul rezoluției predicative:

Date de intrare: U_1, U_2, \dots, U_n , V – formule predicative

Date de ieșire: ”are loc $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ ” sau ”nu are loc $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ ”

Se construiește $S = \{ U_1^C, U_2^C, \dots, U_n^C, (\neg V)^C \}$

Repetă

Se selectează literalii l_1 , l_2 și clauzele C_1 , C_2 astfel încât sunt clauze sau factori ai unor clauze din S

Fie $l_1 \in C_1$ și $\neg l_2 \in C_2$, respectiv $l_1, l_2 \in C_1$

Dacă l_1 și l_2 sunt unificabili cu $\theta = mgu(l_1, l_2)$

Atunci

$C = \text{Res}_{\theta}^{\text{Pr}}(C_1, C_2)$ respectiv $C = \text{fact}_{\theta}(C_1)$

Algoritmul rezoluției predicative - continuare

Dacă $C = \square$

Atunci Scribe "are loc $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ "; **STOP**

Altfel $S = S \cup \{C\}$

Sfârșit_dacă

Sfârșit_dacă

Până când nu se mai pot deriva noi rezolvenți **sau** un număr fixat de iterații au fost executate

Dacă nu se mai pot deriva noi rezolvenți

Atunci Scribe "nu are loc $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ "

Altfel Scribe "nu se poate decide dacă are loc sau nu $U_1, U_2, \dots, U_n \vdash V$ "

Sfârșit_dacă

Sfârșit algoritm

Strategii și rafinări ale rezoluției predicative

- Strategii:
 - Strategia eliminării !unificarea, factorizarea
 - Strategia saturării pe nivele
 - Strategia mulțimii suport
- Rafinări:
 - Rezoluția blocării
 - Rezoluția liniară
 - input
 - unit

Example

$$\vdash (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)) \rightarrow ((\forall x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\exists z)R(z))$$

$$\vdash (\exists y) (\exists x) (P(x, y) \wedge P(y, y)) \vee (\exists y) (\exists x) (\neg P(y, x) \wedge \neg P(y, y))$$

$$\vdash (\exists x) (\forall y) (P(x) \wedge \neg P(y)) \vee \neg(\exists z)P(z)$$



Exemplu (1)

obținerea mulțimii de clauze

$$\begin{aligned} & \vdash^? (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)) \rightarrow ((\forall x)(\forall y) P(x,y) \rightarrow (\exists z) R(z)) \xRightarrow{\text{ITD}} \\ & (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)) \vdash^? (\forall x)(\forall y) P(x,y) \rightarrow (\exists z) R(z) \xRightarrow{\text{ITD}} \\ & (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\forall y) P(x,y) \vdash^? (\exists z) R(z) \end{aligned}$$

$$U_1 = (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)) \equiv (\exists x)(\forall y) (\neg P(x,y) \vee R(x)) = U_1^P$$

$$x \leftarrow a \quad U_1^S = (\forall y) (\neg P(a,y) \vee R(a))$$

$$U_1^{Sq} = \neg P(a,y) \vee R(a) = U_1^C = C_1$$

$$U_2 = (\forall x)(\forall y) P(x,y)$$

$$U_2^C = P(x,y) = U_2^C = C_2$$

$$\neg V = \neg((\exists z) R(z))$$

$$\neg V \equiv (\forall z) \neg R(z)$$

$$(\neg V)^{Sq} = \neg R(z) = (\neg V)^C = C_3$$

$$S = \{ \neg P(a,y) \vee R(a), P(x,y), \neg R(z) \}$$

Exemplu (1)

aplicarea metodei rezoluției

$$S = \{\neg P(a,y) \vee R(a), P(x,y), \neg R(z)\}$$

$$\text{Rez}_{\theta}^{Pr}(C_1, C_2) = R(a) = C_4$$

$$\theta = [x \leftarrow a]$$

$$\text{Rez}_{\lambda}^{Pr}(C_4, C_3) = \square$$

$$\lambda = [z \leftarrow a]$$

($\stackrel{\text{TCC}}{\Rightarrow} S$ este inconsistentă)

\Rightarrow (pe baza teoremei din curs) că $U_1, U_2 \vdash V$, și din raționamentul prin respingere (sau aplicând de 2 ori TD)

$$\vdash (\exists x)(\forall y) (P(x,y) \rightarrow R(x)) \rightarrow ((\forall x)(\forall y) P(x,y) \rightarrow (\exists z) R(z))$$

Exemplu (2)

obținerea mulțimii de clauze

$$\begin{aligned} & \stackrel{?}{\vdash} (\exists y) (\exists x) (P(x, y) \wedge P(y, y)) \vee (\exists y) (\exists x) (\neg P(y, x) \wedge \neg P(y, y)) \stackrel{\text{not.}}{=} U \\ & \neg U \equiv \neg ((\exists y) (\exists x) (P(x, y) \wedge P(y, y)) \vee (\exists y) (\exists x) (\neg P(y, x) \wedge \neg P(y, y))) \\ & \neg U \equiv (\forall y) (\forall x) (\neg P(x, y) \vee \neg P(y, y)) \wedge (\forall y) (\forall x) (P(y, x) \vee P(y, y)) \\ & \neg U \equiv (\forall y) (\forall x) (\neg P(x, y) \vee \neg P(y, y)) \wedge (\forall t) (\forall z) (P(t, z) \vee P(t, t)) \\ & \neg U \equiv (\forall y) (\forall x) (\forall t) (\forall z) ((\neg P(x, y) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(t, z) \vee P(t, t))) \\ & \neg U^{Sq} = (\neg P(x, y) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(t, z) \vee P(t, t)) = \neg U^C \\ & C_1 = \neg P(x, y) \vee \neg P(y, y) \\ & C_2 = P(t, z) \vee P(t, t) \\ & S = \{ C_1, C_2 \} \end{aligned}$$

Exemplu (2)

aplicarea metodei rezoluției

$$S = \{ C_1, C_2 \}$$

$$\text{Rez}_\theta^{\text{Pr}}(C_1, C_2) = \neg P(x, t) \vee P(t, z) = C_3$$

$$\theta = [y \leftarrow t]$$

$$\text{Fact}_\lambda^{\text{Pr}}(C_2) = P(t, t) = C_4$$

$$\lambda = [z \leftarrow t]$$

$$\text{Fact}_\xi^{\text{Pr}}(C_1) = \neg P(y, y) = C_5$$

$$\xi = [x \leftarrow y]$$

$$\text{Rez}_\theta^{\text{Pr}}(C_4, C_5) = \square, \text{ deci, pe baza teoremei din curs } \Rightarrow \vdash U$$

Exemplu (3)

obținerea mulțimii de clauze

$$\stackrel{?}{\vdash} (\exists x) (\forall y) (P(x) \wedge \neg P(y)) \vee \neg(\exists z)P(z) \stackrel{\text{not.}}{=} U$$

$$\neg U \equiv \neg ((\exists x) (\forall y) (P(x) \wedge \neg P(y)) \vee \neg(\exists z)P(z))$$

$$\neg U \equiv (\forall x) (\exists y) (\neg P(x) \vee P(y)) \wedge (\exists z)P(z)$$

$$\neg U \equiv (\exists z) (\forall x) (\exists y) ((\neg P(x) \vee P(y)) \wedge P(z)) = (\neg U)^P$$

$$z \leftarrow a, y \leftarrow f(x)$$

$$(\neg U)^S = (\forall x) ((\neg P(x) \vee P(f(x))) \wedge P(a))$$

$$(\neg U)^{Sq} = (\neg P(x) \vee P(f(x))) \wedge P(a) = (\neg U)^C$$

$$C_1 = \neg P(x) \vee P(f(x))$$

$$C_2 = P(a)$$

$$S = \{ C_1, C_2 \}$$

Exemplu (3)

aplicarea metodei rezoluției

$$S = \{ C_1, C_2 \}$$

$$\text{Rez}_{\theta}^{\text{Pr}}(C_1, C_2) = P(f(a)) = C_3$$

$$\theta = [x \leftarrow a]$$

$$\text{Rez}_{\lambda}^{\text{Pr}}(C_1, C_3) = P(f(f(a))) = C_4$$

$$\lambda = [x \leftarrow f(a)]$$

Ciclu infinit, deci nu putem decide dacă formula este sau nu teoremă.

Completitudinea și corectitudinea

- Toate rafinările și strategiile rezolutive păstrează completitudinea și corectitudinea.
- Combinarea lor poate impune prea multe restricții și deși mulțimea inițială de clauze este inconsistentă, s-ar putea să nu se poată deriva clauza vidă.
- sunt complete:
 - rezoluția generală + strategia eliminării
 - rezoluția generală + strategia mulțimii suport
 - rezoluția generală + strategia mulțimii suport + strategia eliminării
 - rezoluția liniară + strategia eliminării
 - rezoluția liniară + strategia mulțimii suport
- nu sunt complete:
 - rezoluția blocării + strategia eliminării
 - rezoluția blocării + strategia mulțimii suport
 - rezoluția blocării + rezoluția liniară
 - rezoluția unitară
 - rezoluția de intrare

Completitudinea rezoluției de intrare

Definiții:

- O *clauză* se numește *pozitivă* dacă aceasta conține literalii pozitivi.
- O *clauză* se numește *negativă* dacă aceasta conține doar literalii negativi.
- O clauză se numește *clauză Horn* dacă aceasta conține un singur literal pozitiv, ceilalți fiind negativi.

Teoremă:

- Rezoluția de intrare este completă pe o mulțime de clauze Horn, cu o clauză negativă ca și clauză de vârf (PROLOG).
 - $H_i: l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n \rightarrow v, i \in \{1, \dots, k\}$
 - $C: n_1 \wedge n_2 \wedge \dots \wedge n_m ?$

Limbajul Prolog - "o privire pe furis"

- tată(B,C):-bărbat(B),părinte(B,C).
- mamă(M,C):-femeie(M),părinte(M,C).
- fiu(P,S):-bărbat(S),părinte(P,S).
- Fiică(P,D):-femeie(D),părinte(P,D).
- frate(A,F):-părinte(P,A),părinte(P,F).

- părinte("Petru","Vlad")
- părinte("Petru","Bogdan")

- ? frate("Vlad","Bogdan")?

Problemă de modelare

- Toate păsările colibri sunt bogat colorate.
 - Păsările mari nu se hrănesc cu miere.
 - Păsările care nu se hrănesc cu miere nu sunt bogat colorate.
 - Piky este o pasăre colibri.
-
- Toate păsările colibri sunt păsări mici.



Transformarea din limbaj natural în limbaj logic

”pasărea x este bogat colorată” $\stackrel{\text{not.}}{=} B(x)$

”pasărea x se hrănește cu miere” $\stackrel{\text{not.}}{=} H(x)$

”pasărea x este o pasăre colibri” $\stackrel{\text{not.}}{=} C(x)$

”pasărea x este mică” $\stackrel{\text{not.}}{=} M(x)$

Constantă: Piky $\stackrel{\text{not.}}{=} a$

$$U_1 = (\forall x) (C(x) \rightarrow B(x))$$

$$U_2 = (\forall x) (\neg M(x) \rightarrow \neg H(x))$$

$$U_3 = (\forall x) (\neg H(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$U_4 = C(a)$$

$$V = (\forall x)(C(x) \rightarrow M(x))$$