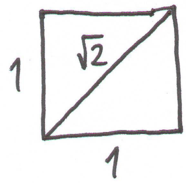
ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE

1. Numere reale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$



, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\boxed{T}$ Fie $p, q \in \mathbb{Z}^*$ numere prime între ele. Dacă numărul rațional $\frac{p}{q}$ este rădăcină a ecuației polinomiale cu coeficienți întregi

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, \ a_0 \neq 0, \ a_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

atunci 1°. p divide a_0

2°. q divide a_n

Dem: Arătăm 1°, analog 2°.

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot q^n = -p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}) \Rightarrow p \text{ divide } a_0 \cdot q^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow p$ divide a_0.

Ex: a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Arătăm că ecuația $x^2 - 2 = 0$ nu are rădăcini raționale, dar $\alpha = \sqrt{2}$ este rădăcină $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Presupunem prin absurd că $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este rădăcină a ec.

$\Rightarrow p/2$ și $q/1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\}$ absurd!

b) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^3 = 3+\sqrt{2} \Rightarrow (\alpha^3-3)^2 = 2$,

adică α este rădăcina ec. polinomiale $x^6-6x^3+7=0$

Dacă $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină a sa $\Rightarrow p/7$ și $q/1$

$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-7,-1,1,7\}$ absurd!

c) $\pi, e \notin \mathbb{Q}$

<u>Def</u>: Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este acea mulțime de numere care satisface <u>axioma infimumului</u> și, respectiv, axioma <u>supremumului.</u>

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

a) $MIN(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \leq a\}$ se numește <u>mulțimea minoranților</u> lui A

b) $MAJ(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \geq a\}$ se numește <u>mulțimea majoranților</u> lui A

c) A se numește <u>mărginită inferior</u> dacă $MIN(A) \neq \emptyset$

d) A se numește <u>mărginită superior</u> dacă $MAJ(A) \neq \emptyset$

e) A se numește <u>mărginită</u> dacă c) și d) au loc simultan.

<u>Axioma infimumului</u>: Orice submulțime nevidă și mărginită inferior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mare minorant, numit <u>marginea inferioară</u> (<u>infimum</u>) a lui A, notat inf A.

<u>Axioma supremumului</u>: Orice submulțime nevidă și mărginită superior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în $\mathbb{R}$) un cel mai mic majorant, numit <u>marginea superioară</u> (<u>supremum</u>) a lui A, notat sup A.

Ex: a) Mulțimea $\mathbb{Q}$ nu satisface axioma infimumului sau a supremumului

$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}\subseteq\mathbb{Q}$, $A=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$

$MIN(A)=(-\infty,-\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$; $MAJ(A)=(\sqrt{2},+\infty)\cap\mathbb{Q}$

$\inf A$, $\sup A$?

b) $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}\subseteq\mathbb{R}$

$MIN(A)=(-\infty,-\sqrt{2}]$; $MAJ(A)=[\sqrt{2},+\infty)$

$\inf A=-\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, $\sup A=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

Obs:

$$m=\inf A \iff \begin{cases} m\in MIN(A) \\ \forall m'\in MIN(A) \text{ avem } m'\leq m \end{cases}$$

$$M=\sup A \iff \begin{cases} M\in MAJ(A) \\ \forall M'\in MAJ(A) \text{ avem } M'\geq M \end{cases}$$

Prop (caracterizarea algebrică a inf. și sup.)

$$m=\inf A \iff \begin{cases} (i)\ \forall x\in A,\ x\geq m \\ (ii)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists y\in A \text{ a.î. } y<m+\varepsilon \end{cases}$$

$$M=\sup A \iff \begin{cases} i)\ \forall x\in A,\ x\leq M \\ (ii)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists y\in A \text{ a.î. } y>M-\varepsilon \end{cases}$$

Ex: $A=\mathbb{N}$, $\inf\mathbb{N}=0$, $\sup\mathbb{N}$? $\mathbb{N}$ nemărginită.

Def: Considerăm două elemente $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$

$$x+\infty = \infty + x = \infty \; ; \; x-\infty = -\infty + x = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty \, , \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty)\cdot \infty = -\infty$$

$\forall x > 0$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$, $x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = -\infty$

$\forall x < 0$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty$, $x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = \infty$

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}} \overset{not}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ se numește mulțimea extinsă a numerelor reale.

Obs: a) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

b) Următoarele operații nu se definesc:

$$\infty - \infty \, , \; -\infty + \infty \, , \; 0 \cdot (\pm\infty) \, , \; (\pm\infty)\cdot 0 \, , \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Convenție:

a) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită inferior atunci $\inf A = -\infty$.

b) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită superior atunci $\sup A = +\infty$.

c) $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Ex: $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Def: Numim valoarea absolută (modul) a numărului $x \in \mathbb{R}$, numărul

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Prop: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $a > 0$. Au loc

1°. $|x| \geq 0$

2°. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3°. $|x| = |-x|$

4°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5°. $|x+y| \leq |x| + |y|$

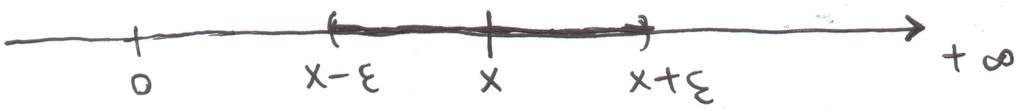
6°. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Un interval de forma

a) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ se numește <u>vecinătate a lui x</u>

b) $(\varepsilon, +\infty)$ —||— <u>vecinătate a lui $+\infty$</u>

c) $(-\infty, -\varepsilon)$ —||— <u>vecinătate a lui $-\infty$</u>



x – centrul vecinătății

ε – raza vecinătății

2. Șiruri de numere reale

Def: O funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se numește <u>șir de nr. reale</u>.

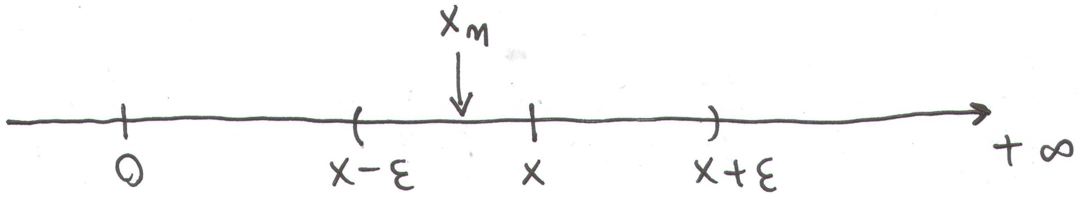
Dacă $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ atunci șirul se va nota $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Spunem că șirul (x_n) este <u>convergent</u> dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Numărul x cu proprietatea de mai sus este unic și se numește <u>limita</u> șirului (x_n).

<u>Notații</u>: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $x_n \to x\ (n\to\infty)$



$|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon$

$\iff x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Unicitatea: Dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ și $|x_n - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ arbitrar $\Rightarrow x = y$.

b) Spunem că șirul (x_n) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă $\forall \varepsilon>0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < -\varepsilon$) și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$)

c) Un șir care nu este convergent se numește <u>divergent</u>.

<u>Ex:</u> Justificați cu definiția că $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, $\forall a \in (-1,1)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $|a^n - 0| < \varepsilon$.

$|a^n| < \varepsilon \iff |a|^n < \varepsilon \iff n \cdot \ln|a| < \ln\varepsilon \iff n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$, $a \neq 0$

Cum alegem $n_0 \in \mathbb{N}$?

$$n_0 = \max\left\{0, \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right] + 1\right\}.$$

<u>Def:</u> Un șir (x_n) de numere reale se numește

a) <u>mărginit inferior</u> dacă mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită inferior.

b) <u>mărginit superior</u> dacă mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior.

c) <u>mărginit</u> dacă șirul este atât mărginit inferior cât și superior. În acest caz $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ a.î.

$$m \leq x_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Obs:</u> Orice șir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată.

<u>Ex:</u> $x_n = (-1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Def:</u> Un șir (x_n) de numere reale se numește

a) <u>crescător</u> dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq x_{n+1}, \ \forall n \geq n_0$

b) <u>descrescător</u> dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq x_{n+1}, \ \forall n \geq n_0$

c) <u>monoton</u> dacă șirul este crescător sau descrescător.

Analog se introduc noțiunile de șir <u>strict crescător</u>, respectiv <u>strict descrescător</u>, înlocuind inegalitățile de mai sus cu inegalități stricte.

<u>Ex:</u> $x_n = \dfrac{2000^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2000^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2000^{n+1}} = \frac{n+1}{2000} > 1, \ \forall n \geq 2000.$$

$\boxed{T}$ (Weierstrass)

Fie (x_n) șir de numere reale. Au loc afirmațiile

1°. Dacă (x_n) este descrescător și mărginit inferior $\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

2°. Dacă (x_n) este crescător și mărginit superior $\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

3°. Dacă (x_n) este monoton și mărginit $\Rightarrow (x_n)$ convergent.

Dem: 1°. $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ mărginită inferior $\Rightarrow \alpha = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i)\ \alpha \le x_n,\ \forall n\in\mathbb{N} & \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N} : \alpha < x_n+\varepsilon \quad (*) \\ ii)\ \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0} < \alpha+\varepsilon \end{cases}$$

(x_n) descrescător $\Rightarrow x_n \le x_{n_0}, \forall n\ge n_0 \Rightarrow x_n < \alpha+\varepsilon, \forall n\ge n_0 \quad (**)$

Din $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow \alpha-\varepsilon < x_n < \alpha+\varepsilon, \forall n\ge n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n-\alpha| < \varepsilon, \forall n\ge n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \Rightarrow (x_n)$ convergent

2°. analog (temă)

3°. evidentă.

Prop: Fie (x_n) șir de numere reale. Au loc afirmațiile

1°. Dacă (x_n) este crescător și nemărginit superior $\Rightarrow (x_n)$ are limita $+\infty$

2°. Dacă (x_n) este descrescător și nemărginit inferior $\Rightarrow (x_n)$ are limita $-\infty$.

3°. Dacă (x_n) este monoton $\Rightarrow (x_n)$ are limită (finită sau nu)

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0}>\varepsilon \\ (x_n) \text{ crescător } \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}, \forall n\geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n>\varepsilon, \forall n\geq n_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

2° analog ; 3° evident.

$\boxed{T}$ (criteriul cleștelui)

Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ trei șiruri de numere reale având următoarele proprietăți:

i) $\exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n\leq y_n\leq z_n$, $\forall n\geq n_0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{not}{=} \alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha.$

Dem:

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq n_1$: $|x_n-\alpha|<\varepsilon$

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_2\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq n_2$: $|z_n-\alpha|<\varepsilon$

Avem $x_n-\alpha\leq y_n-\alpha\leq z_n-\alpha$, $\forall n\geq n_0$

$$\left.\begin{array}{l} y_n-\alpha\leq z_n-\alpha\leq |z_n-\alpha|\leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\} \\ \alpha-y_n\leq \alpha-x_n\leq |x_n-\alpha|\leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow |y_n-\alpha|\leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\}$, $\forall n\geq n_0$

$\Rightarrow |y_n-\alpha|<\varepsilon$, $\forall n\geq \max\{n_0, n_1, n_2\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha.$

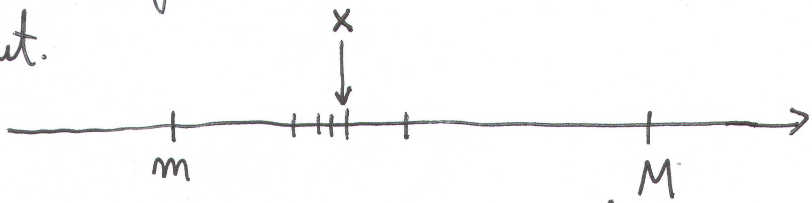
<u>Def</u>: Fie (x_n) un şir de numere reale şi $n_0<n_1<n_2<\dots$ un şir infinit strict crescător de indici (numere naturale). Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte <u>subşir</u> al şirului (x_n).

<u>Ex</u>: $x_n=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad x_{2k}=1$, $x_{2k+1}=-1$, $\forall k\in\mathbb{N}$

<u>Prop</u>: Şirul (x_n) are limita $x\in\overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ Orice subşir al şirului (x_n) are limita x.

$\boxed{T}$ (Cesaro)

Orice şir mărginit de numere reale are un subşir convergent.



<u>Def</u>: Fie (x_n) un şir de numere reale. Mulţimea

$$LIM(x_n)\overset{not}{=}\left\{x\in\overline{\mathbb{R}}\;\middle|\;\exists\,(x_{n_k}) \text{ subşir al lui } (x_n) \text{ a.î. } \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x\right\}$$

se numeşte <u>mulţimea punctelor limită</u> ale şirului (x_n).

<u>Ex</u>: $x_n=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}$, $LIM(x_n)=\{-1,1\}$.

<u>Prop</u>: Pentru orice şir de numere reale (x_n) are loc

$$LIM(x_n)\neq\emptyset$$

<u>Def</u>: a) Numărul $\inf LIM(x_n)$ se numeşte <u>limita inferioară</u> a şirului (x_n) şi se notează cu $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Numărul $\sup LIM(x_n)$ se numeşte <u>limita superioară</u> a şirului (x_n) şi se notează cu $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Prop: Fie (x_n) un şir de numere reale. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

Dem: Rezultă din echivalenţa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff LIM(x_n) = \{x\}$

Def: Un şir (x_n) de numere reale se numeşte <u>fundamental</u> dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Formularea este echivalentă cu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

punând $m = n+p \geq n_0$.

Prop: Orice şir fundamental este mărginit.

Dem: Pentru $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1$.

$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|, \forall n \geq n_0$

Dacă notăm $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1+|x_{n_0}|\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -M \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ mărginit.

Prop: Orice şir fundamental este convergent.

Dem: (x_n) fundamental $\Rightarrow (x_n)$ mărginit $\underset{\text{Cesaro}}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k})$ un subşir convergent.

Notăm $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}$, deci

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

(x_n) fundamental $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Alegem $m = n_k \geq k$ (căci $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$)

$\Rightarrow |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon, \forall k \geq n_0$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $k \geq \max\{k_0, n_0\}$ obținem

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)$ convergent la x.

<u>Prop</u>: Orice șir convergent este fundamental.

<u>Dem</u>: Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, avem

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, astfel

$\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ fundamental.

$\boxed{\text{T}}$ (Cauchy)

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este fundamental

<u>Obs</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$.

<u>Ex</u>: Natura șirului $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$?

(x_n) strict crescător $\Rightarrow (x_n)$ are limită

Este (x_n) mărginit superior ?

$$x_{10^9} \simeq 21$$

Arătăm că (x_n) nu este fundamental

$\iff \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m, l \geq n$ a.î. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$|x_{2n} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

<u>Def</u>: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$ se numește <u>serie de numere reale</u> asociată șirului (x_n) și se notează cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n \geq 0} x_n$.

b) Șirul $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numește <u>șirul sumelor parțiale</u> ale seriei.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește <u>convergentă</u> dacă șirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ se numește <u>suma seriei</u> și scriem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește <u>divergentă</u>.

Arătăm că (x_n) nu este fundamental

$\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m, l \geq n$ a.î. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$|x_{2n} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$ se numește serie de numere reale asociată șirului (x_n) și se notează cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$.

b) Șirul $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numește șirul sumelor parțiale ale seriei.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă șirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se numește suma seriei și scriem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește divergentă.

serie divergentă → cu suma infinită / → fără sumă (serie oscilantă)

Ex: Natura <u>seriei geometrice</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1+a+a^2+\dots$, $a \in \mathbb{R}$

Avem $S_n = 1+a+a^2+\dots+a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ n+1, & a = 1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}, & a \in (-1,1) \\ +\infty, & a \geq 1 \\ \nexists, & a \leq -1 \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ este convergentă $\Leftrightarrow a \in (-1,1)$

<u>Prop</u>: Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Reciproca nu este adevărată.

Dem: Fie $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$S_n - S_{n-1} = x_n \ (n\to\infty) \Rightarrow S - S = \lim_{n\to\infty} x_n$.

<u>Negația</u>: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Ex: Natura <u>seriei armonice</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty \ (n\to\infty) \Rightarrow$ seria este divergentă.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\boxed{T}$ (criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}| < \varepsilon$.

Dem:
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă $\Leftrightarrow (S_n)$ șir convergent, $S_n = x_0+x_1+\ldots+x_n$

$\Leftrightarrow (S_n)$ șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$,

$\forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$,

$|S_{n+p} - S_n| = |x_0+x_1+\ldots+x_{n+p}-x_0-x_1-\ldots-x_n| = |x_{n+1}+\ldots+x_{n+p}|$.

__Def:__ Spunem despre două serii că __au aceeași natură__ ($\sim$) dacă ambele sunt fie convergente, fie divergente.

__Ex:__ 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = (x_0+x_1+\ldots+x_{n_0-1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot x_n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$S_n = x_0+x_1+\ldots+x_n$, $S_n' = \alpha x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha x_n = \alpha \cdot S_n$

4. __Serii cu termeni pozitivi__ (s.t.p.)

__Def:__ Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește __cu termeni pozitivi__ dacă $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

__Prop:__ O serie cu termeni pozitivi este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul sumelor parțiale este mărginit.

Dem: Fie $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S_n)$ şir crescător

I) Dacă (S_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ convergent $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ conv.

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ div.

<u>Obs:</u> Orice serie cu termeni pozitivi are sumă (finită sau $+\infty$)

$\boxed{T}$ (criteriul condensării al lui Cauchy)

Fie (x_n) un şir descrescător de numere pozitive. Seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots$ au aceeaşi natură.

Dem: Fie $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $T_n = x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^n \cdot x_{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat $\exists!\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$.

$S_n = x_1 + \ldots + x_n \leq x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}-1} = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \ldots + (x_{2^k} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}) \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^k \cdot x_{2^k} = T_k$, apoi

$S_n = x_1 + \ldots + x_n \geq x_1 + \ldots + x_{2^k} = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots + (x_{2^{k-1}+1} + \ldots + x_{2^k}) \geq x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \ldots + 2^{k-1} \cdot x_{2^k} =$

$= \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^k \cdot x_{2^k}) = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot T_k \geq \frac{1}{2} \cdot T_k$

Deci $0 \leq \frac{1}{2} T_k \leq S_n \leq T_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$

(S_n) mărginit $\Leftrightarrow (T_k)$ mărginit,

de unde rezultă concluzia.

Ex: Natura seriei armonice generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p\in\mathbb{R}$

Caz particular $p=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

I) Dacă $p \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p=0 \\ +\infty, & p<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ serie divergentă

II) Dacă $p>0$, fie $x_n = \frac{1}{n^p}$

(x_n) descrescător cu termeni pozitivi $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ convergentă $\Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$.

Concluzie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergentă $\Leftrightarrow p>1$.

$\boxed{T}$ (criteriul comparației)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două s.t.p. Au loc afirmațiile:

1° Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le y_n$, $\forall n \ge n_0$ atunci

i) Dacă $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $\sum x_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ este divergentă

2° (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$ atunci

i) Dacă $l < +\infty$ și $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ convergentă

ii) Dacă $l>0$ și $\sum y_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum x_n$ divergentă

Dem:

1°. Fie $S_n = x_0+x_1+\dots+x_n$, $T_n = y_0+y_1+\dots+y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Din $x_n \le y_n$, $\forall n\ge n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} x_k \le \sum_{k=n_0}^{n} y_k \Rightarrow S_n - S_{n_0-1} \le T_n - T_{n_0-1}$

I) Dacă (T_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ mărginit superior (i)

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow (T_n)$ nemărginit superior (ii)

2°. i) $l<+\infty \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\ge n_0$: $\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon \Rightarrow x_n < (l+\varepsilon)\cdot y_n$, $\forall n\ge n_0$.

Din $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(l+\varepsilon)\cdot y_n$ convergentă $\xRightarrow{1°i)}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă.

ii) $l>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{l} < +\infty$.

Presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\xRightarrow{2°i)}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, contradicție cu ipoteza $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

<u>Obs</u>: Cu notațiile din teorema anterioară, dacă $\exists \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l \in (0,+\infty)$ atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\in(0,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ care este convergentă

$\boxed{T}$ (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1°. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ este divergentă

2°. $\exists \lim_{n\to\infty}\left(u_n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1}\right) = K \in \overline{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K>0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K<0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem:

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\in(0,+\infty) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ care este convergentă

$\boxed{T}$ (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1°. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ este divergentă

2°. $\exists \lim_{n\to\infty}\left(u_n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1}\right) = K\in\overline{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K>0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K<0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem:

Din $2^\circ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$:

$$K - \varepsilon \overset{(i)}{<} u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} \overset{(ii)}{<} K + \varepsilon$$

i) Alegem $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} > \frac{K}{2}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \frac{K}{2} \cdot x_{n+1} < u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \frac{K}{2}(x_{n_0+1} + \dots + x_n) < (u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1}) + (u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} -$

$- u_{n_0+2} \cdot x_{n_0+2}) + \dots + (u_n \cdot x_n - u_{n+1} \cdot x_{n+1})$

$\Rightarrow \frac{K}{2}(x_{n_0+1} + \dots + x_n) < u_{n_0} \cdot x_{n_0} - u_{n+1} \cdot x_{n+1} < u_{n_0} \cdot x_{n_0}$

$\Rightarrow S_n = x_{n_0+1} + \dots + x_n$ este mărginit superior $\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n$ convergentă

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă

ii) Alegem $\varepsilon = -K > 0 \Rightarrow u_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1} < 0, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow u_n \cdot x_n < u_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} < u_{n_0+1} \cdot x_{n_0+1} <$

$< \dots < u_n \cdot x_n \Rightarrow u_{n_0} \cdot x_{n_0} \leq u_n \cdot x_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \geq (u_{n_0} \cdot x_{n_0}) \cdot \frac{1}{u_n}, \forall n \geq n_0.$

Din $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ divergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(u_{n_0} \cdot x_{n_0})}_{\neq 0} \cdot \frac{1}{u_n}$ divergentă

$\overset{c.c.}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergentă.

<u>Prop</u> (consecințe ale criteriului lui Kummer)

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi. Au loc:

1° (criteriul raportului al lui d'Alembert)

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $D > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $D < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

2° (criteriul lui Raabe - Duhamel)

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $R > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $R < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

3° (criteriul lui Bertrand)

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) Dacă $B > 1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $B < 1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem: În criteriul lui Kummer facem următoarele particularizări:

1° $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ divergentă și $K = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = D - 1$

$D - 1 > 0 \Rightarrow \sum x_n$ convergentă

$D - 1 < 0 \Rightarrow \sum x_n$ divergentă

2° $u_n = n, \forall n \geq 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă și

$$K = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1 = R - 1$$

3°. $u_n = n\cdot\ln n, \forall n\geq 2$; $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ divergentă (revizuim!) și

$$K = \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\ln n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\cdot\ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\ln n\cdot\left[n\cdot\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)-1\right] + \underbrace{(n+1)\cdot\left(\ln n - \ln(n+1)\right)}_{\text{are limita } -1}\right\} = B-1$$

<u>Prop</u> (criteriul radical al lui Cauchy)

Fie (x_n) un șir cu termeni strict pozitivi și cu proprietatea că $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = c\in\overline{\mathbb{R}}$.

i) Dacă $c<1 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $c>1 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă

Dem:

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n\geq n_0: \quad c-\varepsilon \overset{(ii)}{<} \sqrt[n]{x_n} \overset{(i)}{<} c+\varepsilon$$

i) Fie $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$, notăm $\alpha = c+\varepsilon = c+\frac{1-c}{2} = \frac{c+1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0<\alpha<1$ și $\sqrt[n]{x_n}<\alpha$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow x_n<\alpha^n$, $\forall n\geq n_0$.

Din $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă.

ii) Fie $\varepsilon = \frac{c-1}{2}>0$, notăm $\beta = c-\varepsilon = c-\frac{c-1}{2} = \frac{c+1}{2} > 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{x_n} > \beta > 1$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Obs:

1) Criteriile enunțate nu decid natura seriei în cazul $D=1$, $R=1$, $B=1$, respectiv $C=1$.

2) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{D}$ (la seminar!)

Ex: Stabiliți natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, $a>0$.

$$x_n = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}\ ;\quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}\cdot\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{a+n+1}{n+1}\ ;\quad D = \lim_{n\to\infty}\frac{a+n+1}{n+1} = 1 \text{ (nu decide)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot a}{n+1} = a$$

Dacă $a>1 \Rightarrow$ serie convergentă,

Dacă $a<1 \Rightarrow$ serie divergentă.

Dacă $a=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} \underset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ divergentă.

5. Serii alternate

Fie (x_n) un șir de numere reale.

Def: Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Prop: Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Reciproca afirmației nu este adevărată.

Dem: Din $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$:

$|x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+p}| <$

$< \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă.

Un contraexemplu pentru reciprocă se va da ulterior.

<u>Def:</u> O serie care este convergentă dar nu este absolut convergentă se numește <u>semiconvergentă</u>.

<u>Def:</u> Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește <u>alternată</u> dacă $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă notăm $a_n = |x_n| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ atunci vom avea $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ sau $x_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Notație: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{T}}$ (criteriul lui Leibnitz)

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere pozitive cu $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ atunci seria alternată $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

Dem: (a_n) este descrescător.

Fie $\varepsilon > 0$ și $n, p \in \mathbb{N}$.

$|(-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p} \cdot a_{n+p}| =$

$$= \left| \underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p}}_{\geq 0} \right| =$$

$$= a_{n+1} \underbrace{- a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- a_{n+4} + \ldots}_{\leq 0} + \underbrace{(-1)^{p-2} \cdot a_{n+p-1} + (-1)^{p-1} \cdot a_{n+p}}_{\leq 0} \leq$$

$\leq a_{n+1} < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$ căci $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă

Ex: Natura <u>seriei armonice alternate</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0 \overset{L.}{\Longrightarrow}$ seria este convergentă

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ seria este semiconvergentă.

$\boxed{T}$ (dependența sumei de ordinea de însumare)

1° (Riemann) Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria nou obținută să aibă ca sumă orice număr $S \in \overline{\mathbb{R}}$.

2° (Cauchy) La o serie absolut convergentă suma sa nu depinde de ordinea de însumare a termenilor.

FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

1. Limită și continuitate

$A \subseteq \mathbb{R}$ nevidă, $x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

Def: Spunem că elementul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este

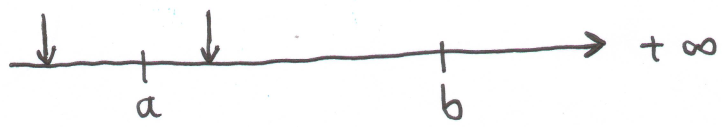
a) <u>punct de acumulare</u> al mulțimii A dacă $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

În acest caz scriem $x_0 \in A'$.

Notație: A' - mulțimea punctelor de acumulare ale lui A.

b) <u>punct izolat</u> al mulțimii A dacă $x_0 \in A \setminus A'$.

Ex: 1) $A = (a, b)$



$a \in A'$ deoarece șirul $x_n = a + \frac{b-a}{2n} \in A$, $\forall n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Analog $b \in A'$, deci $A' = [a, b]$

2) $A = \mathbb{N}$

$x_n = n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, n - punct izolat al mulțimii $\mathbb{N}$ $\Rightarrow A' = \{+\infty\}$

Def: (limita unei funcții într-un punct)

Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $x_0 \in A'$. Spunem că <u>l este limita funcției f în punctul x_0</u> dacă $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Ex: Fie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$

Arătăm că $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\nexists \lim\limits_{x \to p} [x]$

$x_0 = p$, $x_n = p + \frac{1}{n}$,

$y_n = p - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 2 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = p$ și

$$\lim_{n \to \infty} [x_n] = \lim_{n \to \infty} p = p \neq p - 1 = \lim_{n \to \infty} (p-1) = \lim_{n \to \infty} [y_n]$$

Def: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A \cap A'$. Spunem că

a) f este continuă în punctul x_0 dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Putem astfel scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

b) f este continuă pe mulțimea A dacă f continuă în $\forall x \in A$

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și discontinuă pe $\mathbb{Z}$.

Def: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y\}$ imaginea funcției. Spunem că

a) f este mărginită inferior, mărginită superior, respectiv mărginită dacă mulțimea $f(A)$ are această proprietate.

b) f își atinge extremele pe A dacă $\exists x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = \inf f(A)$ și $f(x_2) = \sup f(A)$.

În acest caz putem scrie

$f(x_1) = \min f(A)$ și $f(x_2) = \max f(A)$ numite <u>extremele</u> funcției.

$\boxed{T}$ (Weierstrass) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. f este mărginită

2°. f își atinge extremele pe $[a,b]$

2. Derivabilitate

<u>Def</u>: Fie funcția $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$. Spunem că

a) <u>f are derivată în punctul x_0</u> dacă

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$$

numită <u>derivata</u> lui f în x_0.

b) <u>f este derivabilă în punctul x_0</u> dacă f are derivată în punctul x_0 și $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

c) <u>f este derivabilă pe (a,b)</u> dacă f este derivabilă în $\forall x \in (a,b)$

<u>Ex</u>: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty, \quad f'(0) \notin \mathbb{R}$$

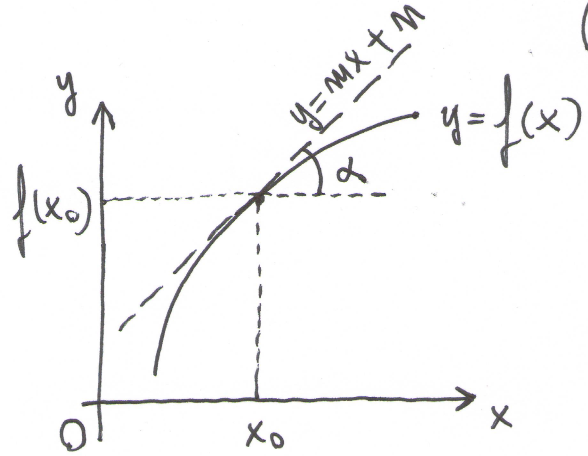
<u>Obs</u> (interpretarea geometrică a derivatei)

Derivata unei funcții într-un punct reprezintă panta tangentei la graficul funcției în acel punct.

- ecuația dreptei prin (x_0, y_0):

$$y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$$

$m = tg\,\alpha$ <u>panta dreptei</u>



- ecuația tangentei la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \quad , \quad m = f'(x_0)$$

<u>Prop</u>: Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca nu este adevărată.

Dem: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funcție derivabilă în $x_0\in(a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big) + f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot$$

$$\cdot(x-x_0) + f(x_0) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0.$$

<u>Def</u>: Fie $A\subseteq\mathbb{R}$ mulțime nevidă, $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in A$.

Spunem că:

a) <u>x_0 este punct de minim (local)</u> al lui f dacă

$\exists\,\delta>0$ a.î. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$: $f(x_0)\le f(x)$

b) <u>x_0 este punct de maxim (local)</u> al lui f dacă

$\exists\,\delta>0$ a.î. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$: $f(x_0)\ge f(x)$

c) x_0 este punct de extrem (local) al lui f dacă el este punct de minim sau maxim (local).

$\boxed{T}$ (Fermat). Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x_0 \in (a,b)$

ii) f are derivată în x_0

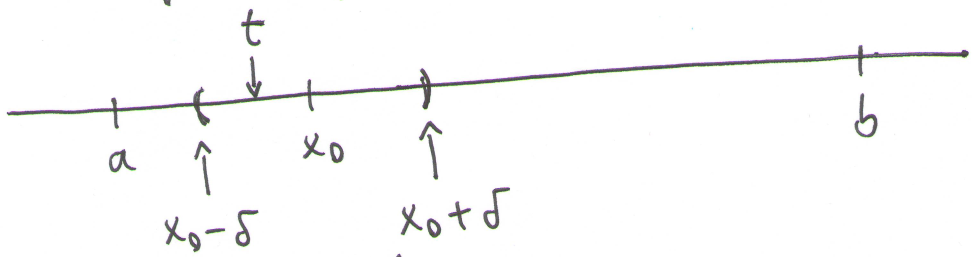
iii) x_0 este punct de extrem

atunci $f'(x_0)=0$.

Dem: Considerăm x_0 punct de minim local.

$x_0\in(a,b) \Rightarrow \exists\, \delta>0$ a.î. $a<x_0-\delta<x_0<x_0+\delta<b$ și

$$f(x_0)\le f(x),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$



$$\forall t\in(x_0-\delta,x_0):\ \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\le 0 \Rightarrow f'(x_0)=\lim_{t\nearrow x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\le 0$$

$$\forall t\in(x_0,x_0+\delta):\ \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\ge 0 \Rightarrow f'(x_0)=\lim_{t\searrow x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\ge 0$$

$\Rightarrow f'(x_0)=0$.

$\boxed{T}$ (Rolle). Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a,b]$

ii) f derivabilă pe (a,b)

iii) $f(a)=f(b)$

atunci $\exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = 0$.

Dem: f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ își atinge extremele pe $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ a.î. $f(x_1) = \min f[a,b]$ și $f(x_2) = \max f[a,b]$.

x_1, x_2 sunt puncte de extrem (global).

Distingem cazurile:

I. $x_1 \in (a,b) \Rightarrow f'(x_1) = 0$ și alegem $x_0 = x_1$.

II. $x_2 \in (a,b) \Rightarrow f'(x_2) = 0$ și alegem $x_0 = x_2$.

III. $x_1, x_2 \notin (a,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in \{a,b\} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este constantă pe $[a,b] \Rightarrow f'(x_0) = 0$, $\forall\, x_0 \in (a,b)$

$\boxed{T}$ (teorema de medie a lui Lagrange)

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a,b]$

ii) f derivabilă pe (a,b)

atunci $\exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Dem: Arătăm că funcția $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$, $\forall\, x \in [a,b]$ satisface ipotezele

teoremei lui Rolle.

g este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b),

$$g(a) = g(b) = \frac{b\cdot f(a) - a\cdot f(b)}{b-a}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \text{ a.î. } g'(x_0) = 0 \\ g'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Obs (interpretarea geometrică a teoremei de medie)

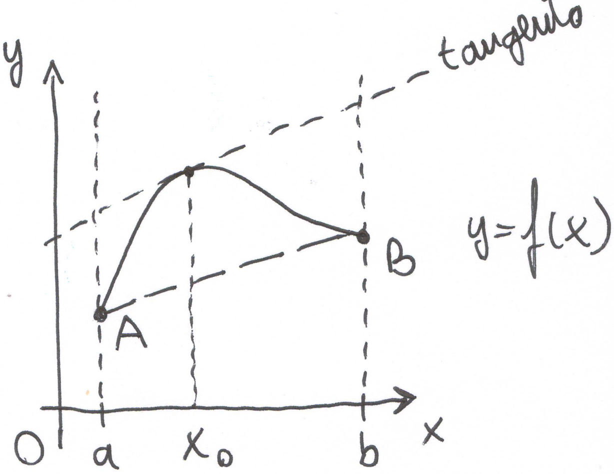
Există cel puțin o tangentă la graficul funcției paralelă cu segmentul de dreaptă determinat de extremitățile graficului.

- ecuația tangentei:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

- ecuația dreptei AB:

$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x + \frac{b\cdot f(a) - a\cdot f(b)}{b-a}$$

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in(a,b)$.

1) Dacă $\exists\, \delta > 0$ a.î. f este derivabilă pe $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$, iar funcția $f':(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0, atunci spunem că f este de două ori