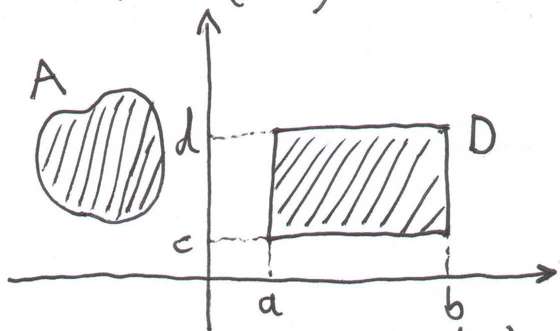
6. Integrale duble

pe axa reală ($\mathbb{R}$)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

în plan ($\mathbb{R}^2$)



$A\subseteq\mathbb{R}^2$ (compactă)

$f:A\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y)$

Def: Fie dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită și $n, m\in\mathbb{N}^*$. Notăm $\Delta_x=(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $\Delta_y=(y_0,y_1,\dots,y_m)$ diviziuni ale intervalului $[a,b]$, respectiv $[c,d]$ și $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$ sisteme de puncte intermediare (s.p.i.) asociate diviziunii Δ_x, respectiv Δ_y.

a) Numărul real

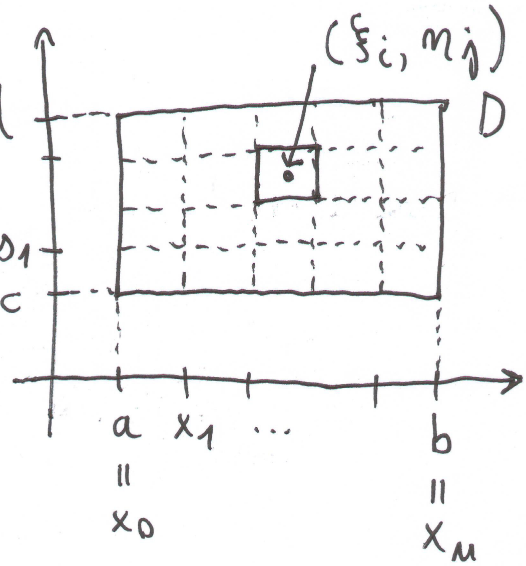
$$\sigma_f(\Delta_x,\xi,\Delta_y,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(y_j-y_{j-1})$$

se numește <u>suma Riemann</u> a funcției f corespunzătoare diviziunilor Δ_x, Δ_y și s.p.i. ξ,η.

b) Funcția f se numește <u>integrabilă Riemann pe D</u> dacă

$$\exists\ I=\lim_{(\|\Delta_x\|,\|\Delta_y\|)\to(0,0)}\sigma_f(\Delta_x,\xi,\Delta_y,\eta)\in\mathbb{R},$$

iar valoarea lui I nu depinde de alegerea s.p.i. ξ și η.
Numărul I se numește integrala Riemann a funcției f pe D și se notează cu $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ sau $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$.



$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$

notăm $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$\Rightarrow (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$

$\|\Delta_x\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$

$\|\Delta_y\| = \max\{y_j - y_{j-1} \mid j = \overline{1,m}\}$

Ex: $f(x,y) = 1, \ \forall (x,y) \in D = [a,b] \times [c,d]$

$$\sigma_f(\Delta_x, \xi, \Delta_y, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{aria}(D_{ij}) = \text{aria}(D) = (b-a)(d-c)$$

$$\Rightarrow \iint_D dxdy = \text{aria}(D)$$

$\boxed{T}$ (Fubini)

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe dreptunghiul $D = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Au loc următoarele afirmații:

1° f este integrabilă Riemann pe D

2° Funcțiile $I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, $\forall x \in [a,b]$ și

$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, $\forall y \in [c,d]$ sunt bine definite și

sunt integralile Riemann pe mulțimile specificate

3°. Are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}_{} = \underbrace{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}_{}.$$

integralele iterate ale lui f

<u>Ex:</u> Calculați $\iint_{[0,1]\times[-1,1]} (x+y)\,dx\,dy$.

<u>Def:</u> Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime compactă, $D = [a,b]\times[c,d]$ cu proprietatea că $A \subseteq D$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită.

Construim funcția

$$\bar{f}: D \to \mathbb{R}, \quad \bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in D \setminus A \end{cases}$$

o prelungire a lui f la D. Spunem că f este <u>integrabilă Riemann</u> pe A dacă $\bar{f}$ este integrabilă Riemann pe D, iar valoarea integralei $\iint_D \bar{f}(x,y)\,dx\,dy$ nu depinde de alegerea lui D. În acest caz definim <u>integrala Riemann</u> a lui f pe A astfel

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \iint_D \bar{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

<u>Prop</u>: Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulțime compactă având frontiera o curbă netedă pe porțiuni și $f: A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe A atunci f este integrabilă Riemann pe A.

"curbă netedă pe porțiuni" = reuniunea unui număr finit de curbe descrise prin funcții de clasă C^1.

<u>Obs</u>: În continuare vom lucra cu mulțimi care au această proprietate a frontierei, fără a preciza acest lucru.

<u>Prop</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime compactă și $f, g: A \to \mathbb{R}$ funcții continue pe A. Au loc afirmațiile:

1°. (monotonia integralei)

Dacă $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in A$ atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_A g(x,y)\,dx\,dy$$

2°. (liniaritatea integralei)

$$\iint_A (\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \cdot \iint_A f(x,y)\,dx\,dy + \beta \cdot \iint_A g(x,y)\,dx\,dy, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3°. (aditivitatea integralei)

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

$\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțimi compacte cu proprietățile

$$A_1 \cup A_2 = A \quad \text{și} \quad \operatorname{int} A_1 \cap \operatorname{int} A_2 = \emptyset$$

4°. (formula ariei)

$$\text{aria}(A) = \iint_A dx\,dy .$$

<u>Obs:</u> Calculul unei integrale duble depinde în mare măsură de forma mulțimii.

<u>Def:</u> O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește

a) <u>simplă în raport cu axa Ox</u> dacă $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ și $\alpha_1, \alpha_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe (a,b) astfel încât

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \,,\; \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}$$

b) <u>simplă în raport cu axa Oy</u> dacă $\exists\, c, d \in \mathbb{R}$ și $\beta_1, \beta_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe (c,d) astfel încât

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1(y) \leq x \leq \beta_2(y) \,,\; c \leq y \leq d\}$$

<u>Obs:</u> a) Orice mulțime simplă în raport cu una dintre axe este compactă

b) Un dreptunghi $D = [a,b] \times [c,d]$ este mulțime simplă în raport cu ambele axe.

<u>Ex:</u> Este mulțimea $A = \overline{B}(0_2, 1)$ simplă în raport cu vreuna dintre axe?

$\boxed{T}$ (calculul integralelor duble pe mulțimi simple în raport cu o axă)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A.

1°. Dacă A este simplă în raport cu axa Ox atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

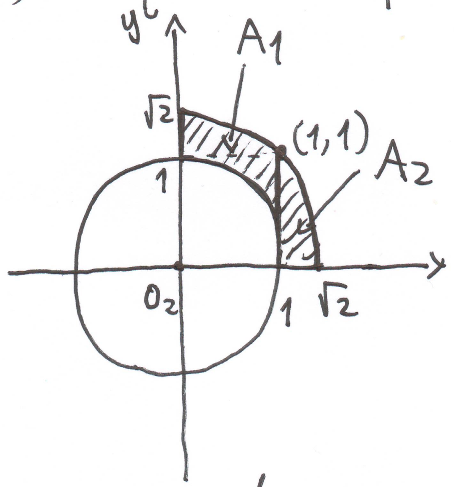
2°. Dacă A este simplă în raport cu axa Oy atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

<u>Obs:</u> În cazul particular $A = D = [a,b]\times[c,d]$ teorema se reduce la teorema lui Fubini.

<u>Ex:</u> Evaluați integrala dublă

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \quad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 2\}.$$



$A = A_1 \cup A_2$

$\mathrm{int}\, A_1 \cap \mathrm{int}\, A_2 = \emptyset$

A nu este simplă în raport cu vreo axă.

A_1 este simplă în raport cu Ox

A_2 este simplă în raport cu Ox și Oy

Avem $\iint_A xy\,dx\,dy = \iint_{A_1} xy\,dx\,dy + \iint_{A_2} xy\,dx\,dy$

$A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1, \sqrt{1-x^2}\leq y\leq \sqrt{2-x^2}\}$

$$\iint_{A_1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \left(2 - x^2 - 1 + x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\quad 1 \le x \le \sqrt{2-y^2} \right\}$$

$$\iint_{A_2} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{2-y^2}} xy\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} y \Big|_{x=1}^{x=\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} \cdot \left(2 - y^2 - 1\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Elemente de geometrie analitică în plan:

- ecuația normală a dreptei:

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

- ecuația dreptei prin două puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- ecuația cercului de centru (x_0, y_0) și raza r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- ecuația parabolei de vârf (x_0, y_0) și orientare de-a lungul axei Oy:

$$y - y_0 = p \cdot (x - x_0)^2, \quad p \in \mathbb{R}^* \text{ constantă}$$

7. Transformări de coordonate în plan

Def: Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și $g = (g_1, g_2) : M \to \mathbb{R}^2$ o funcție vectorială de variabilele u și v.

a) Corespondența

$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}, \quad \forall (u,v) \in M \qquad (1)$$

definește o transformare de coordonate, de la coordonatele curbilinii (u,v) la coordonatele carteziene (x,y).

b) Dacă g_1, g_2 sunt funcții de clasă C^1 pe M atunci spunem că transformarea (1) este de clasă C^1 pe M.

c) Dacă funcția $g : M \to g(M)$ este bijectivă cu inversa $g^{-1} = h = (h_1, h_2)$, atunci spunem că transformarea (1) este biunivocă pe M. În acest caz

$$\begin{cases} u = h_1(x,y) \\ v = h_2(x,y) \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in g(M) \qquad (2)$$

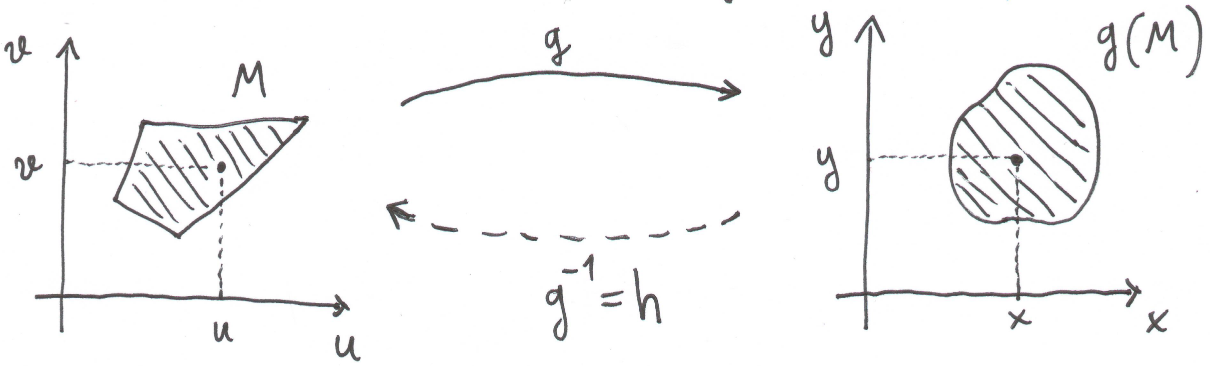
se numește transformarea inversă.

d) Determinantul

$$\det J(g)(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}, \quad \forall (u,v) \in M$$

se numește <u>jacobianul</u> transformării (1).

e) Dacă $\det J(g)(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in M$ atunci spunem că transformarea (1) este <u>nesingulară</u> pe M.



$$(u,v)\in M \longleftrightarrow (x,y)\in g(M)$$

<u>Prop</u>: Cu notațiile din definiția anterioară, dacă transformarea (1) este de clasă C^1, biunivocă și nesingulară atunci și transformarea inversă (2) va avea aceleași proprietăți.

<u>Ex</u>: (transformarea în coordonate polare)

Fie $\begin{cases} x = u\cdot\cos v \\ y = u\cdot\sin v \end{cases}, \forall (u,v)\in(0,+\infty)\times(0,2\pi) = M.$

$g(u,v) = (u\cdot\cos v, u\cdot\sin v)$ este de clasă C^1 pe M.

$$\det J(g)(u,v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u\cdot\sin v \\ \sin v & u\cdot\cos v \end{vmatrix} = u\cdot(\cos^2 v + \sin^2 v) = u$$

$\det J(g)(u,v) \neq 0, \forall (u,v)\in M \Rightarrow$ transformarea este nesingulară.

$x^2+y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v \Rightarrow v = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$, unde

$$\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0, y\geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0, y\in\mathbb{R} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0, y<0 \end{cases}$$

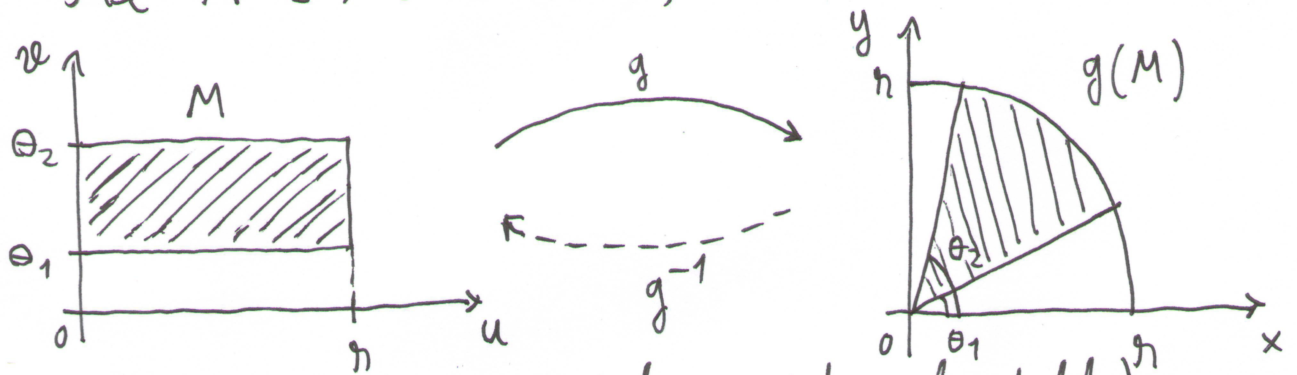
$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{Arctg}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \to [0, 2\pi)$

$\Rightarrow g$ este biunivocă pe M și $g^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)$

<u>Obs</u>: Transformarea în coordonate polare este de clasă C^1, biunivocă și nesingulară pe $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$.

Fie $M = [0, r] \times [\theta_1, \theta_2]$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$



$\boxed{T}$ (schimbarea de variabile în integrala dublă)

Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și

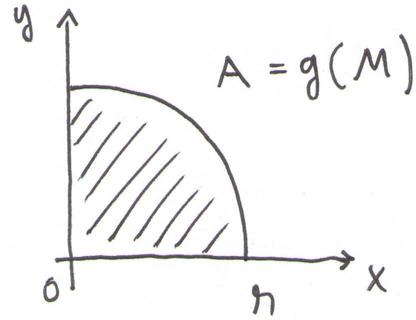
$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}, \quad \forall (u,v) \in M, \quad g = (g_1, g_2)$$

o transformare de clasă C^1, biunivocă și nesingulară pe $\operatorname{int} M$. Dacă $f: M \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe M, atunci are loc formula

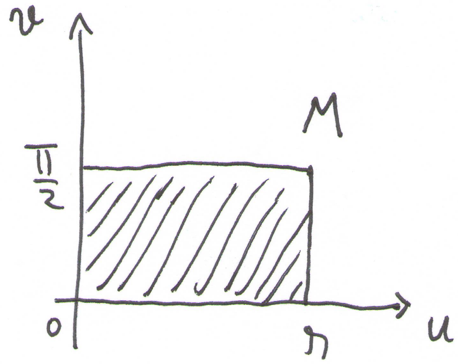
$$\iint_{g(M)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_M f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \left|\det J(g)(u,v)\right| du\,dv$$

<u>Ex:</u> Calculați $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, unde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq r^2\}, \quad r>0.$$



$\xleftarrow{\;g\;}$



$$\begin{cases} x = u\cdot\cos v \\ y = u\cdot\sin v \end{cases}, \quad (u,v) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)$$

$$M = [0,r]\times\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right], \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_M e^{-u^2}\cdot u\,du\,dv = \int_0^r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u^2}\cdot u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^r e^{-u^2}\cdot u\,du\right)dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^{-u^2}}{2}\Bigg|_{u=0}^{u=r} dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-e^{-r^2}\right)dv = \frac{1}{2}\left(1-e^{-r^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right).$$

<u>Aplicație:</u> Integrala probabilităților și funcția Γ a lui Euler.

$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ integrala probabilităţilor.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

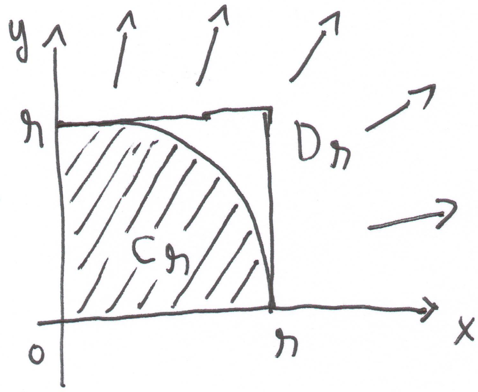
$$\left.\begin{array}{l} p=2>1 \\ \lambda=0<+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ integrală improprie convergentă.}$$

Notăm $I(r)=\int_0^r e^{-x^2}\,dx$, $D_r=[0,r]^2$ şi

$C_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq r^2\}$, $r>0$ fixat.

$$I=\lim_{r\to\infty} I(r)$$

$$\lim_{r\to\infty} D_r=[0,+\infty)^2=\lim_{r\to\infty} C_r$$



$$I^2=\lim_{r\to\infty} I(r)\cdot I(r)=\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x^2}dx\cdot\int_0^r e^{-y^2}dy=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-x^2}\left(\int_0^r e^{-y^2}dy\right)dx=\lim_{r\to\infty}\int_0^r\left(\int_0^r e^{-x^2-y^2}dy\right)dx=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\iint_{[0,+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\iint_{C_r} e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\lim_{r\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} dx, \quad \forall t > 0$$

se numește <u>funcția Γ a lui Euler.</u>

$\Gamma(t)$ este convergentă, $\forall t > 0$

(seminar 8)

$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se poate arăta că $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este funcție continuă.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \underset{\substack{x = t^2,\ t > 0 \\ dx = 2t\,dt}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t^2} \cdot 2t\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$