# 基于最小二乘蒙特卡罗方法的美式期权定价问题

［摘要］：

美式期权的定价问题一直是金融数学领域的热门研究问题，其路径依赖性使得无法利用传统的 Black-Scholes 定价公式来对其进行定价，因此利用数值分析的方法对美式期权定价研究焦点。

本文主要针对 F.A.Longstaff 和 E.S.Schwartz 关于美式期权定价问题提出的最小二乘蒙特卡罗模拟方法（LSM）进行了介绍，并利用 MATLAB 编程，对 LSM 方法的定价结果进行了实证分析。

在 LSM 算法定价过程中首先基于股票价格服从几何布朗运动的性质利用蒙特卡罗方法模拟出不同的股票价格路径，利用最小二乘法对不同时间节点的横截面数据进行回归构造出条件期望方程，通过条件期望方程和后一时期期权收益利用倒推的方法计算继续持有期权的当前收益并与当前时间节点的立刻行权收益进行比较，从而得到每条路径的最优行权时刻，最终通过加权平均得到美式期权价值。

通过实证分析发现，在给定参数下 LSM 方法对于一维 Black-Scholes 模型下的美式看跌期权定价结果与传统有限差分法的定价结果相对误差控制在 0.2%以下且程序运行时间较快，此外通过分析发现随着模拟路径数目 N 的增加 LSM 方法定价结果迅速收敛，这也在一定程度上说明了 LSM 方法对于基础美式看跌期权定价的高效性与稳定性。

［关键词］：蒙特卡罗方法;条件期望方程;最小二乘方法

# [ABSTRACT]

The pricing of American options has always been a hot topic in the field of financial mathematics. The path dependence of American option makes it impossible to use the Black-Scholes pricing formula. Therefore, numerical analysis becomes the focus of American option pricing.

This article presents the least squares Monte Carlo simulation (LSM) algorithm for American option pricing which is first introduced by F.A. Longstaff and E.S. Schwartz and the pricing results of LSM method are empirically analyzed by using MATLAB programming.

During the pricing process of LSM algorithm, firstly, based on the property that the stock price obeys geometric Brownian motion, different stock price paths are simulated by Monte Carlo method, and the conditional expectation equation is constructed by regression of cross sectional data of different time nodes by least-square method. According to the payoff of later period and the conditional expectation equation, it's easy to get the option value of continuing holding. Comparing the option value with the immediate exercise option value, we can get the optimal exercise time node of each path. Finally, the American option value is obtained by weighting the average of each path option value.

Empirical analysis shows that under given parameters, the relative error between LSM algorithm and traditional finite difference method is less than 0.2%, and the running time of the program is faster. In addition, it is found that the LSM algorithm converges rapidly with the increase of the number of simulated paths, which also explains the efficiency and stability of the LSM algorithm.



**[Keywords]:** Monte Carlo Method; Conditional Expectation Equation; Least-Square Method

# 目录

**1.诸论......................................6**

1.1 研究的意义与目的......................................6

1.1.1 研究现状......................................6

1.1.2 文章基本思想......................................7

**2.期权定价相关理论......................................7**

2.1 期权的概念......................................7

2.2 Black-Scholes 欧式期权定价模型......................................8

2.2.1 Black-Scholes 模型假设条件......................................8

2.2.2 Black-Scholes 微分方程推导......................................8

**3. 最小二乘蒙特卡洛模拟算法 （LSM）......................................10**

3.1 最小二乘蒙特卡罗模拟法背景介绍......................................10

3.2 LSM 算法原理......................................10

3.3 LSM 算法分析......................................12

**4. 基于 LSM 算法的美式期权定价......................................13**

4.1 程序设计思路......................................13

4.2 结果分析......................................13

**5. 结论......................................16**

**参考文献......................................17**

**附录......................................18**

**致谢......................................21**

# 1. 诸论

## 1.1 研究的意义与目的

20 世纪后半叶随着布雷顿森林体系的崩溃，迫使西方主要经济国放松金融管制开始寻求新的风险规避措施，另一方面随着 20 世纪 80 年代信息技术的迅猛发展也为金融科技的创新奠定了坚实的基础[1]。在这样的大环境下，一系列的金融衍生工具开始蓬勃发展起来。1982 年 4 月芝加哥商业交易所（CME）第一次推出了标普 500 股票指数期货合约标志着现代衍生品金融工具的交割正式进入了合法、规范发展的新时期。衍生金融工具凭借其对冲风险与价值发现功能，为金融市场参与人员提供了有效的风险控制工具，使得传统市场的资源配置更加合理化，促进了金融市场的进一步发展。

期权作为重要的金融衍生工具在 20 世纪后半叶迎来了重大发展。1973 年 4 月芝加哥期权交易所（CBOE）成立，期权的交割正式登上了世界的舞台。20 世纪 70 年代初期费雪 • 布莱克（Fischer Black）、迈伦 •斯科尔斯（Myron Scholes）和罗伯特 •莫顿(Robert Merton)建立了布莱克-斯科尔斯期权定价模型[2]（Black-Scholes Option Pricing Model）这一模型的建立为更广泛的金融衍生工具发展奠定了基础，也肯定了数学模型在金融产品定价中的作用。但是布莱克-斯科尔斯期权定价模型仍存在一定局限性，它仅适用对无股利的欧式期权定价，因此对于更加复杂的期权类型如随时可以行权的美式期权仍需寻找更优的定价方法，这也使其成为了当今金融数学领域各位学者研究的热点。

## 1.2 研究现状

1981 年 Whaley 改进了由 Roll 和 Geske 提出的美式期权精准定价模型，尽管这一模型考虑了美式期权的提前行权与股利支付问题，但此公式仅适用于只进行一次股利支付的美式股票类型看涨期权的定价。1987 年 Barone-Adesi 和 Whaley 在 MacMilan 工作的基础上提出了扩展的二次方程近似法[3]，尽管这种近似解析方法在大多数情况下能够给出令人满意的美式期权定价结果，但是其定价公式比较复杂，模型也也受到较多假设约束。相比于精确分析模型与分析近似模型美式期权在定价时使用最多的是数值方法。主要包括：考克斯（Cox）、罗斯（Ross）、罗宾斯坦（Robinstein）构造的二叉树方法、波义尔（Phelim Boyle）建立的三

叉树定价方法、乌拉姆（Ulam）提出的蒙特卡罗法等。

蒙特卡罗方法作为一种统计模拟方法在 20 世纪 40 年代被 S.M.乌拉姆和 J.冯·诺依曼[4]首次提出。因为通过蒙特卡罗模拟计算机可以生成标的证券价格在风险中性市场中的运动路径，所以这种数值方法后来被广泛应用到了衍生证券的定价中来。尽管利用蒙特卡罗方法可以大幅提高运算的精确度与速度，但是传统的蒙特卡罗方法仍无法解决美式期权提前行权的问题，因此在一段时间内蒙特卡罗方法只用于对不能提前行权的衍生证券进行定价。2001 年 F.A.Longstaff 和 E.S.Schwartz 首次提出了最小二乘蒙特卡罗模拟[5]（Least Square Monte Carlo）的方法，这种方法解决了美式期权提前行权的问题，他们利用这一方法实现了对各种类型美式期权的定价。

### 1.3 文章基本思想

由 Longstaff 和.Schwartz 提出的 LSM 方法涉及了大量的数学推导与逻辑证明，在具体应用中有些不便与困难，因此本文将主要从算法实现的角度来对 LSM 模拟方法的主要步骤与基本原理进行介绍，并基于 MATLAB 对 LSM 方法进行算法实现，最后对 LSM 算法计算结果的准确性与收敛性进行分析。

第一节对本文的选题意义和目的以及目前的研究现状进行了简要分析，并提出了文章的基本思想与主题框架。第二节介绍了期权定价的相关概念，对 Black-Scholes 期权定价模型进行了概述，分析了美式期权定价的流程。第三节阐述了最小二乘蒙特卡罗模拟（LSM）方法的原理与推导过程。第四节实现 LSM 方法对美式期权的定价，对数值结果进行分析。在最后的第五节给出了本文的研究结论。

## 2.期权定价相关理论

### 2.1 期权的概念

期权[6]，是指赋予其购买者在规定期限内按双方约定的价格（简称执行价格）购买或出售一定数量某种资产的权利的合约。

一份标准的期权合约主要包含如下几个因素：标的资产、执行价格、到期时间。

标的资产指的是期权合约中交易的传统金融资产。一般包括：股票、期货合约、债券、股价指数等。

到期时间，每一份期权合约规定的行使期限，购买在必须在规定时间内进行

期权行权，否则期权失效。

执行价格是在期权合约中约定好的，在将来进行期权行权时，规定买卖双方进行资产交易价格。

## 2.2 Black-Scholes 欧式期权定价模型

### 2.2.1 Black-Scholes 模型假设条件

Black-Scholes 模型的建立主要基于下面四个基本假设[7]：

（1）市场是有效的，没有交易规模和手续费限制

（2）无风险利率为常数，不存在套利机会

（3）标的产品在有效期内没有红利支付

（4）标的资产的价格服从对数正态分布

### 2.2.2 Black-Scholes 微分方程推导

下面我们用一些随机过程的概念来进行 Black-Scholes 微分方程推导：

**定义 2.1（布朗运动）**如果一个连续时间的随机过程$\{W_t : t \geq 0\}$满足如下条件：

(a)对于任意的 t>s 增量$W_t - W_s$ 服从正太分布 N(0, t-s)

(b)随机过程$W_t$具有独立增量：对于一列时间$0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_n$随机变量

$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 是独立的

(c)$W_0$=0

(d)样本路径$\{W_t : t \geq 0\}$是关于时间 t 的连续函数

那么我们将这一随机过程叫做标准布朗运动。

在 Black-Scholes 的模型假设中，股票价格走势服从几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (2\text{-}1)$$

其中$\mu$代表股票的期望收益率，$\sigma$代表股票的波动率

**定义 2.2（伊藤过程）**[8]若变量$X_t$的微分形式如下：

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad (2\text{-}2)$$

其中$W_t$服从一个标准布朗运动，$\mu$和$\sigma$均是关于$X_t$和t的函数，这就被称作伊藤过

程。

**定理 2.1（伊藤引理）**假设 $X_t$ 为一个伊藤过程，$Y_t = f(t, X_t)$ 是关于 t 与 $X_t$ 的一个函数，那么 $Y_t$ 的微分形式如下：

$$\mathrm{d}f(t,X_t)=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial X}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(dX_t)^2 \quad (2\text{-}3)$$

$$\mathrm{d}f(t,X_t)=(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial X^2})dt+\sigma(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X}dW_t \quad (2\text{-}4)$$

具体的 Black-Scholes 的微分方程推导如下:

构造投资组合：卖出一单位的欧式看涨期权，买入持有 Δ 单位的债券，这个投资组合 $\psi(t,S_t)$ 的在 t 时刻的价值为

$$\psi(t,S_t)=-c(t,S_t)+\Delta S_t \quad (2\text{-}5)$$

在 $d_t$ 这段时间内该投资组合获得的经济收益为 $-d_c+\Delta dS_t$，利用伊藤定理进行展开可以得到：

$$-dc+\Delta dS_t=\left[-\frac{\partial c}{\partial t}+(\Delta-\frac{\partial c}{\partial S_t})\mu S_t-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right]dt+(\Delta-\frac{\partial c}{\partial S_t})\sigma S_t dW_t \quad (2\text{-}6)$$

根据无风险对冲的原则：

$$-dc+\Delta dS_t=r(-c+\Delta S_t)dt \quad (2\text{-}7)$$

由此我们可以得到：

$$r(-c+\Delta S_t)dt=\left[-\frac{\partial c}{\partial t}+(\Delta-\frac{\partial c}{\partial S_t})\mu S_t-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right]dt+(\Delta-\frac{\partial c}{\partial S_t})\sigma S_t dW_t \quad (2\text{-}8)$$

根据等式两边各项系数相等，我们可以得到：

$$\Delta=\frac{\partial c}{\partial S_t} \quad (2\text{-}9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}+rS_t\frac{\partial c}{\partial S_t}-rc=0 \quad (2\text{-}10)$$

等式 2-10 就是我们最终得到的 Black-Scholes 的微分方程形式。

# 3. 最小二乘蒙特卡罗模拟算法（LSM）

## 3.1 最小二乘蒙特卡罗模拟法背景介绍

相比于欧式期权，美式期权存在提前行权的问题，因此我们无法通过 Black-Scholes 模型来找到一个解析解，这时我们只能考虑利用数值方法来对美式期权进行定价，因为美式期权对于历史路径上的收益具有很强的依赖性，利用有限差分、二叉树定价处理此类问题时在数值计算部分维数会迅速增加，导致维数灾难发生，但是蒙特卡罗模拟法可以巧妙地解决这一问题，因此这一数值方法也被大量应用与美式期权定价的过程中来。

在美式期权定价的过程中最大的困难就是如何确定最优的行权时间问题，为了解决这个问题，2001 年 F.A.Longstaff 和 E.S.Schwartz 在期刊《Review of Financial Studies》上发表了论文《Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Square Approach》，在这篇论文里他们首次提出了最小二乘蒙特卡罗模拟法（Least-Square Monte-Carlo）,为了方便论述在下面的文章中统一使用缩写 LSM 方法来进行代表。

基于 LSM 方法对美式期权定价的步骤如下：通过蒙特卡罗模拟的方法，将美式期权分成 K 的时间节点的百慕大期权，同时生成 N 条模拟路径，针对 N 条路径，K 个时间节点的美式期权定价，首先利用横截面数据通过最小二乘估计的方法，来构造一个条件期望方程（Conditional Expectation Function） 。通过此方程利用后一时期的收益去计算继续持有期权的当前收益这一部分也是 LSM 方法的核心部分，将此收益与当时节点处立刻行权收益进行比较。这种比较用的是一种递推的方法，即从 T 时刻出发向前至 T-1 时刻，如果仍不行权则继续向前递推，直到找到一个暂停时刻（Stopping Time） 。在得到各个路径的暂停时刻之后，对每一条路径上的期权价值进行折现然后对 N 条路径取平均，最终得到美式期权的价值。

## 3.2 LSM 算法原理

假设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一个完备的概率空间，时间长度为 $[0,T]$，$\Omega$ 表示在 0 到 T 内

所有资产状态，$\omega$代表一条样本路径，$\mathcal{F}$是 T 时刻发生事件的$\sigma$-域，$P$是由$\mathcal{F}$生成的一个概率测度，利用符号$C(\omega,s;t,T)$ 代表期权一条路径上的收益现金流。LSM 方法的目标是为模拟路径提供一个最优暂停时使得美式期权达到最大价值，为了实现这一目标规定美式期权只能在$0 \le t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_k < T$这 K 个离散的时间节点进行行权，实际中美式期权是连续的，但是当 K 无限大时，LSM 方法得到的价格会近似等于美式期权价格。

在最终的行权日，投资者已经知道了最终时刻的现金流，对于价内期权投资者会选择进行行权，否则会放弃行权。但是在中间$t_k$ 时刻投资者必须选择立刻行权或者继续持有，对于标准的美式看跌期权立刻行权的收益是已知的为$K-S_k$ ，我们需要计算的就是继续持有该期权的当前价值$F(\omega,t_k)$。根据无套利原理，期权继续持有的价值可以通过在风险中性测度 Q 下对收益期现金流的期望进行贴现得到，具体表示为：

$$F(\omega;t_k)=E_Q\left[\sum_{j=k+1}^{K}\exp(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega,s)ds)C(\omega,t_j;t_k,T)\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right] \qquad (3\text{-}1)$$

其中$r(\omega,t)$代表无风险折扣率，期望为基于$t_k$时刻之前信息的条件期望。

LSM 方法利用最小二乘法推导出一个回归函数，并利用此回归函数来计算具体的条件期望数值，令当前时刻为$t_{k-1}$时刻，如果条件期望函数属于希尔伯特空间（Hilbert space）那么继续持有美式期权的价值$F(\omega;t_{k-1})$可以被表示成如下形式：

$$F(\omega;t_{K-1})=\sum_{j=0}^{\infty}a_j L_j(X) \qquad (3\text{-}2)$$

其中$a_j$代表回归的常系数，$L_j$代表一组基函数，$X$服从一个马尔科夫过程

对于美式期权继续持有价值的具体回归操作为：令当前时刻为$t_k$则选取$k+1$ 时刻的标的资产股票价格$S_{k+1}$作为回归的自变量，选取当前$t_k$时刻的期权收益现金流作$F(\omega;t_k)$为回归的因变量, 利用一组基函数进行回归，得到一组回

归系数后，

根据回归函数可以的得到期权继续持有的估计值$\hat{F}(\omega;t_k)$。在实际应用中，一般选择前 M 个基函数的来进行回归用$F_M(\omega;t_k)$来代替$F(\omega;t_k)$的值，而且基函数的选取范围较广，如：拉格朗日多项式（Laguerre Polynomial）、车比雪夫多项式（Cheyshev Polynomial）、赫尔米特多项式（Hermitte Polynomial）、贾科比多项式（Jacobi Polynomial）等。

## 3.3 LSM 算法分析

LSM 算法为美式期权定价提供了一个简单有效的方式，但是我们还需要对这一算法的表现进行分析，下面将着重针对 LSM 算法的收敛结果进行分析：

**性质 1**[5]：对于有限常数 M，K，向量$\theta \in R^{M\times(K-1)}$代表在 K-1 个提前行权日，对于 M 个基函数回归得到的回归系数矩阵，令$LSM(\omega;M,K)$代表基于 LSM 行权法则得到的折现收益现金流。LSM 行权法则是说当立刻行权的价值大于基于$\theta$ 回归得到的继续持有期权价值$\hat{F}(\omega;t_k)$时立刻行权，反之继续持有该期权。那么如下等式成立：

$$V(X) \geq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}LSM(\omega_i;M,K). \tag{3-3}$$

**性质 2**[5]：假设美式期权的价值依赖于一个单状态变量 X，其中 X 在$(0,\infty)$范围内的服从一个马尔科夫过程。假设期权只能在时间点$t_1$和$t_2$进行行权并且条件期望方程$F(\omega;t_1)$是绝对连续的并且满足：

$$\int_0^\infty e^{-X}F^2(\omega;t_1)dX < \infty \tag{3-4}$$

$$\int_0^\infty e^{-X}F_X{}^2(\omega;t_1)dX < \infty \tag{3-5}$$

那么对于任意的$\varepsilon > 0$都存在一个$M < \infty$ 使得如下等式成立：

$$\lim_{N\to\infty}\Pr\left[\left|V(X)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}LSM(\omega_i;M,K)\right|>\varepsilon\right]=0 \tag{3-6}$$

以上两个性质的证明的具体详细证明，见参考文献的附录部分。

性质 1 给定了基函数数量 M 的一种评定方法，当基函数数量 M 增大但是 LSM 算出结果没有太大变化时说明 M 的数量已经足够大了[9]。性质 2 说明对于任意给出的一个$\varepsilon$，我们可以通过增加模拟的路径数目 N 与基函数数量 M 来使得 LSM 算法计算的美式期权价格与真实价格之差控制在这个范围之内。

# 4.基于 LSM 算法的美式期权定价

## 4.1 程序设计思路

基于 LSM 方法程序设计的具体思路如下：根据 Black-Scholes 模型推导欧式期权定价公式，利用蒙特卡罗模拟的方法，在 MATLAB 中生成了包含 N 条模拟路径，K 个时间节点的股价$S_t$和现金流（Cash flow）的矩阵，然后利用 LSM 方法对现金流矩阵进行倒推计算，将每条路径每个时间节点期权的立刻行权价值与继续持有价值进行比较，从而判断出每条模拟路径的最行权时间也叫做最优暂停时矩阵，最终将每个节点的最优暂停时刻的期权价值进行折现加权平均即得到初始时刻美式期权的价值。

## 4.2 数值结果分析

基于之前 LSM 算法的理论知识分析，利用 MATLAB 进行程序编写实现了 LSM 算法，具体参数设置如下：

在 Black-Scholes 的模型假设下，设定参数无风险利率 rf=5%,期权的执行价格 K=40，然后在 LSM 算法中选择的基函数类型为前六个拉格朗日多项式，具体基函数表达式如下：

$$L_0(X)=\exp(-X/2) \tag{4-1}$$

$$L_1(X)=\exp(-X/2)(1-X) \tag{4-2}$$

$$L_2(X)=\exp(-X/2)(1-2X+X^2/2) \tag{4-3}$$

$$L_n(X)=\exp(-X/2)\frac{e^X}{n!}\frac{d^n}{dX^n}(X^n e^{-X}) \tag{4-4}$$

在下面具体的结果分析中我选择了 F.A.Longstaff 和 E.S.Schwartz 在论文《Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Square Approach》中给定的有限差分对美式期权定价的结果作为参考模板(具体有限差分对美式期权定价过程见参考文献)，并将 LSM 方法的定价结果与其给定结果进行比较进而计算相对误差与标准差估计 LSM 方法的有效性与稳定性。

具体结果分析如下：（1）首先固定时间节点数 K=40，模拟路径数 N=100000，在一系列初始股票价格 $S_0$，股票隐含波动率 $\sigma$，期权到期时间 T 的不同取值下，利用程序对美式期权定价的结果如下：

**表 1　LSM 方法美式看跌期权定价结果(1)**

| 参数 | 有限差分法价格 | LSM 方法价格 | 标准差 | 相对误差 |
|---|---|---|---|---|
| $S_0$=36, $\sigma$=0.2, $T$=1 | 4.47800 | 4.47786 | 0.29121% | 0.00319% |
| $S_0$=36, $\sigma$=0.4, $T$=2 | 8.50800 | 8.49726 | 0.71346% | 0.12629% |
| $S_0$=38, $\sigma$=0.2, $T$=1 | 3.25000 | 3.25020 | 0.29499% | 0.00621% |
| $S_0$=38, $\sigma$=0.4, $T$=2 | 7.67000 | 7.66057 | 0.70536% | 0.12294% |
| $S_0$=40, $\sigma$=0.2, $T$=1 | 2.31400 | 2.31394 | 0.27405% | 0.00274% |
| $S_0$=40, $\sigma$=0.4, $T$=2 | 6.92000 | 6.90978 | 0.69296% | 0.14763% |
| $S_0$=42, $\sigma$=0.2, $T$=1 | 1.61700 | 1.61721 | 0.24088% | 0.01333% |
| $S_0$=42, $\sigma$=0.4, $T$=2 | 6.24800 | 6.23864 | 0.67542% | 0.14985% |

从表一可以看出无论股票初始价格 $S_0$，股票隐含波动率 σ，期权到期时间 T 如何变化，利用 LSM 方法计算得到的美式看跌期权价格与利用有限差分法得到的期权价格的相对误差都控制在了 2%以内，这在一定程度上说明了 LSM 方法的有效性。此外如果我们根据理论分析随着股票隐含波动率的增加，股价跳动更加剧烈，基于这一特点利用蒙特卡罗模拟路径进行期权定价的标准差应会相应增加，而我们实证分析的定价结果刚好也满足这一规律，这一从另一角度证明了 LSM 方

法定价的合理性。

（2）固定初始股票价格 $S_0$=36，股票隐含波动率 $\sigma$=0.2，以及期权到期时间 T=1，对于不同的时间节点数 K 与模拟路径数 N，LSM 对美式看跌期权的定价结果如下：

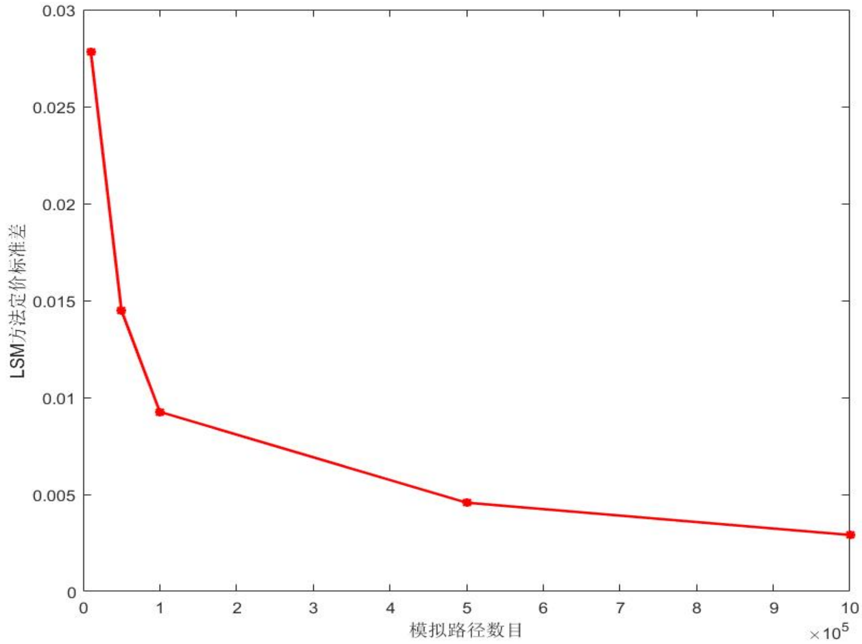
**表 2　LSM 方法美式看跌期权定价结果(2)**

| 参数 | 有限差分法价格 | LSM 方法价格 | 标准差 | 运行时间（单位:s） |
|---|---|---|---|---|
| K=40,N=10^4 | 4.47800 | 4.43773 | 2.78299% | 0.56881 |
| K=80,N=10^4 | 4.47800 | 4.46415 | 2.98501% | 1.87351 |
| K=160,N=10^4 | 4.47800 | 4.48224 | 2.97905% | 2.22616 |
| K=252,N=10^4 | 4.47800 | 4.47875 | 2.87015% | 3.97177 |
| K=40,N=10^5 | 4.47800 | 4.47383 | 0.92607% | 1.80327 |
| K=80,N=10^5 | 4.47800 | 4.47941 | 0.92162% | 5.08071 |
| K=160,N=10^5 | 4.47800 | 4.48616 | 0.93180% | 15.19251 |
| K=252,N=10^5 | 4.47800 | 4.48642 | 0.91998% | 30.66223 |
| K=40,N=10^6 | 4.47800 | 4.47786 | 0.29121% | 26.11662 |

从表二可以看到，固定模拟路径数量 N，随着时间节点 K 的增加 LSM 方法对美式看跌期权定价的标准差并没有发生大的变动，但是若固定时间节点数，随着模拟路径 N 的增加 LSM 方法定价的标准差明显减小，定价结果收敛迅速。总的来看，针对不同的时间节点 K 与模拟路径 N 利用 LSM 方法进行定价程序的运行时间都较短，定价效率较高。

（3）固定初始股票价格 $S_0$=36，股票隐含波动率 $\sigma$=0.2，期权到期时间 T=1，以及时间节点 K=40，不断增加模拟路径的数目 N 并对计算结果中 LSM 方法定价的标准差的进行分析，最终绘制了如下结果图：

**图 1　LSM 定价结果收敛图**




从图 1 中可以看到随着模拟路径 N 的增加，LSM 方法定价的标准差迅速减小，基于之前对 LSM 方法的分析我们可以得到这种方法对于美式期权定价具有较好的收敛性和稳定性。

## 5. 结论

本文对 F.A.Longstaff 和 E.S.Schwartz 提出了最小二乘蒙特卡罗模拟(LSM)方法对美式期权进行定价进行了实证分析与算法实现，通过将当前时刻期权收益与后一时刻标的资产价格进行回归，利用得到的回归系数使得我们可以计算当前时刻继续持有美式期权的价值，这在很大程度上解决了美式期权定价中路径依赖的问题。

在具体算法实现中可以得到，LSM 方法对于美式期权定价的相对误差与时间节点 K 和模拟路径数量 N 均有关系，但是 LSM 方法对美式期权定价的标准差仅与模拟路径数量 N 有关，随着模拟路径数量 N 的增加，LSM 方法的定价结果迅速收敛。总的来说，通过 LSM 方法为美式期权定价提供了一种简便、高效的算法，大大提高了计算效率与速度。

值得思考的是，本文仅对最简单的一维 Black-Scholes 模型下无分红的美式看跌期权进行了 LSM 定价结果分析，对于更高维度的定价模型如 Heston 定价模型以及更复杂的期权类型如美式-百慕大-亚式期权（American-Bermuda-Asian Option）仍需要进行更复杂的实证分析。

# 参考文献


[1] 巴曙松. 中国金融衍生品发展路径:从国际比较看中国选择[J]. 金融管理与研究, 2006(5):8-13.

[2] Black F , Scholes M S . The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654.

[3] Barone-Adesi G , Whaley R E . Efficient Analytic Approximation of American Option Values[J]. Journal of Finance, 1987, 42(2):301-320.

[4] N. Mtropolis, S. Ulam. The Monte Carlo Method. Journal of American Statistics Association.1949,44: 335-341.

[5] F..A Longstaff,,E.S Schwartz.Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach[J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1):113-147.

[6] 王德河，杨阳. 衍生金融工具. 中国金融出版社.2016：165-167.

[7] 陈明亮. 修正Black-Sholes权证定价理论假设条件的数值方法研究[J]. 统计与决策, 2006(2):16-18.

[8] 严加安. 鞅与随机积分引论.科学出版社.1981：50-51.

[9] 吴建组，宣慧玉. 美式期权定价的最小二乘蒙特卡洛模拟方法.统计与决策.2006,1:155-157.

# 附录

## 附录 A

MATLAB 程序代码：

```
>> %%
%Part1: 定义变量
clear all;
randn('state',0);
tic
S0 = 36;          %初始股票价格
k    = 40;          %执行价格
rf    = 0.06;    %无风险利率
q=0.02;
T    = 1;            %到期时间 1 年
sigma=0.2;         %隐含波动率
K    =40;            %时间节点数
N    =5*10^5;       %路径数量
dt = T/K;          %时间步长
%Part2:构造股票价格（St）和现金流（Cash flows）矩阵
W=normrnd(0,1,N,K);
S_tn=zeros(N,K);
S_t0=zeros(N,1);
S_t0(:,1)=S0;
St=[S_t0,S_tn];
clear('S_t0');
for c = 1 : 1 : K
     St(:,c+1)=St(:,c).*(exp((rf-q-(sigma^2)*0.5).*dt+sigma*sqrt(dt).*W(:,c)));
end
clear('W');
Cashflows=zeros(N,K);
Cashflows(:,end)=max(k-St(:,end),0);
%Part3:利用 LSM 算法计算并统计 Stopping time，得到最终的 Cash flows 矩阵
for b =    (K-1) : -1 : 1
     Y1=zeros(N,1);
```

```
            X1=zeros(N,1);
            basis_functions=zeros(4,N);
            ContinValue=zeros(N,1);
            In_the_money_path = find(St(:,b+1)<k);
            if b == (K-1)
                Y1=Cashflows(In_the_money_path,(b+1)).*exp(-rf*dt);
                X1=St(In_the_money_path,b+1)/S0;
                A1=polyfit(X1,Y1,6);
                ContinValue=polyval(A1,X1);
                clear('A1');
                exercised_path = find((k-St(In_the_money_path,b+1) ) > ContinValue);
                clear('ContinValue');
                Cashflows(In_the_money_path(exercised_path),b)                    =                    k-
St(In_the_money_path(exercised_path),b+1);
                Cashflows(In_the_money_path(exercised_path),(b+1):K)=0;
            else
                Y1=zeros(size(In_the_money_path));
                for d = (b+1) : 1 : K
                    last_cash_flows=find(Cashflows(In_the_money_path,d)~=0);
Y1(last_cash_flows,1)=Cashflows(In_the_money_path(last_cash_flows),d).*exp(-rf*(d-b)*dt);
                end
                X1=St(In_the_money_path,b+1)/S0;
                 A1=polyfit(X1,Y1,5);
                ContinValue=polyval(A1,X1);
                clear('A1');
                exercised_path = find((k-St(In_the_money_path,b+1) ) > ContinValue);
                clear('ContinValue');
                Cashflows(In_the_money_path(exercised_path),b)                    =                    k-
St(In_the_money_path(exercised_path),b+1);
                Cashflows(In_the_money_path(exercised_path),(b+1):K)=0;
            end
        end

        %~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~Part4:计算最终的期权价值~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

```
path_option_value1=zeros(N,1);
for e = 1 : 1 : K
    Stopping_time = find( Cashflows(:,e) ~= 0 );
    path_option_value1(Stopping_time,1)=Cashflows(Stopping_time,e).*exp(-rf*e*dt);
end
path_option_value=sum(path_option_value1);
Final_Option_value=path_option_value/N
error=(Final_Option_value-6.66005)/6.66005
standard_deviation=std(path_option_value1)/sqrt(N)
toc
```