

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

---

## 2017 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或资料（包括网上资料），必须按照规定的参考文献的表述方式列出，并在正文引用处予以标注。在网上交流和下载他人的论文是严重违规违纪行为。

**我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。**

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：   A  

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）：   000000  

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）：   南方科技大学  

参赛队员 (打印并签名)：1.   吕本猛  

2.   孙磊  

3.   朱涵枫  

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名)：   李景治  

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期：   2017   年   09   月   12   日

**（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）**

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

---

**2017 高教社杯全国大学生数学建模竞赛**

**编 号 专 用 页**

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

# CT 系统参数标定及成像

## 摘要

目前住宅空间的紧张导致越来越多的折叠家具的出现。某公司设计制作了一款折叠桌以满足市场需要。以此折叠桌为背景提出了三个问题，本文运用几何知识、非线性约束优化模型等方法成功解决了这三个问题，得到了折叠桌动态过程的描述方程以及在给定条件下怎样选择最优设计加工参数，并针对任意形状的桌面边缘线等给出了我们的设计。

针对问题一，根据木板尺寸、木条宽度，首先确定木条根数为 19 根，接着，根据桌子是前后左右对称的结构，我们只以桌子的四分之一为研究对象，运用空间几何的相关知识关系，推导并建立了几何模型。接着用 MATLAB 软件编程，绘制出折叠桌动态变化过程图。然后求出折叠桌各木条相对桌面的角度、各木条长度、各木条的开槽长度等数据，相关结果见表 1。然后建立相应的三维坐标系，求出桌角各端点坐标，绘出桌角边缘线曲线图，并用 MATLAB 工具箱作拟合，求出桌角边缘线的函数关系式，并对拟合效果做分析（见表 3）。

针对问题二，在折叠桌高度、桌面直径已知情况下，综合考虑桌子稳固性、加工方便、用材最少三个方面因素，我们运用材料力学等相关知识，对折叠桌作受力分析，确定稳固性、加工方便、用材最少三个方面因素间的相互制约关系，建立非线性优化模型。用 lingo 软件编程，求出对于高 70 cm，桌面直径 80 cm 的折叠桌，平板尺寸 172.24cm×80cm×3cm、钢筋位置在桌腿上距离铰链 46.13cm 处、各木条的开槽长度（见表 3）、最长木条（桌脚）与水平面夹角 71.934°。

**关键字：**Radon 变换 傅里叶切片定理 图像重建 图像缩放 相关性分析

## 一、问题重述

CT(Computed Tomography) 扫描系统可以在不破坏样品的情况下, 利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像, 由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统由探测器和发射器两部分组成, X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变, 整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向, 在接收器上都可以得到 512 个数据, 并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。CT 系统安装时往往存在误差, 从而影响成像质量, 因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定, 即借助于已知结构的样品标定 CT 系统的参数, 并据此对未知结构的样品进行成像。

问题一: 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板, 其具体每一点的吸收强度已经给出。对应于该模板的接收信息也已知, 要求根据这一模板及其接收信息, 确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

问题二: 已知某未知介质通过 CT 系统的接收信息。要求利用问题一中得到的标定参数, 确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外, 请具体给出标定的 10 个位置的吸收率。

问题三: 已知另一个未知介质的 CT 系统接收信息。要求利用问题一中得到的标定参数, 给出该未知介质的相关信息。另外, 请具体给出题中所给的 10 个位置处的吸收率。

问题四: 分析问题一中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型, 以改进标定精度和稳定性, 并说明理由。

## 二、问题分析

针对问题一, 题中已经给出了待扫描物质形状、几何信息、模板中的位置、吸收率数据, 以及系统扫描后的数据。我们可以选取两组特定方向的扫描数据, 其中一组为光源射出的 X 射线垂直于椭圆物体的长轴时所得的数据; 另外一组为光源射出的 X 射线平行于椭圆物体的长轴时所得的数据。根据两组数据, 进行几何计算, 得到系统的旋转中心、各个旋转方向、探测器单元距离。

针对问题二与问题三, 我们可以利用基于 Radon 变换与傅里叶切片定理的滤波反投影算法, 依据附件中提供的 CT 扫描系统扫描的数据, 对 CT 扫描系统所扫描的物质二维图像进行图像重建, 可以试图得到扫描出的物质的图像, 并且得到与附件 1 类似的

模板中各点的吸收率数据，可以根据这些吸收率数据，在模板中建立坐标轴，对数据进行检索，可以确定附件 4 中给出的 10 个点所对应的吸收率。

针对问题四，我们可以尝试调节 CT 扫描系统中旋转中心位置、旋转方向、探测器单元距离三个参数。针对不同的系统参数，我们可以对问题一中的物质进行重新扫描，并将扫描数据进行图像重建，将扫描图像与标准图像进行比较，同时可以将重建得到的吸收率数据与附件 1 中的标准数据进行相关性分析，以此来评价 CT 扫描系统的精度和稳定性，并试图得到使得系统扫描效果最好的一组参数。

### 三、模型的假设

1. 探测器单元自身没有厚度；
2. CT 扫描系统绕旋转中心均匀连续旋转；
3. 垂直于椭圆物体长轴方向为系统旋转的  $0^\circ$  方向；
4. 探测器的效率为 100% 且没有噪声；
5. 物体在扫描时没有发生剧烈震动；
6. 假设光源射出的 X 射线均为直线；
7. 假设题目所给数据真实；

### 四、符号说明

符号	意义
$I_0$	X 射线源发出的强度
$I$	达到探测器的 X 射线强度
$\phi$	CT 扫描系统每次旋转的角度
$L$	椭圆物体长轴长
$l$	椭圆物体短轴长
$D$	圆形物体直径
$d$	探测器单元之间的距离
$\mu(x, y)$	被测物体对 X 射线的衰减系数
$R$	Radon 变换
$F$	Fourier 变换

符号	意义
$H$	Hibert 变换
$P_{\theta}(t)$	$\theta$ 角度下的投影函数
$H$	滤波函数

## 五、问题求解

### 5.1 问题一求解

计算机断层成像 (Computed Tomography, CT) 是通过对物体进行不同角度的射线投影测量而获取物体横截面信息的成像技术, 涉及到放射物理学、数学、计算科学、图形图像学和机械学等多个学科领域。CT 扫描系统的基本思想如下: 取一理想的 X 射线源, 它发出极细的笔束 X 射线, 在其对面放置一检测器。在具有 512 个等距单元的检测器上测出 X 射线源发出的强度  $I_0$ , 以及经过位置不动的二维待检测物体衰减以后到达检测器的 X 射线强度  $I$ , 再将 X 射线源与检测器在观察平面内围绕某一旋转中心旋转一定角度  $\phi$ , 取得新角度下的另一组数据, 如此重复旋转 180 次后, 最终取得 180 组数据, 每组数据包含 512 个数值。

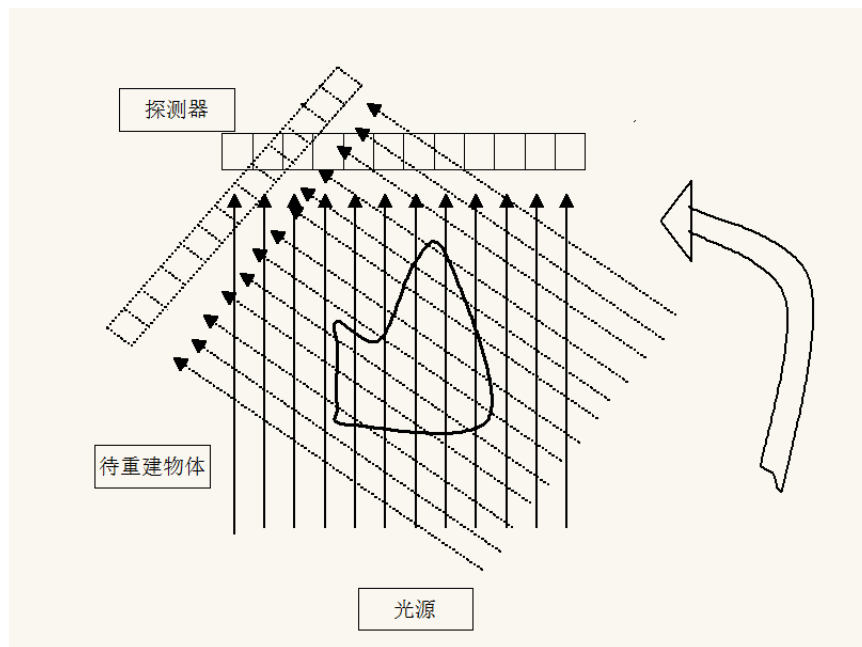


图 1 CT 扫描系统

在题目之中给定了一个正方形的模板, 模板大小为  $100 * 100\text{mm}$ , 其中模板上放置了两个均匀固体介质。一个介质的形状为椭圆形, 其中长轴长  $L$  为  $80\text{mm}$ , 短轴长  $l$  为  $15\text{mm}$ , 其中心与正方形模板的中心重合, 位于正方形模板的正中央位置。另一个介质

为圆形介质，其直径  $D$  为  $8\text{mm}$ ，圆心位于正方形模板的中轴线距离托盘中心  $45\text{mm}$  处，如图二所示。其中模板几何信息对应的数据文件由附件 1 提供。数据中将  $100 * 100\text{mm}$  的模板划分为  $256 * 256$  单位，其中每一个点的数值代表了该点对 X 射线的吸收强度，这里称为“吸收率”。由附件 1 中的数据可以看出，模板上的点吸收率为“0”或“1”，说明椭圆物质和圆形物质均为均匀物质，各部分的吸收率相同。将附件 1 的数据进行图形重建后，得到的结果如图三所示，可以看出与原图形一致。

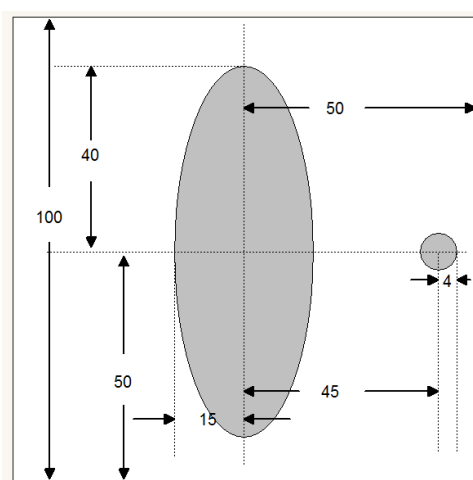


图 2 模板示意图

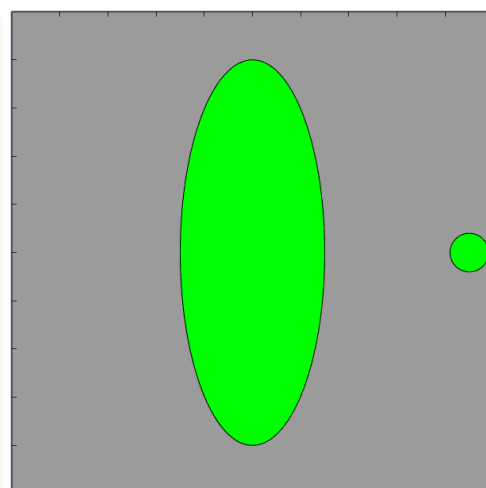


图 3 模板图像重建图

### 5.1.1 探测器单元距离的求解与分析

我们知道，X 射线经过物体后强度会衰减，不经过物体时到达探测器上的强度不变，CT 扫描系统就是根据此特点进行物体扫描。因此在计算探测器之间的距离时，我们选取某一组特定的数据，即光源射出的 X 射线垂直于椭圆物体的长轴时，探测器所探测的数据，此时物体对 X 射线的遮挡范围最大，可知探测器所探测到的 512 个数据中，X 射线强度衰减的数据最多，对应于附件 2 中的数据，即为数据为正数值最多的那一组数据。统计后得到附件 2 中第 58 组数据中正数值最多，其中第 92 个值至第 380 个值均为正数，说明在 512 个探测器中，第 92 个探测器单元至第 380 个探测器单元所接收到的 X 射线的强度都有所衰减，此时对应遮挡物体的长度为椭圆物体长轴长  $L$ ，则计算得探测器单元之间的距离  $d = \frac{L}{289}$ ，最终计算得探测器单元之间的距离  $d$  为  $0.2768\text{mm}$

### 5.1.2 系统旋转方向的求解与分析

在计算 CT 扫描系统的 180 个旋转方向时，我们同样可以选取两组特殊的数据组，其中一组为光源射出的 X 射线垂直于椭圆物体的长轴时所得的数据，此时物体对 X 射线的遮挡范围最大，强度衰减的 X 射线光束数量最多；另外一组为光源射出的 X 射线

平行于椭圆物体的长轴时所得的数据，此时物体对 X 射线的遮挡范围最小，强度衰减的 X 射线光束数量最少，如图 4 与图 5 所示。

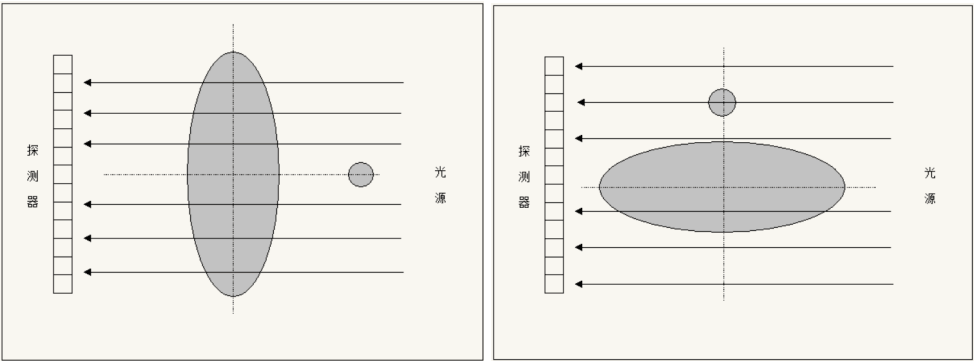


图 4 垂直长轴方向

图 5 平行长轴方向

根据附件 2 中提供的数据，我们得到第 58 组数据中正数值最多，即为光源射出的 X 射线垂直于椭圆长轴时的数据，第 150 组数据中正数值最少，即为光源射出的 X 射线平行于椭圆长轴时的数据。此时从第 58 组数据到第 150 组数据，CT 扫描系统一共旋转了 92 次，并且每次均匀连续旋转。在我们选取的第 58 组和第 150 组数据中，光源射出的 X 射线分别垂直、平行于椭圆长轴，两组数据之间的 X 射线方向差别为 90°，则可知 CT 扫描系统每次旋转的角度  $\phi = \frac{90^\circ}{92} = 0.9783^\circ$ 。此时，我们规定垂直于椭圆物体长轴方向为 CT 扫描系统旋转的 0° 方向，即第 58 组数据位于 0° 方向。之后，一一计算，得到 CT 扫描系统旋转的 180 个方向如表 1 所示 ()。

表 1 系统旋转方向

数据组	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方向	-55.7631°	-54.7848°	-53.8065°	-52.8282°	-51.8499°	-50.8716°	-49.8933°	-48.915°	-47.9367°	-46.9584°	-45.9801°	-45.0018°

### 5.1.3 系统旋转中心的求解与分析

在计算 CT 扫描系统的旋转中心时，我们以正方形模板的中心点为原点，椭圆长轴方向为 y 轴方向，椭圆短轴方向为 x 轴方向，一单位长度为 1mm，建立坐标轴。易知，在 CT 扫描系统旋转的过程中，旋转中心一定位于 512 探测器单元的中垂线上，即第 256 和第 257 个探测器单元的中垂线，因此我们可以选取两组特定的数据，根据两组数据，分别求出两次探测器中垂线的坐标位置，则两次中垂线坐标位置的交点即为旋转中心点。

首先我们选取光源射出的 X 射线垂直于椭圆物体的长轴时所得的数据组，此时第 92 个探测器单元至第 380 个探测器单元所接收到的数据即为 X 射线经过椭圆物体衰减后的数据，则易知第 236 个探测器单元与第 237 个探测器单元的中垂线与直线  $y = 0$  重



合，则此时依据探测器单元之间的距离  $d$  可以得到，第 256 与第 257 个探测器单元中垂线与直线  $y = 5.5363$  重合，即旋转中心的纵坐标为  $y = 5.5363$ 。同理，选取光源射出的 X 射线平行于椭圆长轴时所得的数据组，此时第 169 个至第 277 个探测器单元所得的数据即为 X 射线经过椭圆物体衰减后的数据，则易知第 223 个探测器单元的位置与直线  $x = 0$  重合，则依据探测器单元之间的距离  $d$  可得，第 256 与第 257 个探测器单元中垂线与直线  $x = -9.2734$  重合，即旋转中心的横坐标为  $x = -9.2734$ 。最终得到旋转中心的坐标为  $(-9.2734, 5.5363)$ 。

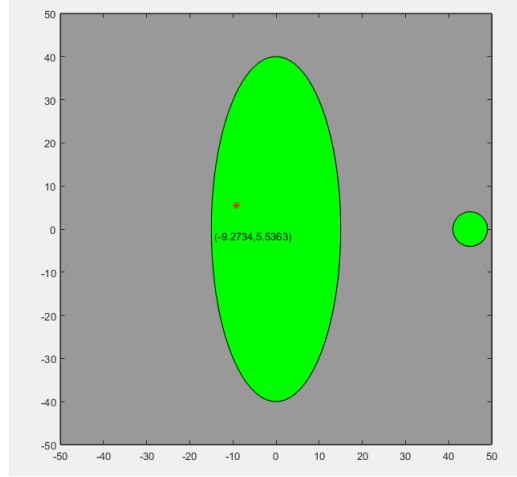


图 6 旋转中心结果图

## 5.2 问题二求解

问题二主要的一个方面就是根据附件所给的数据，进行图像重建，得到原来待扫描物质的二维图形，以及它在正方形模板中各点吸收率分布情况。图像重建是由投影重建图像的简称，它是由物体的外部发射和接收的信息重建物体内部某种物性参数的图像。如 X 射线层析成像、电容层析成像等。X 射线层析成像是在物体外部发射和接收 X 射线，根据不同位置接收 X 射线强弱的变化重建反映物体物性参数的衰减分布函数的图像。

设射线源发射的 X 射线强度为  $I_0$ ，穿过被检测物体后由检测器接收到的 X 射线强度为  $I$ 。根据 Beer 定理，在不考虑探测器效率和噪声的情况下， $I$  可表示为：

$$I = I_0 * \exp^{-\int_L \mu(x,y)dL}$$

其中函数  $\mu(x, y)$  为被测物体对 X 射线的线性衰减系数。与物体的密度有关，它刻画了被测物体的密度分布与内部结构。对上式两端去对数，得到，

$$\int_L \mu(x, y)dL = \ln(I_0/I)$$

上式右端可通过扫描系统探测获得，称积分为经过路径直线  $L$  的投影或投影数据。

### 5.2.1 基于 Radon 变换图像重建分析

CT 图像重建就是根据不同射线路径的投影数据来确定物体的衰减系数的分布，用数学语言表示，就是已知函数在沿不同直线路径的积分值，求函数  $f$ 。通过对问题二的分析我们发现图形重建的基础是 Radon 变换。因此我们查阅文献得到奥地利数学家 Radon 在 1917 年给出的图像重建公式。具体对于 Radon 变换图像重建的分析如下：考虑  $n$  维空间的超平面

$$L : p = x * \omega$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \omega \in S^{n-1}, \omega$  是  $n$  维空间的单位向量， $p \in R^1$  是原点到超平面的距离。 $p, \omega$  为超平面  $L$  的位置参数。设  $f(x) \in S(R^n), g(\omega, p) \in S(Z)$ ，其中  $Z = S^{n-1} * R^1$ 。

Radon 变换  $R$  是函数  $f(x)$  在超平面  $L$  上的积分，

$$Rf(\omega, p) = \int_{x * \omega = p} f(x) dx$$

$Rf(\theta, p)$  是单位柱面  $Z = S^{n-1} * R^1$  上的偶函数，即

$$Rf(-\omega, -p) = Rf(\omega, p)$$

记

$$R_\omega f(p) = Rf(\omega, p)$$

$$R^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\omega, x * \omega) d\omega$$

$$F_n f(\xi) = \int_{R^n} f(x) \exp^{-2\pi i x \xi} dx$$

$R^\#$  称为背投影运算， $F_n$  是 Fourier 变换。

$$F_1 R_\omega f(p) = F_n f(\sigma \omega) \quad \sigma \in R^1$$

其中  $F_1 R_\omega f(p)$  是对变量  $p$  的一维 Fourier 变换， $F_n f$  是  $f$  的  $n$  维 Fourier 变换。

$$R_\omega(f * g) = R_\omega(f) * R_\omega(g)$$

$$(R^\# g) * f = R^\#(g * Rf)$$

$$R^{\#}Rf = |S^{n-2}||x|^{-1} * f$$

$$R_{\omega} : L_2(\Omega^n) \rightarrow L_2([-1, +1], (1 - s^2)^{(1-n)/2})$$

是连续的。

当  $\alpha < n$  时，定义线性算子  $I^{\alpha}$

$$F_n(I^{\alpha}f)(\xi) = |\xi|^{-\alpha}F_nf(\xi)$$

$I^{\alpha}$  被叫做 *Riesz* 势。如果  $I_{\alpha}$  是应用在  $Z$  或者  $T$  上的函数，它就对第二个变量发生作用。由于  $f \in \Phi, (I^{\alpha}f) \in L^1(R^n)$ ，则  $I_{\alpha}f$  有意义且  $I^{-\alpha}I^{\alpha}f = f$

通过以上分析，我们得到了 Radon 变换的逆变换，这可以看做图像重建的核心。

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}I^{-\alpha}R^{\#}I^{\alpha-n+1}g, \quad g = Rf$$

特别地，当  $\alpha = 0$  时，

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}I^{-\alpha}R^{\#}I^{\alpha-n+1}g$$

对 Hilbert 变换  $H$  有

$$F_1(Hh)(\sigma) = -isgn(\sigma)F_1h(\sigma)$$

于是得到

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}R^{\#}H^{n-1}g^{(n-1)}$$

利用

$$H^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2}H & n \text{ 为偶数} \\ (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

可得

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} Hg^{n-1}(\theta, x * \theta) d\theta & n \text{ 为偶数} \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} g^{n-1}(\theta, x * \theta) d\theta & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

经过上面一系列的数学公式推算与演变，我们最终可以得到二维空间的 Radon 逆变换的具体公式如下：

$$f(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial Rf(p, \phi)}{\partial p}}{p - r * \cos(\theta - \phi)} dp$$

其中  $(r, \theta)$  是  $(x, y)$  的极坐标,  $(p, \phi)$  为 Radon 变换积分直线  $L$  的参数。

### 5.2.2 基于傅里叶切片定理的图像重建分析

与 Radon 逆变换相同, 傅里叶切片定理也是图像重建的另一大基础, 下面是我们对于傅里叶切片定理的具体分析:

傅里叶切片定理指出: 某图像  $f(x, y)$  在视角  $\theta$  时的平行投影的傅里叶变换给出了图像二维傅里叶变换  $F(u, v)$  在与  $u$  轴夹角为  $\theta$  的一个切片, 此切片通过原点。换句话说,  $P_\theta(t)$  的傅里叶变换在数值上对应于  $F(u, v)$  沿着图中所示直线 BB 的值。

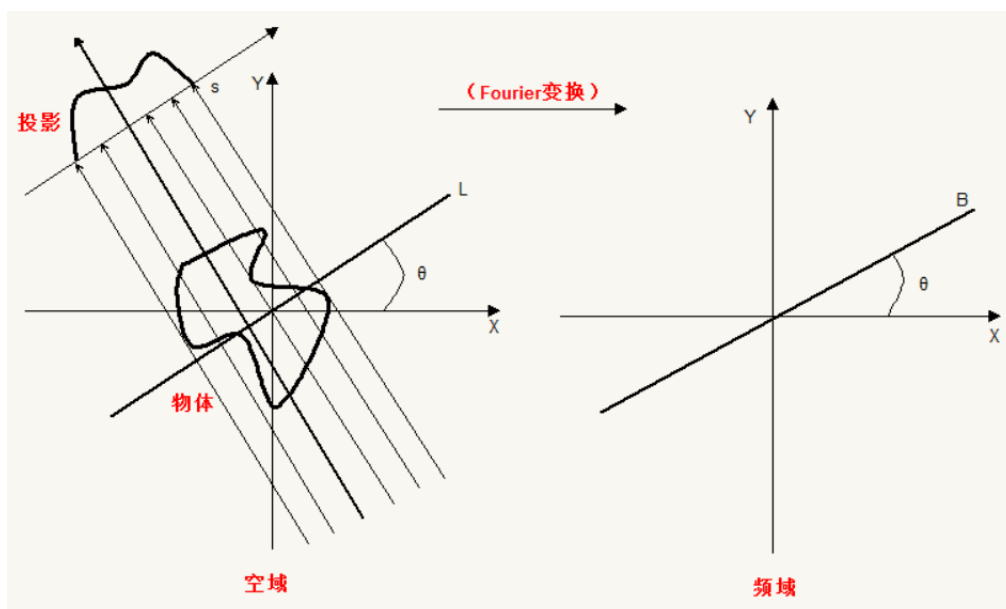


图 7 傅里叶切片定理

如图所示, 假设函数  $f(x, y)$  表示图像, 它的二维傅里叶变换是:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$P_\theta(t)$  为角度  $\theta$  下的平行投影, 其一维傅里叶变换为

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(t) \exp^{-j2\pi\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \right] \exp^{-j2\pi\omega t} dt$$

转换为  $(x, y)$  坐标形式,

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp -j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy$$

通过对上式右边一个空间域的傅里叶变换将  $u = \omega \cos \theta, v = \omega \sin \theta$ , 最终我们可以得到中心切片定理的表达式如下:

$$S_\theta(\omega) = F(\omega, \theta) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$

由此, 我们也可以知道, 投影的数据里包含了一些重要的特征信息, 我们可以利用这些重建出原来的图像。理论上根据该定理, 如果我们可以得到足够多的各个角度的投影, 对每个角度下的投影执行傅里叶变换, 就得到了物体傅里叶变换的各个切片, 只要切片的数量无限多, 就可以填满整个傅里叶空间, 这就相当于得到了物体的傅里叶变换, 而后对它执行傅里叶反变换就得到了物体。不过在实际应用中, 我们只要利用有限多个角度的投影数据也可以得到合理重建图像。

### 5.2.3 图像重建-滤波反投影算法的分析

在具体进行图像重建时, 我们采用的是滤波反投影算法, 此算法基于中心切片定理, 本质上是 Radon 逆变换公式在图像重建算法中的具体应用。它采用先修正数据、后投影的方法, 通过转换极坐标中傅里叶逆变换和重新确定积分限来实现的。基于之前的分析我们得到滤波投影算法的具体表达式如下:

$$f(x, y) = \frac{d * \Delta\theta}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t_k, \theta_j) H(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - t_k)$$

其中,  $\theta_j = j * \Delta\theta, n$  是投影总数,  $H$  是滤波函数,  $p$  是投影数据,  $t_k = kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  代表投影线的条数,  $d$  为探测器单元之间的距离

基于图像重建及以上原理, 我们利用 MATLAB 软件进行滤波反投影算法的计算机实现, 根据题目附件 3 中所提供 CT 扫描系统得到的扫描数据, 我们可以反推出待扫描物质的各点吸收率数据, 并同时可以得到待扫描物质在正方形模板中的图像信息。

在滤波反投影算法中, 滤波函数的选择尤为重要, 滤波设计是否合适与重建后的图像质量直接相关。理想上滤波器的系统函数是  $H_R(\omega) = |\omega|$ , 但是因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(\omega)|^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^2 ds \rightarrow \infty$$

但是在实际情况下, 这个频带无限宽的理想滤波器很难实现。因此我们需要对理想的滤波器进行处理, 一般就是加窗, 也就是保留它的低频段。

$$H_R(\omega) = |\omega|W(\omega)$$

窗函数的选取也有一定的准则: 一般要求主瓣窄, 旁瓣尽可能小。实际应用中, 也不能强行要求分辨率一定要高, 也要根据要重建的对象考虑。在这里, 我们讨论了两种常见的滤波函数 R-L 滤波函数和 S-L 滤波函数。

R-L 滤波函数：

设  $\omega_0$  为截至频率，可以采用矩形窗函数  $rect(\omega/2\omega_0)$  来限制宽度  $|\omega|$ ，进而得出 R-L 滤波函数，它的频域响应如下：

$$H_\omega \triangleq |\omega|rect(\omega/2\omega_0)$$

其离散形式为：

$$h(nd) = \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & n = 0 \\ 0 & n \text{ 为偶数 } |n| \leq (M-1)/2 \\ \frac{-1}{\pi^2 d^2 n^2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其中， $d$  为采样间隔， $M$  为采样宽度。

S-L 滤波函数：

为了减小 R-L 滤波函数中的振荡现象，之后对函数进行修正，另外采用了一个平滑一些的窗函数  $\sin c(\omega/2\omega_0)rect(\omega/2\omega_0)$ ，由此可以得到一种新的滤波函数 S-L，它的频域公式为：

$$H(\omega) = |\omega| \sin c(\omega/2\omega_0)rect(\omega/2\omega_0)$$

离散形式为：

$$h(nd) = \frac{2}{\pi^2 d^2 (1 - 4n^2)} |n| \leq (M-1)/2$$

分别使用两种滤波函数进行图像重建，在反投影得到物质的吸收强度的数据大小为  $502 * 502$ ，之后我们再利用双三次插值进行图像缩放。改算法利用待采样点周围 16 个点的灰度值作三次插值，不仅考虑到 4 个直接相邻点的灰度影响，而且考虑到各邻点间灰度值变化率的影响。三次运算可以得到更接近高分辨率图像的放大效果。最终，我们得到数据大小为  $256 * 256$  的正方形模板各点吸收强度数据，并用图片的形式显示出待扫描物质的图形信息。

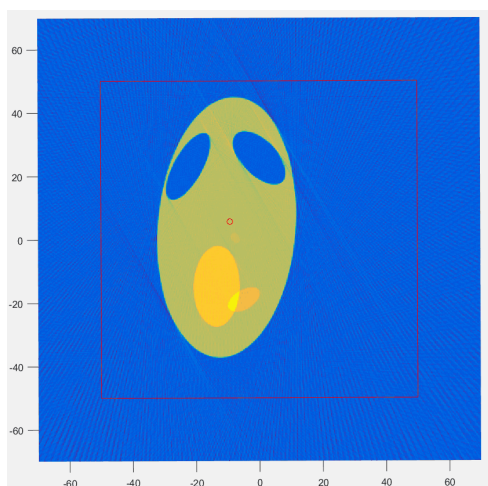


图 8 R-L 函数图像重建

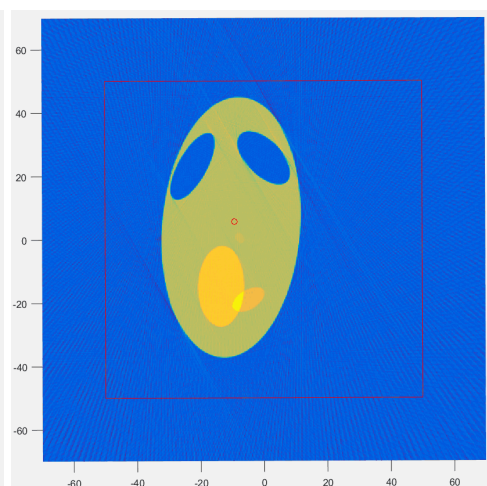


图 9 S-L 函数图像重建

由图像重建得出的结果可以看出，R-L 滤波函数形式较为简单，重建后的图像边缘清晰，但是由于矩形窗截断了滤波函数，会造成振荡响应。而且如果投影的信息中有噪声，重建后的图像则不够清晰。使用 S-L 函数重建后的图像对比 R-L 函数重建后的图像，振荡较小，而且对于含噪声的信息重建出来的图像质量对比 R-L 的也较好。因此，最终我们选择 S-L 滤波函数作为滤波反投影算法中的滤波函数，最终得到的待扫描物质的图像信息如图所示。

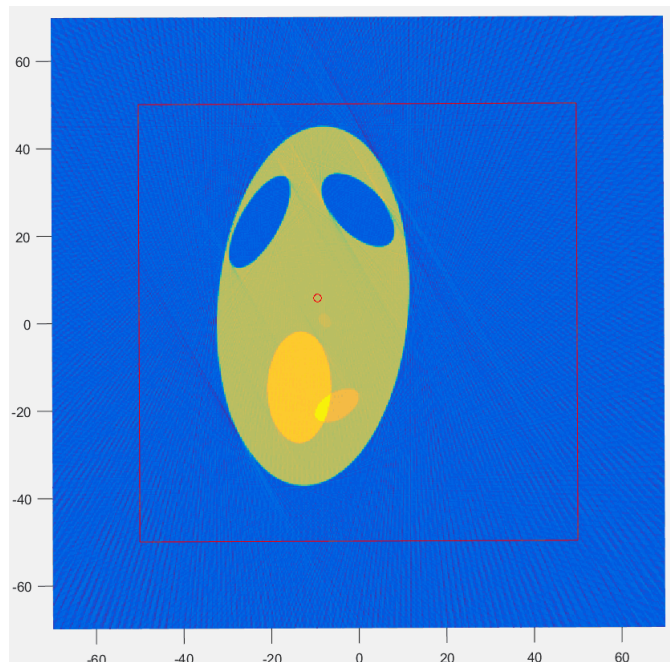


图 10 问题 2 重建图像

与问题一的求解类似，在这里仍然以正方形托盘的中心作为重建图像的原点，以正方形托盘的大小构建了一个红框，从图中可以看出，相较于原点旋转中心的位置与第一问中坐标相同仍为  $(-9.2734, 5.5363)$ ，通过以上分析可以从图像中清楚看到此未知介质

在正方形托盘中的位置。并且，此物质的几何形状在图 10 中可以清楚地看到，附件 3 中提供的数据所得到的图形类似一个人类大脑的 CT 扫描图。

同时，我们根据所得的模板各个位置的吸收强度数据，依据题中所给出的十个点的坐标，找出对应的吸收率。由于题中给出的点坐标是以模板左下角为坐标原点建立坐标轴，而我们方法中是以模板中心为原点建立坐标轴，在经过坐标变换之后，得到的十个点的对应吸收率如表 2 所示。

**表 2 各点对应吸收率**

原数据坐标	变换后坐标	吸收率
(10,18)	(-40,-32)	0
(34.5,25)	(-15.5,-25)	1.2630
(43.5,33)	(-6.5,-17)	1.4590
(45,75.5)	(-5,25.5)	0
(48.5,55.5)	(-1.5,5.5)	0.9836
(50,75.5)	(0,25.5)	0
(56,76.5)	(6,26.5)	0
(65.5,37)	(15.5,-13)	0
(79.5,18)	(29.5,-32)	0.0214
(98.5,43.5)	(48.5,-6.5)	0

同时观察所得到的各个点的吸收率数据，我们可以发现放入问题二中待扫描物质之后正方形模板，待扫描物质为一个分块均匀的介质，中间某一块的吸收率较大，其余部分的吸收率相对平均。其中由蓝至黄，吸收率逐渐变大，黄色的颜色越深，表明吸收率越大，蓝色部分表明吸收率为 0。

### 5.3 问题三求解

与问题二中分析类似，在问题三中，我们同样使用滤波反投影算法，依据附件 5 中所给的 CT 扫描系统的扫描数据，进行图像重建，得到  $256 \times 256$  的各点吸收强度数据，并得到待扫描物质的图像信息如图 11 所示。



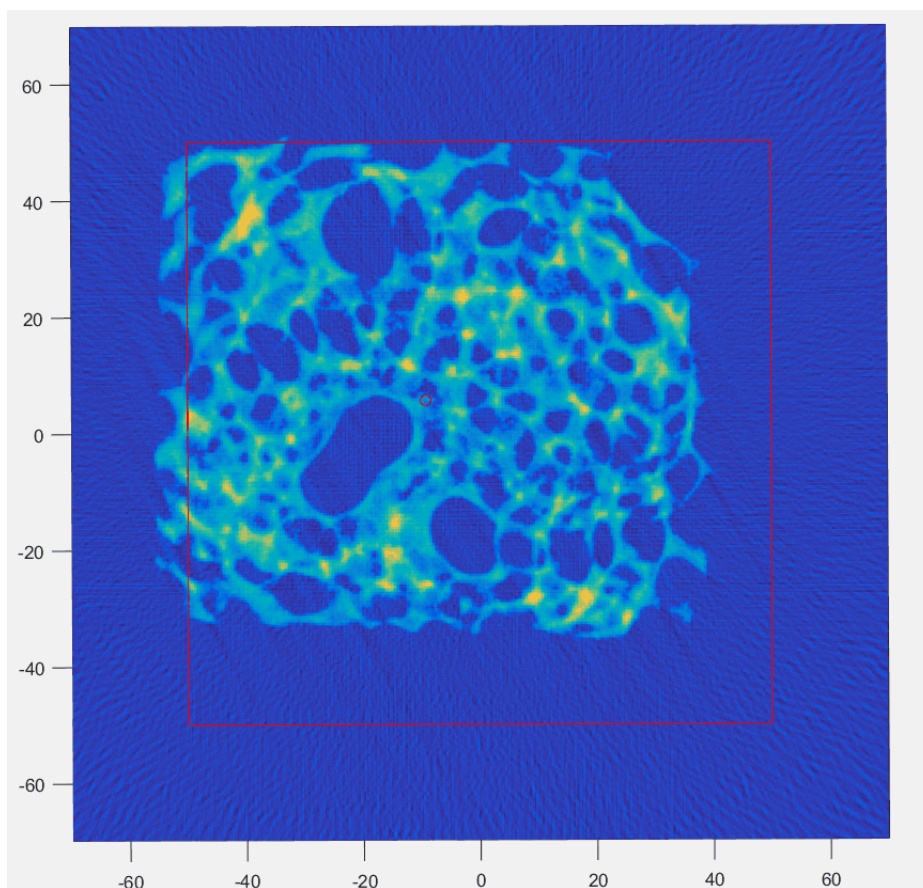


图 11 问题 3 重建图像

在这里仍然以正方形托盘的中心作为坐标轴的原点，建立坐标轴，以正方形托盘的大小构建了一个红框，从图中可以看出，相较于原点旋转中心的位置与第一问中坐标相同仍为  $(-9.2734, 5.5363)$ ，即为图中红点。通过以上分析可以从图像中清楚看到此未知介质在正方形托盘中的位置。并且，此物质的几何形状在图 11 中可以清楚地看到，附件 5 中提供的数据所得到的图形类似一个人类软组织的 CT 扫描图像。

同时根据算法得到的数据进行检索，得到题中给定十个点的对应吸收率如表 3 所示。

同时根据图像重建算法得到的模板各点吸收率数据，可知，在放入问题三中待扫描物质之后，正方形模板的各点吸收率极不均匀，由此可以推断问题三中待扫描物质为一个不均匀物质。在图形中表现出来就是图形中的颜色分布极不均匀，其中由蓝至黄，吸收率逐渐变大，黄色的颜色越深，表明吸收率越大，蓝色部分表明吸收率为 0。

#### 5.4 问题四求解

在对 CT 扫描系统进行优化时，我们选取旋转中心位置、系统旋转角度两个参数进行改进。分别改变两个参数的值，将问题一中所给的椭圆物质和圆形物质作为研究对象，对问题一中所给模板的椭圆物质和圆形物质重新进行扫描，得到新的扫描数据，利

用滤波反投影算法对扫描数据进行图像重建后，得到大小为  $256 \times 256$  的各个点的吸收率数据，同时题目附件 1 中又给出了放有椭圆物质和圆形物质的模板上各点的准确吸收率数据，我们将扫描得到的吸收率数据与附件 1 准确吸收率数据进行相关性分析，相关性越大，说明扫描得到的数据越接近于准确值，即 CT 扫描系统的效果越好，以此我们可以来评价 CT 扫描系统的优劣，分析系统的精度和稳定性，并尝试得到使得 CT 扫描系统效果最好的各参数值。因此我们主要从 1. 旋转中心变化 2. 旋转角度变化 3. 探测器间隔变化三个方面来对模型的精确度与稳定性进行分析，具体分析如下：

#### 5.4.1 旋转中心变化对系统的影响分析

经过查阅文献资料，我们了解到，在 CT 扫描系统中，当系统旋转中心与模板的集合中心重合时，扫描系统的精度会达到最优，图像重建的效果也会最好。

因此，我们尝试将 CT 扫描系统的扫描中心坐标改为  $(0, 0)$ ，在实际操作中，我们所用的 MATLAB 的 Radon 函数是默认数据矩阵中心为旋转中心，因此要实现旋转中心与模板中心的偏离，需要将  $256 \times 256$  的数据矩阵用 0 元素扩展为  $304 \times 284$  的数据矩阵，并将所得结果裁剪。改变 CT 扫描系统的参数之后，对问题一中所给的椭圆物质和圆形物质重新进行 CT 扫描，得到新的扫描数据，利用滤波反投影算法进行图像重建，最终得到的新的重建图像如图所示。

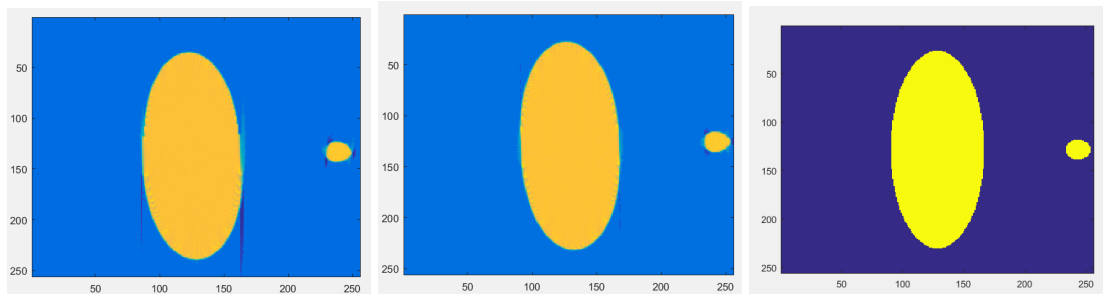


图 12 旋 转 中 心  $(-9.2734, 5.5363)$       图 13 旋转中心  $(0, 0)$       图 14 标准图像

由上图中三幅图像可以看到，图像的大致形状都相同，但是仔细观察图片的边缘时，我们发现，当旋转中心为  $(-9.2734, 5.5363)$  时，扫描物质得到的图片边缘较为模糊，图片的轮廓不清晰，与标准图像相比效果更为明显，说明当前的旋转中心有需要改进的地方。之后我们再观察旋转中心为  $(0, 0)$  时的图片，发现图片边缘的处理效果有所提高，与标准图片的边缘效果较为接近。

同时，对旋转中心为  $(-9.2734, 5.5363)$  的 CT 扫描系统所得到的吸收率数据与附件 1 中的吸收率标准数据进行相关性分析，得到两者之间的相关度为 0.8893。并对修正之后，旋转中心为  $(0, 0)$  的 CT 扫描系统得到的吸收率数据与附件 1 标准吸收率数据进行

相关性分析，得到两者之间的相关性为 0.9645。由此可知，将旋转中心改变为 (0, 0) 之后，CT 扫描系统的精度会有提高。

#### 5.4.2 旋转角度变化对系统的影响分析

之后，我们重新观察图 13 与图 14 会发现，图 13 中扫描得到的图片与标准图片相比角度会有一些偏差，主要原因是此时 CT 扫描系统每次旋转的角度为  $0.9783^\circ$ ，在查阅文献资料之后，我们发现，当系统每次旋转角度为  $1^\circ$  时，扫描系统的精度会呈现一个更优的状态。因此，之后我们将扫描系统的旋转角度改为每次旋转  $1^\circ$ ，改变 CT 扫描系统的旋转角度之后，此时旋转中心为 (0, 0)，旋转角度为  $1^\circ$ ，对问题一中所给的椭圆物质和圆形物质重新进行 CT 扫描，得到新的扫描数据，利用滤波反投影算法进行图像重建，最终得到的新的重建图像如图所示。

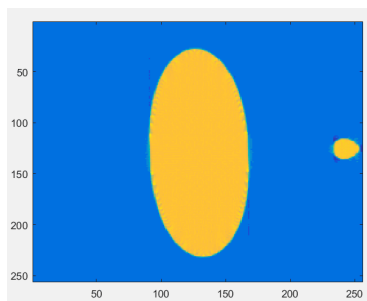


图 15 旋转角度  $0.9783^\circ$

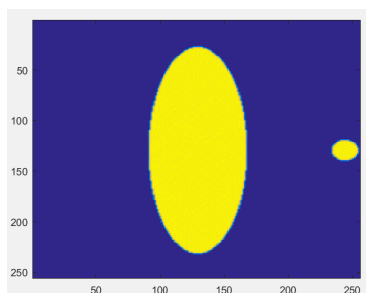


图 16 旋转角度  $1^\circ$

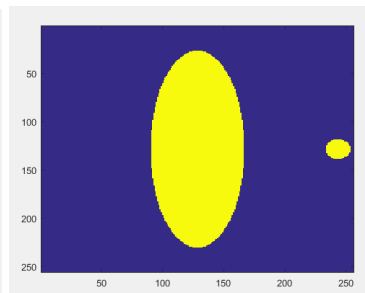


图 17 标准图像

观察不同旋转角度下的图片我们可以发现，当旋转角度为  $0.9783^\circ$  时，扫描系统得到的图像物质的位置与标准图像相比会稍有偏差，而当旋转角度为  $1^\circ$  时，扫描系统得到的图像物质的位置会发生偏转，基本与标准图像的位置重合。

同时，对旋转角度为  $0.9783^\circ$  的 CT 扫描系统所得到的吸收率数据与附件 1 中的吸收率标准数据进行相关性分析，得到两者之间的相关度为 0.9645。并对修正之后，旋转角度为  $1^\circ$  的 CT 扫描系统得到的吸收率数据与附件 1 标准吸收率数据进行相关性分析，得到两者之间的相关性为 0.9823。由此可知，将旋转角度改变之后，CT 扫描系统的精度会有更多的提高。

综合上述的分析，我们可以得出，当 CT 扫描系统的旋转中心与模板几何中心重合，旋转角度为  $1^\circ$  时，针对问题一中所给物质进行扫描，其精确度可以达到 98.23%，结果的稳定性也会大大提高。因此，我们通过对系统的参数进行改变，得到了精度更高，稳定性更强的扫描系统。

#### 5.4.3 探测器间隔变化对系统的影响分析

若探测器的间隔过大，会导致收集到的投影数据过少，从而使得定标的稳定性与精确性降低；若探测器的间隔过小，虽然收集到的投影数据很多，但是总共只有 512 个探

测器，因此会出现 X 射线无法完全覆盖模板，从而使得投影数据不全，只能得到模板的局部投影数据，最终导致无法定标。因此，探测器间隔的设定应当适中，即要在 X 射线能完全覆盖模板且得到模板全局的投影函数的前提下，尽可能的缩小探测器间隔，在这种情况下模型的稳定性和精确度能够达到最好。

5.4.4 新型模板设计分析

在新模板的设计中我们选的图形是等边三角形，具体分析如下：在新的等边三角形模板中，其边长为  $a(mm)$ ，则在探测器采样 180 度后，由等边三角形性质可知，会有 6 种情况下的特殊探测结果：X 射线方向平行于三条等边三角形的高时，可得三个探测器接受数据中非零值最少的特殊探测结果；X 射线方向平行于等边三角形的三条边是，可得三个探测器接受数据中非零值最多的特殊探测结果。以上六种特殊情况，易在投影数据中得出，我们以前三种情况为例，做出了具体的探测模拟如下图所示：

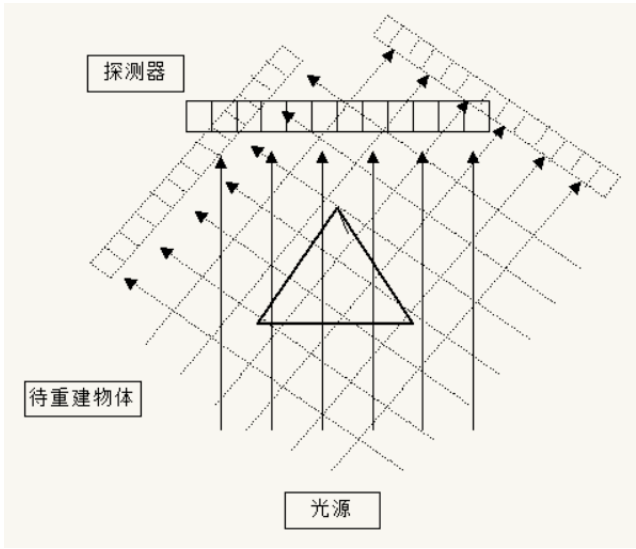


图 18 等边三角形模板

综合之上分析我们可以依次确定对应方向 0 度、30 度、60 度、90 度、120 度、150 度、180 度的数据。之后，类似第一问的处理方法，可依据这 6 个对应数据，算得所需定标的参数。由此可知，此种新的模板可由 6 组数据来定标，而第一问的模板只能用 2 组数据来定标，此外对于旋转角度变化等边三角形的变化较小能够较稳定的应对，因此我们认为新的模板与其相关定标模型会有更高的精确度与稳定性。

六、模型评价与优化

6.1 模型优点

- 1. 在题目所给的条件下解决了问题，且结果与实际情况差距不大，较实用。

2. 第一问的计算思路简洁明了，其巧妙的定标算法使得所需计算的数据量大大减少，提高了模型的效率。
3. 在解决第二和第三问时，运用了 matlab 中的滤波反投影算法，大大减少了代码量，且提高了运算效率，并得到了较好的结果。
4. 第四问新模板的设定较为巧妙，在保证计算量增加很少的情况下，提高了定标模型的精度与稳定性。
5. 所有模型的建立均有严格的数学理论支撑，避免了人为主观因素的影响。

## 6.2 模型缺点

1. 第一问中，在确定射线方向时，将探测器接受到的投影数据与所对的角度对应时，将  $0^\circ$  与  $90^\circ$  直接赋予了投影数据中两组特殊数据，然而由于采样的精度问题，每次射线方向角度变化  $1^\circ$  左右，因此有可能实际情况是  $0 \pm 0.5^\circ$  与  $90 \pm 0.5^\circ$  与那两组特殊数据对应，从而使得定标存在误差。
2. 探测器的厚度被人为忽略，会对模型中一些定量的数据产生影响，从而造成误差。

## 七、参考文献

- [1] 闫滨. (2014). CT 图像重建算法. 科学出版社.
- [2] 马晨欣, 江桦, & 闫滨. (2010). Ct 平行投影的快速重建算法研究与实现. 信息工程大学学报, 11(2), 206-209.
- [3] 张朋, 张慧滔, & 赵云松. (2012). X 射线 ct 成像的数学模型及其有关问题. 数学建模及其应用, 1(01).
- [4] 李保磊, & 张耀军. (2011). X 射线 ct 系统投影旋转中心的测量. 光学精密工程, 19(5), 967-971.
- [5] 李保磊, & 张耀军. (2009). 基于对称投影的 2D-CT 系统投影旋转中心自动确定方法. 2009 全国射线数字成像与 CT 新技术研讨会.
- [6] 张阿珍, 刘政林, 邹雪城, & 向祖权. (2007). 基于双三次插值算法的图像缩放引擎的设计. 微电子学与计算机, 24(1), 49-51.
- [7] 谷建伟, 张丽, 陈志强, 李亮, & 唐杰. (2007). 基于平行  $\pi$  线段的平行束 ct 重建. 清华大学学报 (自然科学版), 47(3), 393-395.
- [8] 张朋, & 张兆田. (2001). 几种 ct 图像重建算法的研究和比较. CT 理论与应用研究, 10(04), 4-9.
- [9] 赵飞, 路宏年, & 孙翠丽. (2006). 一种新的二维 ct 扫描方式及其重建算法. 光学技术, 32(2), 284-286.
- [10] 渠刚荣. (2007). 基于 Radon 变换的图像重建相关算法研究. (Doctoral dissertation, 北京交通大学).
- [11] 张晓瑞. (2016). 基于 radon 变换的滤波反投影重建算法研究. 电脑知识与技术, 12(27).
- [12] 乔志伟, 魏学业, & 韩焱. (2009). 滤波反投影算法的数值实现问题研究. 机械管理开发, 24(02), 1-2.

## 附录 A MATLAB 源程序

```
kk=2;[mdd, ndd]=size(dd);
while ~isempty(V)
[ tmpd , j ]=min(W(i ,V)); tmpj=V(j );
for k=2:ndd
[ tmp1 , jj ]=min(dd(1 ,k)+W(dd(2 ,k) ,V));
tmp2=V(jj ); tt(k-1 ,:)= [ tmp1 , tmp2 , jj ];
end
tmp=[ tmpd , tmpj , j ; tt ]; [ tmp3 , tmp4 ]=min(tmp (: ,1 ));
if tmp3==tmpd , ss(1:2 ,kk)=[ i ; tmp(tmp4 ,2) ];
else , tmp5=find(ss (: , tmp4)~=0); tmp6=length(tmp5);
if dd(2 , tmp4)==ss(tmp6 , tmp4)
ss(1:tmp6+1 ,kk)=[ ss(tmp5 , tmp4); tmp(tmp4 ,2) ];
else , ss(1:3 ,kk)=[ i ; dd(2 , tmp4); tmp(tmp4 ,2) ];
end; end
dd=[ dd , [ tmp3 ; tmp(tmp4 ,2) ] ]; V(tmp(tmp4 ,3))=[];
[mdd, ndd]=size(dd); kk=kk+1;
end; S=ss; D=dd(1 ,:);
```



表 3 各点对应吸收率

原数据坐标	变换后坐标	吸收率
(10,18)	(-40,-32)	0.1733
(34.5,25)	(-15.5,-25)	4.178
(43.5,33)	(-6.5,-17)	0.0582
(45,75.5)	(-5,25.5)	1.5028
(48.5,55.5)	(-1.5,5.5)	0
(50,75.5)	(0,25.5)	4.136
(56,76.5)	(6,26.5)	1.6966
(65.5,37)	(15.5,-13)	2.094
(79.5,18)	(29.5,-32)	0.0286
(98.5,43.5)	(48.5,-6.5)	0.1033