内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 4 紧线性算子的谱

§4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

§4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

§4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

§ 4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1 *恒等算子* $I : X \to X$ *是紧的, 当且仅当* $\dim X < \infty$.

§ 4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1 *恒等算子* $I : X \to X$ *是紧的, 当且仅当* $\dim X < \infty$.

证明 如果 $\dim X = \infty$, 根据 Riesz引理可以构造一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}\ (n \neq m)$.

§ 4 紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1 *恒等算子* $I : X \to X$ *是紧的, 当且仅当* $\dim X < \infty$.

证明 如果 $\dim X = \infty$, 根据 Riesz引理可以构造一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ $(n \neq m)$.

因此 $\{x_n\}$ 无收敛的子列, 推知 I 不是紧的. □

§ 4　紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1 *恒等算子 $I : X \to X$ 是紧的, 当且仅当* $\dim X < \infty$.

证明 如果 $\dim X = \infty$, 根据 Riesz引理可以构造一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ $(n \neq m)$.

因此 $\{x_n\}$ 无收敛的子列, 推知 I 不是紧的. □

推论 6.4.2 $\dim X = \infty$, *A 是 X 到 X 的紧线性算子, 且 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 不是有界线性算子.*

§ 4　紧线性算子的谱

一、紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特 征值理 论的直接推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近.

紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1 *恒等算子 $I : X \to X$ 是紧的, 当且仅当 $\dim X < \infty$.*

证明 如果 $\dim X = \infty$, 根据 Riesz引理可以构造一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}\ (n \neq m)$.

因此 $\{x_n\}$ 无收敛的子列, 推知 I 不是紧的. □

推论 6.4.2 $\dim X = \infty$, *A 是 X 到 X 的紧线性算子, 且 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 不是有界线性算子.*

证明 如果 A^{-1} 有界, 由 $A^{-1}A = I$, 知 I 是紧的，结合 定理 6.4.1 推出矛盾.
□

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间**, A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间**, A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3 *设* A *是赋范空间* X *到* X *的紧的线性算子, 那么对于* $\forall \alpha > 0$, A ***的特征值*** λ ***满足*** $|\lambda| > \alpha$ ***的个数是有限的.***

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间**, A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3 *设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 那么对于 $\forall\alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.*

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n,

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间**, A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3 *设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 那么对于 $\forall \alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.*

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令 x_n 是对应于 λ_n 的一个特征元素, 根据命题(6.1.3) **不同的特征值对应的特征向量是线性无关的**,

注1 **如果 $0 \in \rho(A)$, 则 $\dim X < \infty$.**

注2 **若 X 是无穷维的 Banach 空间, A 是紧算子, 且 A 是单射的, 则由 Banach 逆算子定理 $\mathcal{R}(A) \neq X$.**

定理 6.4.3 *设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 那么对于 $\forall \alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.*

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令 x_n 是对应于 λ_n 的一个特征元素, 根据命题(6.1.3) **不同的特征值对应的特征向量是线性无关的**,

令 $M_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 于是对于 $\forall x \in M_n$, 存在唯一的表达式

$$x = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\}. \tag{6.4.1}$$

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间**, A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3 *设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 那么对于 $\forall \alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.*

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令 x_n 是对应于 λ_n 的一个特征元素, 根据命题(6.1.3) **不同的特征值对应的特征向量是线性无关的**,

令 $M_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 于是对于 $\forall x \in M_n$, 存在唯一的表达式

$$x = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\}. \tag{6.4.1}$$

于是

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1},$$

注1 **如果** $0 \in \rho(A)$, **则** $\dim X < \infty$.

注2 **若** X **是无穷维的 Banach 空间,** A **是紧算子, 且** A **是单射的, 则由 Banach 逆算子定理** $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3 *设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 那么对于 $\forall \alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.*

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令 x_n 是对应于 λ_n 的一个特征元素, 根据命题(6.1.3) **不同的特征值对应的特征向量是线性无关的**,

令 $M_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 于是对于 $\forall x \in M_n$, 存在唯一的表达式

$$x = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\}. \tag{6.4.1}$$

于是

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1},$$

即

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}, \ \forall x \in M_n. \tag{6.4.2}$$

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\ , \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}\,|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}\,|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. □

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. $\square$

推论 6.4.4 *紧的线性算子 A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了 0 以外, 这些特征值无聚点.*

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \; \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. □

推论 6.4.4 *紧的线性算子 A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了 0 以外, 这些特征值无聚点.*

定理 6.4.5 *令 A 是从赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, $\lambda \neq 0$, 那么 $\lambda I - A$ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的.*

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1,$

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}\,, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n,$

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. □

推论 6.4.4 *紧的线性算子 A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了 0 以外, 这些特征值无聚点.*

定理 6.4.5 令 A 是从赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, $\lambda \neq 0$, *那么 $\lambda I - A$ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的.*

证明 考虑任意的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n\| \leqslant 1, x_n \in \mathcal{N}(\lambda I - A).$

因为 M_{n-1} 是闭的, 可知存在 $y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于 $m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于 $m \leqslant n-1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据 (??) 和(??), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. □

推论 6.4.4 *紧的线性算子 A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了 0 以外, 这些特征值无聚点.*

定理 6.4.5 令 A 是从赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, $\lambda \neq 0$, ***那么 $\lambda I - A$ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的.***

证明 考虑任意的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n\| \leqslant 1, x_n \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

由于 A 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的,

由于 A 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的,

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

由于 A **是紧的,** $\{Ax_n\}$ **是收敛的,**

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, **于是** $\{x_n\}$ **也是收敛的,**

根据定理 6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. $\square$

由于 A **是紧的,** $\{Ax_n\}$ **是收敛的,**

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$**, 于是** $\{x_n\}$ **也是收敛的,**

根据定理 6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. $\square$

二、紧算子的谱集

由于 A 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的,

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

根据定理 6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. $\square$

二、紧算子的谱集

定理 6.4.6 A *是如上的紧的线性算子, 则对于任意的正整数* n

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty, \tag{6.4.6}$$

且

$$\{0\} \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A)^2 \subseteq \cdots .[1] \tag{6.4.7}$$

[1] $\subseteq$ 表示包含于, $\subset$ 表示严格包含于.

由于 A 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的,

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

根据定理 6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. $\square$

二、紧算子的谱集

定理 6.4.6 A *是如上的紧的线性算子, 则对于任意的正整数* n

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty, \tag{6.4.6}$$

且

$$\{0\} \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A)^2 \subseteq \cdots .\text{[1]} \tag{6.4.7}$$

证明 因为 $(\lambda I - A)0 = 0$, 由 $(\lambda I - A)^n x = 0$ 可知 $(\lambda I - A)^{n+1}x = 0$,

[1] $\subseteq$ 表示包含于, $\subset$ 表示严格包含于.

由于 A 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的,

由于 $(\lambda I - A)x_n = 0,\ \lambda \neq 0,\ x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

根据定理 6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. $\square$

二、紧算子的谱集

定理 6.4.6 A *是如上的紧的线性算子, 则对于任意的正整数* n

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty, \tag{6.4.6}$$

且

$$\{0\} \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A)^2 \subseteq \cdots . \tag{6.4.7}$$ [1]

证明 因为 $(\lambda I - A)0 = 0$, 由 $(\lambda I - A)^n x = 0$ 可知 $(\lambda I - A)^{n+1}x = 0$, 即(6.4.7)对于任何线性算子都成立. 注意到

[1] $\subseteq$ 表示包含于, $\subset$ 表示严格包含于.

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^k \\
&= \lambda^n I - A \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^k \\
&= \lambda^n I - A \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

其中 $\beta = \lambda^n, W = A \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1},$

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^k \\
&= \lambda^n I - A \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned} \tag{6.4.8}
$$

其中 $\beta = \lambda^n, W = A \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1}$,

可知 W 是紧的, 由 (6.4.8) 和定理 6.4.5 知 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty$.

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-A)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^k \\
&= \lambda^n I - A\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

其中 $\beta=\lambda^n, W=A\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}$,

可知 W 是紧的, 由 (6.4.8) 和定理 6.4.5 知 $\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^n<\infty$.

定理 6.4.7 设 X 是 *Banach* 空间, ***A 是从 X 到 X 的紧线性算了, $\lambda\neq 0$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的.***

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^k \\
&= \lambda^n I - A \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned} \tag{6.4.8}
$$

其中 $\beta = \lambda^n, W = A \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (-A)^{k-1}$,

可知 W 是紧的, 由 (6.4.8) 和定理 6.4.5 知 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty$.

定理 6.4.7 设 X 是 *Banach* 空间, ***A 是从 X 到 X 的紧线性算了, $\lambda \neq 0$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.***

证明 由定理 6.4.5 知， $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的,

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-A)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^k \\
&= \lambda^n I - A\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1} = \beta I - W,
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

其中 $\beta=\lambda^n, W=A\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}$,

可知 W 是紧的, 由 (6.4.8) **和定理** 6.4.5 **知** $\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^n<\infty$.

定理 6.4.7 *设 X 是 Banach 空间, A* ***是从 X 到 X 的紧线性算了, $\lambda\neq 0$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的.***

证明 由定理 6.4.5 知, $\mathcal{N}(\lambda I-A)$ 是有限维的,

可知**存在 X 的闭子空间** M, 使得

$$
X=\mathcal{N}(\lambda I-A)\dot{+}M,\ M\cap\mathcal{N}(\lambda I-A)=\{0\}. \tag{6.4.9}
$$

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^k \\ &= \lambda^n I - A\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1} = \beta I - W,\end{aligned} \tag{6.4.8}$$

其中 $\beta=\lambda^n, W=A\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}$,

可知 W 是紧的, 由 (6.4.8) 和定理 6.4.5 知 $\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^n<\infty$.

定理 6.4.7 *设 X 是 Banach 空间, **A 是从 X 到 X 的紧线性算了, $\lambda\neq 0$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的.***

证明 由定理 6.4.5 知, $\mathcal{N}(\lambda I-A)$ 是有限维的,

可知**存在 X 的闭子空间** M, 使得

$$X=\mathcal{N}(\lambda I-A)\dot{+}M,\ M\cap\mathcal{N}(\lambda I-A)=\{0\}. \tag{6.4.9}$$

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \; x \in M.$$

定义 $T : M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x,\ x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x,\ x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \; x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|, \; x \in M. \tag{6.4.10}$$

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \; x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|, \; x \in M. \tag{6.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\} \subset M, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 使得 $Tx_n \to 0 (n \to \infty)$.

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \ x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|, \ x \in M. \tag{6.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\} \subset M, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 使得 $Tx_n \to 0 (n \to \infty)$.

因为 A 是紧算子, 不妨设 Ax_n 收敛到 y,

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \; x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m\,\|x\|\,, \; x \in M. \tag{6.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\} \subset M, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 使得 $Tx_n \to 0 (n \to \infty)$.

因为 A 是紧算子, 不妨设 Ax_n 收敛到 y,

由 $Tx_n = (\lambda I - A)x_n \to 0$, 可知 $\lambda x_n \to y$,

定义 $T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \ x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|, \ x \in M. \tag{6.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\} \subset M, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 使得 $Tx_n \to 0 (n \to \infty)$.

因为 A 是紧算子, 不妨设 Ax_n 收敛到 y,

由 $Tx_n = (\lambda I - A)x_n \to 0$, 可知 $\lambda x_n \to y$,

由于 M 是闭子空间, $y \in M$, 于是

$$Ty = \lim_{n \to \infty} T(\lambda x_n) = 0.$$

定义 $T : M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x, \ x \in M.$$

显然 $T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$.

以下只须证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

容易看到 T 是单射, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m \|x\|, \ x \in M. \tag{6.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\} \subset M, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots,$ 使得 $Tx_n \to 0 (n \to \infty)$.

因为 A 是紧算子, 不妨设 Ax_n 收敛到 y,

由 $Tx_n = (\lambda I - A)x_n \to 0$, 可知 $\lambda x_n \to y$,

由于 M 是闭子空间, $y \in M$, 于是

$$Ty = \lim_{n\to\infty} T(\lambda x_n) = 0.$$

由 T 是单射知 $y = 0$, 但是和

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n\| = |\lambda| > 0$$

矛盾, 推出 (6.4.10)成立.

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n,\ y_n \to y(n \to \infty)$,

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1} y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n,\ y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n,\ \lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1} y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

注 从定理的证明和 (6.4.10)可以看出, **如果 $\lambda \neq 0$, 逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 且是有界, 即 $\sigma_c(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.**

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

注 从定理的证明和 (6.4.10)可以看出, **如果 $\lambda \neq 0$, 逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 且是有界, 即 $\sigma_c(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.**

以下讨论关于 A 的剩余谱.

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1} y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

注 从定理的证明和 (6.4.10)可以看出, **如果 $\lambda \neq 0$, 逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 且是有界, 即 $\sigma_c(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.**

以下讨论关于 A 的剩余谱.

定理 6.4.8 *X 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \neq 0$.* ***若 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$.***

以下证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的.

对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n \in M$, 且 $y_n = (\lambda I - A)x_n$, $y_n \to y(n \to \infty)$,

根据 (6.4.10)知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的,

由于 $\{y_n\}$ 是有界的, 且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ **是有界的,**

注意到 A 是紧的, 不妨设 Ax_n 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的,

令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

注 从定理的证明和 (6.4.10)可以看出, **如果 $\lambda \neq 0$, 逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 且是有界, 即 $\sigma_c(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.**

以下讨论关于 A 的剩余谱.

定理 6.4.8 *X 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \neq 0$.* ***若 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$.***

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$.

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I-A)\neq X$,

令 $X_0=X$, $X_1=(\lambda I-A)X_0=\mathcal{R}(\lambda I-A)$, $X_2=(\lambda I-A)X_1=\mathcal{R}(\lambda I-A)^2,\cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0\supset X_1$, 推知 $X_1=(\lambda I-A)X_0\supseteq(\lambda I-A)X_1=X_2$, 由归纳可知:

$$X_0\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots, \tag{6.4.11}$$

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0 \supset X_1$, 推知 $X_1 = (\lambda I - A)X_0 \supseteq (\lambda I - A)X_1 = X_2$, 由归纳可知:

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.11}$$

即

$$X \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A) \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A)^2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.12}$$

并且 $X_0 \supset X_1$.

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0 \supset X_1$, 推知 $X_1 = (\lambda I - A)X_0 \supseteq (\lambda I - A)X_1 = X_2$, 由归纳可知:

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.11}$$

即

$$X \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A) \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A)^2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.12}$$

并且 $X_0 \supset X_1$.

以下证明如果 $X_{n-1} \supset X_n$, 则可知 $X_n \supset X_{n+1}$.

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$,

令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0 \supset X_1$, 推知 $X_1 = (\lambda I - A)X_0 \supseteq (\lambda I - A)X_1 = X_2$, 由归纳可知:

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.11}$$

即

$$X \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A) \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A)^2 \supseteq \cdots, \tag{6.4.12}$$

并且 $X_0 \supset X_1$.

以下证明如果 $X_{n-1} \supset X_n$, 则可知 $X_n \supset X_{n+1}$.

假如不然

$$X_n = X_{n+1} = (\lambda I - A)X_n. \tag{6.4.13}$$

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I-A)\neq X$,

令 $X_0=X$, $X_1=(\lambda I-A)X_0=\mathcal{R}(\lambda I-A)$, $X_2=(\lambda I-A)X_1=\mathcal{R}(\lambda I-A)^2,\cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0\supset X_1$, 推知 $X_1=(\lambda I-A)X_0\supseteq(\lambda I-A)X_1=X_2$, 由归纳可知:

$$X_0\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots, \tag{6.4.11}$$

即

$$X\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)^2\supseteq\cdots, \tag{6.4.12}$$

并且 $X_0\supset X_1$.

以下证明如果 $X_{n-1}\supset X_n$, 则可知 $X_n\supset X_{n+1}$.

假如不然

$$X_n=X_{n+1}=(\lambda I-A)X_n. \tag{6.4.13}$$

于是对于 $\forall x\in X_{n-1}$, $(\lambda I-A)x\in X_n=X_{n+1}$,

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I-A)\neq X$,

令 $X_0=X$, $X_1=(\lambda I-A)X_0=\mathcal{R}(\lambda I-A)$, $X_2=(\lambda I-A)X_1=\mathcal{R}(\lambda I-A)^2,\cdots$.

由定理 6.4.7和 (6.4.8)中的 W 是紧的, 可知 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ **是 X_0 的闭子空间.**

由于 $X_0\supset X_1$, 推知 $X_1=(\lambda I-A)X_0\supseteq(\lambda I-A)X_1=X_2$, 由归纳可知:

$$X_0\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots, \tag{6.4.11}$$

即

$$X\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)^2\supseteq\cdots, \tag{6.4.12}$$

并且 $X_0\supset X_1$.

以下证明如果 $X_{n-1}\supset X_n$, 则可知 $X_n\supset X_{n+1}$.

假如不然

$$X_n=X_{n+1}=(\lambda I-A)X_n. \tag{6.4.13}$$

于是对于 $\forall x\in X_{n-1}$, $(\lambda I-A)x\in X_n=X_{n+1}$,

由 (6.4.13), 存在 $y\in X_n$, 使得

$$(\lambda I-A)x=(\lambda I-A)y.$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和Riesz引理知 存在 $x_n \in X_n, \|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}, \ n = 1, 2, \cdots . \tag{6.4.15}$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和Riesz引理知 存在 $x_n \in X_n, \|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}, \ n = 1, 2, \cdots . \tag{6.4.15}$$

于是对于 $n > m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m - Ax_n) = x_m + \{-x_n - \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda}\} = x_m - x \tag{6.4.16}$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和Riesz引理知 存在 $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2},\ n = 1, 2, \cdots . \tag{6.4.15}$$

于是对于 $n > m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m - Ax_n) = x_m + \{-x_n - \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda}\} = x_m - x \tag{6.4.16}$$

其中 $x = x_n + \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda} \in X_{m+1}$.

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和Riesz引理知 存在 $x_n \in X_n, \|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}, \ n = 1, 2, \cdots . \tag{6.4.15}$$

于是对于 $n > m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m - Ax_n) = x_m + \{-x_n - \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda}\} = x_m - x \tag{6.4.16}$$

其中 $x = x_n + \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda} \in X_{m+1}$.

由(6.4.15)和 (6.4.16)有

$$\|Ax_m - Ax_n\| = |\lambda| \, \|x_m - x\| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ **是一一的,**

推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾.

结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和Riesz引理知 存在 $x_n \in X_n, \|x_n\| = 1$, 且

$$d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2},\ n = 1, 2, \cdots . \tag{6.4.15}$$

于是对于 $n > m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m - Ax_n) = x_m + \{-x_n - \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda}\} = x_m - x \tag{6.4.16}$$

其中 $x = x_n + \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda} \in X_{m+1}$.

由(6.4.15)和 (6.4.16)有

$$\|Ax_m - Ax_n\| = |\lambda|\,\|x_m - x\| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0$$

即 $\{Ax_n\}$ **中不存在收敛的子列,** 与 A 是紧算子矛盾. □

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 $Banach$ 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ *至多以* 0 *为聚点.*

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 X 是 *Banach* 空间, A ***是从*** X ***到*** X ***的紧线性算子***, 则

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ ***至多以*** 0 ***为聚点***.

三、例

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ *至多以* 0 *为聚点.*

三、例

下面对于紧线性算子, 考虑 $\lambda = 0$ 的情况.

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ *至多以* 0 *为聚点.*

三、例

下面对于紧线性算子, 考虑 $\lambda = 0$ 的情况.

如果 X **是有限维的, 有两种可能,** $0 \in \sigma(A) = \sigma_p(A)$, **或者** $0 \in \rho(A)$;

定理 6.4.8 说明 $\sigma_r(A)\backslash\{0\} = \emptyset$.

综上我们有

定理 6.4.9 *X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则*

(1) $0 \in \sigma(A)$, *除非* $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ *至多以* 0 *为聚点.*

三、例

下面对于紧线性算子, 考虑 $\lambda = 0$ 的情况.

如果 X 是有限维的, 有两种可能, $0 \in \sigma(A) = \sigma_p(A)$, **或者** $0 \in \rho(A)$;

当 X 是无穷维时, $0 \in \sigma(A)$, **并且三种情况**

$$0 \in \sigma_p(A),\ 0 \in \sigma_r(A),\ 0 \in \sigma_c(A)$$

都是有可能的.

以下三个例子说明这一点.

例 6.4.10 *设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:*

$$Ax = (\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

以下三个例子说明这一点.

例 6.4.10 *设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:*

$$Ax = (\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, ***可以证明 A 把 l^2 中的有界集映射成为列紧集, 即 A 是紧的线性算子.***

以下三个例子说明这一点.

例 6.4.10 *设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:*

$$Ax = (\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, ***可以证明 A 把 l^2 中的有界集映射成为列紧集, 即 A 是紧的线性算子.***

显然 $Ax = 0$ 有非零解, $x = (\xi_1, 0, 0, \cdots)$, 其中 $\xi_1 \neq 0$, 即 $0 \in \sigma_p(A)$.

以下三个例子说明这一点.

例 6.4.10 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:

$$Ax = (\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, **可以证明 A 把 l^2 中的有界集映射成为列紧集, 即 A 是紧的线性算子.**

显然 $Ax = 0$ 有非零解, $x = (\xi_1, 0, 0, \cdots)$, 其中 $\xi_1 \neq 0$, 即$0 \in \sigma_p(A)$.

例 6.4.11 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:

$$Ax = (0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然 A 是紧的线性算子, 当 $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, **即** $\lambda \notin \sigma_p(A)(\lambda \neq 0)$.

显然 A 是紧的线性算子, 当 $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, ***即*** $\lambda \notin \sigma_p(A)(\lambda \neq 0)$**.**

可以证明 $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$**.** A ***没有特征值, 且唯一的谱点*** 0 ***是*** A ***的剩余谱.***

显然 A 是紧的线性算子, 当 $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, **即** $\lambda \notin \sigma_p(A)(\lambda \neq 0)$.

可以证明 $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$. A **没有特征值, 且唯一的谱点** 0 **是** A **的剩余谱.**

例 6.4.12 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:

$$Ax = (\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然 A 是紧的线性算子, 当 $\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, **即** $\lambda \notin \sigma_p(A)(\lambda \neq 0)$.

可以证明 $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$. A **没有特征值, 且唯一的谱点** 0 **是** A **的剩余谱.**

例 6.4.12 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为:

$$Ax = (\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然, A 也是紧的线性算子, 对于

$\lambda \neq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$, $\lambda \in \rho(A)$; $\lambda = \frac{1}{n}$, $\lambda = \sigma_p(A)$. **可以证明** $0 \in \sigma_c(T)$.