大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: 泛函分析 试卷: A 考试形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院 考试日期: 2021 年 01 月 11 日 试卷共 6 页

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八			总 分
标准分	25	20	10	10	15	10	10				100
得 分											

级______班

装 订 线

得分	

一、(25分) 基础知识释义.

(1) 部分有序集与 Zorn 引理:

(2) Lipschitz 条件与 Lipschitz 常数:

(3) 极化恒等式与平行四边形法则:

(4) 复线性空间 $\mathscr{X}$ 上的 Hahn-Banach 定理:

(5) 预解集、点谱、连续谱、剩余谱:

得分	

二、(20分) 单项选择题（以下各小题只有一个答案正确，请选择正确答案填在括号内.）

(1) 以下关于距离空间的叙述正确的是: (　　)

A. $C[-1,1]$ 按照距离 $\mathrm{d}(f,g) := \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)-g(t)|$ 为完备距离空间;

B. 空间 l^1 的对偶空间中的有界集是可分的;

C. 设 $\mathfrak{M}$ 为非零赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 的真子空间, 则存在 $x \in \mathscr{X}$ 满足 $\|x\| = 1$ 使得

$$1 = \mathrm{d}(x, \mathfrak{M}) := \inf_{y\in\mathfrak{M}} \|x-y\|;$$

D. $C[a,b]$ 中的子集 $\mathscr{F}$ 一致有界且同等连续当且仅当 $\mathscr{F}$ 是列紧的闭集.

(2) 以下关于内积空间叙述正确的是: (　　)

A. 对于内积空间 $\mathscr{X}$ 中任意两个向量 x,y 都有 $\langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x+i^k y, x+i^k y\rangle$;

B. Hilbert 空间 l^2 的每个正规正交基均为 Hamel 基;

C. 设 $\mathcal{M}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的线性流形, 则 $\mathcal{M}^\perp$ 为 $\mathcal{H}$ 的子空间;

D. l^4 为内积空间.

(3) 以下关于 Banach 空间及其上的有界线性算子叙述正确的是: (　　)

A. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $\mathscr{Y}$ 为赋范线性空间, 则 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 为 Banach 空间;

B. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\|A\| > 1$, 则 A 有界可逆;

C. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, 若 $\mathscr{X}$ 可分则 $\mathscr{X}$ 的对偶空间也可分;

D. 设 $\mathscr{X}$ 为非零 Banach 空间, 则 $\mathscr{X}$ 上必有非零连续线性泛函.

(4) 以下关于有界线性算子的谱理论叙述正确的是: (　　)

A. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则 $\sigma_c(A)$ 非空;

B. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则 A 的预解集有界;

C. 设 S 为可分的 Hilbert 空间上的单边移位算子, 则 S^2 为紧算子;

D. 设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 为紧算子, 则 $\sigma(A)$ 没有非零聚点.

得分	

三、(10分) 判断：l^1 的二次对偶空间是否与 l^1 在典型映射意义下等距线性同构. 若同构，给出证明；若不同构，试构造反例.

得分	

四、(10分) 设 $\mathscr{X}$ 为完备赋范线性空间，f 表示 $\mathscr{X}$ 上的任意给定的非零连续线性泛函，记 $\ker f := \{x \in \mathscr{X} : f(x) = 0\}$. 试证明: 如下等式

$$\mathrm{d}(a, \ker f) = \frac{|f(a)|}{\|f\|}$$

对于每个$a \in \mathscr{X}$ 成立，其中 $\mathrm{d}(a, \ker f) := \inf\{\|a - y\| : y \in \ker f\}$.

得分	

五、(15分) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 l^2 上的一个正规正交基, S 为 l^2 上的移位算子, 对每个 $n \geq 1$ 满足$Se_n = e_{n+3}$.

(1) 计算 $\sigma(S^*S - SS^*)$，$\sigma_p(S^*S - SS^*)$ 并计算 $S^*S - SS^*$的谱半径;

(2) 判断 $S^*S - SS^*$ 是否为紧算子，并加以证明.

得分	

六、(10分) 设 $\mathcal{H}$ 为复数域上的 Hilbert 空间, A 为 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子. 试证明: $\|A\| = \sup\{|(Ax, y)| : x, y \in \mathcal{H},\ \|x\| = \|y\| = 1\}$.

得分	

七、（10分） 设 $\mathscr{X}$ 为复数域上满足如下条件的无穷数列的集合，对每个 $x \in \mathscr{X}$ 记 $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \sup_{k\geq 1} |\xi_k| < \infty.$$

试证明：

(1) $\|x\| := \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \sup_{k\geq 1} |\xi_k|$ 使 $\mathscr{X}$ 为赋范线性空间；

(2) $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ 不能诱导内积空间.