内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

§ 4 完备的距离空间

一、Cauchy列

§4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

§4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

§4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

§ 4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

§4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了点列自身的构造性质以外, 和空间的结构有很大关系.

§ 4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了点列自身的构造性质以外, 和空间的结构有很大关系.

例 1.4.1 设 $X=(0,1]$ *赋以实数空间通常的距离.*

§ 4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了点列自身的构造性质以外, 和空间的结构有很大关系.

例 1.4.1 设 $X=(0,1]$ *赋以实数空间通常的距离.*

$\{\frac{1}{n}\}$ *是* $X=(0,1]$ *中的 Cauchy 列,*

§ 4　完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了点列自身的构造性质以外, 和空间的结构有很大关系.

例 1.4.1 设 $X=(0,1]$ *赋以实数空间通常的距离.*

$\{\frac{1}{n}\}$ *是* $X=(0,1]$ *中的 Cauchy 列,*

但是它在 $X=(0,1]$ *中不收敛, 因为* $0\overline{\in}X$.

§ 4 完备的距离空间

一、Cauchy列

在全体有理数组成的距离空间中，Cauchy列不一定收敛.

在全体实数组成的距离空间中，Cauchy列一定收敛.

Cauchy列一定收敛, 反映了实数空间的完备性.

我们将把这个性质“类比”地推广到一般的函数空间.

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了点列自身的构造性质以外, 和空间的结构有很大关系.

例 1.4.1 设 $X=(0,1]$ *赋以实数空间通常的距离.*

$\{\frac{1}{n}\}$ *是* $X=(0,1]$ *中的 Cauchy 列,*

但是它在 $X=(0,1]$ *中不收敛, 因为* $0\overline{\in}X$.

注 上例表明, **空间中的 Cauchy 列可能不收敛**. 问题在于基本空间存在“缺陷”, 或者说距离空间中有一些“缝隙”.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失” 0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0, 1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X,d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.

在例1.4.1中, 问题产生于"缺失"0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个"更大的"空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X,d) *是一个距离空间,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m,n \geq N$ *时, 有*

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X,d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m,n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X,d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m,n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失” 0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1=(0,1]\cup\{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 *设* (X,d) *是一个距离空间,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(X,d)$.
若对于任意的 $\varepsilon>0$, *存在正整数* N, *当* $m,n\geq N$ *时, 有*

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

命题 1.4.3 *设* $\{x_n\}$ *是距离空间* (X,d) *中的 Cauchy 列,*

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失” 0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 *设* (X,d) *是一个距离空间,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.
若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m,n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

命题 1.4.3 *设* $\{x_n\}$ *是距离空间* (X,d) *中的 Cauchy 列,*
则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ *是有界的.*

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失” 0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0, 1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X, d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m, n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

命题 1.4.3 设 $\{x_n\}$ *是距离空间* (X, d) *中的 Cauchy 列,*

则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ *是有界的.*

根据Cauchy列的定义证明

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0,1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X,d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m,n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

命题 1.4.3 设 $\{x_n\}$ *是距离空间* (X,d) *中的 Cauchy 列,*

则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ *是有界的.*

根据Cauchy列的定义证明

证明 由 Cauchy 列的定义,

在例1.4.1中, 问题产生于“缺失”0 点.

如果我们加上这样的点, 则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛.

可以证明, 在新的空间 $X_1 = (0, 1] \cup \{0\}$ 中每个 Cauchy 列都收敛.

即在一个“更大的”空间, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列.

类似于实数空间, 在距离空间, 我们也引进 Cauchy 列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设 (X, d) *是一个距离空间*, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, d)$.

若对于任意的 $\varepsilon > 0$, *存在正整数* N, *当* $m, n \geq N$ *时, 有*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称 $\{x_n\}$ *是一个* ***Cauchy 列***.

命题 1.4.3 设 $\{x_n\}$ *是距离空间* (X, d) *中的 Cauchy 列,*

则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ *是有界的.*

根据Cauchy列的定义证明

证明 由 Cauchy 列的定义,

对于 $\varepsilon = 1$, 存在N, 当 $n, m > N$时, 有 $d(x_n, x_m) < 1$. 令

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 2)$

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 2)$

根据有界集的定义，命题成立. $\square$

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 2)$

根据有界集的定义，命题成立. □

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

分析 **用收敛列和 Cauchy 的定义证明. 与数学分析的证明相似.**

证明 **设** $\lim x_n = x_0$, **则对于** $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$\beta = \max\{d(x_1,x_2), d(x_1,x_3),\cdots,d(x_1,x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1,x_n) \le \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1,x_2,\cdots\} \subset B(x_1,\beta+2)$
根据有界集的定义，命题成立. $\square$

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

分析 **用收敛列和 Cauchy 的定义证明. 与数学分析的证明相似.**

证明 **设** $\lim x_n = x_0$, **则对于** $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n,m > N$ 时, 有

$$d(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2},\quad d(x_m,x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 2)$

根据有界集的定义，命题成立. $\square$

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

分析 **用收敛列和 Cauchy 的定义证明. 与数学分析的证明相似.**

证明 **设** $\lim x_n = x_0$, **则对于** $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据距离的三角不等式, 有

$$\beta = \max\{d(x_1,x_2), d(x_1,x_3), \cdots, d(x_1,x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1,x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1,x_2,\cdots\} \subset B(x_1,\beta+2)$

根据有界集的定义，命题成立. $\square$

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

分析 **用收敛列和 Cauchy 的定义证明. 与数学分析的证明相似.**

证明 **设** $\lim x_n = x_0$, **则对于** $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n,m > N$ 时, 有

$$d(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_m,x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据距离的三角不等式, 有

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_0) + d(x_m,x_0) < \varepsilon. \qquad n,m > N$$

$$\beta = \max\{d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \cdots, d(x_1, x_{N+1})\},$$

结合三角不等式，对于任何的自然数 n,

$$d(x_1, x_n) \leq \beta + 1.$$

即：集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 2)$

根据有界集的定义，命题成立. □

命题 1.4.4 *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

分析 **用收敛列和 Cauchy 的定义证明. 与数学分析的证明相似.**

证明 **设** $\lim x_n = x_0$, **则对于** $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据距离的三角不等式, 有

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \varepsilon. \qquad n, m > N$$

因此 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列. □

二、完备的距离空间

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间,

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X,d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X,d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

注 **完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行.**

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

注 **完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间, 要判断一个点列是否收敛, 仅仅要判断它是否是 Cauchy 列.**

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

注 完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间, 要判断一个点列是否收敛, 仅仅要判断它是否是 Cauchy 列.

例 1.4.6 设 Q 为全体*有理数组成的集合*,

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

注 完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间, 要判断一个点列是否收敛, 仅仅要判断它是否是 Cauchy 列.

例 1.4.6 设 Q 为全体*有理数组成的集合*, *赋以通常的距离成为一个距离空间, 但是它不完备.*

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间 X 是完备的.*

注 **完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间, 要判断一个点列是否收敛, 仅仅要判断它是否是 Cauchy 列.**

例 1.4.6 设 Q 为全体*有理数组成的集合*, *赋以通常的距离成为一个距离空间, 但是它不完备.*

例如： 以 π 的前 n 位数字组成的数列 $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \cdots\}$ 是一个Cauchy列,

二、完备的距离空间

在一般的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛.

具有所有Cauchy列都收敛 这一性质的距离空间是非常重要的距离空间, 这就是完备空间:

定义 1.4.5 *若距离空间* (X, d) *中的任意 Cauchy 列都收敛, 则称距离空间* X *是完备的.*

注 **完备性是十分重要的, 有了完备性, 极限运算(微积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间, 要判断一个点列是否收敛, 仅仅要判断它是否是 Cauchy 列.**

例 1.4.6 *设* Q *为全体有理数组成的集合, 赋以通常的距离成为一个距离空间, 但是它不完备.*

例如： 以 π 的前 n 位数字组成的数列 $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \cdots\}$ 是一个Cauchy列,

但是它在 Q 中不收敛, 因为 π 不是有理数.

注 由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到: 一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到: 一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是任意一个 Cauchy 列.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到: 一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的"缺失", 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是任意一个 Cauchy 列.

由于 X 是完备的, 因而 $\{x_n\}$ 收敛到 x, $x \in X$.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是任意一个 Cauchy 列.

由于 X 是完备的, 因而 $\{x_n\}$ 收敛到 x, $x \in X$.

由 X_1 闭, X_1 包含了它的所有接触点,

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到：一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的“缺失”, 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是任意一个 Cauchy 列.

由于 X 是完备的, 因而 $\{x_n\}$ 收敛到 x, $x \in X$.

由 X_1 闭, X_1 包含了它的所有接触点,

注意到 x 是 X_1 的接触点, 所以 $x \in X_1$.

注 **由 Cauchy 列的定义, 我们看到: 一点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的,**

但它是否收敛, 却取决于点列以外的信息, 即空间是否完备.

在例1.4.6中, 由于无理数的 "缺失", 点列不收敛.

命题 1.4.7 *完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.*

证明 设 X 是完备的, 子空间 $X_1 \subset X$, 且 X_1 是闭的.

要证明 X_1 是完备的. 根据完备空间的定义, 只需证明 X_1 中的任意 Cauchy 列都收敛的即可.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是任意一个 Cauchy 列.

由于 X 是完备的, 因而 $\{x_n\}$ 收敛到 x, $x \in X$.

由 X_1 闭, X_1 包含了它的所有接触点,

注意到 x 是 X_1 的接触点, 所以 $x \in X_1$.

故 X_1 是完备的. □

三、完备与不完备距离空间的例

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间* $\mathbb{R}^n$ *是完备的.*

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间* $\mathbb{R}^n$ *是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间* $\mathbb{R}^n$ *是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

由空间的列紧性，首先找到它的一个收敛的子列，

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

由空间的列紧性，首先找到它的一个收敛的子列，

再结合它本身是 Cauchy列，证明这个Cauchy列收敛，命题可证.

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

由空间的列紧性，首先找到它的一个收敛的子列，

再结合它本身是 Cauchy列，证明这个Cauchy列收敛，命题可证.

证明 设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列，

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

由空间的列紧性，首先找到它的一个收敛的子列，

再结合它本身是 Cauchy列，证明这个Cauchy列收敛，命题可证.

证明 设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列，

由 Cauchy 列的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

三、完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 *距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.*

定理 1.4.9 *列紧的空间一定是完备的.*

分析：设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列.

我们只要证明该 Cauchy 列收敛.

由空间的列紧性，首先找到它的一个收敛的子列，

再结合它本身是 Cauchy列，证明这个Cauchy列收敛，命题可证.

证明 设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 X 中的任一Cauchy列，

由 Cauchy 列的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

由 X 是列紧的, 可知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0 \in X$,

$$x_{n_k} \to x_0 (k \to \infty).$$

(下面证明 x_0 也是 x_n 在空间 X 中的极限)

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k\geq k>K=N$, 于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ (n>N).$$

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, 由于 d 连续, 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon (n > N),$$

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, 由于 d 连续, 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon (n > N),$$

即 $x_n \to x_0$, $x_0 \in X$,, 这证明了 X 完备.

令 $K = N$, 当 $k > K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, **由于 d 连续**, 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon (n > N),$$

即 $x_n \to x_0$, $x_0 \in X$,, 这证明了 X 完备.

注 **从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则** $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k\geq k>K=N$, 于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ (n>N).$$

令 $k\to\infty$, **由于 d 连续,** 我们有

$$d(x_n,x_0)\leq\varepsilon(n>N),$$

即 $x_n\to x_0$, $x_0\in X$,, 这证明了 X 完备.

注 从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$.

例 1.4.10 $C[a,b]$ *是完备的.*

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k\geq k>K=N$, 于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ (n>N).$$

令 $k\to\infty$, **由于 d 连续,** 我们有

$$d(x_n,x_0)\leq\varepsilon(n>N),$$

即 $x_n\to x_0$, $x_0\in X$,, 这证明了 X 完备.

注 **从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$.**

例 1.4.10 *$C[a,b]$ 是完备的.*

证明分析： 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任一Cauchy 列.

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k\geq k>K=N$, 于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ (n>N).$$

令 $k\to\infty$, **由于 d 连续**, 我们有

$$d(x_n,x_0)\leq\varepsilon(n>N),$$

即 $x_n\to x_0$, $x_0\in X$,, 这证明了 X 完备.

注 从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$.

例 1.4.10 $C[a,b]$ *是完备的.*

证明分析： 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任一Cauchy 列.

只要证明以下三点：

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, **由于 d 连续**, 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon (n > N),$$

即 $x_n \to x_0$, $x_0 \in X$,, 这证明了 X 完备.

注 **从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则** $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

例 1.4.10 $C[a,b]$ *是完备的.*

证明分析： **设** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $C[a,b]$ **中的任一**Cauchy **列**.

只要证明以下三点：

(1) **找出** $x(t)$(**即它的极限**),

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k\geq k>K=N$, 于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ (n>N).$$

令 $k\to\infty$, **由于 d 连续**, 我们有

$$d(x_n,x_0)\leq\varepsilon(n>N),$$

即 $x_n\to x_0$, $x_0\in X$,, 这证明了 X 完备.

注 从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$.

例 1.4.10 $C[a,b]$ *是完备的.*

证明分析： 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任一Cauchy 列.

只要证明以下三点：

(1) 找出 $x(t)$(即它的极限),

(2) $x(t)\in C[a,b]$,

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, **由于 d 连续,** 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon(n > N),$$

即 $x_n \to x_0$, $x_0 \in X$,, 这证明了 X 完备.

注 从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

例 1.4.10 *$C[a,b]$ 是完备的.*

证明分析： 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任一Cauchy 列.

只要证明以下三点：

(1) 找出 $x(t)$(即它的极限),

(2) $x(t) \in C[a,b]$,

(3) $x_n(t) \to x(t) \ (n \to \infty)$ (按 $C[a,b]$ 空间中的距离收敛).

令 $K=N$, 当 $k>K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon \ (n > N).$$

令 $k \to \infty$, **由于 d 连续**, 我们有

$$d(x_n, x_0) \leq \varepsilon (n > N),$$

即 $x_n \to x_0$, $x_0 \in X$,, 这证明了 X 完备.

注 从证明中看出，一个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 只要它有一个子列收敛到 x_0, 则 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

例 1.4.10 *$C[a,b]$ 是完备的.*

证明分析： **设** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $C[a,b]$ **中的任一**Cauchy **列**.

只要证明以下三点：

(1) 找出 $x(t)$**(即它的极限)**,

(2) $x(t) \in C[a,b]$,

(3) $x_n(t) \to x(t) \ (n \to \infty)$ **(按** $C[a,b]$ **空间中的距离收敛)**.

证明 (i) **由** $\{x_n(t)\}$ **是** $C[a,b]$ **中的 Cauchy 列**,

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即
$$\max_{a\leq t\leq b} | x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon.$$

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $$\max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon.$$

$\therefore \forall t \in [a,b]$, $| x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon \ (n \geq N)$.

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $$\max_{a\leq t\leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon.$$

$\therefore \forall t \in [a,b], \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N).$

即 **$\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列,**

证明 (i) **由** $\{x_n(t)\}$ **是** $C[a,b]$ **中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a\leq t\leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon.$

$\therefore \forall t \in [a,b]$, $\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon$ $(n \geq N)$.

即 $\{x_n(t)\}$ **是** $\mathbb{R}$ **中的一个 Cauchy 数列**,

由于 $\mathbb{R}$ **的完备性, 所以存在** $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n,m\geq N$ 时, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$,

即 $\max_{a\leq t\leq b}\mid x_n(t)-x_m(t)\mid<\varepsilon$.

$\therefore\forall t\in[a,b]$, $\mid x_n(t)-x_m(t)\mid<\varepsilon\ (n\geq N)$.

即 $\{x_n(t)\}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列,**

由于 $\mathbb{R}$ 的完备性, 所以存在 $x(t)$, 使得

$$x_n(t)\to x(t)\quad(n\to\infty),$$

(ii) **下面证 $x(t)\in C[a,b]$.**

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a \leq t \leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon.$

$\therefore \forall t \in [a,b], \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N).$

即 $\{x_n(t)\}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列,**

由于 $\mathbb{R}$ 的完备性, 所以存在 $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证 $x(t) \in C[a,b]$.**

$\because n, m \geq N$ 时,

证明 (i) **由** $\{x_n(t)\}$ **是** $C[a,b]$ **中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a \leq t \leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon$.

$\therefore \forall t \in [a,b]$, $\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N)$.

即 $\{x_n(t)\}$ **是** $\mathbb{R}$ **中的一个 Cauchy 数列**,

由于 $\mathbb{R}$ **的完备性, 所以存在** $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证** $x(t) \in C[a,b]$.

$\because n, m \geq N$ 时,

$$\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a \leq t \leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon$.

$\therefore \forall t \in [a,b]$, $\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N)$.

即 **$\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列,**

由于 $\mathbb{R}$ 的完备性, 所以存在 $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证 $x(t) \in C[a,b]$.**

$\because n, m \geq N$ 时,

$$\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

令 $m \to \infty$, 可知

证明 (i) **由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a \leq t \leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon.$

$\therefore \forall t \in [a,b], \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N).$

即 $\{x_n(t)\}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列,**

由于 $\mathbb{R}$ 的完备性, 所以存在 $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证 $x(t) \in C[a,b]$.**

$\because n, m \geq N$ 时,

$$\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

令 $m \to \infty$, 可知

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid \leq \varepsilon (n \geq N), \forall t \in [a,b], \tag{1.4.3}$$

证明 (i) **由** $\{x_n(t)\}$ **是** $C[a,b]$ **中的 Cauchy 列**,

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\max_{a \leq t \leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon.$

$\therefore \forall t \in [a,b], \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \ (n \geq N).$

即 $\{x_n(t)\}$ **是** $\mathbb{R}$ **中的一个 Cauchy 数列**,

由于 $\mathbb{R}$ **的完备性, 所以存在** $x(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证** $x(t) \in C[a,b]$.

$\because n, m \geq N$ 时,

$$\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

令 $m \to \infty$, 可知

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid \leq \varepsilon (n \geq N), \forall t \in [a,b], \tag{1.4.3}$$

证明 (i) **由** $\{x_n(t)\}$ **是** $C[a,b]$ **中的 Cauchy 列,**

$\Longrightarrow$ 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

即 $\quad \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon$.

$\therefore \forall t \in [a,b], | x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon \ (n \geq N)$.

即 $\{x_n(t)\}$ **是** $\mathbb{R}$ **中的一个 Cauchy 数列,**

由于 $\mathbb{R}$ **的完备性, 所以存在** $x(t)$**,** 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

(ii) **下面证** $x(t) \in C[a,b]$.

$\because n, m \geq N$ 时,

$$| x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

令 $m \to \infty$, 可知

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon (n \geq N), \forall t \in [a,b], \tag{1.4.3}$$

即 $x_n(t)$**一致收敛到** $x(t)$. $\therefore x(t)$ **连续, 即** $x(t) \in C[a,b]$**.**

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: **设** $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ **是** l^∞ **中的任意** Cauchy **列**. **只需证明三点:**

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim_{n \to \infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: **设** $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ **是** l^∞ **中的任意** Cauchy **列**. **只需证明三点:**

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: **设** $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ **是** l^∞ **中的任意** Cauchy **列**. **只需证明三点**:

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

(2) $x \in l^\infty$,

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: **设** $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ **是** l^∞ **中的任意** Cauchy **列**. **只需证明三点**:

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

(2) $x \in l^\infty$,

(3) $x_n \to x \ (n \to \infty)$ **(按** l^∞ **空间中的距离收敛).**

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b],$$

$\therefore \max_{a\leq t\leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: **设** $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ **是** l^∞ **中的任意** Cauchy **列**. **只需证明三点:**

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

(2) $x \in l^\infty$,

(3) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ **(按** l^∞ **空间中的距离收敛).**

证明 设 $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列.

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ □

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: 设 $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列. **只需证明三点**:

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

(2) $x \in l^\infty$,

(3) $x_n \to x \ (n \to \infty)$ **(按** l^∞ **空间中的距离收敛).**

证明 设 $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列.

由 Cauchy 列的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时,

iii) 且 $n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b],$$

$\therefore \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$

即 $d(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x.$ $\square$

例 1.4.11 l^∞ *是完备的.*

分析: 设 $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列. **只需证明三点:**

(1) 找出 x**(即它的极限)**,

(2) $x \in l^\infty$,

(3) $x_n \to x \ (n \to \infty)$ **(按** l^∞ **空间中的距离收敛).**

证明 设 $\{x_n\} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列.

由 Cauchy 列的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \ \ (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.**

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \ \ (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.** **由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k,** 使得

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \ \ (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.** **由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k,** 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \quad (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.** **由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k,** 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

令 $x = \{\xi_k\}$, 下面验证 $x \in l^{\infty}$ 及 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (按 l^{∞}距离收敛).

由于 $n, m \geq N$ 时, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon$, 令 $m \to \infty$, 有

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \quad (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.**
由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

令 $x = \{\xi_k\}$, 下面验证 $x \in l^{\infty}$ 及 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (按 l^{∞}距离收敛).
由于 $n, m \geq N$ 时, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon$, 令 $m \to \infty$, 有

$$\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid \leq \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{1.4.4}$$

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \quad (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.** **由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k,** 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

令 $x = \{\xi_k\}$, 下面验证 $x \in l^\infty$ 及 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (按 l^∞距离收敛).

由于 $n, m \geq N$ 时, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon$, 令 $m \to \infty$, 有

$$\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid \leq \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{1.4.4}$$

由 （1.4.4）式知, 对 $\forall\ k$

$$\mid \xi_k \mid \leq \mid \xi_k^N - \xi_k \mid + \mid \xi_k^N \mid \leq \varepsilon + \mid \xi_k^N \mid .$$

即

$$\sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon.$$

对任意的 k, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon \quad (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.** **由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k**, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

令 $x = \{\xi_k\}$, 下面验证 $x \in l^\infty$ 及 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (按 l^∞距离收敛).

由于 $n, m \geq N$ 时, $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \mid < \varepsilon$, 令 $m \to \infty$, 有

$$\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid \leq \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{1.4.4}$$

由 （1.4.4）式知, 对 $\forall\, k$

$$\mid \xi_k \mid \leq \mid \xi_k^N - \xi_k \mid + \mid \xi_k^N \mid \leq \varepsilon + \mid \xi_k^N \mid .$$

由于 $x_N = \{\xi_1^N, \xi_2^N, \cdots, \xi_k^N, \cdots\}$ 有界,

即

$$\sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} | < \varepsilon.$$

对任意的 k, $| \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} | < \varepsilon \quad (n, m > N)$. 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ **是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列.**

由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k.$$

令 $x = \{\xi_k\}$, 下面验证 $x \in l^\infty$ 及 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ (按 l^∞距离收敛).

由于 $n, m \geq N$ 时, $| \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} | < \varepsilon$, 令 $m \to \infty$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon \quad (n \geq N). \tag{1.4.4}$$

由 （1.4.4）式知, 对 $\forall\ k$

$$| \xi_k | \leq | \xi_k^N - \xi_k | + | \xi_k^N | \leq \varepsilon + | \xi_k^N | .$$

由于 $x_N = \{\xi_1^N, \xi_2^N, \cdots, \xi_k^N, \cdots\}$ 有界,

所以 $\{\xi_k\}$ 是有界数列, $\{\xi_k\} \in l^\infty$.

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. □

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式.*

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式. 显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间.*

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k |\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式.*
显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间.
距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式. 显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间. 距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.*

事实上,

$$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$$

在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t, （一致收敛，因为区间是有限的）

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式.*
显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$， 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间.
距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.

事实上,

$$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$$

在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t, （一致收敛，因为区间是有限的）
但 $e^t\in P[0,T]$, 即 $P[0,T]$ 不是 $C[0,T]$ 中的闭集，

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k \ | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k |\ \xi_k^{(n)} - \xi_k \ | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式. 显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间. 距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.*

事实上,

$$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$$

在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t, (一致收敛, 因为区间是有限的)

但 $e^t \overline{\in} P[0,T]$, 即 $P[0,T]$ 不是 $C[0,T]$ 中的闭集,

由定理1.4.4, 知$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$ 是一个Cauchy列,

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$| \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k | \xi_k^{(n)} - \xi_k | \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. □

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式.*
显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间.
距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.

事实上,

$$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$$

在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t, （一致收敛，因为区间是有限的）
但 $e^t \overline{\in} P[0,T]$, 即 $P[0,T]$ 不是 $C[0,T]$ 中的闭集，
由定理1.4.4, 知$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$ 是一个Cauchy列，
但是它的极限不在子空间 $P[0,T]$中，

且 $n \geq N$ 时, 对 $\forall k$, 有

$$\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n, x) = \sup_k \mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid \leq \varepsilon$.

$\therefore x_n \to x = \{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. $\square$

例 1.4.12 *在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$ 记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式.*
显然$P[0,T] \subsetneqq C[0,T]$, 且 $P[0,T]$ 是 $C[0,T]$ 一个子空间.
距离空间 $C[0,T]$ 是完备的, 但是$P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不完备.

事实上,

$$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$$

在 $C[0,T]$ 中收敛到 e^t, （一致收敛，因为区间是有限的）
但 $e^t \in P[0,T]$, 即 $P[0,T]$ 不是 $C[0,T]$ 中的闭集，
由定理1.4.4, 知$\{1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2!}t^2, 1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3, \cdots\}$ 是一个Cauchy列，
但是它的极限不在子空间 $P[0,T]$中，

$\therefore P[0,T]$ **在距离**

$$d(p_1,p_2)=\max_{0\le t\le T}|p_1(t)-p_2(t)|$$

下不完备，（其中 $p_1(t),p_2(t)\in P[0,T]$）.

例 1.4.13 设 X *是全体在* $[a,b]$*上定义的连续函数，在*X*上定义距离*

$\therefore P[0,T]$ **在距离**

$$d(p_1,p_2)=\max_{0\le t\le T}|p_1(t)-p_2(t)|$$

下不完备，（其中 $p_1(t),p_2(t)\in P[0,T]$）.

例 1.4.13 设 X *是全体在* $[a,b]$*上定义的连续函数，在*X*上定义距离*

$$d(x,y)=\int_a^b |\,x(t)-y(t)\,|\,dt, \qquad (1.4.5)$$

$\therefore P[0,T]$ **在距离**

$$d(p_1,p_2)=\max_{0\le t\le T}|p_1(t)-p_2(t)|$$

下不完备，（其中 $p_1(t),p_2(t)\in P[0,T]$**）.**

例 1.4.13 设 X *是全体在* $[a,b]$*上定义的连续函数，在*X*上定义距离*

$$d(x,y)=\int_a^b|\,x(t)-y(t)\,|\,dt, \tag{1.4.5}$$

X 是一个***距离空间，但不完备***.

$\therefore P[0,T]$ **在距离**

$$d(p_1,p_2)=\max_{0\le t\le T}|p_1(t)-p_2(t)|$$

下不完备，（其中 $p_1(t),p_2(t)\in P[0,T]$）.

例 1.4.13 设 X *是全体在* $[a,b]$*上定义的连续函数，在*X*上定义距离*

$$d(x,y)=\int_a^b |\,x(t)-y(t)\,|\,dt, \tag{1.4.5}$$

X 是一个***距离空间，但不完备***.

下面我们构造一个这个空间中的Cauchy列， 但它在这个空间中不收敛. 令

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n},\\ 1 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\le t\le 1,\\ \text{直线连接} & \text{其它}.\end{cases}$$

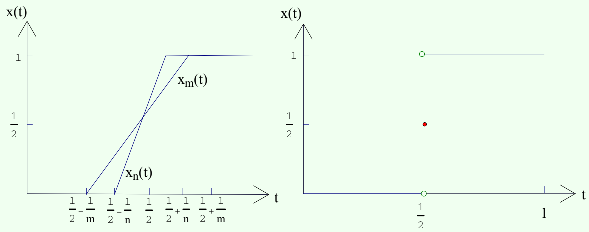

Figure 1.4.1: Cauchy列

$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

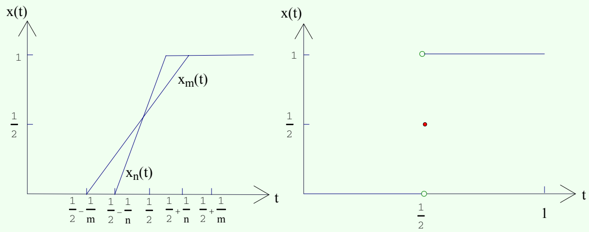

Figure 1.4.1: Cauchy列

$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

事实上

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= \int_0^1 \mid x_m(t) - x_n(t) \mid dt \\
&= \frac{1}{2} \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid \to 0 \ (m, n \to \infty).
\end{aligned}
$$

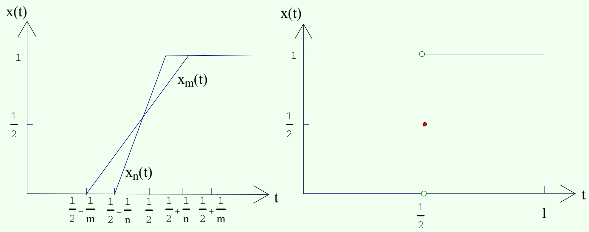

Figure 1.4.1: Cauchy列

$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

事实上

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= \int_0^1 \mid x_m(t) - x_n(t) \mid dt \\
&= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \to 0 \ (m, n \to \infty).
\end{aligned}
$$

若 X 完备, 则存在 X 中的连续函数 $y(t)$, 使得

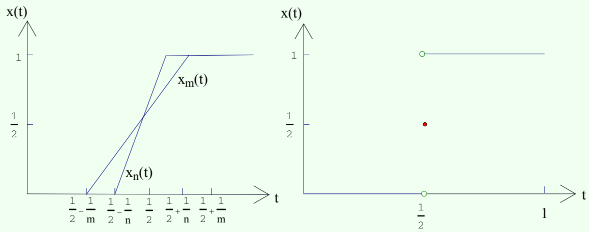

Figure 1.4.1: Cauchy列

$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

事实上

$$d(x_n, x_m) = \int_0^1 |\, x_m(t) - x_n(t) \,|\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \to 0 \ (m, n \to \infty).$$

若 X 完备, 则存在 X 中的连续函数 $y(t)$, 使得

$$d(x_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

考虑

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \dfrac{1}{2} < t \le 1, \\ \dfrac{1}{2} & \qquad t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

考虑

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\ 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\ \dfrac{1}{2} & t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt\le\int_0^1 \mid x(t)-x_n(t)\mid dt+\int_0^1 \mid x_n(t)-y(t)\mid dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt=0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$,

考虑

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\frac{1}{2},\\ 1 & \frac{1}{2}<t\le 1,\\ \frac{1}{2} & \qquad t=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 |\, x(t)-y(t)\,|\, dt \le \int_0^1 |\, x(t)-x_n(t)\,|\, dt+\int_0^1 |\, x_n(t)-y(t)\,|\, dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1 |\, x(t)-y(t)\,|\, dt=0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$，

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续，

考虑

$$x(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\ 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\ \dfrac{1}{2} & t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 |\,x(t)-y(t)\,|\,dt \le \int_0^1 |\,x(t)-x_n(t)\,|\,dt+\int_0^1 |\,x_n(t)-y(t)\,|\,dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1 |\,x(t)-y(t)\,|\,dt=0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$，

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续，

两个连续函数几乎处处相等，就是点点相等.

考虑

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\[2mm] 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \qquad t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt\le\int_0^1\mid x(t)-x_n(t)\mid dt+\int_0^1\mid x_n(t)-y(t)\mid dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1\mid x(t)-y(t)\mid dt=0.$ 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$，

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续，

两个连续函数几乎处处相等，就是点点相等.

于是在 $[1,\frac{1}{2})$ 上 $y(t)=x(t)=0,$ 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上 $y(t)=x(t)=1,$

考虑

$$x(t)=\begin{cases} 0 & 0 \le t < \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \dfrac{1}{2} < t \le 1, \\ \dfrac{1}{2} & \qquad t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 |\, x(t)-y(t) \,|\, dt \le \int_0^1 |\, x(t)-x_n(t) \,|\, dt + \int_0^1 |\, x_n(t)-y(t) \,|\, dt = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + d(x_n, y) \to 0$$

因此 $\int_0^1 |\, x(t)-y(t) \,|\, dt = 0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$，

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续，

两个连续函数几乎处处相等，就是点点相等.

于是在 $[1,\frac{1}{2})$ 上 $y(t)=x(t)=0$, 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上 $y(t)=x(t)=1$,

则 $y(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 点不连续（$\because$ 左右极限不相等）, 与假设 $y(t)$ 连续矛盾.

考虑

$$x(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\ 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\ \dfrac{1}{2} & t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt\le\int_0^1 \mid x(t)-x_n(t)\mid dt+\int_0^1 \mid x_n(t)-y(t)\mid dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt=0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$,

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续,

两个连续函数几乎处处相等，就是点点相等.

于是在 $[1,\frac{1}{2})$ 上 $y(t)=x(t)=0$, 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上 $y(t)=x(t)=1$,

则 $y(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 点不连续（$\because$ 左右极限不相等）, 与假设 $y(t)$ 连续矛盾.

注 $x(t)$ 实际上是 x_n 在以上距离意义下的极限,

考虑

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\[2ex] 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \qquad t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt \le \int_0^1 \mid x(t)-x_n(t)\mid dt+\int_0^1 \mid x_n(t)-y(t)\mid dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0$$

因此 $\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt=0$. 即 $x(t)$几乎处处等于 $y(t)$,

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ 上连续,

两个连续函数几乎处处相等，就是点点相等.

于是在 $[1,\frac{1}{2})$ 上 $y(t)=x(t)=0$, 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上 $y(t)=x(t)=1$,

则 $y(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 点不连续（$\because$ 左右极限不相等）, 与假设 $y(t)$ 连续矛盾.

注 $x(t)$ 实际上是 x_n 在以上距离意义下的极限,

但 $x(t)$ 不是连续函数, 说明 X 是不完备的.

四、距离空间的完备化

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实存在许多不完备的距离空间, 但是我们可以将它们完备化.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X,d) 是完备距离空间, $(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一子空间.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X, d) 是完备距离空间, $(X_0, d) \subset (X, d)$ 是一子空间.

(1) 如果 X_0 在 (X, d) 中是闭的, 则 (X_0, d) 是完备的.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X,d) 是完备距离空间, $(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一子空间.

(1) 如果 X_0 在 (X,d) 中是闭的, 则 (X_0,d) 是完备的.

(2) 如果 X_0 不是闭集，我们知道 $\overline{X_0}$ 在 (X,d) 中是闭的, 且是包含 X_0 的最小闭集.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X,d) 是完备距离空间, $(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一子空间.
(1) 如果 X_0 在 (X,d) 中是闭的, 则 (X_0,d) 是完备的.
(2) 如果 X_0 不是闭集，我们知道 $\overline{X_0}$ 在 (X,d) 中是闭的, 且是包含 X_0 的最小闭集.
因此 $(\overline{X_0},d)$ 是完备的, 且 X_0 在 $(\overline{X_0},d)$ 中稠.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X, d) 是完备距离空间, $(X_0, d) \subset (X, d)$ 是一子空间.
(1) 如果 X_0 在 (X, d) 中是闭的, 则 (X_0, d) 是完备的.
(2) 如果 X_0 不是闭集，我们知道 $\overline{X_0}$ 在 (X, d) 中是闭的, 且是包含 X_0 的最小闭集.
因此 $(\overline{X_0}, d)$ 是完备的, 且 X_0 在 $(\overline{X_0}, d)$ 中稠.
通俗说：从 (X_0, d) 到 $(\overline{X_0}, d)$ 的过程, 我们**填满**了原来在 (X_0, d) 中存在的 **“缝隙”，使之成为一个完备空间**.

四、距离空间的完备化

从前面例子我们看到确实 存在许多不完备的距离空间,
但是我们可以将它们完备化.
事实上,任何一个距离空间都可以完备化. 这是本节要证明的重要结论.
为便于理解, 先给出一些直观的解释.

设 (X,d) 是完备距离空间, $(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一子空间.
(1) 如果 X_0 在 (X,d) 中是闭的, 则 (X_0,d) 是完备的.
(2) 如果 X_0 不是闭集，我们知道 $\overline{X_0}$ 在 (X,d) 中是闭的, 且是包含 X_0 的最小闭集.
因此 $(\overline{X_0},d)$ 是完备的, 且 X_0 在 $(\overline{X_0},d)$ 中稠.
通俗说：从 (X_0,d) 到 $(\overline{X_0},d)$ 的过程, 我们**填满**了原来在 (X_0,d) 中存在的 **“缝隙”，使之成为一个完备空间**.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以**“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**，把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

一般的距离空间 (X, d), 如果 X 不完备,

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **"做闭包"** , 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

一般的距离空间 (X, d), 如果 X 不完备,

我们可以使用类似的方法, 把 X 嵌入到一个完备的距离空间中,

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

一般的距离空间 (X, d), 如果 X 不完备,

我们可以使用类似的方法, 把 X 嵌入到一个完备的距离空间中,

或者说把 X 扩充进一些元素, 使之完备.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法： 可以 **“做闭包”**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

一般的距离空间 (X, d), 如果 X 不完备,

我们可以使用类似的方法, 把 X 嵌入到一个完备的距离空间中,

或者说把 X 扩充进一些元素, 使之完备.

加进去的“点”就是 X 闭包中不属于 X 的那些点.

例子: 有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的,

即：存在有理数组成的 Cauchy列, 它收敛的极限不是有理数.

而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间.

方法: 可以 **"做闭包"**, 把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$.

或说是把 $\mathbb{Q}$ **嵌入到另一个完备空间** $\mathbb{R}$ 中.

这意味着:

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(**等距离嵌入**);

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠**;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的**完备化空间**.

一般的距离空间 (X, d), 如果 X 不完备,

我们可以使用类似的方法, 把 X 嵌入到一个完备的距离空间中,

或者说把 X 扩充进一些元素, 使之完备.

加进去的"点"就是 X 闭包中不属于 X 的那些点.

这是我们下面要证明的距离空间完备化定理的 基本含义.

定理 1.4.14 *任何距离空间* (X,d), *都存在一个完备的距离空间* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, *使得*

定理 1.4.14 *任何*距离空间 (X,d), 都*存在一个完备的距离空间* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个 *稠子空间等距*, 且

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X, d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$, 使得 (X, d) 和 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 是唯一的.*

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*
在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.
称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 $(\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个 稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 $(\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

(4) 在等距的意义下, 完备化空间的唯一性.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 $(\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

(4) 在等距的意义下, 完备化空间的唯一性.

证明 (1) 构造距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*

在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.

称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 $(\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

(4) 在等距的意义下, 完备化空间的唯一性.

证明 (1) **构造距离空间** $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

(i)**(构造集合 $\widetilde{X}$)**

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*
在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.
称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 $(\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

(4) 在等距的意义下, 完备化空间的唯一性.

证明 (1) **构造距离空间** $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

(i)**(构造集合 $\widetilde{X}$)**

把 (X,d) 中的 Cauchy 列全体表示为 $\widetilde{X}$.

定理 1.4.14 *任何距离空间 (X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d) 和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距, 且*
在等距的意义下, 这样的空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是唯一的.
称 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间.

分析 证明分四步:

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(2) 证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备, 这个空间 ($\widetilde{X}$ 就是我们要的空间.

(4) 在等距的意义下, 完备化空间的唯一性.

证明 (1) 构造距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

(i)**(构造集合 $\widetilde{X}$)**

把 (X,d) 中的 Cauchy 列全体表示为 $\widetilde{X}$.

如果两个 Cauchy 列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$,

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\} \in \widetilde{X}$ 定义

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{且}\ \ d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{且}\ \ d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 由三角不等式

$$|\ d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\ |\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon.$$

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{且}\ \ d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 由三角不等式

$$|\,d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\,|\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon.$$

$\therefore \{d(x_n,y_n)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中 的一个 Cauchy 数列,

则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$.

(ii) **(定义距离)**

对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

(iii) **(验证距离的合理性)**

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{且}\ \ d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 由三角不等式

$$|\ d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\ |\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon.$$

$\therefore\{d(x_n,y_n)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中 的一个 Cauchy 数列,

于是 $\{d(x_n,y_n)\}$ **收敛**. 这说明 $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 有意义.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n^{'}\}$.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x} = \{x_n\} = \{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\} = \{y_n^{'}\}$. $\{x_n^{'}\}$, $\{y_n^{'}\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x} = \{x_n\} = \{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\} = \{y_n^{'}\}$. $\{x_n^{'}\}$, $\{y_n^{'}\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{'}, y_n^{'}).$$

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x} = \{x_n\} = \{x_n'\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\} = \{y_n'\}$. $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n').$$

事实上, 因为

$$| d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n') | \leq d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \to 0 (n \to \infty).$$

$\therefore d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n') \to 0 (n \to \infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n^{'}\}$. $\{x_n^{'}\}$, $\{y_n^{'}\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x,y)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_n^{'},y_n^{'}).$$

事实上, 因为

$$|\,d(x_n,y_n)-d(x_n^{'},y_n^{'})\,|\leq d(x_n,x_n^{'})+d(y_n,y_n^{'})\to 0(n\to\infty).$$

$\therefore d(x_n,y_n)-d(x_n^{'},y_n^{'})\to 0(n\to\infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n^{'},y_n^{'})$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n'\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n'\}$. $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x,y)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_n',y_n').$$

事实上, 因为

$$|\, d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\,|\le d(x_n,x_n')+d(y_n,y_n')\to 0(n\to\infty).$$

$\therefore d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\to 0(n\to\infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n',y_n')$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$ **是 $\widetilde{X}$ 中的距离**.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n'\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n'\}$. $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x,y)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_n',y_n').$$

事实上, 因为

$$|\, d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\,|\leq d(x_n,x_n')+d(y_n,y_n')\to 0(n\to\infty).$$

$\therefore d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\to 0(n\to\infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n',y_n')$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的距离**.

(2) (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ **中的一个稠子空间等距**.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x} = \{x_n\} = \{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\} = \{y_n^{'}\}$. $\{x_n^{'}\}$, $\{y_n^{'}\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{'}, y_n^{'}).$$

事实上, 因为

$$|\, d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'})\, | \le d(x_n, x_n^{'}) + d(y_n, y_n^{'}) \to 0 (n \to \infty).$$

$\therefore d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'}) \to 0 (n \to \infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n^{'}, y_n^{'})$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的距离**.

(2) (X, d) **与** $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **中的一个稠子空间等距**.

(i) **(构造稠子空间, 等距映射)**

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n'\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n'\}$. $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x,y)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_n',y_n').$$

事实上, 因为

$$|\, d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\,|\leq d(x_n,x_n')+d(y_n,y_n')\to 0(n\to\infty).$$

$\therefore d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\to 0(n\to\infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n',y_n')$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$ **是 $\widetilde{X}$ 中的距离**.

(2) (X,d) **与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.**

(i) **(构造稠子空间, 等距映射)**

设 $\widetilde{X}_0$ 是由 X 中元素作成的常驻列 $\{x\}$ 的全体.

(iv) **证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 的选择无关.** 如果 $\widetilde{x} = \{x_n\} = \{x_n'\}$, $\widetilde{y} = \{y_n\} = \{y_n'\}$. $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列, 则

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n').$$

事实上, 因为

$$| d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n') | \leq d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \to 0 (n \to \infty).$$

$\therefore d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n') \to 0 (n \to \infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$.

即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的距离**.

(2) (X, d) **与** $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **中的一个稠子空间等距.**

(i) **(构造稠子空间, 等距映射)**

设 $\widetilde{X}_0$ 是由 X 中元素作成的常驻列 $\{x\}$ 的全体.

显然 $\widetilde{X}_0 \subset \widetilde{X}$, $\widetilde{X}_0$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个子空间.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(iii) **(证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠)** 对 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(iii) **(证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠)** 对 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,

令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$ **(由 $x=\{x_n\}$ 产生).**

显然 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$. **现证** $\widetilde{x}_k\to\widetilde{x}(k\to\infty)$.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(iii) **(证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠)** 对 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,

令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$ **(由 $x=\{x_n\}$ 产生).**

显然 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$. **现证** $\widetilde{x}_k\to\widetilde{x}(k\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$, $\because\{x_n\}$ 是 Cauchy列, $\therefore$ 存在 N, 当 $k,n\geq N$ 时, $d(x_n,x_k)<\varepsilon$.

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(iii) **(证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠)** 对 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,

令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$ **(由 $x=\{x_n\}$ 产生).**

显然 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$. **现证** $\widetilde{x}_k\to\widetilde{x}(k\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$, $\because$ $\{x_n\}$ 是 Cauchy列, $\therefore$ 存在 N, 当 $k,n\geq N$ 时, $d(x_n,x_k)<\varepsilon$.

即

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leq\varepsilon\quad(k\geq N).\tag{1.4.7}$$

令 $T:\ (X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(ii) **(验证等距映射)** 显然 $Tx\in\widetilde{X}$.

任何 $x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$, $\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$,

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $TX\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(iii) **(证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠)** 对 $\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$,

令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$ **(由 $x=\{x_n\}$ 产生).**

显然 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$. **现证** $\widetilde{x}_k\to\widetilde{x}(k\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$, $\because\{x_n\}$ 是 Cauchy列, $\therefore$ 存在 N, 当 $k,n\geq N$ 时, $d(x_n,x_k)<\varepsilon$.

即

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leq\varepsilon\quad(k\geq N).\tag{1.4.7}$$

所以 $(\widetilde{X}_0,\widetilde{d})$ 在 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中稠. 即 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠.

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because$ $\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because$ $\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \cdots)$.

(3) $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n=\{y_n,y_n,y_n,\cdots\}\in\widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y}=(y_1,y_2,\cdots)$.

由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设 $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \cdots)$.

由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= d(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}_m) \le d(\widetilde{y}_n, \widetilde{x}_n) + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + d(\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + \frac{1}{m} \to 0 (n, m \to \infty) \end{aligned}$$

$\therefore \widetilde{y}$ 是 (X, d) 中的一个 Cauchy 列, **即** $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$.

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设 $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \cdots)$.

由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= d(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}_m) \le d(\widetilde{y}_n, \widetilde{x}_n) + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + d(\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + \frac{1}{m} \to 0(n, m \to \infty) \end{aligned}$$

$\therefore \widetilde{y}$ 是 (X, d) 中的一个 Cauchy 列, **即** $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$.

(iii) 我们有

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}) \le \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \le \frac{1}{n} + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \to 0(n \to \infty). \tag{1.4.9}$$

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备**.

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \cdots)$.

由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= d(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}_m) \le d(\widetilde{y}_n, \widetilde{x}_n) + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + d(\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + \frac{1}{m} \to 0(n, m \to \infty) \end{aligned}$$

$\therefore \widetilde{y}$ 是 (X, d) 中的一个 Cauchy 列, **即** $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$.

(iii) 我们有

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}) \le \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \le \frac{1}{n} + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \to 0(n \to \infty). \tag{1.4.9}$$

即 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{y}$, $\therefore \widetilde{X}_0$ 是完备的.

(3) $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ **完备.**

(i) **设** $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ **是** $\widetilde{X}$ **中的 Cauchy 列.**

$\because \widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$ 对于每一个 $\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n = \{y_n, y_n, y_n, \cdots\} \in \widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) < \frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots). \tag{1.4.8}$$

(ii) **令** $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \cdots)$.

由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= d(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}_m) \leq d(\widetilde{y}_n, \widetilde{x}_n) + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + d(\widetilde{x}_m, \widetilde{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_m) + \frac{1}{m} \to 0(n, m \to \infty) \end{aligned}$$

$\therefore \widetilde{y}$ 是 (X, d) 中的一个 Cauchy 列, **即** $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$.

(iii) 我们有

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}) \leq \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \leq \frac{1}{n} + \widetilde{d}(\widetilde{y}_n, \widetilde{y}) \to 0(n \to \infty). \tag{1.4.9}$$

即 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{y}$, $\therefore \widetilde{X}_0$ 是完备的.

(4) **唯一性.**

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0\ (n \to \infty)$.

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0 \ (n \to \infty)$.

设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n), \widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列,

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0\ (n \to \infty)$.

设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n), \widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列,

即存在 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{y}_n \to \widetilde{y}(n \to \infty)$.

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0$ $(n \to \infty)$.

设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n), \widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列,

即存在 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{y}_n \to \widetilde{y}(n \to \infty)$.

定义 $\widetilde{x} \to \widetilde{y}(x \in \widetilde{X})$, 这是从 $\widetilde{X}$ 到 $\widetilde{Y}$ 的等距映射,

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0$ $(n \to \infty)$.

设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n), \widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列,

即存在 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{y}_n \to \widetilde{y}(n \to \infty)$.

定义 $\widetilde{x} \to \widetilde{y}(x \in \widetilde{X})$, 这是从 $\widetilde{X}$ 到 $\widetilde{Y}$ 的等距映射,

即在等距的意义下, 完备化是唯一的. $\square$

(4) **唯一性.**

假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化,

则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距.

因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ.

任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0 \ (n \to \infty)$.

设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n), \widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列,

即存在 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{y}_n \to \widetilde{y}(n \to \infty)$.

定义 $\widetilde{x} \to \widetilde{y}(x \in \widetilde{X})$, 这是从 $\widetilde{X}$ 到 $\widetilde{Y}$ 的等距映射,

即在等距的意义下, 完备化是唯一的. $\square$

注1 **证明过程中可结合有理数的完备化 (有理数如何“完备成”实数) 这一具体的背景, 将上述的每一步与有理数完备化的每一步骤相对照理解.**

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **“代表元”** 可以是

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的**“代表元”**可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **“代表元”** 可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的.

距离的定义方式:

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\})$$

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **“代表元”** 可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的.

距离的定义方式:

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\})$$

是数列

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **"代表元"** 可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的.

距离的定义方式:

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\})$$

是数列

$$\{3-1, 3.1-1.4, 3.14-1.41, 3.141-1.414, 3.1415-1.4142, \cdots\}$$

的极限, 等于 $\pi-\sqrt{2}$.

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **“代表元”** 可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的.

距离的定义方式:

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\})$$

是数列

$$\{3-1, 3.1-1.4, 3.14-1.41, 3.141-1.414, 3.1415-1.4142, \cdots\}$$

的极限, 等于 $\pi-\sqrt{2}$.

$$\{3, 3, 3, \cdots\}, \{3.1, 3.1, 3.1, \cdots\}, \{3.14, 3.14, 3.14, \cdots\}, \cdots$$

例如: π、$\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的 **“代表元”** 可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的.

距离的定义方式:

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142\cdots\})$$

是数列

$$\{3-1, 3.1-1.4, 3.14-1.41, 3.141-1.414, 3.1415-1.4142, \cdots\}$$

的极限, 等于 $\pi-\sqrt{2}$.

$$\begin{gathered}\{3, 3, 3, \cdots\}, \{3.1, 3.1, 3.1, \cdots\}, \{3.14, 3.14, 3.14, \cdots\}, \cdots \\ \{1, 1, 1, \cdots\}, \{1.4, 1.4, 1.4, \cdots\}, \{1.41, 1.41, 1.41, \cdots\}, \cdots\end{gathered}$$

是与其相关的常驻列.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间,

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间, 但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X,d)等距同构.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间, 但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X, d) 等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间, 但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X, d)等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

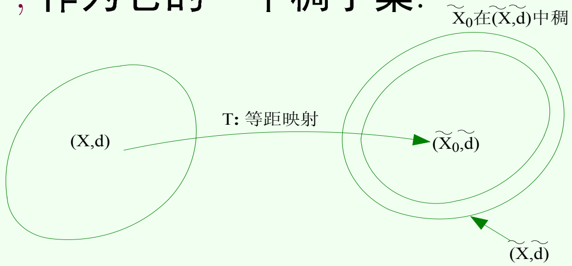

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间, 但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间 (X,d) 等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$ 中, 作为它的一个稠子集.

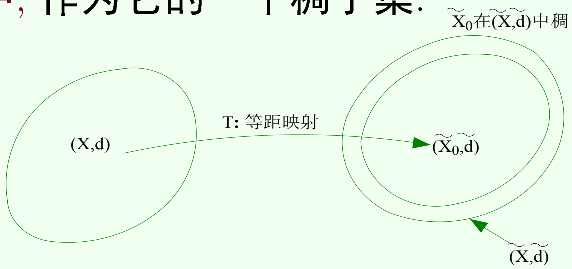

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.

从另一个角度说, 空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间,
但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X,d)
等距同构.
也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

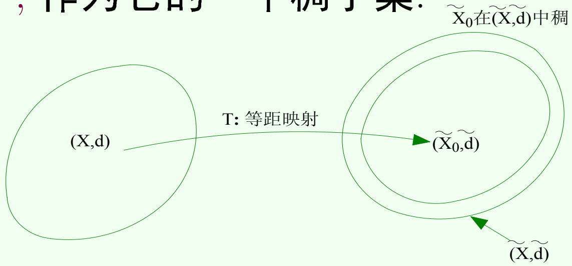

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.
从另一个角度说, 空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$.
原来的"缝隙"已经被全部填满. 这点是十分重要的.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间,

但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X,d) 等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

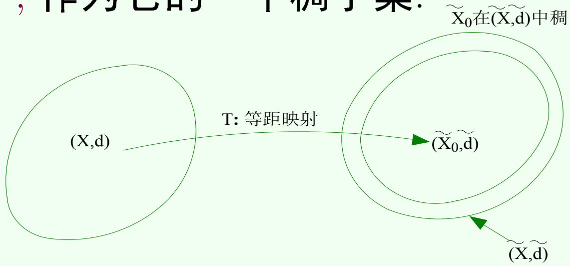

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.

从另一个角度说, 空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$.

原来的"缝隙"已经被全部填满. 这点是十分重要的.

以后我们会看到, 这使得一些在原空间 X 中无解的问题(例如微分方程), 在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有"较弱"意义下的解.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间,

但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X,d) 等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

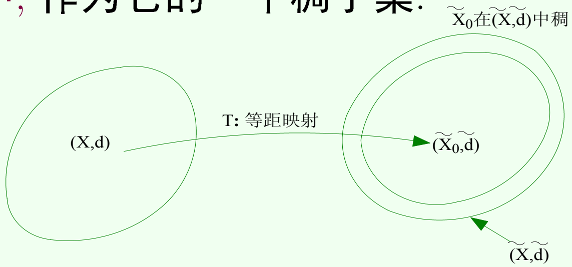

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.

从另一个角度说, 空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$.

原来的“缝隙”已经被全部填满. 这点是十分重要的.

以后我们会看到, 这使得一些在原空间 X 中无解的问题(例如微分方程), 在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有“较弱”意义下的解.

这也是完备化的意义所在.

注2 从形式上看, 完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间, 但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 与原来的空间(X, d)等距同构.

也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中, 作为它的一个稠子集.

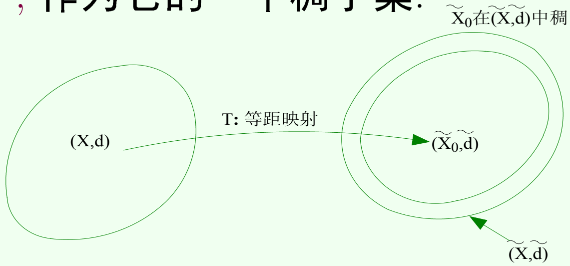

Figure 1.4.2: 等距映射

注3 距离空间完备化后, 空间中的 Cauchy 列都收敛.

从另一个角度说, 空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$.

原来的"缝隙"已经被全部填满. 这点是十分重要的.

以后我们会看到, 这使得一些在原空间 X 中无解的问题(例如微分方程), 在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有"较弱"意义下的解.

这也是完备化的意义所在.