

内蒙古大学 数学科学学院
泛函分析 期末考试试卷 (一)
(闭卷120分钟)

一、(本题满分15分)

叙述距离空间的定义，并证明：若 (X, d) 是距离空间，令

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

则 (X, ρ) 也是距离空间。

二 (本题满分15分)

叙述线性赋范空间的定义，并证明如下命题：

设 X 是线性赋范空间， A 是 X 的闭子集， B 是 X 的自列紧子集，证明 $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ 是的闭子集。

三、(本题满分20分)

叙述内积空间的定义，并讨论内积空间和线性赋范空间的关系。请证明你的结论或给出反例。

四、(本题满分20分)

叙述开映射定理和逆算子定理，并用开映射定理证明逆算子定理。

五、(本题满分15分)

叙述正交分解定理，并证明如下命题：

设 L_1, L_2 是Hilbert空间 H 的两个相互正交的子空间， $L = L_1 \oplus L_2$ ，证明 L 是闭子空间的充要条件是 L_1, L_2 均为闭子空间。

六、(本题满分15分)

叙述一致有界原理，并用它证明如下命题：

设 $\{\eta_n\}$ 为一数列，若对一切 $x = \{\xi_n\} \in l^q (1 < q < \infty)$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n$ 收敛，则 $\{\eta_n\} \in l^p$ ，其中 $p > 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。