

内蒙古大学 数学科学学院
泛函分析 期中考试试卷（一）

（闭卷120 分钟）

一、（本题满分15分）

1. 叙述范数的定义;
2. 叙述两个范数等价的定义;
3. 举出两个等价范数的例子(不需证明).

二、（本题满分15分）

设 (X, d) 是距离空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的Cauchy 列, $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 并且 $x_{n_k} \rightarrow x_0$. 证明: $x_n \rightarrow x_0$.

三、（本题满分15分）

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, X_0 是 X 中的稠密子集, 证明对于每一个 $x \in X$ 存在 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

四、（本题满分15分）

设 X 是内积空间, $x, y \in X$ 都是非零元, 证明

$$x \text{ 与 } y \text{ 正交} \Leftrightarrow \text{对于任意的 } \alpha, \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|.$$

五、（本题满分20分）

1. 叙述距离空间中完备的定义;
2. 证明 $C[a, b]$ 是完备的距离空间.

六、（本题满分20分）

(1)叙述 $C[a, b]$ 中列紧的充要条件.

(2)令 $h(t) \in C[0, 1]$, $g_n(t) = \int_0^1 \cos^3(t + nu)h(u)du$, 证明 $\{g_n(t)\}$ 有一个收敛的子列.