泛函分析

Functional Analysis

主　讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

§5　Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** A^* $y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** A^* $y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** A^* $y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把 Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的 Banach 空间上.

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** A^* $y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把 Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的 Banach 空间上.

考虑 A 是从 Banach 空间 X_1 到 X_2的线性算子,

§ 5　Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** $A^* \quad y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把 Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的 Banach 空间上.

考虑 A 是从 Banach 空间 X_1 到 X_2的线性算子,

如果 X_1 和 X_2 都是 Hilbert 空间，$Ax \in X_2$,

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A **的共轭算子** A^* $y \in H \mapsto A^*y$ **由下式定义:**

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把 Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的 Banach 空间上.

考虑 A 是从 Banach 空间 X_1 到 X_2的线性算子,

如果 X_1 和 X_2 都是 Hilbert 空间，$Ax \in X_2$,

对于固定的 y, 由 Riesz 表示定理, (Ax, y) **是 X_2 上的有界线性泛函，**

§ 5 Banch空间上的共轭算子，弱收敛

一、Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在 Hilbert 空间 H 中, 设 A 是一个从 H 到 H 的有界线性算子, A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把 Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的 Banach 空间上.

考虑 A 是从 Banach 空间 X_1 到 X_2的线性算子,

如果 X_1 和 X_2 都是 Hilbert 空间，$Ax \in X_2$,

对于固定的 y, 由 Riesz 表示定理, (Ax, y) 是 X_2 上的有界线性泛函，

而 A^*y 通过 (x, A^*y) 表示了 X_1 的一个有界线性泛函.

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A: \; x \in X_1 \mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

也就是说，A **是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x\in X_1\mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，**
即：A^* 是从 ${X_2}^*$ 到 ${X_1}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y\in {X_2}^*\mapsto {X_1}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

也就是说，A **是从空间** X_1 **到** X_2**的线性算子** $A:\ x \in X_1 \mapsto X_2$, **而共轭算子把** X_2 **上的一个有界线性泛函映射成**X_1 **的一个有界线性泛函，**
即：A^* **是从** ${X_2}^*$ **到** ${X_1}^*$ **的一个映射**, $A^*:\ y \in {X_2}^* \mapsto {X_1}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1, X_2是$Banach$空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$,对于$f \in X_2^*$,令

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X_1, \tag{5.5.2}$$

*称T'**是**T**的**$Banach$**共轭算子**.*

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x\in X_1\mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，
即：A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y\in X_2{}^*\mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1,X_2是$Banach$空间，$T\in\mathcal{B}(X_1,X_2)$,对于$f\in X_2^*$,令

$$(T'f)(x)=f(Tx),\forall x\in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的$Banach$共轭算子.

注1 **T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.**

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x\in X_1\mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

即：A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y\in X_2{}^*\mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1, X_2是$Banach$空间，$T\in\mathcal{B}(X_1,X_2)$,对于$f\in X_2^*$,令

$$(T'f)(x)=f(Tx),\forall x\in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的$Banach$共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 在 Hilbert 空间，线性泛函 $f\leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx,y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x,T'y)$. 上述定义成为：$(Tx,y)=(x,T^*y)$.

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A: \ x \in X_1 \mapsto X_2$，而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

即：A^* 是从 ${X_2}^*$ 到 ${X_1}^*$ 的一个映射，$A^*: \ y \in {X_2}^* \mapsto {X_1}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1, X_2是*Banach*空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$,对于$f \in X_2^*$,令

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的*Banach*共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 在 Hilbert 空间，线性泛函 $f \leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx, y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x, T'y)$. 上述定义成为：$(Tx, y) = (x, T^*y)$.

定理 5.5.2 T'是有界线性算子T的*Banach*共轭算子,则

也就是说， A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x\in X_1\mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

即： A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y\in X_2{}^*\mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 *设X_1,X_2是$Banach$空间，$T\in\mathcal{B}(X_1,X_2)$,对于$f\in X_2^*$,令*

$$(T'f)(x)=f(Tx),\forall x\in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的$Banach$共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 **在 Hilbert 空间，** 线性泛函 $f\leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx,y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x,T'y)$. **上述定义成为：** $(Tx,y)=(x,T^*y)$.

定理 5.5.2 *T'是有界线性算子T的$Banach$共轭算子,则*

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'||=||T||$;

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A: \ x \in X_1 \mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

即：A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*: \ y \in X_2{}^* \mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 *设X_1, X_2是Banach空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$,对于$f \in X_2^*$,令*

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的Banach共轭算子.

注1 **T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.**

注2 **在 Hilbert 空间，** 线性泛函 $f \leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx, y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x, T'y)$. **上述定义成为：$(Tx, y) = (x, T^*y)$.**

定理 5.5.2 *T'是有界线性算子T的Banach共轭算子,则*

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'|| = ||T||$;

(2)$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$;

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A: \ x \in X_1 \mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，即：A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*: \ y \in X_2{}^* \mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1, X_2是$Banach$空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$,对于$f \in X_2^*$,令

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的$Banach$共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 在 Hilbert 空间，线性泛函 $f \leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx, y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x, T'y)$. 上述定义成为：$(Tx, y) = (x, T^*y)$.

定理 5.5.2 T'是有界线性算子T的$Banach$共轭算子,则

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'|| = ||T||$;

(2)$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$;

(3)$(T_1 T_2)' = T_2' T_1'$;

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x \in X_1 \mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，即：A^* 是从 ${X_2}^*$ 到 ${X_1}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y \in {X_2}^* \mapsto {X_1}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1, X_2是*Banach*空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$,对于$f \in X_2^*$,令

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的*Banach*共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 在 Hilbert 空间，线性泛函 $f \leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx, y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x, T'y)$. 上述定义成为：$(Tx, y) = (x, T^*y)$.

定理 5.5.2 T'是有界线性算子T的*Banach*共轭算子,则

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'|| = ||T||$;

(2)$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$;

(3)$(T_1T_2)' = T_2'T_1'$;

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

也就是说，A 是从空间 X_1 到 X_2的线性算子 $A:\ x\in X_1\mapsto X_2$, 而共轭算子把 X_2 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，

即：A^* 是从 $X_2{}^*$ 到 $X_1{}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y\in X_2{}^*\mapsto X_1{}^*$. 于是我们可以给出 Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X_1,X_2是*Banach*空间，$T\in\mathcal{B}(X_1,X_2)$,对于$f\in X_2^*$,令

$$(T'f)(x)=f(Tx),\forall x\in X_1, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的Banach共轭算子.

注1 T'是从X_2^*到X_1^*的线性算子.

注2 在 **Hilbert** 空间，线性泛函 $f\leftrightarrow y$, $f(Tx)$ 即是 (Tx,y), $(T'f)(x)$ 即是 $(x,T'y)$. 上述定义成为：$(Tx,y)=(x,T^*y)$.

定理 5.5.2 *T'是有界线性算子T的Banach共轭算子,则*

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'||=||T||$;

(2)$(T_1+T_2)'=T_1'+T_2'$;

(3)$(T_1T_2)'=T_2'T_1'$;

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T有有界的逆算子,则T'也有有界的逆算子且

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T*有有界的逆算子,则*T'*也有有界的逆算子且*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$\begin{aligned} &|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\| \\ \leq &\|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X), \end{aligned}$$

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T*有有界的逆算子,则*T'*也有有界的逆算子且*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\|$$
$$\leq \|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X),$$

因此

$$\|T'f\| \leq \|T\|\|f\| \quad (f \in X_1^*),$$

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T*有有界的逆算子,则*T'*也有有界的逆算子且*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\|$$
$$\leq \|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X),$$

因此

$$\|T'f\| \leq \|T\|\|f\| \quad (f \in X_1^*),$$

即T是有界线性算子并且$\|T'\| \leq \|T\|$.

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T*有有界的逆算子,则*T'*也有有界的逆算子且*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\|$$
$$\leq \|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X),$$

因此

$$\|T'f\| \leq \|T\|\|f\| \quad (f \in X_1^*),$$

即T是有界线性算子并且$\|T'\| \leq \|T\|$.

另外,如果$T \neq 0$,根据$Hahn-Banach$定理,对于$\forall Tx \neq 0$,存在$f_0 \in X_2^*$,使得

$$\|f_0\| = 1, f_0(Tx) = \|Tx\|.$$

(4)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(5)若T*有有界的逆算子,则*T'*也有有界的逆算子且*

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|\|Tx\|$$
$$\le \|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X),$$

因此

$$\|T'f\| \le \|T\|\|f\| \quad (f \in X_1^*),$$

即T是有界线性算子并且$\|T'\| \le \|T\|$.

另外,如果$T \neq 0$,根据$Hahn - Banach$定理,对于$\forall Tx \neq 0$,存在$f_0 \in X_2^*$,使得

$$\|f_0\| = 1, f_0(Tx) = \|Tx\|.$$

所以

$$\|Tx\| = \|f_0(Tx)\| = |(T'f_0)(x)| \le \|T'f_0\|\|x\| \le \|T'\|\|f_0\|\|x\| = \|T'\|\|x\|.$$

故$\|T\| = \|T'\|$.

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X,\ f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X,\ f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$**.**

对于$x \in X,\ f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X$, $f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

注 **Banach 空间上共轭算子的性质(4)和 Hilbert 空间上共轭算子的性质(定理5.3.3 (4))有差别,** 这里是 $(\alpha T)' = \alpha T'$, 在 Hilbert 空间上共轭算子满足的是 $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (共轭齐次).

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X,\ f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

注 **Banach 空间上共轭算子的性质(4)和 Hilbert 空间上共轭算子的性质(定理5.3.3 (4))有差别，** 这里是 $(\alpha T)' = \alpha T'$, 在 Hilbert 空间上共轭算子满足的是 $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (共轭齐次).

下面我们考虑 *Banach***共轭算子和 Hilbert 空间上共轭算子 这两种共轭算子之间的关系.**

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X$, $f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

注 **Banach 空间上共轭算子的性质(4)和 Hilbert 空间上共轭算子的性质(定理5.3.3 (4))有差别，** 这里是 $(\alpha T)' = \alpha T'$, 在 Hilbert 空间上共轭算子满足的是 $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (共轭齐次).

下面我们考虑 *Banach*共轭算子和 **Hilbert 空间上共轭算子 这两种共轭算子之间的关系.**

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)一(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, **因此**$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.

对于$x \in X$, $f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

注 **Banach 空间上共轭算子的性质(4)和 Hilbert 空间上共轭算子的性质(定理5.3.3 (4))有差别，** 这里是 $(\alpha T)' = \alpha T'$, 在 Hilbert 空间上共轭算子满足的是 $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (共轭齐次).

下面我们考虑 *Banach***共轭算子和 Hilbert 空间上共轭算子 这两种共轭算子之间的关系.**

由 Riesz 定理的 注3, H^* **和** H **在共轭同构的意义下看成是等同的,** τ **是从** H^* **到** H **映射,** $\tau(f) = y_f, f(x) = (x, y_f)$.

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

在 (5.5.1)中 , $A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函,

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

在 (5.5.1)中 , $A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函,

由 Riesz 表示定理, 存在 $z \in H$, 使得

$$(A'(f_y))(x) = (x, z),$$

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

在 (5.5.1)中 , $A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函,

由 Riesz 表示定理, 存在 $z \in H$, 使得

$$(A'(f_y))(x) = (x, z),$$

即

$$A'(f_y) = f_z.$$

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

在 (5.5.1)中 , $A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函,

由 Riesz 表示定理, 存在 $z \in H$, 使得

$$(A'(f_y))(x) = (x, z),$$

即

$$A'(f_y) = f_z.$$

根据定义 5.5.1,

$$f_z(x) = (A'(f_y))(x) = f_y(Ax),$$

即

$$(x, z) = (Ax, y) = (x, \tau\ A'\tau^{-1}y). \tag{5.5.3}$$

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即 $\tau^{-1}(y) = f_y$ **是 H 上的有界线性泛函.**

在 (5.5.1)中，$A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函,

由 Riesz 表示定理, 存在 $z \in H$, 使得

$$(A'(f_y))(x) = (x, z),$$

即

$$A'(f_y) = f_z.$$

根据定义 5.5.1,

$$f_z(x) = (A'(f_y))(x) = f_y(Ax),$$

即

$$(x, z) = (Ax, y) = (x, \tau\ A'\tau^{-1}y). \tag{5.5.3}$$

因此, 对于Hilbert空间由 (5.5.1)定义的共轭算子 $A^* = \tau\ A'\tau^{-1}$.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、自反性

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、 自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

X^*是 一个$Banach$空间, 因此它也有共轭空间, 记 $X^{**} = (X^*)^*$, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

X^*是 一个$Banach$空间, 因此它也有共轭空间, 记 $X^{**} = (X^*)^*$, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间.

我们知道 $(L^p)^* = L^q(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 且 $(L^q)^* = L^p$, 即 $(L^p)^{**} = L^p$.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、 自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

X^***是 一个**$Banach$**空间, 因此它也有共轭空间, 记** $X^{**} = (X^*)^*$**, 称** X^{**} **为** X **的二次共轭空间.**

我们知道 $(L^p)^* = L^q(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 且 $(L^q)^* = L^p$, 即 $(L^p)^{**} = L^p$.

下面对于一般的$Banach$空间,研究X与X^{**}的关系.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、 自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

X^*是 一个$Banach$空间, 因此它也有共轭空间, 记 $X^{**} = (X^*)^*$, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间.

我们知道 $(L^p)^* = L^q(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 且 $(L^q)^* = L^p$, 即 $(L^p)^{**} = L^p$.

下面对于一般的$Banach$空间,研究X与X^{**}的关系.

设 $x \in X$, $f \in X^*$, 如果把 x 固定, f 取遍 X^*, 这的 $f(x)$ 定义了 X^* 上的一个有界线性泛函.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子, 均指由定义 5.3.2 定义的算子 A^*,

即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子,

A 的共轭算子 A^* $y \in H \mapsto A^* y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^* y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

二、 自反性

设 X 是一个赋范空间, K是数域, $X^* = \mathcal{B}(X, K)$ 是它的共轭空间,

X^*是 一个$Banach$空间, 因此它也有共轭空间, 记 $X^{**} = (X^*)^*$, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间.

我们知道 $(L^p)^* = L^q (p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 且 $(L^q)^* = L^p$, 即 $(L^p)^{**} = L^p$.

下面对于一般的$Banach$空间,研究X与X^{**}的关系.

设 $x \in X$, $f \in X^*$, 如果把 x 固定, f 取遍 X^*, 这的 $f(x)$ 定义了 X^* 上的一个有界线性泛函.

即对于每一个 $x \in X$, 对应于 X^{**} 中的一个元素 F_x, $F_x(f) = f(x) \quad (f \in X^*)$.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|,$$

称映射$F_x : X \to X^{**}$**是典型映射.**

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\|\|f\|,$$

即 $\|F_x\| \le \|x\|$.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|,$$

即 $\|F_x\| \leq \|x\|$.

另一方面, 由 $Hahn-Banach$ 定理, 对于 $x \in X$, 存在 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$,$f(x_0) = \|x\|$.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|,$$

即 $\|F_x\| \leq \|x\|$.

另一方面, 由 $Hahn - Banach$ 定理, 对于 $x \in X$, 存在 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1, f(x_0) = \|x\|$.

于是 $\|F_x\| \geq |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|$, 即 $\|F_x\| \geq \|x\|$, 所以 $\|F_x\| = \|x\|$.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|,$$

即 $\|F_x\| \leq \|x\|$.

另一方面, 由 $Hahn - Banach$ 定理, 对于 $x \in X$, 存在 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1, f(x_0) = \|x\|$.

于是 $\|F_x\| \geq |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|$, 即 $\|F_x\| \geq \|x\|$, 所以 $\|F_x\| = \|x\|$.

这样在典型映射下空间 X 与 X^{**} 的 一个子空间等距同构, 如果 X 是 $Banach$ 空间, 则 可以把 X 看成是 X^{**} 的一个闭子间.

称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.

可以验证, 对任意的 $x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个 $f \in X^*$ 有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|,$$

即 $\|F_x\| \leq \|x\|$.

另一方面, 由 $Hahn - Banach$ 定理, 对于 $x \in X$, 存在 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$,$f(x_0) = \|x\|$.

于是 $\|F_x\| \geq |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|$, 即 $\|F_x\| \geq \|x\|$, 所以 $\|F_x\| = \|x\|$.

这样在典型映射下空间 X 与 X^{**} 的 一个子空间等距同构, 如果 X 是 $Banach$ 空间, 则 可以把 X 看成是 X^{**} 的一个闭子间.

一般地, 在典型映射下, $X \neq X^{**}$, 如果$X = X^{**}$, 则称空间X是自反的, 在典型映射下 X 与 X^{**} 等距同构. 但在 X 与 X^{**} 之间存在等距同构映射, X 不一定是自反的.

定理 5.5.3 *R^n是自反的.*

定理 5.5.3 R^n ***是自反的.***

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的；*** $l^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的,***

证明留给读者.

定理 5.5.3 R^n ***是自反的.***

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的；*** $l^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的,***

证明留给读者.

注 L^1**不是自反的.** 事实上 $L^1[0,1]$ 不是任何 $Banach$ 空间的共轭空间, 即不存在 $Banach$ 空间 X, 使得 $L^1[0,1]$ 与 X^* 等距同构.

定理 5.5.3 R^n ***是自反的.***

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的；*** $l^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的,***

证明留给读者.

注 L^1**不是自反的.** 事实上 $L^1[0,1]$ 不是任何 $Banach$ 空间的共轭空间, 即不存在 $Banach$ 空间 X, 使得 $L^1[0,1]$ 与 X^* 等距同构.

定理 5.5.5 $C[a,b]$***不是自反的.***

定理 5.5.3 R^n***是自反的.***

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的；*** $l^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的,***

证明留给读者.

注 L^1**不是自反的.** 事实上 $L^1[0,1]$ 不是任何 $Banach$ 空间的共轭空间, 即不存在 $Banach$ 空间 X, 使得 $L^1[0,1]$ 与 X^* 等距同构.

定理 5.5.5 $C[a,b]$***不是自反的.***

证明 假设$C[a,b]$自反,则**对于有界变差函数空间**$V[a,b]$**上的任一个有界线性泛 函, 必存在**$x \in C[a,b]$**,使得它具有的**$F_x(f) = f(x)$**形式,**由定理5.2.3

定理 5.5.3 R^n***是自反的.***

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的；*** $l^p(1 < p < \infty)$ ***是自反的,***

证明留给读者.

注 L^1**不是自反的.** 事实上 $L^1[0,1]$ 不是任何 *Banach* 空间的共轭空间, 即不存在 *Banach* 空间 X, 使得 $L^1[0,1]$ 与 X^* 等距同构.

定理 5.5.5 $C[a,b]$***不是自反的.***

证明 假设$C[a,b]$自反,则**对于有界变差函数空间**$V[a,b]$**上的任一个有界线性泛函, 必存在**$x \in C[a,b]$**,使得它具有的**$F_x(f) = f(x)$**形式,**由定理5.2.3

$$F_x(f) = f(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

定理 5.5.3 R^n*是自反的.*

定理 5.5.4 $L^p(1 < p < \infty)$ *是自反的;* $l^p(1 < p < \infty)$ *是自反的,*

证明留给读者.

注 L^1**不是自反的.** 事实上 $L^1[0,1]$ 不是任何 *Banach* 空间的共轭空间, 即不存在 *Banach* 空间 X, 使得 $L^1[0,1]$ 与 X^* 等距同构.

定理 5.5.5 $C[a,b]$*不是自反的.*

证明 假设$C[a,b]$自反,则**对于有界变差函数空间**$V[a,b]$**上的任一个有界线性泛函,必存在**$x \in C[a,b]$**,使得它具有的**$F_x(f) = f(x)$**形式,**由定理5.2.3

$$F_x(f) = f(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

对于每一个$f \in (C[a,b])^*$,我们用$f(t)$表示相应的有界变差函数,考虑泛函

$$F_{x_0}(f) = f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0), \tag{5.5.5}$$

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b (f) = \|f\|,$$

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b(f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \le 1$.

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b(f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \le 1$.

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \leq \bigvee_a^b (f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \leq 1$.

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b (f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \le 1$**.**

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

$f_0(t)$**在**$[a,b]$**上连续, 根据(5.3.2)式,** $F_{x_0}(f_0) = 0$**,**

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b(f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \le 1$**.**

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

$f_0(t)$**在**$[a,b]$**上连续, 根据(5.3.2)式,** $F_{x_0}(f_0) = 0$**,**

但是另一方面, $\|F_{x_0}\| \ne 0$, 所以 $x_0 \ne 0$, 且由(5.3.3)式

$$F_{x_0}(f_0) = \int_a^b x_0(t)df_0(t) = \int_a^b x_0^2(t)dt > 0,$$

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \leq \bigvee_a^b(f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \leq 1$.

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

$f_0(t)$**在**$[a,b]$**上连续, 根据(5.3.2)式,** $F_{x_0}(f_0) = 0$,

但是另一方面, $\|F_{x_0}\| \neq 0$, 所以 $x_0 \neq 0$, 且由(5.3.3)式

$$F_{x_0}(f_0) = \int_a^b x_0(t)df_0(t) = \int_a^b x_0^2(t)dt > 0,$$

矛盾. 因此 $C[a,b]$ 不是自反的.

显然它是线性的, 并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \le \bigvee_a^b (f) = \|f\|,$$

即 $F_{x_0}(f)$ **有界且** $\|F_{x_0}\| \le 1$.

此外由于$\|F_{x_0}\|$ 不恒等于 0, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$, 使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

$f_0(t)$在$[a,b]$上连续, 根据(5.3.2)式, $F_{x_0}(f_0) = 0$,

但是另一方面, $\|F_{x_0}\| \ne 0$, 所以 $x_0 \ne 0$, 且由(5.3.3)式

$$F_{x_0}(f_0) = \int_a^b x_0(t)df_0(t) = \int_a^b x_0^2(t)dt > 0,$$

矛盾. 因此 $C[a,b]$ 不是自反的.

三、 弱收敛

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里，我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 *设*X*是赋范空间*, $x_0, x_n \in X (n = 1, 2, \cdots)$. ***如果对于任意的*** $f \in X^*$***, 有*** $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$***, 则称*** $\{x_n\}$***弱收敛到***x_0.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X (n = 1, 2, \cdots)$. *如果对于任意的* $f \in X^*$, *有* $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, *则称* $\{x_n\}$*弱收敛到*x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0 (n \to \infty)$, *称* x_0*为*$\{x_n\}$ *的弱极限.*

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X (n = 1, 2, \cdots)$. 如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0 (n \to \infty)$, 称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.

定理 5.5.7 弱极限的极限是唯一的.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. 如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, 称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.

定理 5.5.7 弱极限的极限是唯一的.

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 *设X是赋范空间*, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. ***如果对于任意的*** $f \in X^*$, ***有*** $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, ***则称*** $\{x_n\}$***弱收敛到***x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, ***称*** x_0***为***$\{x_n\}$ ***的弱极限.***

定理 5.5.7 ***弱极限的极限是唯一的.***

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. *如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.*

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, *称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.*

定理 5.5.7 *弱极限的极限是唯一的.*

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

因此 $f(x_0 - y_0) = 0$. 由 $Hahn - Banach$ 定理, $x_0 = y_0$.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. *如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.*

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, *称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.*

定理 5.5.7 *弱极限的极限是唯一的.*

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

因此 $f(x_0 - y_0) = 0$. 由 $Hahn - Banach$ 定理, $x_0 = y_0$.

定理 5.5.8 *如果 $\{x_n\}$ 弱收敛, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.*

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里,我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X (n = 1, 2, \cdots)$. 如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0 (n \to \infty)$, 称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.

定理 5.5.7 弱极限的极限是唯一的.

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

因此 $f(x_0 - y_0) = 0$. 由 $Hahn - Banach$ 定理, $x_0 = y_0$.

定理 5.5.8 如果 $\{x_n\}$ 弱收敛, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

证明 由于$\{x_n\}$弱收敛,则对于任意的$f \in X^*$,$\{f(x_n)\}$收敛,

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. *如果对于任意的 $f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$弱收敛到x_0.*

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, *称 x_0为$\{x_n\}$ 的弱极限.*

定理 5.5.7 *弱极限的极限是唯一的.*

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

因此 $f(x_0 - y_0) = 0$. 由 $Hahn - Banach$ 定理, $x_0 = y_0$.

定理 5.5.8 *如果 $\{x_n\}$ 弱收敛, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.*

证明 由于$\{x_n\}$弱收敛,则对于任意的$f \in X^*$,$\{f(x_n)\}$收敛,

在典型映射下我们把$x_n(n = 1, 2, \cdots)$看成X^{**}中的元素, 于是由一致有界原则得$\{\|x_n\|\}$有界.

三、弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.

在这里, 我们通过共轭空间来研究空间中 的另一种收敛方式.

定理 5.5.6 设X是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n = 1, 2, \cdots)$. *如果对于任意的* $f \in X^*$, *有* $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$, *则称* $\{x_n\}$*弱收敛到*x_0.

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0(n \to \infty)$, *称* x_0*为*$\{x_n\}$ *的弱极限.*

定理 5.5.7 *弱极限的极限是唯一的.*

证明 事实上, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且 $x_n \xrightarrow{w} y_0$,

则对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$,

因此 $f(x_0 - y_0) = 0$. 由 $Hahn - Banach$ 定理, $x_0 = y_0$.

定理 5.5.8 *如果* $\{x_n\}$ *弱收敛, 则* $\{\|x_n\|\}$ *有界.*

证明 由于$\{x_n\}$弱收敛,则对于任意的$f \in X^*$,$\{f(x_n)\}$收敛,

在典型映射下我们把$x_n(n = 1, 2, \cdots)$看成X^{**}中的元素, 于是由一致有界原则得$\{\|x_n\|\}$有界.

注1 如果$\{x_n\}$强收敛到x_0,则$\{x_n\}$必弱收敛到x_0,反之则不然.

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\|\|x_n - x_0\|(n = 1, 2, \cdots).$$

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \|x_n - x_0\| (n = 1, 2, \cdots).$$

如果 $\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$, 则对每一个 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0) (n \to \infty)$, 即 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\|\|x_n - x_0\|(n = 1, 2, \cdots).$$

如果 $\|x_n - x_0\| \to 0(n \to \infty)$, 则对每一个 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$, 即 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

反之, 我们在 l^2 中考虑: 取 $x_n = \{0, \cdots, 1, 0, \cdots\}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$, 则对每一个$f \in (l^2)^*$, 存在 $\{\xi_k\} \in l^2$, 使得

$$f(x_n) = \xi_n \to 0\ \ (n \to \infty),$$

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \|x_n - x_0\| (n = 1, 2, \cdots).$$

如果 $\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$, 则对每一个 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0) (n \to \infty)$, 即 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

反之, 我们在 l^2 中考虑: 取 $x_n = \{0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则对每一个$f \in (l^2)^*$, 存在 $\{\xi_k\} \in l^2$, 使得

$$f(x_n) = \xi_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛到0. 但是当 $m \neq n$ 时, $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$, $\{x_n\}$ 不强收敛到0.

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n)-f(x_0)|=|f(x_n-x_0)|\leq \|f\|\|x_n-x_0\|(n=1,2,\cdots).$$

如果 $\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty)$, 则对每一个 $f\in X^*$, $f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$, 即 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

反之, 我们在 l^2 中考虑: 取 $x_n=\{0,\cdots,1,0,\cdots\}\ \ (n=1,2,\cdots)$, 则对每一个$f\in (l^2)^*$, 存在 $\{\xi_k\}\in l^2$, 使得

$$f(x_n)=\xi_n\to 0\ \ (n\to\infty),$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛到0. 但是当 $m\neq n$ 时, $\|x_n-x_m\|=\sqrt{2}$, $\{x_n\}$ **不强收敛到0.**

注2 根据 Bessel 不等式(定理**3.4.1**) $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的可数标准正交列, 则对于任意的 $x\in X$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\leq \|x\|^2.$$

因为对于任意的$f \in X^*$

$$|f(x_n)-f(x_0)|=|f(x_n-x_0)|\leq \|f\|\|x_n-x_0\|(n=1,2,\cdots).$$

如果 $\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty)$, 则对每一个 $f\in X^*$, $f(x_n)\to f(x_0)(n\to\infty)$, 即 $x_n\xrightarrow{w} x_0$.

反之, 我们在 l^2 中考虑: 取 $x_n=\{0,\cdots,1,0,\cdots\}\ \ (n=1,2,\cdots)$, 则对每一个$f\in(l^2)^*$, 存在 $\{\xi_k\}\in l^2$, 使得

$$f(x_n)=\xi_n\to 0\ \ (n\to\infty),$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛到0. 但是当 $m\neq n$ 时, $\|x_n-x_m\|=\sqrt{2}$, **$\{x_n\}$ 不强收敛到0.**

注2 根据 Bessel 不等式(定理**3.4.1**) $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的可数标准正交列, 则对于任意的 $x\in X$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\leq\|x\|^2.$$

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

这说明内积空间 X 中的可数标准正交列弱收敛到零.

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

这说明内积空间 X 中的可数标准正交列弱收敛到零.

特别的

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x,$$

$$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \cdots,$$

是空间 $L^2(-\pi, \pi)$中的正交列,

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

这说明内积空间 X 中的可数标准正交列弱收敛到零.

特别的

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$

$$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \cdots,$$

是空间 $L^2(-\pi, \pi)$中的正交列，

所以对于任何的 $x \in L^2$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\mathrm{d}t = 0 \qquad (5.5.7)$$

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

这说明内积空间 X 中的可数标准正交列弱收敛到零.

特别的

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$

$$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \cdots,$$

是空间 $L^2(-\pi, \pi)$中的正交列，

所以对于任何的 $x \in L^2$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt dt = 0 \tag{5.5.7}$$

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

由于级数收敛，其一般项要趋近于零，于是对于任意的 $x \in X$，我们有 $(x, e_n) = (e_n x) \to 0 (n \to \infty)$.

由 Riesz 表示定理, (e_n, x) **可看作是 X 上的有界线性泛函 $x(e_n)$，**

即对于任何的有界线性泛函$x(e_n) \to 0$.

这说明内积空间 X 中的可数标准正交列弱收敛到零.

特别的

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x,$$

$$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \cdots,$$

是空间 $L^2(-\pi, \pi)$中的正交列，

所以对于任何的 $x \in L^2$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt = 0 \tag{5.5.7}$$

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

这是数学分析中 $Fourier$ 级数部分的$Riemann$ 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 ***在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.***

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

(1)$\{\|x_n\|\}$ 有界;

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

(1)$\{\|x_n\|\}$ ***有界;***

(2)$\{x_n(t)\}$ ***在*** $[a,b]$***上 逐点收敛于*** $x_0(t)$.

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

(1)$\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2)$\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$上 逐点收敛于 $x_0(t)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0$.由弱收敛定义的注2，知(1)成立，

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

(1)$\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2)$\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$上 逐点收敛于 $x_0(t)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0$.由弱收敛定义的注2，知(1)成立，

其次，对每一个$t_0 \in [a,b]$，定义泛函f_0:

$$f_0(x) = x(t_0), (x \in C[a,b]),$$

这是数学分析中 Fourier 级数部分的Riemann 引理

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.9 *在空间 R^n 中强收敛与弱收敛等价.*

证明留给读者.

定理 5.5.10 *空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in C[a,b]$，当且仅当*

(1)$\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2)$\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$上 逐点收敛于 $x_0(t)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0$.由弱收敛定义的注2，知(1)成立，

其次，对每一个$t_0 \in [a,b]$，定义泛函f_0:

$$f_0(x) = x(t_0), (x \in C[a,b]),$$

显然f_0是$C[a,b]$上的有界线性泛函，于是对于每一个$t_0 \in [a,b]$，

即条件(2)成立.

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$， 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n\to\infty)$$

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$， 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n\to\infty)$$

从而$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$， 即$x_n\xrightarrow{w}x_0\ (n\to\infty)$.

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n\to\infty)$$

从而$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$，即$x_n\xrightarrow{w}x_0\ (n\to\infty)$.

定理 5.5.11 ***空间$L^p[a,b](p>1)$中点列$\{x_n\}$弱收敛到x_0***，当且仅当

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$， 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n\to\infty)$$

从而$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$， 即$x_n\xrightarrow{w}x_0\ (n\to\infty)$.

定理 5.5.11 ***空间$L^p[a,b](p>1)$中点列$\{x_n\}$弱收敛到x_0***，当且仅当

*(1)$\{\|x_n\|\}$**有界;***

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$， 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n\to\infty)$$

从而$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$， 即$x_n\xrightarrow{w}x_0\ (n\to\infty)$.

定理 5.5.11 ***空间$L^p[a,b](p>1)$中点列$\{x_n\}$弱收敛到x_0，*** 当且仅当

*(1)$\{\|x_n\|\}$**有界;***

*(2)**对于每一个**$t\in[a,b]$，$\int_b^t x_n(\tau)d\tau\to\int_a^\tau x_0(\tau)d\tau\ \ (n\to\infty)$.*

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$， 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t)\qquad (x\in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t)\to\int_a^b x(t)dv(t)\qquad (n\to\infty)$$

从而$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$， 即$x_n\xrightarrow{w}x_0\ (n\to\infty)$.

定理 5.5.11 ***空间$L^p[a,b](p>1)$中点列$\{x_n\}$弱收敛到x_0***，当且仅当

(1)$\{\|x_n\|\}$有界;

(2)对于每一个$t\in[a,b]$，$\int_b^t x_n(\tau)d\tau\to\int_a^\tau x_0(\tau)d\tau\ \ (n\to\infty)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t\in[a,b]$，做函数

$$y_t(\tau)=\begin{cases}1 & a\le\tau\le t,\\ 0 & t<\tau\le b.\end{cases}$$

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t\in[a,b]$，做函数

$$y_t(\tau)=\begin{cases}1 & a\le\tau\le t,\\ 0 & t<\tau\le b.\end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a,b]\ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n \to \infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t \in [a, b]$，做函数

$$y_t(\tau) = \begin{cases} 1 & a \le \tau \le t, \\ 0 & t < \tau \le b. \end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a, b]$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

于是由定理5.3.1

$$f(x) = \int_a^b x(\tau) y_t(\tau) d\tau = \int_a^t x(\tau) d\tau \quad (x \in C[a, b]), \tag{5.5.8}$$

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n \to \infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t \in [a,b]$，做函数

$$y_t(\tau) = \begin{cases} 1 & a \le \tau \le t, \\ 0 & t < \tau \le b. \end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a,b]\ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

于是由定理5.3.1

$$f(x) = \int_a^b x(\tau) y_t(\tau) d\tau = \int_a^t x(\tau) d\tau \quad (x \in C[a,b]), \tag{5.5.8}$$

定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函f.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t\in[a,b]$，做函数

$$y_t(\tau)=\begin{cases}1 & a\le\tau\le t,\\ 0 & t<\tau\le b.\end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a,b]$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

于是由定理5.3.1

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)y_t(\tau)d\tau=\int_a^t x(\tau)d\tau \quad (x\in C[a,b]), \tag{5.5.8}$$

定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函f.

因此

$$\int_a^t x_n(\tau)d\tau\to\int_a^t x_0(\tau)d\tau \quad (n\to\infty)$$

即条件(2)成立.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t\in[a,b]$，做函数

$$y_t(\tau)=\begin{cases}1 & a\le\tau\le t,\\ 0 & t<\tau\le b.\end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a,b]$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

于是由定理5.3.1

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)y_t(\tau)d\tau=\int_a^t x(\tau)d\tau\quad (x\in C[a,b]), \tag{5.5.8}$$

定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函f.

因此

$$\int_a^t x_n(\tau)d\tau\to\int_a^t x_0(\tau)d\tau\quad (n\to\infty)$$

即条件(2)成立.

反之,设$\{x_n\}$满足条件(1)和(2),

条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau \ (n\to\infty). \tag{5.5.9}$$

条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau \ (n\to\infty). \tag{5.5.9}$$

于是对于任一阶梯函数

$$y(\tau)=\sum_{i=1}^{k} a_i y_{t_i}(\tau),$$

条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau \ (n \to \infty). \tag{5.5.9}$$

于是对于任一阶梯函数

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{t_i}(\tau),$$

其中k为任一自然数,$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$,为$[a, b]$中任意k个点,

条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau \ (n\to\infty). \tag{5.5.9}$$

于是对于任一阶梯函数

$$y(\tau)=\sum_{i=1}^{k}a_i y_{t_i}(\tau),$$

其中k为任一自然数,$t_1<t_2<\cdots<t_k$,为$[a,b]$中任意k个点,
$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为任意k个数,有

$$\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y(\tau)d\tau \ (n\to\infty).$$

条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau \ (n \to \infty). \tag{5.5.9}$$

于是对于任一阶梯函数

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_{t_i}(\tau),$$

其中k为任一自然数,$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$,为$[a, b]$中任意k个点,
$a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为任意k个数,有

$$\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)d\tau \to \int_a^b x_0(\tau)y(\tau)d\tau \ (n \to \infty).$$

而形如$y(\tau)$的阶梯函数全体在$L^q[a, b]$中稠密,由定理4.3.2,对于任意的$y \in L^q[a, b]$,上式成立,**即$\{x_n\}$弱收敛到x_0.**