卷 I (2019)

1. (1) 什么是可展曲面，给出两个判断可展曲面的方法

定义：设S为直纹面，称S为可展曲面，若曲面S的切平面沿每一条直母线是不变的

判断：1° 设直纹面 $S: r=a(u)+v\,l(u)$，则 S可展 $\Leftrightarrow (a'(u), l(u), l'(u))=0$

2° 是单参数平面族的包络

3° 局部上可以和平面建立保长对应

4° 切平面沿每一条直母线是不变的

5° 无脐点，曲面可展 $\Leftrightarrow$ Gauss 曲率 $=0$

6° 无脐点，曲面可展 $\Leftrightarrow$ 可以和一块平面建立保长对应

7° 局部上是柱面、锥面和一条空间曲线的切线面

(2) 给出3个在保长对应下保持不变的曲面几何量

长度、面积、Gauss 曲率、测地曲率、测地线、协变微分

(3) 什么是法曲率，给出其与曲面上曲线的曲率和测地线间的关系

定义：设正则参数曲面S的参数方程 $r=r(u,v)$

I、II 分别为第一、二基本形式，则 $k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$

与曲率k、测度曲率 k_g 的关系：

1° 曲面S上曲线C的法曲率是曲线的曲率向量在曲面的法向量 $\vec{n}$ 上的正交投影

$k_n = k\cos\theta$，其中θ是曲线主法向量 $\vec{\beta}$ 与曲面法向量 $\vec{n}$ 的夹角

2° 曲面S在点(u,v)沿切方向(du,dv)的法曲率等于曲面S上经过点(u,v)，以(du,dv)为切方向的曲线在该点的法曲率

3° $k^2=k_g^2+k_n^2$

(14) 写出W映射的矩阵表示及两个性质

矩阵表示：$W(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)\left[\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\right]$

性质：1° $\mathrm{II}=W(dr)\cdot dr$

2° W映射是自共轭映射，即 $W(dr)\cdot\delta r=dr\cdot W(\delta r)$

3° 特征值恰好为主曲率，特征方向为主方向

(15) 什么是渐近曲线，给出一个曲面上一条曲线是渐近曲线的条件

定义：称曲线是曲面S上的渐近曲线，如果曲线每一点的切方向都是渐近方向。$k_n=0$的切方向称为曲面S在该点的渐近方向　　直线或密切平面是切平面

2. $\vec{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 3t)$ 计算曲率，挠率，密切平面方程

解：

$\vec{r}'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 3)$　　$\vec{r}'''(t)=(2\sin t,\ -2\cos t,\ 0)$

$\vec{r}''(t)=(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$　　$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{13}$　　$|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|=2\sqrt{13}$

$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=(6\sin t,\ -6\cos t,\ 4)$

$$(r'(t),r''(t),r'''(t))=\begin{vmatrix}-2\sin t & 2\cos t & 3\\ -2\cos t & -2\sin t & 0\\ 2\sin t & -2\cos t & 0\end{vmatrix}=12\cos^2 t+12\sin^2 t=12$$

曲率：$k(t)=\dfrac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13\sqrt{13}}=\dfrac{2}{13}$

挠率：$\tau(t)=\dfrac{(r'(t),r''(t),r'''(t))}{|r'(t)\times r''(t)|^2}=\dfrac{12}{13}$

$\vec{\alpha}(t)=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\sin t,\ \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t,\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$\vec{\gamma}(t)=\dfrac{r'(t)\times r''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\sin t,\ -\frac{3}{\sqrt{13}}\cos t,\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

$\vec{\beta}(t)=\vec{\gamma}(t)\times\vec{\alpha}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 0)$

法平面：$(X-r(s))\cdot\alpha(s)=0$

从切平面：$(X-r(s))\cdot\beta(s)=0$

密切平面：$(X-r(s))\cdot\gamma(s)=0$

3.(1) 写出曲线的 Frenet 公式

(2) 设正则曲线 C 的曲率 κ 处处不为0，则下列命题等价

(a) C 的次法线与一固定方向成定角

(b) C 的曲率和挠率比是一个常数

解:

(1)

$$\begin{aligned}
r'(s) &= \alpha(s) \\
\alpha'(s) &= \kappa(s)\beta(s) \\
\beta'(s) &= -\kappa(s)\alpha(s) + \tau(s)\gamma(s) \\
\gamma'(s) &= -\tau(s)\beta(s)
\end{aligned}$$

(2)

$\Rightarrow$) 设 $\vec{k}$ 为单位向量，且 $\langle \gamma(s), \vec{k} \rangle = \theta$

于是 $\cos\theta = \vec{k}\cdot\vec{\gamma} \Rightarrow -\tau(s)\vec{\beta}(s)\cdot\vec{k} = 0$

再由 $\tau(s) \neq 0$，知 $\vec{\beta}(s) \perp \vec{k} \quad \forall s$

于是可设 $\vec{k} = k_1\vec{\alpha}(s) + k_2\vec{\gamma}(s)$

又有 $\vec{k}\cdot\vec{\gamma} = \cos\theta = k_2$，故 $\vec{k} = \sin\theta\cdot\vec{\alpha}(s) + \cos\theta\cdot\vec{\gamma}(s)$

再求导，得 $0 = \sin\theta\,(\kappa(s)\beta(s)) + \cos\theta\,(-\tau(s)\beta(s))$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\kappa(s)}{\tau(s)}$ 为常数

$\Leftarrow$) 设 $\tan\theta = \dfrac{\kappa(s)}{\tau(s)}$

令 $\vec{k} = \cos\theta\,\vec{\alpha}(s) + \sin\theta\,\vec{\gamma}(s)$

于是 $\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(s) = \cos\theta$ 为定值

即 $\langle \vec{k}, \vec{\alpha}(s) \rangle = \theta$

4. 给出Gauss映射的定义，证明 $S\to\Sigma$ 的Gauss映射是保角映射，则S是球面或极小曲面

定义：

$r=r(u,v)$ 是正则参数曲面；$n(u,v)$ 是单位法向量

将 $n(u,v)$ 平移到坐标原点，形成单位球面 Σ

guass映射为 $g: S \longrightarrow \Sigma$
$r(u,v) \mapsto n(u,v)$

证明：

不妨设 (u,v) 是正交参数系，设 I_1, I_2 分别为 S, Σ 的第一基本型

于是 $I_1 = E(du)^2 + G(dv)^2$

$III_1 = (k_1)^2 E(du)^2 + (k_2)^2 G(dv)^2$ 　其中 k_1, k_2 为S的主曲率

由保角知 $g^* I_2 = \lambda^2 I_1$ ，由定义知 $g^* I_2 = III_1$

于是 $\frac{III_1}{I_1} = \lambda^2 \Rightarrow (k_1)^2 = (k_2)^2 \Rightarrow k_1 = k_2$ 或 $k_1 = -k_2$

$\Rightarrow$ 是球面或极小曲面

5. 抛物面 $z = 2x^2 - 3y^2$

(1) 计算 I, II

(2) 在 $(0,0)$ 点沿方向 (dx, dy) 的法曲率

解：

参数方程：$\vec{r} = r(u,v) = (u, v, 2u^2 - 3v^2)$

(1) $\vec{r}_u = (1, 0, 4u)$ 　$\vec{r}_v = (0, 1, -6v)$ 　$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{1}{\sqrt{16u^2+36v^2+1}}(-4u, 6v, 1) \triangleq \frac{1}{d}(-4u, 6v, 1)$

$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 4)$ 　$\vec{r}_{vv} = (0, 0, -6)$ 　$\vec{r}_{uv} = (0, 0, 0)$

$E = (\vec{r}_u)^2 = 1 + 16u^2$ 　$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -24uv$ 　$G = (r_v)^2 = 1 + 36v^2$

$L = r_{uu} \cdot n = \frac{4}{d}$ 　$M = r_{uv} \cdot n = 0$ 　$N = r_{vv} \cdot n = \frac{-6}{d}$

$I = (1+16u^2)(du)^2 - 48uv(du\,dv) + (1+36v^2)(dv)^2$

$II = \frac{4}{d}(du)^2 - \frac{6}{d}(dv)^2$ 　其中 $d = \frac{1}{\sqrt{16u^2+36v^2+1}}$

(2)

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{1}{\sqrt{16u^2+36v^2+1}} \cdot \frac{4(du)^2 - 6(dv)^2}{(1+16u^2)(du)^2 - 24uv(du\,dv) + (1+36v^2)(dv)^2}$$

于是 $k_n(0,0) = \frac{4(du)^2 - 6(dv)^2}{(du)^2 + (dv)^2}$

(3) 计算其在 $(0,0)$ 点的主曲率

(4) 计算其在 $(0,0)$ 点的渐近方向

(5) 该曲面可以和柱面建立保长对应吗？

(3)

法1 $L=4 \quad M=0 \quad N=-6$

$E=1 \quad F=0 \quad G=1$

$$k_1+k_2=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\frac{4-6}{1}=-2 \qquad k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-24}{1}=-24$$

$$k_1-k_2=\sqrt{4\times 25}=10$$

故 $k_1=4 \quad k_2=-6$

法2

$$k_n(0,0,du,dv)=\frac{4(du)^2-6(dv)^2}{(du)^2+(dv)^2}=4\frac{a}{a+b}-6\frac{b}{a+b}$$

$$k_1=k_n(0,0,1,0)=4$$

$$k_2=k_n(0,0,0,1)=-6$$

(4)

$$k_n(0,0,du,dv)=\frac{4(du)^2-6(dv)^2}{(du)^2+(dv)^2}$$

渐近方向为二次方程 $4(du)^2-6(dv)^2=0$ 的解

则 $4\left(\frac{du}{dv}\right)^2-6=0 \Rightarrow \frac{du}{dv}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

于是 $(du,dv)=(\sqrt{6},2)$ 或 $(\sqrt{6},-2)$ 均为渐近方向

(5) 设柱面 $\vec{r}_1=(a\cos u, a\sin u, bv)$

$\vec{r}_{1u}=(-a\sin u, a\cos u, 0) \quad \vec{r}_{1v}=(0,0,b) \quad \vec{r}_{1u}\times\vec{r}_{1v}=(ab\cos u, ab\sin u, 0)$

$E_1=(\vec{r}_{1u})^2=a^2 \quad F_1=\vec{r}_{1u}\cdot\vec{r}_{1v}=0 \quad G_1=(\vec{r}_{1v})^2=b^2$

$\vec{r}_{1uu}=(-a\cos u, -a\sin u, 0) \quad \vec{r}_{1uv}=(0,0,0)=\vec{r}_{1vu}$

于是 $L_1=a \quad M_1=N_1=0$

Gauss 曲率 $K_1=\frac{L_1N_1-M_1^2}{E_1G_1-F_1^2}=0$

而该曲面的 Gauss 曲率 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-24}{(1+16u^2+36v^2)[(1+16u^2)(1+36v^2)-(24uv)^2]}$

$K_1\neq K_2$ 故不可建立保长对应

6. (1) 什么是曲面上的测地线，写出测地线的一个性质

(2) 什么是曲面上的曲率线，给出一个判断曲面上的一条曲线是曲率线的充要条件

(3) 假定曲面 S_1, S_2 沿曲线 C 相切

证明：若 C 是 S_1 上的测地线，则 C 也是 S_2 上的测地线

(4) 如果 C 是 S_2 上的曲率线，则有什么结论？

解：

(1) 测地线：在曲面 S 上测地曲率恒等于零的曲线称为曲面 S 上的测地线

性质：1° 测地线只与曲面的 I 相关，为内蕴几何量

2° 曲面 S 上一条曲线 C 是测地线 $\Leftrightarrow$ 它是直线或其主法向量处处是曲面 S 的法向量

(2) 曲率线：设 C 是正则曲面 S 上的一条曲线

若 C 上每一点，切向量都是曲面 S 在该点的主方向

则称曲线 C 是曲面 S 上的一条曲率线

充要条件：1° 曲面 $S: r=r(u,v)$ 上的曲线 $C: u=u(t),\ v=v(t)$

是曲率线 $\Leftrightarrow \dfrac{dn(u(t),v(t))}{dt} \parallel \dfrac{dr(u(t),v(t))}{dt}$

其中 $n(u(t),v(t))$ 为曲面 S 沿曲线 C 的法向量场

2° 曲面 S 上曲线 C 是曲率线 $\Leftrightarrow$ 曲面 S 沿曲线 C 的法向构成一个可展曲面

(3) 由于 C 是 S_1 的测地线，知曲线 C 的法曲率 $\vec{\beta}$ 与曲面 S_1 的切平面垂直

于是 β 也与 S_2 的切平面垂直，故 C 是 S_2 上的测地线

(4) 设 s 为弧长参数，于是 $\dfrac{dr_2(u(s),v(s))}{ds}$ 即为切向量 $\alpha_2(u(s),v(s))$

由 C 为 S_2 的曲率线为 $\alpha_2(s) \parallel \dfrac{dn_2(s)}{ds}$，再由相切知 $\alpha_1(s) \parallel \alpha_2(s)$，$n_1(s)=\pm n_2(s)$

于是 $\alpha_1(s) \parallel \dfrac{dn_1(s)}{ds}$，故 C 也是 S_1 的曲率线