内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 2　赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,

§ 2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.

§ 2　赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.
由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,

§ 2　赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.
由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,
第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.

§ 2　赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.
由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,
第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.
赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的.

§ 2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,

给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.

由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,

第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.

赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的.

这一节中, 我们**重点介绍一些常用的赋范空间** .

§ 2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.
由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,
第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.
赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的.
这一节中, 我们重点介绍一些常用的赋范空间 .

一、连续函数空间上定义的范数

§ 2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间, 给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构. 由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间, 第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性, 可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.

赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的.

这一节中, 我们**重点介绍一些常用的赋范空间** .

一、连续函数空间上定义的范数

例 2.2.1 $C[a,b]$. *闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体, 对加法、数乘封闭, 是一个线性空间. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

§ 2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间,
给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构.
由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间,
第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.
赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的.
这一节中, 我们**重点介绍一些常用的赋范空间** .

一、连续函数空间上定义的范数

例 2.2.1 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体，对加法、数乘封闭，是一个线性空间. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

则 $C[a,b]$**是一个完备的可分的赋范空间**

二、 L^p 空间

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容：

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容:

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容:

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容:

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

(3) $p = \infty$ 的情形.

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容：

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

(3) $p=\infty$ 的情形.

(4) 研究 L^P 的离散情形 l^p, 建立离散情形的Hölder 不等式和 Minkowski 不等式 .

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容:

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

(3) $p=\infty$ 的情形.

(4) 研究 L^P 的离散情形 l^p, 建立离散情形的Hölder 不等式和 Minkowski 不等式 .

赋范函数空间 $L^p[a,b](p\geq 1)$

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容：

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

(3) $p=\infty$ 的情形.

(4) 研究 L^P 的离散情形 l^p, 建立离散情形的Hölder 不等式和 Minkowski 不等式 .

赋范函数空间 $L^p[a,b](p\geq 1)$

定义 2.2.2 *设 $f(x)$是定义在 $[a,b]$ 区间上的可测函数， $p\geq 1$, 若 $|\ f\ |^p$ 在$[a,b]$可积，称f 是p次幂可积的. 全体在$[a,b]$区间上p次幂可积的函数， 记为$L^p[a,b]$，简称为L^p 空间.即*

$$L^p[a,b]=\{x(t)|\int_a^b |x(t)|^p dt<\infty\}. \tag{2.2.1}$$

二、 L^p 空间

要讨论的主要内容：

(1) 验证 L^p 空间是赋范空间. 建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(2) 讨论了赋范空间 L^p 的完备性、可分性.

(3) $p=\infty$ 的情形.

(4) 研究 L^P 的离散情形 l^p, 建立离散情形的Hölder 不等式和 Minkowski 不等式 .

赋范函数空间 $L^p[a,b](p\geq 1)$

定义 2.2.2 *设 $f(x)$是定义在 $[a,b]$ 区间上的可测函数，$p\geq 1$, 若 $|f|^p$ 在$[a,b]$可积，称f 是p次幂可积的. 全体在$[a,b]$区间上p次幂可积的函数，记为$L^p[a,b]$，简称为L^p 空间.即*

$$L^p[a,b]=\{x(t)|\int_a^b|x(t)|^p dt<\infty\}. \tag{2.2.1}$$

更一般化, 可考虑 $L^p(E)(p\geq 1)$, 其中 $E\subset R^n$ 是一个可测集.

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t) = 0$ $(a.e)$

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t) = 0$ $(a.e)$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, 即

$$(\int_a^b |\alpha x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} = |\alpha|(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t) = 0$ $(a.e)$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, 即

$$(\int_a^b |\alpha x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} = |\alpha|(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 即

$$(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + (\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t) = 0$ $(a.e)$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, 即

$$(\int_a^b |\alpha x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} = |\alpha|(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 即

$$(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + (\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(i)、(ii)、(iii) 显然,

在 $L^p[a,b]$ 中, 引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \mathbf{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 需验证以下4条:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t) = 0$ $(a.e)$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$, 即

$$(\int_a^b |\alpha x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} = |\alpha|(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 即

$$(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + (\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(i)、(ii)、(iii) 显然,

为证明 (iv), 我们需要Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

引理 2.2.3 p, q *是正数, 且* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$(p, q *称为***共轭数**), *则对于* $\forall a$, b, *有*

引理 2.2.3 p, q *是正数, 且* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q *称为***共轭数**), *则对于* $\forall a$, b, *有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

引理 2.2.3 *p, q 是正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q 称为**共轭数**), 则对于 $\forall a$, b, 有*

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

引理 2.2.3 *p, q 是正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q 称为**共轭数**), 则对于 $\forall a$, b, 有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

(2) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑函数

引理 2.2.3 *p, q 是正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q 称为**共轭数**), 则对于 $\forall a$, b, 有*

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

(2) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑函数

$$\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t.$$

引理 2.2.3 p, q *是正数, 且* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q *称为***共轭数**), *则对于* $\forall a$, b, *有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

(2) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑函数

$$\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t.$$

当 $t=1$ 时, $\phi(t)$ 取到最大值

$$\phi(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}.$$

引理 2.2.3 p, q *是正数, 且* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*(p, q 称为***共轭数***), 则对于* $\forall a$, b, *有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

(2) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑函数

$$\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t.$$

当 $t=1$ 时, $\phi(t)$ 取到最大值

$$\phi(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}.$$

用 $t=\frac{|a|^p}{|b|^q}$ 代入得

$$\frac{|a|}{|b|^{\frac{q}{p}}}-\frac{1}{p}\frac{|a|^p}{|b|^q} \leq \frac{1}{q}$$

,

引理 2.2.3 *p, q 是正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(p, q 称为**共轭数**), 则对于 $\forall a$, b, 有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 (1) 当 $b=0$ 时不等式显然成立.

(2) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑函数

$$\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t.$$

当 $t=1$ 时, $\phi(t)$ 取到最大值

$$\phi(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}.$$

用 $t=\frac{|a|^p}{|b|^q}$ 代入得

$$\frac{|a|}{|b|^{\frac{q}{p}}}-\frac{1}{p}\frac{|a|^p}{|b|^q} \leq \frac{1}{q}$$

两边同乘 $|b|^q$,注意到$q-\frac{q}{p}=q$,整理可得

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

$\square$

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

引理 2.2.4 ***(Hölder 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\int_E |x(t)y(t)|\,\boldsymbol{d}t \le \left(\int_E |x(t)|^p\,\boldsymbol{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q\,\boldsymbol{d}t\right)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}, \quad B=(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

引理 2.2.4 ***(Hölder 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\int_E |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q dt\right)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}, \quad B=(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$

(1) 如果 A, B 中有一个 为 0 或无穷, 不等式 (2.2.4)

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le \left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

显然成立.

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

引理 2.2.4 ***(Hölder 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\int_E |x(t)y(t)|\boldsymbol{d}t \leq \left(\int_E |x(t)|^p \boldsymbol{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q \boldsymbol{d}t\right)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}, \quad B=(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}$.

(1) 如果 A, B 中有一个 为 0 或无穷, 不等式 (2.2.4)

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

显然成立.

(2) 不妨设 $0<A<\infty$, $0<B<\infty$.

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

引理 2.2.4 ***(Hölder 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\int_E |x(t)y(t)|\boldsymbol{d}t \leq (\int_E |x(t)|^p \boldsymbol{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \boldsymbol{d}t)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}, \quad B=(\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}.$

(1) 如果 A, B 中有一个 为 0 或无穷, 不等式 (2.2.4)

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}$$

显然成立.

(2) 不妨设 $0<A<\infty,\ 0<B<\infty.$

对每个 $t\in E$, **由不等式 (2.2.3) 知:**

下面的 Hölder 不等式是为证明 Minkowski 不等式做准备的.

引理 2.2.4 ***(Hölder 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\int_E |x(t)y(t)|\boldsymbol{d}t \le \left(\int_E |x(t)|^p \boldsymbol{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q \boldsymbol{d}t\right)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}, \qquad B=(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}$.

(1) 如果 A, B 中有一个 为 0 或无穷, 不等式 (2.2.4)

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le \left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$$

显然成立.

(2) 不妨设 $0<A<\infty,\ 0<B<\infty$.

对每个 $t\in E$, **由不等式 (2.2.3) 知:**

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \le \frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q.$$

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q.$$

上式两边积分得

$$\frac{1}{AB}\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{A^{-p}}{p}\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{B^{-q}}{q}\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t. = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q.$$

上式两边积分得

$$\frac{1}{AB}\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{A^{-p}}{p}\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{B^{-q}}{q}\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t. = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

所以

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq AB = (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}.\square$$

注 **当** $n = 2$ **时,** 不等式为:

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \le \frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q.$$

上式两边积分得

$$\frac{1}{AB}\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le \frac{A^{-p}}{p}\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{B^{-q}}{q}\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t. = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

所以

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le AB = (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}.\square$$

注 **当** $n = 2$ **时,** 不等式为:

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}(\int_E |y(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}. \tag{2.2.5}$$

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

引理 2.2.5 ***(Minkowski 不等式)*** *设 E 是 $Lebesgue$ 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则*

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

引理 2.2.5 ***(Minkowski 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则*

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p\,dt)^{1/p} \leq (\int_E |x(t)|^p\,dt)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p\,dt)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

证明

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

引理 2.2.5 ***(Minkowski 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则*

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt)^{1/p} \leq (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

证明

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t = \int_E |x(t)+y(t)|^{p-1} \cdot |x(t)+y(t)| \mathrm{d}t$$

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

引理 2.2.5 ***(Minkowski 不等式)*** *设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则*

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt)^{1/p} \leq (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

证明

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t = \int_E |x(t)+y(t)|^{p-1} \cdot |x(t)+y(t)| \mathrm{d}t$$

$$\leq \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} \mathrm{d}t$$

下面建立的 Minkowski 不等式可以验证 L^P 为赋范空间(三角不等式成立).

引理 2.2.5 ***(Minkowski 不等式)*** 设 E 是 *Lebesgue* 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt)^{1/p} \leq (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p dt)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

证明

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t = \int_E |x(t)+y(t)|^{p-1} \cdot |x(t)+y(t)| \mathrm{d}t$$

$$\leq \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} \mathrm{d}t$$

利用Hölder 不等式,

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$$

可知上式 $(\le \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)$

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$$

可知上式 $(\leq \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)$

$$\leq (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}$$

$$+(\int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}.$$

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$$

可知上式 $(\le \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)$

$$\le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}$$

$$+(\int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}.$$

由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有 $q(p-1)=p$, 于是

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$$

可知上式 $(\le \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)$

$$\le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}$$

$$+(\int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}.$$

由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有 $q(p-1)=p$, 于是

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/q}(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + \int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}),$$

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}.$$

可知上式 $(\le \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)$

$$\le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}$$

$$+(\int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}.$$

由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有 $q(p-1)=p$, 于是

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/q}(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + \int_E |y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}),$$

即

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \le (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}.$$

注1 **由 Minkowski 不等式可知, 在 $L^p[a,b]$ 中由 (2.2.18) 式定义的函数 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式, 因此 $(L^p[a,b],\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.**

一般地, 对于

$$L^p(E)=\{x(t)|\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}, \tag{2.2.7}$$

注1　由 Minkowski 不等式可知, 在 $L^p[a,b]$ 中由 (2.2.18) 式定义的函数 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式, 因此 $(L^p[a,b],\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.

一般地, 对于

$$L^p(E)=\{x(t)|\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}, \tag{2.2.7}$$

定义:

注1 **由 Minkowski 不等式可知, 在 $L^p[a,b]$ 中由 (2.2.18) 式定义的函数 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式, 因此 $(L^p[a,b],\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.**

一般地, 对于

$$L^p(E)=\{x(t)|\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}, \tag{2.2.7}$$

定义:

$$\|x\|=(\int_E |x(t)|^p)^{1/p}. \tag{2.2.8}$$

注1　由 Minkowski 不等式可知，在 $L^p[a,b]$ 中由 (2.2.18) 式定义的函数 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式，因此 $(L^p[a,b],\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.

一般地，对于

$$L^p(E)=\{x(t)|\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}, \tag{2.2.7}$$

定义:

$$\|x\|=(\int_E|x(t)|^p)^{1/p}. \tag{2.2.8}$$

由 Minkowski 不等式，$L^p(E)$ 是赋范空间.

注1 **由 Minkowski 不等式可知, 在 $L^p[a,b]$ 中由 (2.2.18) 式定义的函数 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式, 因此 $(L^p[a,b],\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.**

一般地, 对于

$$L^p(E)=\{x(t)|\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}, \tag{2.2.7}$$

定义:

$$\|x\|=(\int_E|x(t)|^p)^{1/p}. \tag{2.2.8}$$

由 Minkowski 不等式, $L^p(E)$ 是赋范空间.

注2 $L^2[a,b]$ 是赋范空间, 由其范诱导的距离就是第一章第1节(1.1.11) 式定义的距离.

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路: 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ 是 *Banach* 空间.

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路：只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路: 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

定理 2.2.6 *$L^p(E)$ $(p \geq 1)$ 是 Banach 空间.*

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路： **只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.**

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

选取的办法是：选取满足条件 $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{\frac{1}{2^k}}$ 的子列，

定理 2.2.6 *$L^p(E)$ $(p \geq 1)$ 是 Banach 空间.*

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

选取的办法是：选取满足条件 $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{\frac{1}{2^k}}$的子列，

由级数的收敛，推出这个函数列点点收敛.

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

选取的办法是：选取满足条件 $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{\frac{1}{2^k}}$的子列,

由级数的收敛，推出这个函数列点点收敛.

(2) 证明 $x_0(t) \in L^p$;

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p\geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路： 只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

选取的办法是：选取满足条件 $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{\frac{1}{2^k}}$的子列,

由级数的收敛，推出这个函数列点点收敛.

(2) 证明 $x_0(t)\in L^p$;

(3) 证明 $\{x_n(t)\}$ 按 L^p 中的范数趋近于 $x_0(t)$.

定理 2.2.6 $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ *是 Banach 空间.*

证明思路： **只要证明它中的任意Cauchy 列都收敛.**

事实上只要证明 Cauchy 列必存在一收敛子列,

再证明此收敛子列的极限就是该 Cauchy 列的极限.

证明分以下几步(详细证明见附录2):

(1) 从 Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t);$$

选取的办法是：选取满足条件 $\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{\frac{1}{2^k}}$的子列，

由级数的收敛，推出这个函数列点点收敛.

(2) 证明 $x_0(t) \in L^p$;

(3) 证明 $\{x_n(t)\}$ 按 L^p 中的范数趋近于 $x_0(t)$.

注 由上述定理知, $L^p[a,b]$ **是 Banach 空间.**

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ ***是可分的.***

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ *是可分的.*

证明思路: 只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ ***是可分的.***

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ ***是可分的.***

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ *是可分的.*

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 进一步可以**找到有理系数多项式** $p(t)$, 使得

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ ***是可分的.***

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 进一步可以**找到有理系数多项式** $p(t)$, 使得

$$\|y(t) - p(t)\| < \varepsilon.$$

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ *是可分的.*

证明思路: 只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先找到连续函数 $y(t)$, 使得

$$\|x(t)-y(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 进一步可以找到有理系数多项式 $p(t)$, 使得

$$\|y(t)-p(t)\| < \varepsilon.$$

于是 $$\|x(t)-p(t)\| < 2\varepsilon.$$

(3) 由于全体有理系数多项式是 $L^p[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $L^p[a,b]$ 可分.

证明 (1) i)对于任意 $x(t) \in L^p$, 令

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ **是可分的.**

证明思路: **只要找到** $L^p[a,b]$ **中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是** $L^p[a,b]$ **中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t)-y(t)\|<\varepsilon.$$

(2) 进一步可以**找到有理系数多项式** $p(t)$, 使得

$$\|y(t)-p(t)\|<\varepsilon.$$

于是 $$\|x(t)-p(t)\|<2\varepsilon.$$

(3) 由于全体有理系数多项式是 $L^p[a,b]$ 中的**可数子集**, 所以 $L^p[a,b]$ 可分.

证明 (1) i)对于任意 $x(t)\in L^p$, 令

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), & |x(t)|\leq n, \\ 0, & |x(t)|>n. \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.2.9}$$

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ **是可分的.**

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 进一步可以**找到有理系数多项式** $p(t)$, 使得

$$\|y(t) - p(t)\| < \varepsilon.$$

于是 $$\|x(t) - p(t)\| < 2\varepsilon.$$

(3) 由于全体有理系数多项式是 $L^p[a,b]$ 中的**可数子集**, 所以 $L^p[a,b]$ 可分.

证明 (1) i)对于任意 $x(t) \in L^p$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \le n, \\ 0, & |x(t)| > n. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.2.9}$$

显然, $x_n(t) \in L^p$ 且 $|x_n(t)| \le n$.

定理 2.2.7 $L^p[a,b]$ *是可分的.*

证明思路: **只要找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集就可以. 我们采取逐步逼近的方式证明: 有理系数多项式全体是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集.**

(1) 对 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先**找到连续函数** $y(t)$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 进一步可以**找到有理系数多项式** $p(t)$, 使得

$$\|y(t) - p(t)\| < \varepsilon.$$

于是 $\|x(t) - p(t)\| < 2\varepsilon.$

(3) 由于全体有理系数多项式是 $L^p[a,b]$ 中的**可数子集**, 所以 $L^p[a,b]$ 可分.

证明 (1) i)对于任意 $x(t) \in L^p$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \le n, \\ 0, & |x(t)| > n. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.2.9}$$

显然, $x_n(t) \in L^p$ 且 $|x_n(t)| \le n$.

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)| > n\} \leq \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)| > n\} \le \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)| > n\} \to 0(n \to \infty).$

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)|>n\} \leq \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)|>n\} \to 0 (n\to\infty)$.

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x-x_n\|^p = \int_{\{t|\ |x(t)|\geq n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0 (n\to\infty).$$

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)| > n\} \le \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)| > n\} \to 0 (n \to \infty)$.

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x - x_n\|^p = \int_{\{t|\ |x(t)|\ge n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0 (n \to \infty).$$

即对于 $\forall \varepsilon, \exists N$, 当 $n, m \ge N$ 时,

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)|>n\} \le \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)|>n\} \to 0 (n\to\infty)$.

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x-x_n\|^p = \int_{\{t|\ |x(t)|\ge n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0 (n\to\infty).$$

即对于 $\forall \varepsilon, \exists N$, 当 $n, m \ge N$ 时,

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)|>n\} \le \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)|>n\} \to 0(n\to\infty)$.

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x-x_n\|^p = \int_{\{t|\ |x(t)|\ge n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0(n\to\infty).$$

即对于 $\forall\varepsilon, \exists N$, 当 $n, m \ge N$ 时,

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

(2) 对于上面的 $x_n(t)$, 由 Л у з ц н 定理, 存在连续函数 $y(t)$, 除去一个可测子集 A 外,

$$x_n(t) = y(t), \quad |y(t)| \le n,$$

且这个可测子集的测度满足 $mA < (\frac{\varepsilon}{2n})^p$. 于是

ii) 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)|>n\} \le \int_{\{t|\ |x(t)|>n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)|>n\} \to 0(n\to\infty)$.

iii) 由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x-x_n\|^p = \int_{\{t|\ |x(t)|\ge n\}} |x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0(n\to\infty).$$

即对于 $\forall\varepsilon, \exists N$, 当 $n,m\ge N$ 时,

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

(2) 对于上面的 $x_n(t)$, 由 Лузин 定理, 存在连续函数 $y(t)$, 除去一个可测子集 A 外,

$$x_n(t)=y(t),\quad |y(t)|\le n,$$

且这个可测子集的测度满足 $mA<(\frac{\varepsilon}{2n})^p$. 于是

$$\|x_n(t)-y(t)\| = (\int_A |x_n(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \le (\int_A (2n)^p)^{1/p} = 2n(mA)^{1/p} < \varepsilon.$$

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}} \ (\forall t \in [a, b]).$$

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}\ (\forall t\in[a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p)^{1/p}<\varepsilon,$$

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}} \ (\forall t \in [a, b]).$$

我们有

$$\|y(t) - p(t)\| = (\int_a^b |y(t) - p(t)|^p)^{1/p} < \varepsilon,$$

即

$$\|x - p\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| + \|y - p(t)\| < 3\varepsilon.$$

□

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}\ (\forall t\in[a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p)^{1/p}<\varepsilon,$$

即

$$\|x-p\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-y\|+\|y-p(t)\|<3\varepsilon.$$

$\square$

注 **在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$,**

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}\ (\forall t\in[a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p)^{1/p}<\varepsilon,$$

即

$$\|x-p\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-y\|+\|y-p(t)\|<3\varepsilon.$$

$\square$

注 **在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$,**
但连续函数的全体在 L^p 的范数下不完备.

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}\ (\forall t\in[a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p)^{1/p}<\varepsilon,$$

即

$$\|x-p\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-y\|+\|y-p(t)\|<3\varepsilon.$$

$\square$

注 **在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$,**

但连续函数的全体在 L^p 的范数下不完备.

但它们是 $L^p[a,b]$ 中的稠子集,

(3) 对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理, $y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}} \ (\forall t \in [a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\| = (\int_a^b |y(t)-p(t)|^p)^{1/p} < \varepsilon,$$

即

$$\|x-p\| \leq \|x-x_n\| + \|x_n-y\| + \|y-p(t)\| < 3\varepsilon.$$

$\square$

注 **在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$,**

但连续函数的全体在 L^p 的范数下不完备.

但它们是 $L^p[a,b]$ 中的稠子集,

也就是说 $L^p[a,b]$是 $C[a,b]$ 在 L^p 范数下的完备化空间.

讨论 $p = \infty$ 的情况

定义 2.2.8 *设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.*

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.

如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0=0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.

如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0=0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,

则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

讨论 $p = \infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界, 则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

讨论 $p = \infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^{\infty}(E)$.

$L^{\infty}(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

讨论 $p = \infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subset E}} \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|. \tag{2.2.10}$$

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0=0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

$$\|x\|=\inf_{\substack{mE_0=0\\ E_0\subset E}}\sup_{E\backslash E_0}|x(t)|. \tag{2.2.10}$$

注 1. 上述**下确界是可以达到的**, 即存在 E_0, 使得

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subset E}} \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|. \tag{2.2.10}$$

注 1. 上述**下确界是可以达到的**, 即存在 E_0, 使得

$$\|x\| = \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|.$$

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 ***本性有界***.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subset E}} \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|. \tag{2.2.10}$$

注 1. 上述**下确界是可以达到的**, 即存在 E_0, 使得

$$\|x\| = \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|.$$

原因: 由下确界的定义, 对 $\forall \frac{1}{n}$, 存在 $E_n \subset E$, $mE_n = 0$, 且

讨论 $p=\infty$ 的情况

定义 2.2.8 设 E 是可测集, $x(t)$ 是 E 上可测函数.
如果存在 E 的可测子集 $E_0\subset E$, $mE_0=0$, 且 $x(t)$ 在 $E\backslash E_0$ 上有界,
则称 $x(t)$ 为 **本性有界**.

例 2.2.9 $L^\infty(E)$.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 其上定义

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset E}} \sup_{E\backslash E_0} |x(t)|. \tag{2.2.10}$$

注 1. 上述**下确界是可以达到的**, 即存在 E_0, 使得

$$\|x\| = \sup_{E\backslash E_0} |x(t)|.$$

原因: 由下确界的定义, 对 $\forall \frac{1}{n}$, 存在 $E_n\subset E$, $mE_n=0$, 且

$$\sup_{E\backslash E_n} |x(t)| < \|x\| + \frac{1}{n}.$$

令 $E_0 = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且对于 $\forall n$,

令 $E_0 = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E_0 \subset E$, $mE_0 = 0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\| \le \sup_{E \setminus E_0} |x(t)| \le \sup_{E \setminus E_n} |x(t)| \le \|x\| + \frac{1}{n}.$$

令 $E_0=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_0\subset E$, $mE_0=0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\|\leq\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|\leq\sup_{E\setminus E_n}|x(t)|\leq\|x\|+\frac{1}{n}.$$

因此 $\|x\|=\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|$. 即

令 $E_0=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_0\subset E$, $mE_0=0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\|\le \sup_{E\setminus E_0}|x(t)|\le \sup_{E\setminus E_n}|x(t)|\le \|x\|+\frac{1}{n}.$$

因此 $\|x\|=\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|$. 即

$x(t)$ 在 $E\setminus E_0$ 上有界 (几乎处处有界).

令 $E_0=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_0\subset E$, $mE_0=0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\|\le\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|\le\sup_{E\setminus E_n}|x(t)|\le\|x\|+\frac{1}{n}.$$

因此 $\|x\|=\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|$. 即

$x(t)$ 在 $E\setminus E_0$ 上有界 (几乎处处有界).

2. **称 $\|x\|$ 是 $x(t)$ 的本性上界**, **记为**

$$\|x\|=\operatorname*{ess\,sup}_{E}|x(t)|. \tag{2.2.11}$$

令 $E_0=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_0\subset E$, $mE_0=0$, 且对于 $\forall n$,

$$\|x\|\le\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|\le\sup_{E\setminus E_n}|x(t)|\le\|x\|+\frac{1}{n}.$$

因此 $\|x\|=\sup_{E\setminus E_0}|x(t)|$. 即

$x(t)$ 在 $E\setminus E_0$ 上有界 (几乎处处有界).

2. **称 $\|x\|$ 是 $x(t)$ 的本性上界**, **记为**

$$\|x\|=\operatorname*{ess\,sup}_{E}|x(t)|. \tag{2.2.11}$$

3. **$\|x\|$ 是 X 上的范数.**

4.**收敛性.** $x_n\xrightarrow{d}x(n\to\infty)$, $\|x_n-x\|\to0$, 即 $\{x_n(t)\}$ 除去一零测集外, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

定理 2.2.10 *$L^\infty(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

定理 2.2.10 *$L^{\infty}(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 *当 $mE < \infty$ 时, 如果 $1 \le p_2 < p_1 < \infty$, 则*

$$L^{\infty}(E) \subset L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

定理 2.2.10 *$L^\infty(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 当 $mE<\infty$ 时, 如果 $1\le p_2<p_1<\infty$, 则

$$L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^\infty, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)$.

定理 2.2.10 $L^\infty(E)$ *是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 **当** $mE<\infty$ *时, 如果* $1\le p_2<p_1<\infty$, *则*

$$L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^\infty, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in L^{p_1}$, 令 $B=\{t\in E|\ |x(t)|\le 1\}$. 则

定理 2.2.10 $L^\infty(E)$ *是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 当 $mE<\infty$ *时, 如果* $1\le p_2<p_1<\infty$, *则*

$$L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^\infty, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in L^{p_1}$, 令 $B=\{t\in E|\ |x(t)|\le 1\}$. 则

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t=\int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t+\int_{E\backslash B}|x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t\le mB+\int_{E\backslash B}|x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

定理 2.2.10 *$L^{\infty}(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 *当 $mE<\infty$ 时, 如果 $1\le p_2<p_1<\infty$, 则*

$$L^{\infty}(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^{\infty}, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^{\infty}(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in L^{p_1}$, 令 $B=\{t\in E|\ |x(t)|\le 1\}$. 则

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t=\int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t\le mB+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

即 $x(t)\in L^{p_2}(E)$.

定理 2.2.10 *$L^\infty(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 当 $mE < \infty$ 时, 如果 $1 \le p_2 < p_1 < \infty$, 则

$$L^\infty(E) \subset L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t) \in L^\infty, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE < \infty$, 显然有 $x(t) \in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^\infty(E) \subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x \in L^{p_1}$, 令 $B = \{t \in E| \, |x(t)| \le 1\}$. 则

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t = \int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t + \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t \le mB + \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

即 $x(t) \in L^{p_2}(E)$.

注 由此可证明, 对于任意的 $x(t) \in L^\infty(E), mE < \infty$, 有 $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$. 即

定理 2.2.10 *$L^{\infty}(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 *当 $mE<\infty$ 时, 如果 $1\leq p_2<p_1<\infty$, 则*

$$L^{\infty}(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^{\infty}, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^{\infty}(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in L^{p_1}$, 令 $B=\{t\in E|\ |x(t)|\leq 1\}$. 则

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t=\int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t\leq mB+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

即 $x(t)\in L^{p_2}(E)$.

注 由此可证明, 对于任意的 $x(t)\in L^{\infty}(E), mE<\infty$, 有 $\|x\|_p\to\|x\|_{\infty}$. 即

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}=\|x\|_{\infty}. \tag{2.2.13}$$

（留做习题.）

定理 2.2.10 *$L^\infty(E)$ 是不可分的Banach 空间.*

命题 2.2.11 当 $mE<\infty$ 时, 如果 $1\le p_2<p_1<\infty$, 则

$$L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明 (i)设 $x(t)\in L^\infty, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE<\infty$, 显然有 $x(t)\in L^{p_1}(E_1)$, 即 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)$.

(ii) $\forall x\in L^{p_1}$, 令 $B=\{t\in E|\ |x(t)|\le 1\}$. 则

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t=\int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t\le mB+\int_{E\setminus B}|x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

即 $x(t)\in L^{p_2}(E)$.

注 由此可证明, 对于任意的 $x(t)\in L^\infty(E), mE<\infty$, 有 $\|x\|_p\to\|x\|_\infty$. 即

$$\lim_{p\to\infty}(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}=\|x\|_\infty. \tag{2.2.13}$$

（留做习题.）

因此也可把 $L^\infty(E)$ **看作** $L^p(E)$ **的极限情形**.

三、l^p 空间

三、l^p 空间

$l^p(p \geq 1)$ 表示**全体 p 次方可和的数列**, 即

$$l^p(p \geq 1) = \{x = \{\xi_k\} | \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \tag{2.2.14}$$

三、l^p 空间

$l^p(p \geq 1)$ 表示**全体 p 次方可和的数列**, 即

$$l^p(p \geq 1) = \{x = \{\xi_k\} | \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \tag{2.2.14}$$

(1) 类似地可证明离散的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

定理 2.2.12 设 $\{\xi_k\} \in l^p$ *和* $\{\eta_k\} \in l^q$, *(这里* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*), 则*

三、l^p 空间

$l^p(p \geq 1)$ 表示**全体 p 次方可和的数列**, 即

$$l^p(p \geq 1) = \{x = \{\xi_k\} | \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \tag{2.2.14}$$

(1) 类似地可证明离散的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

定理 2.2.12 设 $\{\xi_k\} \in l^p$ *和* $\{\eta_k\} \in l^q$, *(* 这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), *则*

Hölder 不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q)^{1/q},$$

三、l^p 空间

$l^p(p \geq 1)$ 表示**全体 p 次方可和的数列**, 即

$$l^p(p \geq 1) = \{x = \{\xi_k\} | \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \tag{2.2.14}$$

(1) 类似地可证明离散的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

定理 2.2.12 设 $\{\xi_k\} \in l^p$ 和 $\{\eta_k\} \in l^q$, (这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), 则

Hölder 不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q)^{1/q},$$

Minkowski 不等式:

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p)^{1/p}.$$

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E), L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列,** 即

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\} | \{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列,** 即

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\} | \{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.2.17}$$

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列,** 即

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\} | \{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.2.17}$$

说明: (1) 由离散的 Minkowski 不等式, 可类似证明

类似定义 $l^p(p\geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p\geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p=(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列,** 即

$$l^\infty=\{x=\{\xi_k\}|\{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty=\sup_k|\xi_k|. \tag{2.2.17}$$

说明: (1) 由离散的 Minkowski 不等式, 可类似证明

(a) $\|x\|_p(p\geq 1)$ 是一个范数.

类似定义 $l^p(p\geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p\geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p=(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列,** 即

$$l^\infty=\{x=\{\xi_k\}|\{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty=\sup_k|\xi_k|. \tag{2.2.17}$$

说明：(1) 由离散的 Minkowski 不等式, 可类似证明

(a) $\|x\|_p(p\geq 1)$ 是一个范数.

(b) $l^p(1\leq p<\infty$ 是一个可分的 Banach 空间.

类似定义 $l^p(p \geq 1)$、 l^∞ 赋范空间

利用离散情形的两个重要不等式, 我们类似于 $L^p(E)$, $L^\infty(E)$ 空间可定义赋范空间 l^p、 l^∞.

(1) 在线性空间 $l^p(p \geq 1)$ 上**赋以范数**

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

(2) **设 l^∞ 是全体有界的数列**, 即

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\} | \{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.16}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.2.17}$$

说明: (1) 由离散的 Minkowski 不等式, 可类似证明

(a) $\|x\|_p(p \geq 1)$ 是一个范数.

(b) $l^p(1 \leq p < \infty$ 是一个可分的 Banach 空间.

(c) l^∞ 是不可分的 Banach 空间.

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$,

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度,

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n = 2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x, y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n=2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x,y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

（见例 1.1.14）.

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n=2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x,y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

（见例 1.1.14）.

L^2 是一个完备、可分的赋范空间， 也是完备、可分的距离空间。

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n = 2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x,y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

（见例 1.1.14）.

L^2 是一个完备、可分的赋范空间， 也是完备、可分的距离空间。

相似地，在离散的l^2 空间，其范数为：

$$\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2)^{1/2}. \tag{2.2.20}$$

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n = 2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x, y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

（见例 1.1.14）.

L^2 是一个完备、可分的赋范空间， 也是完备、可分的距离空间。

相似地，在离散的l^2 空间，其范数为：

$$\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2)^{1/2}. \tag{2.2.20}$$

l^2 是一个完备、可分的赋范（距离）空间。

(2) 更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X, \mathscr{B}, \mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), $\mathscr{M}$ 是广义测度, 完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

特别的，对于$n=2$，在L^2 空间上定义：

$$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.18}$$

则$\|x\|_2$是一个范数. 由这个范数诱导出的的距离是:

$$d_2(x, y) = \{\int_a^b \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

（见例 1.1.14）.

L^2 是一个完备、可分的赋范空间， 也是完备、可分的距离空间。

相似地，在离散的l^2 空间，其范数为：

$$\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2)^{1/2}. \tag{2.2.20}$$

l^2 是一个完备、可分的赋范（距离）空间。

进一步的，我们以后会看到：他们都是内积空间.