泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

§ 2　有界线性算子谱的性质

§ 2 有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

§ 2　有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

在这一节我们*研究有界线性算子*,

§ 2　有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

在这一节我们*研究有界线性算子*,

有界线性算子的谱集是复数域 $\mathbb{C}$ 中的非空紧集.

定理 6.2.1 设 X 是 $Banach$ 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

§ 2　有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

在这一节我们*研究有界线性算子*,

有界线性算子的谱集是复数域 $\mathbb{C}$ 中的非空紧集.

定理 6.2.1 设 X 是 $Banach$ 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

如果 $\|T\| < 1$,

§ 2 有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

在这一节我们*研究有界线性算子*,

有界线性算子的谱集是复数域 $\mathbb{C}$ 中的非空紧集.

定理 6.2.1 设 X 是 $Banach$ 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

如果 $\|T\| < 1$,

则算子$I - T$ 有有界逆算子,

§ 2　有界线性算子谱的性质

一、有界线性算子的谱

在这一节我们*研究有界线性算子*,

有界线性算子的谱集是复数域 $\mathbb{C}$ 中的非空紧集.

定理 6.2.1 设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

如果 $\|T\| < 1$,

则算子 $I - T$ *有有界逆算子*,

并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \tag{6.2.1}$$

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T\|}. \tag{6.2.2}$$

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots , \tag{6.2.3}$$

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots , \tag{6.2.3}$$

记 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots, \tag{6.2.3}$$

记 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n}^{m-1} T^k\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|T\|^k.$$

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots , \tag{6.2.3}$$

记 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

$$\|S_m - S_n\| = \| \sum_{k=n}^{m-1} T^k \| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|T\|^k.$$

由条件 $\|T\| < 1$ 知, S_n 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的 Cauchy 列,

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots, \tag{6.2.3}$$

记 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

$$\|S_m - S_n\| = \| \sum_{k=n}^{m-1} T^k \| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|T\|^k.$$

由条件 $\|T\| < 1$ 知, S_n 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的 Cauchy 列,

因为 X 是 Banach 空间, 从而 $\mathcal{B}(X)$ 是 Banach 空间,

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots, \tag{6.2.3}$$

记 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

$$\|S_m - S_n\| = \| \sum_{k=n}^{m-1} T^k \| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|T\|^k.$$

由条件 $\|T\| < 1$ 知, S_n 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的 Cauchy 列,

因为 X 是 Banach 空间, 从而 $\mathcal{B}(X)$ 是 Banach 空间,

所以 S_n 按算子范数收敛到一个有界线性算子, 即 (6.2.3)按范数收敛.

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|^n = 0.$$

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|^n = 0.$$

在 (6.2.4)两边令 $n \to \infty$,

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|^n = 0.$$

在 (6.2.4)两边令 $n \to \infty$,

得到

$$(I-T)(\sum_{k=0}^{\infty} T^k) = (\sum_{k=0}^{\infty} T^K)(I-T) = I.$$

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|T\|^n = 0.$$

在 (6.2.4)两边令 $n \to \infty$,

得到

$$(I-T)(\sum_{k=0}^{\infty} T^k) = (\sum_{k=0}^{\infty} T^K)(I-T) = I.$$

这说明算子 $I-T$ 有逆算子,

由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|^n = 0.$$

在 (6.2.4)两边令 $n \to \infty$,

得到

$$(I-T)(\sum_{k=0}^{\infty} T^k) = (\sum_{k=0}^{\infty} T^K)(I-T) = I.$$

这说明算子 $I-T$ 有逆算子,

且

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1 - \| T \|}. \qquad \square$$

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1- \| T \|}. \qquad \square$$

定理 6.2.2 设 X 是 $Banach$ 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1 - \| T \|}. \qquad \square$$

定理 6.2.2 设 X 是 *Banach* 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,

则 $\sigma(T)$ 是有界集.

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1- \| T \|}. \qquad \square$$

定理 6.2.2 设 X 是 *Banach* 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$,
则 $\sigma(T)$ *是有界集.*

证明 对于 $|\lambda| > \|T\|$, 由于 $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$,

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1-\| T \|}. \qquad \square$$

定理 6.2.2 设 X 是 *Banach 空间*, $T \in \mathcal{B}(X)$,
则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明 对于 $|\lambda| > \|T\|$, 由于 $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$,
因为 $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, 由定理 6.2.1, $I - \frac{1}{\lambda}T$ *有有界的逆算子*,

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1- \| T \|}. \qquad \Box$$

定理 6.2.2 设 X 是 *Banach 空间*, $T \in \mathcal{B}(X)$,
则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明 对于 $|\lambda| > \|T\|$, 由于 $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$,
因为 $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, 由定理 6.2.1, $I - \frac{1}{\lambda}T$ *有有界的逆算子*,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n, \tag{6.2.5}$$

我们还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1- \| T \|}. \qquad \square$$

定理 6.2.2 设 X 是 *Banach 空间*, $T \in \mathcal{B}(X)$,
则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明 对于 $|\lambda| > \|T\|$, 由于 $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$,
因为 $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, 由定理 6.2.1, $I - \frac{1}{\lambda}T$ *有有界的逆算子*,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n, \tag{6.2.5}$$

且由 (6.2.2)

$$\| \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n \| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{\lambda}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|T\|},$$

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

于是

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$， $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

定理 6.2.3 *设 T 是 $Banach$ 空间 X 到 X 的有界线性算子,*

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*

$\lambda \in \rho(T)$, *且* $|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$,

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*

*$\lambda \in \rho(T)$, **且** $|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$,*

*则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, **即** $\rho(T)$ **是一个开集.***

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*
*$\lambda \in \rho(T)$, **且** $|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$,*
*则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, **即** $\rho(T)$ **是一个开集.***

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

于是

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*
*$\lambda \in \rho(T)$, **且** $|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$,*
*则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, **即** $\rho(T)$ **是一个开集**.*

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda + \mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

于是

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*
$\lambda \in \rho(T)$, 且 $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$,
则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, **即** $\rho(T)$ **是一个开集.**

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda + \mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

由于 $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$, 由定理 6.2.1 $[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]$ **有有界的逆算子,**

于是

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即当 $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*
$\lambda \in \rho(T)$, 且 $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$,
则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, 即 $\rho(T)$ 是一个开集.

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda + \mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

由于 $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$, 由定理 6.2.1 $[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]$ 有有界的逆算子,
于是

$$R_{\lambda+\mu}(T) = [I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]^{-1} R_\lambda(T), \tag{6.2.7}$$

于是

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}, \tag{6.2.6}$$

即**当** $|\lambda| > \|T\|$, $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.2.3 *设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子,*
$\lambda \in \rho(T)$, 且 $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$,
则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, 即 $\rho(T)$ 是一个开集.

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda + \mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

由于 $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$, 由定理 6.2.1 $[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]$ **有有界的逆算子,**
于是

$$R_{\lambda+\mu}(T) = [I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]^{-1} R_\lambda(T), \tag{6.2.7}$$

且可以表示为 $R_\lambda(T)$ 的幂级数,

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, **则集合** $\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$,

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, **则集合** $\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{6.2.8}$$

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, **则集合** $\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\mathrm{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{6.2.8}$$

引理 6.2.4 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu^n(R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, **则集合** $\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{6.2.8}$$

引理 6.2.4 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

则

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T). \tag{6.2.9}$$

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}. \qquad \square$$

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, **则** $\sigma(T)$ **是位于闭球** $\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ **中的有界闭集.**

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, **则集合** $\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{6.2.8}$$

引理 6.2.4 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

则

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T). \tag{6.2.9}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}(\lambda I-T)^{-1} =&(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1}\\ =&(\lambda I-T)^{-1}[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)](\mu I-T)^{-1}\\ =&(\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}+(\mu I-T)^{-1},\end{aligned}$$

引理得证. $\square$

证明 由于

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} =& (\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)(\mu I - T)^{-1} \\ =& (\lambda I - T)^{-1}[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - T)](\mu I - T)^{-1} \\ =& (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1} + (\mu I - T)^{-1},\end{aligned}$$

引理得证. $\square$

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T) \ni \lambda :\longrightarrow R_\lambda(T)$,

证明 由于

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-T)^{-1} &= (\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1} \\
&= (\lambda I-T)^{-1}[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)](\mu I-T)^{-1} \\
&= (\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}+(\mu I-T)^{-1},
\end{aligned}
$$

引理得证. □

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T)\ni\lambda:\longrightarrow R_\lambda(T)$, 即从 $\rho(T)$ 到有界线性算子组成的Banach空间$\mathcal{B}(X)$ 上的一个映射.

证明 由于

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - T)^{-1} =& (\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)(\mu I - T)^{-1} \\
=& (\lambda I - T)^{-1}[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - T)](\mu I - T)^{-1} \\
=& (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1} + (\mu I - T)^{-1},
\end{aligned}
$$

引理得证. $\square$

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T) \ni \lambda :\to R_\lambda(T)$,
即从 $\rho(T)$ 到有界线性算子组成的Banach空间$\mathcal{B}(X)$ 上的一个映射.
我们称这个映射在 λ_0 点是连续的, 如果 λ, $\lambda_0 \in \rho(T)$ 且 $\lambda \to \lambda_0$ 时,

证明 由于

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-T)^{-1} &= (\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1} \\
&= (\lambda I-T)^{-1}[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)](\mu I-T)^{-1} \\
&= (\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}+(\mu I-T)^{-1},
\end{aligned}
$$

引理得证. □

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T) \ni \lambda :\longrightarrow R_\lambda(T)$,
即从 $\rho(T)$ 到有界线性算子组成的Banach空间$\mathcal{B}(X)$ 上的一个映射.
我们称这个映射在 λ_0 点是连续的, 如果 λ, $\lambda_0 \in \rho(T)$ 且 $\lambda \to \lambda_0$ 时,
在**算子范数收敛的意义下**,

$$R_\lambda(T) \to R_{\lambda_0}(T) \ \ (\|R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)\| \to 0,\ \lambda \to \lambda_0).$$

证明 由于

$$
\begin{aligned}
(\lambda I-T)^{-1} =&(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1} \\
=&(\lambda I-T)^{-1}[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)](\mu I-T)^{-1} \\
=&(\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}+(\mu I-T)^{-1},
\end{aligned}
$$

引理得证. $\square$

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T)\ni\lambda:\longrightarrow R_\lambda(T)$,

即从 $\rho(T)$ 到有界线性算子组成的Banach空间$\mathcal{B}(X)$ 上的一个映射.

我们称这个映射在 λ_0 点是连续的, 如果 λ, $\lambda_0\in\rho(T)$ 且 $\lambda\to\lambda_0$ 时,

在**算子范数收敛的意义下**,

$$
R_\lambda(T)\to R_{\lambda_0}(T)\ \ (\|R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)\|\to 0,\ \lambda\to\lambda_0).
$$

我们称这个映射是可微的, 如果当 $\lambda\to\lambda_0$ 时,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集 $\rho(T)$ 中, 预解式 $R_\lambda(T)$ 是**关于 λ 的算子值解析函数.***

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集* $\rho(T)$ *中, 预解式* $R_\lambda(T)$ *是**关于*** λ ***的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明*** $R_\lambda(T)$ ***关于*** λ ***连续.***

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集* $\rho(T)$ *中, 预解式* $R_\lambda(T)$ *是**关于*** λ ***的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明*** $R_\lambda(T)$ ***关于*** λ ***连续.***

设 $\lambda_0\in\rho(T)$, 令 $h=\lambda-\lambda_0$,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集* $\rho(T)$ *中, 预解式* $R_\lambda(T)$ *是**关于*** λ ***的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明*** $R_\lambda(T)$ ***关于*** λ ***连续.***

设 $\lambda_0\in\rho(T)$, 令 $h=\lambda-\lambda_0$,

由于 (6.2.7)

$$R_\lambda(T)=R_{\lambda_0+h}(T)=[I+h(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}R_{\lambda_0}(T),$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集 $\rho(T)$ 中, 预解式 $R_\lambda(T)$ 是**关于 λ 的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 连续.***

设 $\lambda_0\in\rho(T)$, 令 $h=\lambda-\lambda_0$,

由于 (6.2.7)

$$R_\lambda(T)=R_{\lambda_0+h}(T)=[I+h(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}R_{\lambda_0}(T),$$

根据定理 6.2.1, **只要** $|h|<\frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, **则** $\|R_\lambda(T)\|<2\|R_{\lambda_0}(T)\|$.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集 $\rho(T)$ 中, 预解式 $R_\lambda(T)$ 是**关于 λ 的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 连续.***

设 $\lambda_0\in\rho(T)$, 令 $h=\lambda-\lambda_0$,

由于 (6.2.7)

$$R_\lambda(T)=R_{\lambda_0+h}(T)=[I+h(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}R_{\lambda_0}(T),$$

根据定理 6.2.1, **只要** $|h|<\frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, **则** $\|R_\lambda(T)\|<2\,\|R_{\lambda_0}(T)\|$.

根据引理 6.2.4

$$\|R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)\| =|h|\|R_\lambda(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\|\leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\|$$

$$\leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|^2\to 0\ (\lambda\to\lambda_0).$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中**按算子的范数收敛.**

定理 6.2.5 *在正则集 $\rho(T)$ 中, 预解式 $R_\lambda(T)$ 是**关于 λ 的算子值解析函数.***

证明 ***首先证明 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 连续.***

设 $\lambda_0\in\rho(T)$, 令 $h=\lambda-\lambda_0$,

由于 (6.2.7)

$$R_\lambda(T)=R_{\lambda_0+h}(T)=[I+h(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}R_{\lambda_0}(T),$$

根据定理 6.2.1, **只要** $|h|<\frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, **则** $\|R_\lambda(T)\|<2\,\|R_{\lambda_0}(T)\|$.

根据引理 6.2.4

$$\|R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)\| = |h|\|R_\lambda(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\|\leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\|$$

$$\leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|^2\to 0\ (\lambda\to\lambda_0).$$

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2 \; (\lambda \to \lambda_0). \qquad \square$$

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2 \ (\lambda \to \lambda_0). \qquad \square$$

定理 6.2.6 *设 T 是有界线性算子, 则 $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}\to-(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda\to\lambda_0).\qquad\square$$

定理 6.2.6 *设 T 是有界线性算子, 则 $\sigma(T)\neq\emptyset$.*

证明 **假如不然,** $\rho(T)=\mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2 \ (\lambda \to \lambda_0). \qquad \square$$

定理 6.2.6 *设 T 是有界线性算子, 则 $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

证明 **假如不然,** $\rho(T) = \mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2 \ (\lambda \to \lambda_0). \qquad \square$$

定理 6.2.6 设 T *是有界线性算子, 则* $\sigma(T) \neq \emptyset$.

证明 **假如不然,** $\rho(T) = \mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)^{-n-1} T^n,$$

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}\to-(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda\to\lambda_0). \qquad \square$$

定理 6.2.6 设 T *是有界线性算子, 则* $\sigma(T)\neq\emptyset$.

证明 **假如不然,** $\rho(T)=\mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

$$R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)^{-n-1}T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}. \tag{6.2.11}$$

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}\to-(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda\to\lambda_0). \qquad \square$$

定理 6.2.6 *设 T 是有界线性算子, 则 $\sigma(T)\neq\emptyset$.*

证明 **假如不然,** $\rho(T)=\mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

$$R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)^{-n-1}T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}. \tag{6.2.11}$$

因此, $\|R_\lambda(T)\|$ **在复平面上有界.**

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}\to-(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda\to\lambda_0).\qquad\square$$

定理 6.2.6 设 T *是有界线性算子, 则* $\sigma(T)\neq\emptyset$.

证明 假如不然, $\rho(T)=\mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

$$R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)^{-n-1}T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.\tag{6.2.11}$$

因此, $\|R_\lambda(T)\|$ **在复平面上有界.**

对于$\mathcal{B}(X)$ 上的任意一个有界线性泛函 f (即 $f\in\mathcal{B}(X)^*$),

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微.

由引理 6.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T)-R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{(\lambda_0-\lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda-\lambda_0}\to-(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda\to\lambda_0).\qquad\square$$

定理 6.2.6 设 T *是有界线性算子, 则* $\sigma(T)\neq\emptyset$.

证明 **假如不然,** $\rho(T)=\mathbb{C}$, 由定理 6.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析.

当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 由 (6.2.5) 及 (6.2.6)

$$R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)^{-n-1}T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.\tag{6.2.11}$$

因此, $\|R_\lambda(T)\|$ **在复平面上有界.**

对于$\mathcal{B}(X)$ 上的任意一个有界线性泛函 f (即 $f\in\mathcal{B}(X)^*$),

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ **是全平面上的有界解析函数.**

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数.

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数.

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

由 Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别 $\mathcal{B}(X)$ 中不同的元素.

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数.

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

由 Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别 $\mathcal{B}(X)$ 中不同的元素.

由于对于 $\forall f \in \mathcal{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 是常值函数,

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数.

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

由 Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别 $\mathcal{B}(X)$ 中不同的元素.

由于对于 $\forall f \in \mathcal{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 是常值函数,

可以推知 $R_\lambda(T)$ 是与 λ 无关的常值算子.

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数.

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

由 Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别 $\mathcal{B}(X)$ 中不同的元素.

由于对于 $\forall f \in \mathcal{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 是常值函数,

可以推知 $R_\lambda(T)$ 是与 λ 无关的常值算子.

由引理 6.2.4推知 $R_\lambda(T) \equiv 0$, 这与 $I = (\lambda I - T)R_\lambda(T)$ 矛盾. $\square$

令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数,

由于 f 的连续性、定理 6.2.5 和 (6.2.11) 知,

$u_f(\lambda)$ **是全平面上的有界解析函数.**

根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ **是与** λ **无关的常值函数.**

由 Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ **上存在足够多的线性泛函, 可以区别** $\mathcal{B}(X)$ **中不同的元素.**

由于对于 $\forall f \in \mathcal{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 是常值函数,

可以推知 $R_\lambda(T)$ 是与 λ 无关的常值算子.

由引理 6.2.4推知 $R_\lambda(T) \equiv 0$, 这与 $I = (\lambda I - T)R_\lambda(T)$ 矛盾. □

定理 6.2.7 *设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 则*

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda}I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda}I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda}I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. $\square$

证明 由于 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda\in\rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*)=(\overline{\lambda}I-T^*)^{-1}=\left[(\lambda I-T)^{-1}\right]^*=(R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda}\in\rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda}\in\rho(T^*)$, 知 $\lambda\in\rho(T^{**})=\rho(T)$. $\square$

二、有界线性算子的谱半径

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. $\square$

二、有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则极限*

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. □

二、有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则极限*

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{6.2.13}$$

存在.

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. $\square$

二、有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则极限*

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{6.2.13}$$

存在.

证明 令 $a_k = \log \left\|T^k\right\|$, 我们下面证明 $\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf \frac{a_k}{k}$ $(k \to \infty)$.

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. $\square$

二、有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则极限*

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{6.2.13}$$

存在.

证明 令 $a_k = \log\left\|T^k\right\|$, 我们下面证明 $\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf \frac{a_k}{k}\ (k \to \infty)$.

因为

$$\left\|T^{m+k}\right\| \leqslant \|T^m\| \left\|T^k\right\|,$$

证明 由于 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$.

反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. $\square$

二、有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则极限*

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{6.2.13}$$

存在.

证明 令 $a_k = \log \left\|T^k\right\|$, 我们下面证明 $\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf \frac{a_k}{k}$ $(k \to \infty)$.

因为

$$\left\|T^{m+k}\right\| \leqslant \|T^m\| \left\|T^k\right\|,$$

我们有 $a_{m+k} \leqslant a_m + a_k$.

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$.

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$. 那么 $a_k \leqslant qa_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k}a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$. 那么 $a_k \leqslant q a_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k} a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k \to \infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m} a_m.$$

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$.
那么 $a_k \leqslant q a_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k} a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k \to \infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m} a_m.$$

由于 m 是任意的, $\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\frac{a_k}{k} \geqslant \beta$,

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$.

那么 $a_k \leqslant qa_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k}a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k \to \infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m}a_m.$$

由于 m 是任意的, $\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\frac{a_k}{k} \geqslant \beta$,

因此

$$\liminf \frac{a_k}{k} \geqslant \beta.$$

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$.

那么 $a_k \leqslant q a_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k} a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k \to \infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m} a_m.$$

由于 m 是任意的, $\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\frac{a_k}{k} \geqslant \beta$,

因此

$$\liminf \frac{a_k}{k} \geqslant \beta.$$

于是

$$\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf_k \frac{a_k}{k} \quad (k \to \infty),$$

对于固定的正整数 m, $k = mq + p$, 其中 q, p 是整数使得 $0 \leqslant p < m$.

那么 $a_k \leqslant q a_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k} a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k \to \infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m} a_m.$$

由于 m 是任意的, $\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\frac{a_k}{k} \geqslant \beta$,

因此

$$\liminf \frac{a_k}{k} \geqslant \beta.$$

于是

$$\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf_k \frac{a_k}{k} \ \ (k \to \infty),$$

即

$$\|T^k\|^{\frac{1}{k}} \to \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \ \ (k \to \infty). \qquad \square$$

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为***有界线性算子*** T ***的谱半径***.

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T)=\inf\limits_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ *为**有界线性算子** T **的谱半径**.*

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T)\leqslant\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$,

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为***有界线性算子*** T ***的谱半径.***

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T) \leqslant \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$,

特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\| . \tag{6.2.14}$$

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T)=\inf_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为***有界线性算子*** T ***的谱半径.***

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T)\leqslant\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ **,**

特别地

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|\,. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T)=\inf\limits_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ *为**有界线性算子** T **的谱半径**.*

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T)\leqslant\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$,
特别地

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 *$T\in\mathcal{B}(X)$, 则*

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|. \tag{6.2.15}$$

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ 为*有界线性算子* T *的谱半径.*

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T) \leqslant \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$,

特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|. \tag{6.2.15}$$

证明 令 $\alpha = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf\limits_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T)=\inf\limits_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为***有界线性算子*** T ***的谱半径.***

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T)\leqslant\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ **,**

特别地

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 $T\in\mathcal{B}(X)$, *则*

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|. \tag{6.2.15}$$

证明 **令** $\alpha=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$, $\beta=r_\sigma(T)=\inf\limits_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

首先证明 $\alpha\leqslant\beta$**.**

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ 为**有界线性算子** T **的谱半径.**

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T) \leqslant \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ **,**

特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\| . \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| . \tag{6.2.15}$$

证明 **令** $\alpha = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf_n \{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

首先证明 $\alpha \leqslant \beta$.

对于 $\forall\lambda \in \sigma(T)$, **可推知** $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ 为**有界线性算子** T **的谱半径.**

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T) \leqslant \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$,

特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|. \tag{6.2.15}$$

证明 令 $\alpha = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

首先证明 $\alpha \leqslant \beta$.

对于 $\forall\lambda \in \sigma(T)$, **可推知** $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

假如不然, $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 由

定义 6.2.9 *称* $r_\sigma(T) = \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ *为有界线性算子 T 的谱半径.*

定理 6.2.8 显示, **对于任何正整数** k, $r_\sigma(T) \leqslant \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$,

特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, **谱半径刻划了谱的范围**, 我们有:

定理 6.2.10 $T \in \mathcal{B}(X)$, *则*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|. \tag{6.2.15}$$

证明 令 $\alpha = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

首先证明 $\alpha \leqslant \beta$.

对于 $\forall\lambda \in \sigma(T)$, **可推知** $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

假如不然, $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 由

$$\lambda^n - T^n = (\lambda I - T)P_\lambda(T) = P_\lambda(T)(\lambda I - T),$$

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$.

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$.
于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,

根据定理 6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开.

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,

根据定理 6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开.

由定理 6.2.2 知当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 其展开式可以由 (6.2.5)表示,

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$.
于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.
反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,
根据定理 6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开.
由定理 6.2.2 知当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 其展开式可以由 (6.2.5)表示,
由 Lanrent 展开的唯一性知 $R_\lambda(T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n$.

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,

根据定理 6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开.

由定理 6.2.2 知当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 其展开式可以由 (6.2.5)表示,

由 Lanrent 展开的唯一性知 $R_\lambda(T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n$.

因此 $\|\lambda^nT^n\|\to 0\ (n\to\infty)$, 于是当 n 充分大时,

其中 $P_\lambda(T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I-T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

所以由定理 6.2.2 $|\lambda^n|\leqslant\|T^n\|$, 即 $|\lambda|\leqslant\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$|\lambda|\leqslant\beta=\inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha\leqslant\beta$.

反之, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\lambda=\alpha+\varepsilon\in\rho(T)$,

根据定理 6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开.

由定理 6.2.2 知当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, 其展开式可以由 (6.2.5)表示,

由 Lanrent 展开的唯一性知 $R_\lambda(T)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n$.

因此 $\|\lambda^nT^n\|\to0\ (n\to\infty)$**,** 于是当 n 充分大时,

$$\|T^n\|\leqslant|\lambda|^n=(a+\varepsilon)^n.$$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

但是 (6.2.14)中的严格不等号可以成立, 我们有:

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

但是 (6.2.14)中的严格不等号可以成立, 我们有:

例 6.2.11 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1\}, r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < \|A\|.$$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

但是 (6.2.14) 中的严格不等号可以成立, 我们有:

例 6.2.11 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1\}, r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < \|A\|.$$

例 6.2.12 令 $X = C[a, b]$, ***考虑 Volterra 积分算子*** K:

$$(Kx)(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \;\; a \leqslant s \leqslant b,$$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

但是 (6.2.14) 中的严格不等号可以成立, 我们有:

例 6.2.11 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1\}, r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < \|A\|.$$

例 6.2.12 令 $X = C[a, b]$, ***考虑 Volterra 积分算子*** K***:***

$$(Kx)(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \ \ a \leqslant s \leqslant b,$$

其中核 $k(s,t)$ *是* $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ *上的连续函数, 通过归纳法可以证明*

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. $\square$

但是 (6.2.14) 中的严格不等号可以成立, 我们有:

例 6.2.11 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1\}, r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < \|A\|.$$

例 6.2.12 令 $X = C[a,b]$, *考虑 Volterra 积分算子 K:*

$$(Kx)(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad a \leqslant s \leqslant b,$$

其中核 $k(s,t)$ 是 $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ 上的连续函数, 通过归纳法可以证明

$$\left\|K^k\right\| \leqslant \frac{M^k(b-a)^k}{(k-1)!}, \quad k \geqslant 1, \tag{6.2.16}$$

其中 $M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

其中 $M = \sup_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

其中 $M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T) = \|T\|$.

其中 $M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T) = \|T\|$.

证明 （1）**我们可以证明对于自共轭算子** $\|T^2\| = \|T\|^2$.

其中 $M=\sup\limits_{s,t\in[a,b]}|k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K)=0$. 我们得到 $\sigma(K)=\{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 *Hilbert* 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T)=\|T\|$.

证明 （1）**我们可以证明对于自共轭算子** $\|T^2\|=\|T\|^2$.

事实上由于 $T=T^*$, 根据定理5.4.8

其中 $M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 *Hilbert* 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T) = \|T\|$.

证明 （1）**我们可以证明对于自共轭算子** $\|T^2\| = \|T\|^2$.

事实上由于 $T = T^*$, 根据定理5.4.8

$$\begin{aligned}\| T^2 \| &= \sup_{x\in H}\{(T^2x, x)| \| x \|= 1\} = \sup_{x\in H}\{(Tx, Tx)| \| x \|= 1\} \\ &= \sup_{x\in H}\{\| Tx \|^2 \mid \| x \|= 1\} =\| T \|^2\end{aligned}$$

其中 $M=\sup\limits_{s,t\in[a,b]}|k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K)=0$. 我们得到 $\sigma(K)=\{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T)=\|T\|$.

证明 （1）**我们可以证明对于自共轭算子** $\|T^2\|=\|T\|^2$.

事实上由于 $T=T^*$, 根据定理5.4.8

$$\| T^2 \| = \sup_{x\in H}\{(T^2x,x)|\ \| x \|=1\} = \sup_{x\in H}\{(Tx,Tx)|\ \| x \|=1\}$$

$$= \sup_{x\in H}\{\| Tx \|^2 \mid \| x \|=1\} =\| T \|^2$$

（2） **于是当** $n=2^m$(m **是正整数),** $\|T^n\|=\|T\|^n$.

其中 $M=\sup\limits_{s,t\in[a,b]}|k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K)=0$. 我们得到 $\sigma(K)=\{0\}$.

对于自共轭算子的谱半径, 我们有

定理 6.2.13 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, 则**谱半径** $r_\sigma(T)=\|T\|$.

证明 （1）**我们可以证明对于自共轭算子** $\|T^2\|=\|T\|^2$.

事实上由于 $T=T^*$, 根据定理5.4.8

$$\| T^2 \| = \sup_{x\in H}\{(T^2x,x)|\ \| x \|=1\} = \sup_{x\in H}\{(Tx,Tx)|\ \| x \|=1\}$$

$$= \sup_{x\in H}\{\| Tx \|^2 \mid \| x \|=1\} =\| T \|^2$$

（2） **于是当** $n=2^m$(m **是正整数),** $\|T^n\|=\|T\|^n$.

由定理 6.2.8知

$$r_\sigma(A)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}}((\|T\|^n)^{\frac{1}{n}})=\|T\|. \qquad \square$$