

内蒙古大学 数学科学学院  
泛函分析 期末考试试卷 (二)  
(闭卷120分钟)

一、(本题满分20分)

设 $C[a, b] = \{x(t) \mid x(t) \text{在 } [a, b] \text{上连续}\}$ , 定义

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

证明: (1) 以上定义的是一个范数; (2) $C[a, b]$ 在以上范数下是一个Banach空间.

二、(本题满分20分)

1. 叙述闭算子的定义;
2. 给出线性算子是闭算子的充分必要条件;
3. 在 $C[a, b]$ 中考虑线性算子 $T$ :

$$T = \frac{d}{dt}, \quad D(T) = C^1[a, b].$$

证明: (1)  $T$ 是无界线性算子; (2)  $T$ 是闭的线性算子.

三、(本题满分20分)

1. 设 $A$ 是Hilbert空间上的有界线性算子, 叙述 $A$ 的共轭算子 $A^*$ 的定义,  $A$ 是自共轭算子的定义;
2. 设 $A$ 是Hilbert空间 $H$ 上的有界自共轭算子.

证明: (1) 对于 $\forall x \in H$ ,  $(Ax, x)$ 是实的;

(2)  $A$ 的特征值是实的.

四、(本题满分15分)

1. 设 $X$ 是一个距离空间, 叙述集合 $M$ 在 $X$ 中列紧的定义;
2. 叙述紧线性算子的定义;
3. 设 $X$ 是Banach空间,  $T$ 是从 $X$ 到 $X$ 的紧线性算子, 叙述紧线性算子谱点的基本性质.

五、(本题满分15分)

1. 叙述Hilbert空间中的Riesz表示定理;
2. 设 $H$ 是Hilbert空间,  $\varphi(x, y)$ 是定义在 $H \times H$ 上的共轭双线性泛函, 即关于 $x$ 是线性的, 关于 $y$ 是共轭线性的, 并且存在常数 $C$ , 使得 $|\varphi(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$ ,  $(x, y \in$

$H$ ). 请用Riesz表示定理证明存在有界线性算子算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有 $x, y \in H$ ,  
 $\varphi(x, y) = (x, Ay)$ .

六、(本题满分10分)

谈谈你对距离空间、赋范线性空间、内积空间的认识, 它们之间有什么关系, 简述: 通过学习泛函分析这门课程你学到了什么。