



泛函分析

Functional Analysis

主讲 孙炯教授

电话: 0471-4992491 (H) , 13947103671
Emai: masun@imu.edu.cn

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,
我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 定义范数:

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 定义范数:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 定义范数:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

它诱导的距离为:

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

§ 4 等价的范数 有限维赋范空间

一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

例 2.4.1 \mathbb{R}^n 按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, 定义范数:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

它诱导的距离为:

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间.

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间.

一般地, X 是一个线性空间, 可赋以不同的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$,

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间.

一般地, X 是一个线性空间, 可赋以不同的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$,

这样 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 成为两个不同的赋范空间.

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间.

一般地, X 是一个线性空间, 可赋以不同的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$,

这样 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 成为两个不同的赋范空间.

然而不同的范数之间可能具有等价关系,

在这一范数下, $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ 是完备的, 可分的.

(2) \mathbb{R}^n 中可定义范数 $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是一赋范空间.

(3) 定义范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间.

一般地, X 是一个线性空间, 可赋以不同的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$,

这样 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 成为两个不同的赋范空间.

然而不同的范数之间可能具有等价关系,

即这样的空间中收敛性一样.

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

证明 事实上, 由 2.4.5 式可知,

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

证明 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_1\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

证明 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合(2.4.6式)和(2.4.7式), 命题得证. □

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

证明 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合(2.4.6式)和(2.4.7式), 命题得证. □

注 在两个等价范数产生的赋范空间中, 同一个元素的范数可能不同, 但是收敛性一样.

下面我们给出两个范数等价的定义：

定义 2.4.2 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 等价的.

命题 2.4.3 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样.

证明 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_1\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合(2.4.6式)和(2.4.7式), 命题得证. \square

注 在两个等价范数产生的赋范空间中, 同一个元素的范数可能不同, 但是收敛性一样.

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,
 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;

(2) $\{x_n\}$ 是 (X, d_1) 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X, d_2) 中的 Cauchy 列;

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

- (1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;
- (2) $\{x_n\}$ 是 (X, d_1) 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X, d_2) 中的 Cauchy 列;
- (3) (X, d_1) 是完备的 当且仅当 (X, d_1) 是完备的.

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;

(2) $\{x_n\}$ 是 (X, d_1) 中的Cauchy列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X, d_2) 中的Cauchy列;

(3) (X, d_1) 是完备的 当且仅当 (X, d_1) 是完备的.

注 $(X, \|\cdot\|_1)$ $(X, \|\cdot\|_2)$ 代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;

(2) $\{x_n\}$ 是 (X, d_1) 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X, d_2) 中的 Cauchy 列;

(3) (X, d_1) 是完备的 当且仅当 (X, d_1) 是完备的.

注 $(X, \|\cdot\|_1)$ $(X, \|\cdot\|_2)$ 代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

例 2.4.5 在例 2.4.1 中 \mathbb{R}^n 上定义了三个不同的 范数 $\|x\|, \|x\|_1, \|x\|_\infty$,

进一步的我们有

推论 2.4.4 设 X 是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数,

令 $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ 和 $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ 分别是 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的距离. 则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X, d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X, d_2) 中收敛到 x ;

(2) $\{x_n\}$ 是 (X, d_1) 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X, d_2) 中的 Cauchy 列;

(3) (X, d_1) 是完备的 当且仅当 (X, d_1) 是完备的.

注 $(X, \|\cdot\|_1)$ $(X, \|\cdot\|_2)$ 代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

例 2.4.5 在例 2.4.1 中 \mathbb{R}^n 上定义了三个不同的 范数 $\|x\|, \|x\|_1, \|x\|_\infty$,

它们满足

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| = \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|; \quad (2.4.8)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_\infty. \quad (2.4.9)$$

因而 $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ 三个范数等价.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_\infty. \quad (2.4.9)$$

因而 $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ 三个范数等价.

下面我们将看到, \mathbb{R}^n 上定义的所有范数都等价.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_\infty. \quad (2.4.9)$$

因而 $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ 三个范数等价.

下面我们将看到, \mathbb{R}^n 上定义的所有范数都等价.

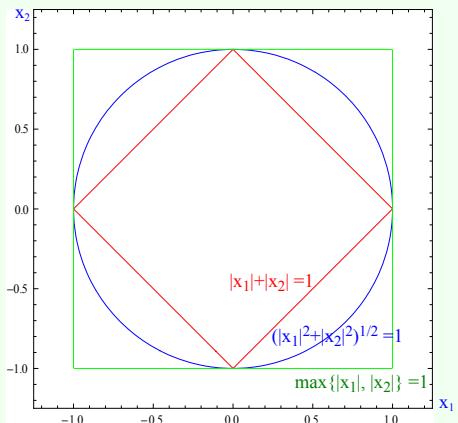


Figure 2.4.1: 等价的范数

二、有限维空间

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

令 $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 设 $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

令 $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 设 $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

T 是一个从 X 到 \mathbb{R}^n 的同构映射.

对于 $\forall x \in X$, $\|\cdot\|$ 与 \mathbb{R}^n 的范数等价, 事实上

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

令 $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 设 $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

T 是一个从 X 到 \mathbb{R}^n 的同构映射.

对于 $\forall x \in X$, $\|\cdot\|$ 与 \mathbb{R}^n 的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令 $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 设 $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

T 是一个从 X 到 \mathbb{R}^n 的同构映射.

对于 $\forall x \in X$, $\|\cdot\|$ 与 \mathbb{R}^n 的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

其中 $\beta = (\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2)^{1/2}$ 是与 x 无关的常数.

二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与 \mathbb{R}^n 同构,
在拓扑意义下与 \mathbb{R}^n 同胚.

定理 2.4.6 任意 n 维赋范空间必与 \mathbb{R}^n 代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是 n 维赋范空间, 于是存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$,
 $\forall x \in X$, 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令 $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 设 $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

T 是一个从 X 到 \mathbb{R}^n 的同构映射.

对于 $\forall x \in X$, $\|\cdot\|$ 与 \mathbb{R}^n 的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

其中 $\beta = (\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2)^{1/2}$ 是与 x 无关的常数.

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

于是 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 不等于零.

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

于是 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 不等于零.

$$\therefore f(\bar{x}) > 0.$$

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

于是 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 不等于零.

$$\therefore f(\bar{x}) > 0.$$

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 结合式有

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

于是 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 不等于零.

$$\therefore f(\bar{x}) > 0.$$

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 结合式有

$$\begin{aligned} |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)| &= \|\|x\| - \|y\|\| \\ &\leq \|x - y\| \leq \bar{\beta} \|\bar{x} - \bar{y}\|. \end{aligned}$$

反之,在 \mathbb{R}^n 中的单位球面 S 上, $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 S 上, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 e_1, \dots, e_n 线性无关,

于是 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 不等于零.

$$\therefore f(\bar{x}) > 0.$$

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 结合式有

$$\begin{aligned} |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)| &= \|\|x\| - \|y\|\| \\ &\leq \|x - y\| \leq \bar{\beta} \|\bar{x} - \bar{y}\|. \end{aligned}$$

$\therefore f(\bar{x})$ 是连续的.

$\therefore S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\because S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值，

即存在 $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$, 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

$\because S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值，

即存在 $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$, 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

$\because S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值，

即存在 $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$, 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即 $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$. $\therefore X$ 与 \mathbb{R}^n 同胚.

□

$\because S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值，

即存在 $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$, 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即 $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$. $\therefore X$ 与 \mathbb{R}^n 同胚.

注 有限维空间中的收敛性与 \mathbb{R}^n 相同, 即按坐标收敛.

□

$\because S$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭的有界集，是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值，

即存在 $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$, 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即 $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$. $\therefore X$ 与 \mathbb{R}^n 同胚.

□

注 有限维空间中的收敛性与 \mathbb{R}^n 相同, 即按坐标收敛.

有限维的赋范空间是 Banach 空间.

三、有限维赋范空间的几何特征

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的, \therefore 由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间.

\therefore 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的, \therefore 由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间.

\therefore 由 Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$.

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的, \therefore 由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间.

\therefore 由 Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$.

令 X_2 是由 $\{x_1, x_2\}$ 生成的子空间,

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的, \therefore 由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间.

\therefore 由 Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$.

令 X_2 是由 $\{x_1, x_2\}$ 生成的子空间,

同样存在 $x_3 \in S, \forall x \in X_2$,

$$\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}.$$

三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

定理 2.4.7 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然, X 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$, 任取 $x_1 \in S$, 记 X_1 为由 x_1 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的, \therefore 由 x_1 生成的子空间是 X 的真闭子空间.

\therefore 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$, $\|x_2\| = 1$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$.

令 X_2 是由 $\{x_1, x_2\}$ 生成的子空间,

同样存在 $x_3 \in S, \forall x \in X_2$,

$$\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}.$$

特别地 $\|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}, \|x_3 - x_1\| > \frac{1}{2}$.

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论2.4.8, 则 X 是有限维的.

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论2.4.8, 则 X 是有限维的.

注2 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论2.4.8, 则 X 是有限维的.

注2 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有**有限维**空间, 任何有界闭集都是自列紧的,

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论2.4.8, 则 X 是有限维的.

注2 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有**有限维空间**, 任何有界闭集都是自列紧的,

但是在无穷维赋范空间, 就没有“那么多”的紧集合,

这样一直做下去, 得到 S 中的无穷点列 $\{x_n\}$,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以 $\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 S 列紧矛盾.

$\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.8 设 X 是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球 $B(0, 1)$ 和单位球面 $S(0, 1)$ 都不是紧的.

注1 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. (\because 存在 $\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论2.4.8, 则 X 是有限维的.

注2 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有**有限维空间**, 任何有界闭集都是自列紧的,

但是在无穷维赋范空间, 就没有“那么多”的紧集合,

这是**有限维空间和无穷维空间的主要区别**.