第一章　距离空间

§1.1　距离空间的基本概念

1.1.1 距离空间的定义

高等数学中引进的最重要的概念就是极限. 当 $n \geq N$ 时, 有

$$| x_n - x | < \varepsilon,$$

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$. 在二维的情况, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 如果存在正整数N, 当 $n \geq N$时, 有

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon,$$

则称点列$x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$. 一般地, 我们可以定义n维空间中点列的极限, 所不同的只是距离$d(x_n, x)$的表示形式.

在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”以及在这些“空间”上定义的“函数”，进而我们希望讨论与他们相关的极限和运算，于是我门需要在一般的“空间”中引入“距离”的概念，即在一个集合上定义两点之间的“距离”，使之成为我们下面所说的“距离空间”，在此基础上引进极限这种运算.

定义 1.1.1　设X是任一非空集合,对于X中的任何两点x, y, 均有一个实数$d(x, y)$与它对应,且满足：

(1) $d(x, y) \geq 0$（非负性）;

(2) $d(x, y) = 0$, 当且仅当$x = y$（严格正）;

(3) $d(y, x) = d(x, y)$ (对称性);

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式).

则称$d(x, y)$为X中的一个距离. 定义了距离d的集合称为一个距离空间, 记为(X, d)，有时简记为X.

注1　在距离的定义中，我们看到它保留了实数空间（或者说在平面和空间）中距离的最基本的性质. 事实上，从一些具体的实例中抽象出问题的本质特征，加以概括，给出在一般意义下的定义，使之能够运用于更加广阔的范围，是数学研究中的重要方法.

注2　性质(1) – (4) 称为是距离公理，其中性质(4) 来源于三角形中的两边之和大于第三边. 见图1.1

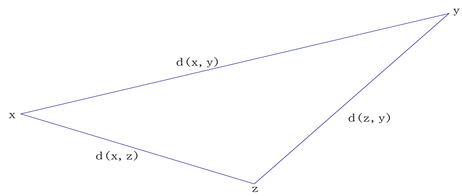

图 1.1: 平面上的三角不等式

注3 运用数学归纳法，我们可以把三角不等式推广为：

$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n). \tag{1.1.1}$$

注4 设(X,d) 是一个距离空间，由三角不等式可证，对于任意的$x,y,z\in X$，有

$$\mid d(x,y)-d(y,z)\mid \le d(x,z). \tag{1.1.2}$$

证明留给读者.

1.1.2 距离空间的例

例 1.1.2 在n维实向量空间$\mathbb{R}^n$中, 定义

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.3}$$

其中$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间.

证明 (1)、(2)、(3) 显然成立. 我们只需证明(4)成立. 使用Cauchy不等式$\sum_{k=1}^n a_kb_k \le (\sum_{k=1}^n {a_k}^2)^{1/2}(\sum_{k=1}^n {b_k}^2)^{1/2}$, 我们有

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2} \le (\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}. \tag{1.1.4}$$

事实上

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\\ &\le \sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\\ &= [(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2\end{aligned}$$

设$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$是$\mathbb{R}^n$ 中的任意三点，在不等式(1.1.4)中令$a_k=(\xi_k-\eta_k),b_k=(\zeta_k-\eta_k)$, 则

$$[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2]^{1/2}\leq[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2]^{1/2}+[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2]^{1/2}.$$

即

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

所以$(\mathbb{R}^n,d)$是一个距离空间，以后把它简记为$\mathbb{R}^n$. □

注 在n 维复的向量空间$\mathbb{C}^n$, 可以类似的定义距离

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}\mid\xi_k-\eta_k\mid^2)^{1/2}.$$

在一个集合上可以定义不同的距离，产生不同的距离空间.

例 1.1.3 在$\mathbb{R}^n$中，我们可以分别定义

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\mid\xi_k-\eta_k\mid, \tag{1.1.5}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\mid\xi_1-\eta_1\mid,\cdots,\mid\xi_n-\eta_n\mid\}, \tag{1.1.6}$$

由实数的三角不等式，容易验$(\mathbb{R}^n,d_1)$, $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ 都是距离空间.

例 1.1.4 序列空间 l^∞. 令$l^\infty=\{x=(\xi_j)\mid\mid\xi_j\mid\leq c_x\}$, 其中$c_x$ 与j 无关，即l^∞ 是全体有界的数列. 在l^∞中定义

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\mid\xi_j-\eta_j\mid\},$$

其中$y=(\eta_j)\in l^\infty$ 并且 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, 容易验证 l^∞ 是一个距离空间. □

注 l^∞ 可以看作是 $\mathbb{C}^n$ 由1.1.6式定义的距离 $d_\infty(x,y)$ 产生的距离空间 $(\mathbb{C}^n,d_\infty)$ 的推广, 由于是无穷序列，max 被 sup 所代替，数列是有界的，其上确界存在.

例 1.1.5 连续函数空间 $C[a,b]$. 考虑闭区间$[a,b]$上全体连续函数, 定义

$$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}\mid x(t)-y(t)\mid, \tag{1.1.7}$$

其中$x(t),y(t)$是$[a,b]$上的任意两个连续函数，则其是一个距离空间.

证明 (1)、(2)、(3)显然成立. 设$x(t), y(t), z(t)$是$[a,b]$上任意三个连续函数，使用绝对值三角不等式, 对于任意的$t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} | x(t)-y(t) | &\leq | x(t)-z(t) | + | z(t)-y(t) | \\ &\leq \max_{a\leq t\leq b} | x(t)-z(t) | + \max_{a\leq t\leq b} | z(t)-y(t) | \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

所以

$$d(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} | x(t)-y(t) | \leq d(x,z)+d(z,y).$$

于是 $[a,b]$ 上的全体连续函数赋以上述距离成为一个距离空间, 这个空间记为 $C[a,b]$. □

例 1.1.6 在由$[a,b]$区间上全体连续函数组成的集合上, 我们还可以定义

$$d(x,y) = \int_E | x(t)-y(t) | \, dt. \tag{1.1.8}$$

容易证明它是一个距离, 但这个空间与 $C[a,b]$ 有很大的不同.

例 1.1.7 设$X = C(-\infty,\infty)$ 是定义在$(-\infty,\infty)$上的实值连续函数的全体，定义

$$d(x,y) = \sup_{0<T}\{\min[1/T, \sup_{|t|\leq T} | x(t)-y(t) |]\},$$

可以证明 (X,d) 是一个距离空间.

注 在一个集合上, 可以引进多种距离. 以后我们可以看到, 在有的距离下空间完备, 在有的距离下, 空间不完备. 并且不同的距离导出的收敛性不同. 距离空间中距离的选择是十分重要的, 我们要根据不同的问题, 设定的不同目标，涉及的不同的极限过程, 引进不同的距离.

例 1.1.8 设B为全体由整数组成的元素序列, 即$B = \{n = (n_1, n_2, \cdots) | n_i \in N\}$,定义

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, \text{如果} n_i = m_i, \quad i = 1,2,\cdots, \\ \dfrac{1}{k}, \ k\text{是}n_i \neq m_i\text{头一个指标}, \end{cases}$$

其中 $m = (m_1, m_2, \cdots)$. 可以验证(B,d)是一个距离空间, 且这个距离满足“更强”的三角不等式, 即对于 $\forall n,m,h \in B$, 有

$$d(n,m) \leq \max\{d(n,h), d(h,m)\} \tag{1.1.9}$$

事实上,只要注意到n, h和h, m头一个不相等项的指标一定小于n, m头一个不相等项的指标,则有1.1.8式成立.

这个看似奇异的距离, 是从以下数学模型中抽象出来的. 假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号, 且 $s(t)$ (i)每秒取样一次, (ii)在单位时间看作常量, (iii)信号码都编译成整数. 如图1.2所示.

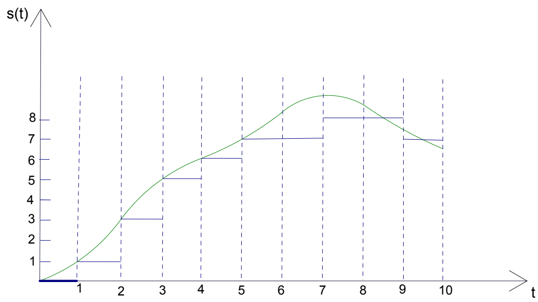

图 1.2: pic2

在图1.2中表示整数的信号是

$$n_s = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 7, \cdots\},$$

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\}$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生, 即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.9 X是一个非空集合, $x, y \in X$, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

容易验证d是一个距离,从而(X, d)是一个距离空间, 称它为离散的距离空间,记为D.

注 许多距离空间是在线性空间上定义的, 即X是一个线性空间, 集合对加法，数乘是封闭的. 例如$\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$, s都是线性空间(线形空间的定义见下章), 但例1.1.9的离散空间 D 不一定是线性空间.

1.1.3 收敛点列的定义和性质

极限运算是高等数学中最重要的运算, 我们可以在距离空间中引入极限的概念.

定义 1.1.10 设(X,d)是一个距离空间. $\{x_n\}\subset X, x_0\in X$, 如果当$n\to\infty$时, $d(x_n,x_0)\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{或者}\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

注1 x_0 必须要属于 (X,d)，这一点一定要注意.

注2 X是距离空间, 其中 $d(x_n,x_0)\to\ 0\ (n\to\infty)$ 是数列趋近于零.

注3 对于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 用$\varepsilon-N$语言表述为：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \text{当}n\geq N\ \text{时, 有}d(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

定理 1.1.11 $\{x_n\}$在X中收敛,则

(i) $\{x_n\}$的极限是唯一的.

(ii) 如果x_0是$\{x_n\}$的极限, 那么它的任何子列也收敛到x_0.

证明 (i) 若存在$x_0,y_0\in X, x_0\neq y_0, x_n\to x_0$, 且$x_n\to y_0(n\to\infty)$, 对于$\varepsilon_0=\frac{1}{2}d(x_0,y_0)>0$, 存在$N_1$, 当$n\geq N_1$时

$$d(x_0,x_n)<\varepsilon_0,$$

同时存在N_2, 当$n\geq N_2$时

$$d(y_0,x_n)<\varepsilon_0.$$

于是当$n\geq\max\{N_1,N_2\}$时

$$d(x_0,y_0)\leq d(x_0,x_n)+d(x_n,y_0)<2\varepsilon_0=d(x_0,y_0),$$

矛盾.

(ii)设$x_n\to x_0(n\to\infty)$, 故$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n\geq N$ 时

$$d(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，$n_k\geq k$, $n_k\to\infty\ (k\to\infty)$. 取 $K=N$, 当 $k>K$ 时，$n_k\geq N$, 于是$d(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. □

定理 1.1.12 $d(x,y)$是关于 x 和 y 的二元连续函数. 即当 $x_n \to x, y_n \to y(n\to\infty)$ 时, $d(x_n,y_n)\to d(x,y)(n\to\infty)$.

证明 因为

$$d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n),$$

所以

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)\le d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

同理可得

$$d(x,y)-d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

于是有

$$\mid d(x_n,y_n)-d(x,y)\mid\le d(x_n,x)+d(y_n,y)\to 0\ (n\to\infty).$$

□

1.1.4 距离空间中收敛的“含义”

下面我们在一些距离空间中, 研究收敛的”具体含义”.

例 1.1.13 $\mathbb{R}^m$空间.$x_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\cdots,\xi_m^n)(n=1,2,\cdots)$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m, d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\sqrt{(\xi_1^n-\xi_1)^2+(\xi_2^n-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_m^n-\xi_m)^2}\to 0$$

等价于

$$\xi_i^{(n)}\to\xi_i\ (n\to\infty), i=1,2,\cdots,m. \tag{1.1.11}$$

按坐标收敛.

证明 由不等式

$$|xi_i^{(n)}-\xi_i|\le(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2)^{1/2}=d(x_n,x),\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$d(x_n,x)=(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2)^{1/2}\le|\xi_1^{(n)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_1^{(n)}-\xi_1|$$

可推知. □

例 1.1.14 $C[a,b]$ 空间. $x_n = x_n(t)(n=1,2,\cdots), x = x(t) \in C[a,b], d(x_n,x) \to 0$, 即

$$\max_{a \le t \le b} \mid x_n(t) - x(t) \mid \to 0 (n \to \infty).$$

于是对 $\forall \varepsilon \ge 0, \exists N$, 当$n \ge N$时, 对$\forall t \in [a,b]$, 有

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid \le \max_{a \le t \le b} \mid x_n(t) - x(t) \mid < \varepsilon,$$

即$x_n(t)$一致收敛到$x(t)$. 反之, $x_n(t)$一致收敛到 $x(t)$ 我们可以推出 $d(x_n,x) \to 0$. 即 $C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

例 1.1.15 设 X表示由$[0,1]$区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y) = \{\int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.12}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离. 考虑 X, d_2 中的点列 $\{x_n\}$

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \le t \le 1/n, \\ 0, & 1/n < t \le 1. \end{cases}$$

则 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0 \equiv 0$. 事实上

$$d_2(x_n,x_0) = \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2} = \{\int_0^1 (1-nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}.$$

注1 上述 $\{x_n\}$ 在例1.1.8的距离（见1.1.8式）下也收敛到 x_0，证明留给读者.

注2 但是由于 $x_n(1) \equiv 1$, $\{x_n\}$并不一致收敛到 x_0. 也就是说这些空间中点列（函数列）的收敛与 $C[a,b]$ 中点列的收敛在“具体意义”下有很大的不同.

例 1.1.16 在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子. 由于对于任何的 n，我们都有 $d(x_n,x_0) \equiv 1$, 于是 $\{x_n\}$ 不收敛到 x_0. 人们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0，其中

$$y_0(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

但是我们首先要注意到$y_0 \bar{\in} C[0,1]$，于是 $\{x_n\}$ 不能趋近到 y_0. 事实上，对与$\forall N$, $\exists n, m > N$, 使得 $d(x_n,x_m) \ge \frac{1}{2}$, 即在空间 $C[0,1]$ 中，这个点列 $\{x_n\}$ 不收敛. □

注 上述例子可以看到，同一个点列，在不同的距离空间收敛性会不相同.

例 1.1.17 空间 s. 设$s = \{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\mid \xi_k - \eta_k \mid}{1 + \mid \xi_k - \eta_k \mid}. \tag{1.1.13}$$

其中：$x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, 则

1. s为距离空间;

2. s 中的收敛是按坐标收敛. 即$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s$, “ $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$” 等价于 $\forall k$, $\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

证明 1. 距离空间的(1),(2),(3)显然成立.下面验证(4)成立. 考虑函数$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}\ t\in(0,\infty)$, $\varphi(x)$是单增的. 设$x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}, z=\{\zeta_k\}$, 由于

$$|\xi_k-\eta_k|\le|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|,$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}&\le\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\\&\le\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}.\end{aligned}$$

在上面不等式两边乘以$\frac{1}{2^k}$并求和,有

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\\&=d(x,z)+d(z,y).\end{aligned}$$

我们把这个距离空间记为s.

2. 设 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛，$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$. 对于 $\forall k\in N$, $\forall\ \varepsilon>0$, 令$\varepsilon_0=\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$, 于是 $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时，有$d(x_n,x)<\varepsilon_0$, 即：

$$d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k|}<\varepsilon_0=\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

结合$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$是单增的, 我们有$|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\varepsilon$, 即 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

反之，对于 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ K$, $\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由于 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)\ (k=1,2,\cdots,K)$, 所以存在$N$, 当 $n>N$时 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\frac{1}{2}\varepsilon\ \ (k=1,2,\cdots,K)$. 于是当

$n > N$ 时，

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \tag{1.1.14}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \tag{1.1.15}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \tag{1.1.16}$$

即 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛到 x. □

注 在1.1.14式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.

例 1.1.18 空间S. S中的元素为E上全体几乎处处有限的可测函数，其中$E \subset R$是一个Lebesgue可测集，且$mE < \infty$. $x = x(t), y = y(t) \in S$，定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{|x(t) - y(t)|}{1+|x(t) - y(t)|} dt.$$

则 1. S为距离空间；

2. S 中的收敛是按测度收敛. 即 $d(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$，等价于$x_n \stackrel{m}{\to} x(n \to \infty)$ (依测度收敛).

证明 1. 与例1.1.17 的证明类似，可以证明这是一个距离空间，把它记为S.

2. 首先由 $d(x_n, x) \to 0$ 推出$x_n \stackrel{m}{\to} x(n \to \infty)$. 事实上，对于$\forall \varepsilon > 0$，令$E_1 = \{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| < \sigma\}$，$E_2 = \{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}, E = E_1 \cup E_2$，

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt$$
$$\geq \int_{\{t\in E \mid |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt.$$

因为$\frac{t}{1+t}$单增，而$|x_n(t) - x(t)| \geq \sigma$，于是

$$d(x_n, x) \geq \int_{\{t\in E \mid |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt$$
$$= \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}. \tag{1.1.17}$$

由于$d(x_n, x) \to 0(n \to \infty), \sigma$ 给定，由不等式(1.1.17) 推出$m\{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

反之，由 $x_n(t) \stackrel{m}{\to} x(t)(n \to \infty)$，可推出$d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty)$. 事实上

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt$$
$$= \int_{E_1} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt$$
$$\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt \leq \frac{\sigma}{1+\sigma} mE + mE_2.$$

对于$\forall\varepsilon>0$, 取$\sigma_0 mE<\frac{\varepsilon}{2}$，对于这个$\sigma_0>0$,由 $mE_2=m\{t\in E\mid\,\mid x_n(t)-x(t)\mid\geq\sigma_0\}\to 0$，存在$N$, 当$n\geq N$时，$mE_2<\frac{\varepsilon}{2}$ 于是

$$d(x_n,x)\leq\frac{\sigma_0}{1+\sigma_0}mE+mE_2<\sigma_0 mE+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即 $d(x_n,x)\to 0\ \ (n\to\infty)$. □

§1.2 开集和连续映射

1.2.1 开球、闭球

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$中有了距离(欧氏距离), 就有了开球、闭球、开集、闭集这些概念. 在一般的距离空间, 我们也可以引入开集、闭集这些概念，建立起相应的拓扑结构.

定义 1.2.1 设(X,d)是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以x_0为中心, r为半径的开球（Open ball）; 集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\leq r\} \tag{1.2.2}$$

称为以r_0为中心,r为半径的闭球（Closed ball）；集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)=r\} \tag{1.2.3}$$

称为以r_0为中心, r为半径的球面（Sphere）.

注 在$\mathbb{R}^2$中, 开球$B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}<r\}$, 其中$x=(x_1,x_2), x_0=(x_1^0,x_2^0)$. 在$\mathbb{R}$中, $B(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)$. 但是从Euclidean几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念，并不一定具有在 $\mathbb{R}^3$中球体的性质，例如在离散空间D 中（见例1.1.9）, $B(x_0,\frac{1}{2})=\{x_0\}$, 而 $B(x_0,\frac{3}{2})=D$，但$S(x_0,1)=D$.

例 1.2.2 在 $C[0,T]$ 中，$x_0\in C[0,T]$, 开球$B(x_0,\frac{1}{2})$ 表示定义在 $[0,T]$ 区间上，满足条件

$$\mid x(t)-x_0(t)\mid<\frac{1}{2},\quad\forall t\in[0,T]$$

的全体连续函数. 见图1.3.

例 1.2.3 设 X 是例1.1.8给出的距离空间. 即$[0,T]$区间上全体连续函数组成的集合, 距离定义为

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T\mid x(t)-y(t)\mid^2\,dt\}^{1/2}.$$

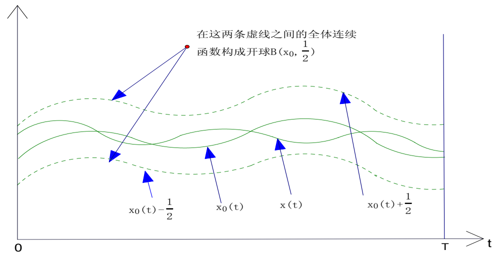

图 1.3: pic3

对于$x_0 \in X$, 开球$B(x_0, \frac{1}{2})$ 表示定义在 $[0, T]$ 区间上，满足条件

$$\{\int_0^T \mid x(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2} < \frac{1}{2}$$

的全体连续函数. 这个"开球"中的函数与例1.2.2"开球" 中的函数很不相同，我们仅能把在开球中的很少几个函数图示出来，见图1.4.

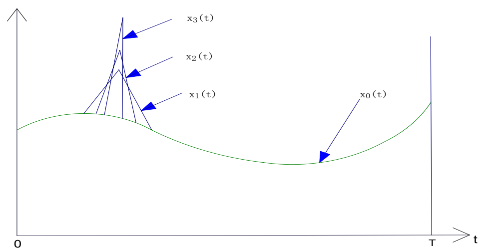

图 1.4: pic4

注 上述例子显示，对于开球和闭球的了解，一定要结合具体的距离空间来考虑。

1.2.2 内点、开集、领域、等价的距离

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$, 若存在开球 $B(x_0, r)$ 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称A是有界集.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$, 对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$ 使得 $B(x_0, r) \subset G$, 则称 x 为 G 的内点.

定义 1.2.6 （开集）

设 X 是一个距离空间, $G \subset X$, 若 G 的每一个点都是内点, 则称 G 是一个开集.

对于 $x \in X$, 包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个邻域.

例 1.2.7 $B(x_0, r)$是一个开集.

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r), d(x_0, x_1) < r$.取$r_1 = r - d(x_0, x_1) > 0$, 我们要证明 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$. 事实上$\forall x \in B(x_1, r_1)$, $d(x_1, x) < r_1$, 于是

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \\ &= d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r. \end{aligned}$$

所以$x \in B(x_0, r)$, 即 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$. 故 $B(x_0, r)$ 是开集.

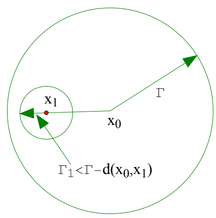

图 1.5: picc4

注 开球是开集, 开集并不一定是开球. 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定理 1.2.8 设X是距离空间, X中的开集具有以下性质

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个开集的并集是开集,

(3)任意有限多个开集的交集是开集.

证明 (1) 是显然的.

(2) G_α是开集，其中$\alpha \in I$. 要证明, $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$是开集. $\forall x \in G, \exists \alpha_0 \in I, x \in G_{\alpha_0}, \because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ 存在开球 $B(x, r)$, 使得$B(x, r) \subset G_{\alpha_0} \subset G$. $\therefore G$ 开.

(3) 设 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$, 其中 G_k 是开集 $(k = 1, 2, \cdots, n)$,$\forall x \in G$, 则 $x \in G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$. G_k 开, 存在$B(x, r_k) \subset G_k$, 取$r = \min\{r_k\}$, $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 即$B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. □

注1 以上定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的定义.

注2 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathcal{J}$ 满足上述三个性质，我们则把它们称为开集, 或者说 $\mathcal{J}$ 是 X 中的一个拓扑，$(X, \mathcal{J})$成为一个拓扑空间.

即开集决定了空间的拓扑性质，进一步我们有

定义 1.2.9 设(X,d_1), (X,d_2) 是定义在同一个集合X 上两个距离空间, 称距离d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1>0$, $C_2>0$, 使得对于$\forall x,y$ 都有 $C_1d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C_2d_1(x,y)$,

注 事实上，距离d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族$\mathcal{J}_1$ 和$\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x,y)=(|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}, \tag{1.2.6}$$

则d_1, d_2, d_∞ 在$\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对有：

(1) $d_\infty(x,y)\le d_2(x,y)\le d_1(x,y)$,

(2) $d_2(x,y)\le\sqrt{2}d_\infty(x,y)$,

(3) $d_1(x,y)\le\sqrt{2}d_2(x,y)\le 2d_\infty(x,y)$.

注 结果可推广到$\mathbb{R}^n$ 中.

1.2.3 连续映射

类似于实数空间的连续函数, 我们可以定义距离空间上的连续映射.

定义 1.2.11 令(X,d), (X_1,d_1)是距离空间,$T:\ X\to X_1$是一个映射,$x_0\in X$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当 $d(x,x_0)<\delta$时有

$$d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon,$$

则称f在x_0点连续, 若在X中的每一点都连续则称 T在X上连续.

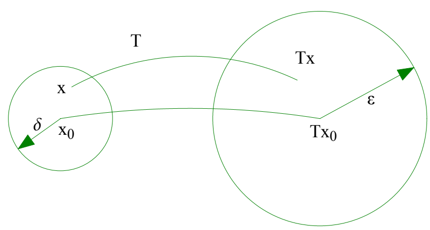

图 1.6: 连续映射

特别地, 如果

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T是等距映射.

注1 等距映射是连续映射.等距映射是1-1的,但不一定是映上的(满射).

注2 若X, X_1上存在一个等距在上的映射$T: X \to X_1 \quad (T(X) = X_1)$, 则称$X_1$和$X$等距. 等距的两个空间可以在等距的意义下认为是同一空间.

有了开集的概念，我们可以用开集来描述连续映射.

定理 1.2.12 设 T 是从距离空间 (X, d) 到距离空间 (X_1, d_1)的映射， T 是连续的当且仅当 (X_1, d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X, d) 中的开集.

证明 假设 T 是连续的，$S_1 \subset X_1$ 是开的，$S \subset X$ 是它的原象. 如果 $S = \emptyset$, 则命题成立. 设 $S \neq \emptyset$, 对于 $\forall x_0 \in S$, 令 $y_0 = Tx_0$. 因为 S_1 是开的，于是存在 $B(y_0, \varepsilon) \subset S$, 因为 T 是连续的，因此存在 $\delta > 0$, 且$TB(x_0, \delta) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset S$, 即 x_0 是一个内点，由于 x_0 是任意的，则 S 是开集.

反之，假设 (X_1, d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X, d) 中的开集. 对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的，于是它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的，且 $x_0 \in N$, 因此 N 包含一个 x_0 的 δ 领域 $B(x_0, \delta)$, 即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, T 在 x_0 点连续. 由于 x_0 是任意的，则 T 在 X 上连续. □

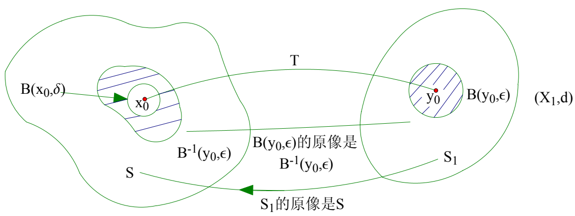

图 1.7: picc1

注1 定理的证明可以不用 ε, δ 这些涉及距离的术语，仅仅使用领域、开集这些拓扑的概念就能证明. 即连续映射是一个拓扑概念，或者说可以把这条定理作为拓扑空间中连续函数的定义.

注2 由此很容易推出：两个连续函数的复合函数也是连续的.

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X, d) 到距离空间 (X_1, d_1)的映射， T 在 x_0 点是连续的当且仅当对于每个满足条件 $\lim x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n). \tag{1.2.8}$$

证明 设 T 是连续的，点列 x_n 收敛，且 $\lim x_n = x_0$. 于是对于 $\forall > 0$,, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时，有$d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$. 因为 $\lim x_n = x_0$，则存在 N, 当 $n > N$ 时 $d(x_n, x_0) < \delta$, 于是 $d_1(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon$, 即 $\lim T(x_n) = T(x_0) = T(\lim x_n)$.

反之，如果 $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ 可推出 $T(x_n)\to T(x_0)$, 如果 T 在 x_0 点不连续，那么存在 $\varepsilon_0>0$, 对于任何的 $\delta>0$, 存在一个 x_0 使得 $d(x,x_0)<\delta$, 但是 $d_1(T(x)-T(x_0))\geq \varepsilon-0$. 于是对应于 $\delta=1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$, 我们有 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$, 满足 $d(x_n,x_0)<\frac{1}{2}$, 但是 $d_1(T(x_n),T(x_0)\geq\varepsilon_0)$ $(n=1,2,\cdots)$. 即 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$，但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$, 这与条件矛盾. □

注　定理显示，如果 T 连续，则极限运算可以和 T 交换顺序.

例 1.2.14　设 $X=C[a,b]$, 令 $T(x)=\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t$, 则 T 是从 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 由于

$$|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t-\int_a^b y(t)\mathrm{d}t|\leq\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t\leq|b-a|d(x,y),$$

所以 T 是连续的. 当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列，由定理1.2.13 有

$$\lim\int_a^b x_n(t)=\int_a^b\lim x_n(t).$$

注意到 $\{x_n(t)\}$ z在 $C[a,b]$ 的收敛是一致收敛，即当 $\{x_n(t)\}$一致收敛时，积分和极限可以交换顺序. 这是数学分析中熟知的结论. □

§1.3　闭集　可分性　列紧性

1.3.1 距离空间的闭集

定义 1.3.1　X 是一个距离空间, 一个集合 $A\subset X$ 称为是闭的，如果它的补集 $A^c=X\setminus A$ 是开的.

定理 1.3.2　X是一个距离空间, 则 $\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\leq r\}$ 和 $S(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)=r\}$（见定义1.2.1）是闭集.

证明　设 $y\in\overline{B}(x_0,r)$, 那么 $d(x,x_0)=\alpha>r$，令 $\beta=\alpha-r>0$, 因为

$$d(x_0,z)\geq d(y,x_0)-d(y,z)=\alpha-d(y,z),$$

于是我们有 $B(y,\beta)\subset\overline{B}(x_0,r)^c$. 事实上，如果 $d(y,z)<\beta$, 则 $d(x_0,z)>\alpha-\beta=r$. (见图**??**)，即 $\overline{B}(x_0,r)^c$ 是开的，于是 $\overline{B}(x_0,r)$ 是闭集.

从 $S(x_0,r)^c=B(x_0,r)\cup\overline{B}(x_0,r)^c$ 是开的，因此 $S(x_0,r)$ 是闭集. □

令 $\mathcal{F}$ 记距离空间 (X,d) 中的全体闭集，通过使用关于补集的De Morgan 公式，结合定理1.2.8，我们有

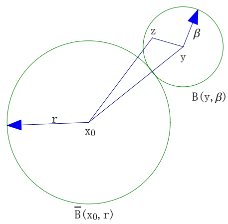

图 1.8: 闭集

定理 1.3.3 设(X,d)是距离空间, 则

(1)全空间与空集是闭集,

(2)任意多个闭集的交是闭集,

(3)有限多个闭集的并是闭集.

1.3.2 闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂，这从Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面我们从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X是一个距离空间，$A\subset X, x\in X$, 如果对于$\forall\varepsilon>0$, 球$B(x,\varepsilon)$中都包含A中的点, 即

$$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \quad (\forall\varepsilon>0), \tag{1.3.1}$$

则称 x为 A的接触点.

注 x 为A的接触点并不要求 $x\in A$,.

定义 1.3.5 X是一个距离空间, $A\subset X, x\in X$, 如果对于$\forall\varepsilon>0$, 球$B(x,\varepsilon)$中都包含A中不同于 x的点, 即

$$B(x,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset \quad (\forall\varepsilon>0), \tag{1.3.2}$$

则称 x为 A的聚点.

注 A的聚点一定是 A的接触点，反之不然.

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组（见例**??**）, 定义

$$d(x,y)= x \text{ 和 } y \text{ 中取值不同的个数}.$$

设 A 是距离空间 (X,d)中的任意点集，由于 $B(x,\frac{1}{2})=\{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.7 设 $X = C[0,T]$, $A = \{x(t)|x(0) = 0,\ 且\ |\ x(t)\ |< 1\ \ (0 \le t \le T)\}$（见图1.9），我们注意到 $x_0(t) \equiv 1$ 不是 A 的接触点. 因为对于所有的 $x \in A$, $d(x_0, x) = 1$.

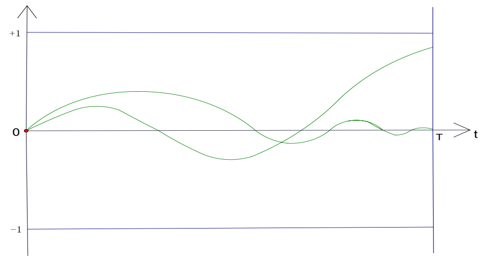

图 1.9: pic6

例 1.3.8 设 X仍然表示由$[0,T]$区间上全体连续函数组成的集合, 但是距离定义为（见例1.1.15, 1.1.12式）

$$d_2(x,y) = \{\int_0^T \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}.$$

A 如同上例所定义，则可以证明 $x_0 \equiv 1$是 A 的接触点.

我们可以用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X是一个距离空间, $A \subset X$, A的接触点的全体称为A的闭包, 记为$\overline{A}$.

定理 1.3.10 设X是距离空间, $A \subset X$, A是闭集当且仅当$A = \overline{A}$.

证明 首先假定$A = \overline{A}$，我们要证明A^c 是开的. 令 $x \in A^c$, 因此 x 不是 A 的接触点，于是存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$，因此 A^c 是开的，即 A是闭集.

假设 A是闭集，由于 $A \subset \overline{A}$，我们只需证明 $\overline{A} \subset A$. 令 $x \in \overline{A}$, 假如 $x \overline{\in} A$，即 x 属于开集 A^c, 于是存在 $\varepsilon_0 > 0$, $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, 这和 $x \in \overline{A}$ 矛盾. □

定理 1.3.11 设X是距离空间,$A \subset X$, A 是闭集当且仅当 A 中的收敛点列 $\{x_n\} \subset A$ 的极限属于 A.

证明 首先假设 A 是闭的，且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛，令 $x_0 = \lim x_n$, 我们要证明 $x_0 \in A$. 因为 $x_0 = \lim x_n$, 因此对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n 满足 $|\ x_n - x_0\ |< \varepsilon$, 即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$，这意味着 x_0 是 A 的接触点. 根据定理1.3.10 有 $x_0 \in A$.

反之假定每个收敛点列的极限都属于 A. 令$x_0 \in \overline{A}$，那么在 $B(x_0, 1/n) \cap A$中至少存在一点 x_n, 因为 $x_0 = \lim x_n$, 因此 $x_0 \in A$. 即 A 包括了 A 的所有接触点，因此 A 是闭的. □

定义 1.3.12 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，$x \in X$, 称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) |\ \omega \in A\} \tag{1.3.3}$$

为点 x 到 集合 A 的距离.

注1 当 A 是闭集时，由下确界的定义和定理1.3.11可以证明存在点 $y \in A$, 使得：

$$\| x - y \| = d(x, A).$$

注2 由定理1.3.10、1.3.11 可以证明

$$\overline{A} = \{x|\ d(x, A) = 0\} \tag{1.3.4}$$

且$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

1.3.3 可分的距离空间

定义 1.3.13 设A, B是距离空间X中的点集,如果$\overline{B} \supset A$,

则称B在A中稠密.

用$\varepsilon - \delta$语言：$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 存在$y \in B$,使得$d(x, y) < \varepsilon$.即A中的每一点都可以用B中的点来逼近.

例 1.3.14 $A = [0, 1]$, B是$[0, 1]$中全体有理数, $\overline{B} = [0, 1]$, $\overline{B} \supset A$. 所以B在A中稠密, 这里$B \subset A$且$B \neq A$.

例 1.3.15 如果A是$[0, 1]$中全体无理数, B是$[0, 1]$中的全体有理数, 我们仍有$\overline{B} \supset A$, 即B在A中稠密, 但是$B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 设X是距离空间, 如果X中存在一个可数稠密子集, 则称X是可分的. 对于子集$A \subset X$, 如果X中存在可数子集B, 使得B在A中稠密, 则称A是可分的.

由定义我们容易有以下命题

命题 1.3.17 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$: 对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x \in X$, 至少存在一个 x_n, 使得$d(x_n, x) < \varepsilon$.

注 命题说明可分距离空间中的任意一的点可以通过一个可数集来近似逼近.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$是可分的.

$\mathbb{R}^n$中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在$\mathbb{R}^n$中稠密.

例 1.3.19 $C[a, b]$是可分的.

证明 由Weierstrass 定理, $\forall x(t) \in C[a, b]$, 存在多项式$P_n(t)$一致收敛到$x(t)$. 即对于$\forall x(t) \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists P_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. 其中$a_i \in R(i =$

$1,2,\cdots,n)$, 使得$|\ P_n(t)-x_n(t)\ |<\varepsilon(\forall t\in[a,b])$. 而$P_n(t)$又可以用$P_n^r(t)$一致逼近, 这里$P_n^r(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$, 其中$r_0,\cdots,r_n$是有理数. $\because\ \{P_n^r(t)\}$是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. □

例 1.3.20 l^∞是不可分的.

证明 l^∞={全体有界的实数列}. $z=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}\in l^\infty$, 定义$d(x,y)=\sup_k\ |\ \xi_k-\eta_k\ |$. 容易验证,$d$是$l^\infty$上的一个距离.

设$x=\{\xi_k\}$,其中$\xi_k=0$,或者是1. 这样的x的全体记为A. 显然A的势是连续统(二进位制小数对应$[0,1]$上的全体实数). $\forall x,y\in A,x\neq y$,则$d(x,y)=\sup_k$ $|\ \xi_k-\eta_k\ |=1$.

假如l^∞可分, 存在可数的稠密子集E. 对于$\forall x\in E$, 作开球$S(x,\frac{1}{3})$, 则$l^\infty\subset\bigcup_{x\in E}S(x,\frac{1}{3})$,于是$A\in\subset\bigcup_{x\in E}S(x,\frac{1}{3})$. 由于 A是不可数集, 所以至少存在两个不同的元素$x,y\in A$. $x,y\in S(x_0,\frac{1}{3})$, $x_0\in E$. 这与 $d(x,y)=1$矛盾. □

下面的例子说明，距离空间是否可分, 与空间上距离的定义有密切的关系.

例 1.3.21 空间s可分. s是全体实数组成的集合, 其上距离定义为（见例1.1.17和1.1.13式）

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}.$$

令$s_0=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)$, 其中$r_k(k=1,2,\cdots)$是有理数, 所以$s_0$是可数集. 对于任意的$x\in S,x=(\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots)$, 由于$s$中的收敛是按坐标收敛,对于每一个$\xi_j(j=1,2,\cdots)$,存在$r_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty)$, 其中$r_j^{(n)}$是有理数,令

$$x_n=(r_1^{(n)},r_2^{(n)},\cdots,r_j^{(n)},\cdots,r_n^{(n)},0,\cdots)\in s_0,$$

且$x_n\to x$, 所以s可分.

注 因为l^∞是全体有界的实数列，所以做为集合 l^∞是 s 的一个子集合. 但作为距离空间 l^∞ 不可分, 而 s 可分. 其原因在于两个距离空间中距离定义的不一样.

1.3.4 列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质. 闭区间满足有限覆盖定理. 进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质. 我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）. 紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：序列紧(Weierstrass)定理, Borel 紧（有限覆盖定理）, 完全有界.

下面我们主要考虑序列紧（列紧，自列紧）. 在数学分析中，根据Bolzano-Weierstrass 定理我们知道，实数域中每个有界的无穷点集至少有一个聚点，下面将在一般的距离空间上研究这种性质.

定义 1.3.22 设A 是距离空间X 中的一个子集，如果A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列，则称为A 是列紧的集合. 闭的列紧集称为是自列紧集. 距离空间X 称为是列紧的，如果X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在A 中. 例如$(0,1]$ 在$\mathbb{R}$ 中是列紧的，但不是自列紧的. 因为$\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在$(0,1]$ 中.

列紧的空间是完备的. 事实上，对于Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个Cauchy 列收敛.

定理 1.3.23 设X 是一个距离空间, $A \subset X$ 是列紧集的，则A 是有界集.

证明 假设A 是无界的. 于是可从A 中选取一个点列$\{y_n\}$，使得$d(y_n, a) > n$，其中a 是X 中的一个点. 由于这个点列的任何子列都是无界的. 所以这个点列没有收敛的子列，（因为收敛的点列是有界的）. 这与A 是列紧相矛盾，所以A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 在一般的距离空间中，有界的闭集不一定是列紧的.

请读者举出例子.

定理 1.3.24 设f 是定义在列紧的距离空间(X, d) 上的实值连续函数，则f 是有界的，即：

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.5}$$

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.6}$$

是有限的. 进一步，存在点x_{max} 和点x_{min} 使得

$$f(x_{max}) = M, \quad f(x_{min}) = m.$$

证明的方法与数学分析中证明闭区间上连续函数性质的方法类似，请读者给出证明.

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集是列紧集，例如闭区间$[a,b]$ 是紧集.

定理 1.3.26 (Arzelà 定理) $C[a,b]$ 中的子集A 是列紧的当且仅当A 中的函数是一致有界和等度连续的.

即存在$K > 0$, 使得对于每一点$t \in [a,b]$ 及一切$x \in A$,

$$| x(t) | \leq K, \tag{1.3.7}$$

并且对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$| t_1 - t_2 | < \delta$ 时,

$$| x(t_1) - x(t_2) | < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in\ A). \tag{1.3.8}$$

证明参见附录.

例 1.3.27 $A = \{x(t) \in C^1[a,b] \mid | x(t) | \leq M, | x'(t) | \leq M_1\}$, 则$A$是$C[a,b]$中的列紧集. ($C^1[a,b]$ 是在$[a,b]$中全体连续可微的函数).

一致有界：集合中的条件已满足.

等度连续：可以由中值定理得到，

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在$\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 \mid t_2 - t_1 \mid .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 （l^p 空间的列紧集）设$A \subset l^p \quad p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

(1)A 一致有界：

$$\exists M > 0, \ \ \text{对于}\ \ \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A, \quad \text{有}\ \ (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < M.$$

(2)A 等度收敛：

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N, \ \ \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A, \quad \text{有}\ \ (\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

证明参阅附录.

§1.4 完备的距离空间

1.4.1 Cauchy列 完备的定义

一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛，除了点列自身的构造性质以外，和空间的结构有很大关系.

例 1.4.1 设 $X=(0,1]$ 赋以实数空间通常的距离，$\{\frac{1}{n}\}$ 是 $X=(0,1]$ 中的Cauchy列，但是它在 $X=(0,1]$ 中不收敛，因为 $0\in X$.

注 面的例子显示，一个的Cauchy 列可以不收敛，问题在于基本空间存在“缺陷”，或者说距离空间中有一些“空洞”. 在例1.4.1中，问题产生于“缺失”0 点. 如果我们加上这样的点，则 $\{\frac{1}{n}\}$就收敛. 可以证明，在新的空间$X_1=(0,1]\cup\{0\}$中每个Cauchy列都收敛. 即在一个“更大的”空间，点列收敛的充要条件是这个点列是Cauchy 列.

类似于实数空间，在距离空间, 我们也引进Cauchy列、完备性这些概念.

定义 1.4.2 设(X,d)是一个距离空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(X,d)$, 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$m,n\geq N$时,有

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon. \tag{1.4.1}$$

称$\{x_n\}$是一个Cauchy列.

命题 1.4.3 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X,d) 中的Cauchy列, 那么集合 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是有界的.

证明 对于 $\varepsilon=1$, 存在N, 当 $n,m>N$时. 有 $d(x_n,x_m)<1$. 令

$$\beta=\max\{d(x_1,x_2),d(x_1,x_3),\cdots,d(x_1,x_N)\}$$

则对于任何的自然数 n, $d(x_1,x_n)\leq\beta+1$. 进一步由三角不等式可证对于任何的 i 和 j 有 $d(x_i,x_j)\leq 2(\beta+1)$. □

命题 1.4.4 收敛的点列一定是Cauchy列.

证明 令 x_0 是 $\{x_n\}$ 在 (X,d) 中的极限, 那么对所有的 n,m 有

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x_0)+d(x_m,x_0).$$

由于 $\lim x_n=x_0$, 于是对于 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n,m>N$时, 有 $d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2},d(x_m,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 当 $n,m>N$ 时, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. 因此 $\{x_n\}$ 是一个Cauchy列. □

注 在一般的距离空间, Cauchy列不一定收敛.

具有Cauchy列都收敛这样性质的距离空间是非常重要的，我们给出定义：

命题 1.4.5 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X,d)中的Cauchy列, 那么集合 $\{x_1,x_2,\cdots\}$是有界的.

证明 对于$\varepsilon=1$,存在N, 当$n,m>N$时. 有$d(x_n,x_m)<1$.令

$$\beta=\max\{d(x_1,x_2),d(x_1,x_3),\cdots,d(x_1,x_N)\}$$

则对于任何的自然数 n, $d(x_1,x_n)\leq\beta+1$. 进一步由三角不等式可证对于任何的 i 和 j 有 $d(x_i,x_j)\leq 2(\beta+1)$. □

注 完备性是一个十分重要的概念. 有了完备性, 极限运算(微分和积分)才能很好的进行. 在一个完备的距离空间，要判断一个点列是否收敛，仅仅要判断它是否是Cauchy列.

例 1.4.6 设 Q 为全体有理数组成的集合，赋以通常的距离成为一个距离空间，但是它不是完备的. 以 π 的前 n 位数字组成的数列 $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415\cdots\}$ 是一个Cauchy列，但是它在 Q 中不收敛，因为 π 不是有理数.

注 由Cauchy 列的定义，一的点列是否是Cauchy列是由这个点列自身的性质决定的，而它是否收敛，取决于点列以外的信息，即空间是否完备. 在例**??**中，由于无理数的“缺失”，点列不收敛.

命题 1.4.7 完备空间的任何一个闭子空间也是完备的.

证明 $X_1 \subset X, X_1$是闭的, 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, 是Cauchy列,由于$X$是完备的，$\{x_n\}$收敛到 x, $x \in X$. 由 X_1闭, 所以 $x \in X_1$ (因为X_1包含了它的所有接触点), 所以X_1是完备的. □

1.4.2 完备与不完备距离空间的例

例 1.4.8 $\mathbb{R}^n$是完备的距离空间.

例 1.4.9 $C[a,b]$是完备的距离空间.

证明 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n(t)\}$是$C[a,b]$中的Cauchy列.我们要证明以下三点.

i)找出$x(t)$(即它的极限),

ii)$x(t) \in C[a,b]$,

iii)$x_n(t) \to x(t)(n \to \infty)$(按距离收敛).

$\because \{x_n(t)\}$是$C[a,b]$中的Cauchy列, $\therefore$对于$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n, m \geq N$时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, 即 $\max_{a\leq t\leq b} \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon$. $\therefore$ $\forall t \in [a,b], \mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon$ $(n \geq N)$. 即$\{x_n(t)\}$ 是$\mathbb{R}$中的一个Cauchy数列, 由于$\mathbb{R}$的完备性, 所以存在$x(t)$使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty),$$

下面证$x(t) \in C[a,b]$. $\because n, m \geq N$ 时

$$\mid x_n(t) - x_m(t) \mid < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b], \tag{1.4.2}$$

令 $m \to \infty$, 可知

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid \leq \varepsilon (n \geq N), \forall t \in [a,b], \tag{1.4.3}$$

即$x_n(t)$一致收敛到 $x(t)$. $\therefore x(t)$连续, 且$n \geq N$时

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],$$

$\therefore \max_{a\leq t\leq b} \mid x_n(t) - x(t) \mid \leq \varepsilon$, 即$d(x_n, x) < \varepsilon, \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

例 1.4.10 l^∞ 是完备的（参见例1.1.4）.

证明 设 $\{x_n\}=\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 中的Cauchy列, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n,m\geq N$时

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

即$\sup_k\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\mid<\varepsilon$. 于是对于任意的$k$,$\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\mid<\varepsilon\quad(n,m>N)$.即$\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$是 $\mathbb{R}$ 中的Cauchy列, 由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 ξ_k, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k.$$

由于$n,m>N$时$\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\mid<\varepsilon$,令$m\to\infty$,有

$$\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\mid\leq\varepsilon\quad(n\geq N).\tag{1.4.4}$$

所以对于 $\forall\ k$

$$\mid\xi_k\mid\leq\mid\xi_k^N-\xi_k\mid+\mid\xi_k^N\mid\leq\varepsilon+\mid\xi_k^N\mid.$$

由于 $x_N=\{\xi_1^N,\xi_2^N,\cdots,\xi_k^N,\cdots\}$有界, 所以 $\{\xi_k\}$ 是有界数列, $\{\xi_k\}\in l^\infty$,且$n\geq N$时，对 $\forall k$,有

$$\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\mid\leq\varepsilon,$$

即 $d(x_n,x)=\sup_k\mid\xi_k^{(n)}-\xi_k\mid\leq\varepsilon$. $\therefore x_n\to x=\{\xi_k\}$. 故 l^∞ 完备. □

例 1.4.11 在距离空间 $C[0,T]$ 中, $P[0,T]$记定义在 $[0,T]$ 上的全体多项式. 显然 $P[0,T]\subsetneqq C[0,T]$. 距离空间 $C[0,T]$是完备的（见定理1.4.9）, 但是 $P[0,T]$ 在 $C[0,T]$ 中不是闭的. 事实上

$$\{1,1+t,1+t+\frac{1}{2!}t^2,1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3,\cdots\}$$

收敛到 e^t, 但 $e^t\in P[0,T]$, 由定理1.4.7, 子空间 $P[0,T]$ 在距离

$$d(p_1,p_2)=\sup_{0\leq t\leq T}|p_1(t)-p_2(t)|$$

下不完备, 其中 $p_1(t),p_2(t)\in P[0,T]$.

例 1.4.12 设 X 是全体在 $[a,b]$上定义的连续函数, 在X上定义距离

$$d(x,y)=\int_a^b\mid x(t)-y(t)\mid dt,\tag{1.4.5}$$

X 是一个距离空间, 但不完备（参见例1.1.8）.

令

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n},\\ 1 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\le t\le 1,\\ \text{直线连接} & \text{其它}.\end{cases}$$

$\{x_n\}$是X中的Cauchy列, 事实上

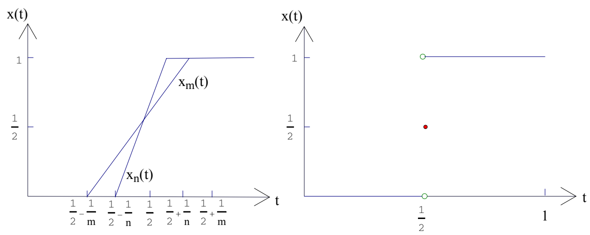

图 1.10: picc5

$$d(x_n,x_m)=\int_0^1 \mid x_m(t)-x_n(t)\mid dt=\frac{1}{2}\mid \frac{1}{n}-\frac{1}{m}\mid\to 0\ (m,n\to\infty).$$

若 X完备,则存在X中的连续函数$y(t)$, 使得$d(x_n,y)\to 0\quad (n\to\infty)$. 考虑

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\dfrac{1}{2},\\ 1 & \dfrac{1}{2}<t\le 1,\\ \dfrac{1}{2} & t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

由三角不等式

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt &\le \int_0^1 \mid x(t)-x_n(t)\mid dt+\int_0^1 \mid x_n(t)-y(t)\mid dt\\ &=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+d(x_n,y)\to 0.\end{aligned}$$

因此 $\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid dt=0$. 但 $x(t)-y(t)$只在$t=\frac{1}{2}$ 点不连续, 在 $[1,\frac{1}{2})$上$x(t)=y(t)=0$, 在$(\frac{1}{2},1]$上$x_0(t)=y(t)=1$, 推出 $y(t)$在$[0,1]$ 上不连续, 矛盾.

注 $x(t)$ 实际上是 x_n 在以上距离意义下的极限，$d(x_n,x)\to 0$. 但 $x(t)$ 已不是连续函数, 说明X是不完备的.

1.4.3 距离空间的完备化

尽管存在不完备的距离空间，这一小节要证明任何一个距离空间都可以完备化. 我们先给出一个直观的解释.

设 (X,d) 是一个完备的距离空间， $(X_0,d)\subset(X,d)$ 是一个子空间. 根据命题1.4.7 (X_0,d) 是完备的, 如果 X_0 在 (X_0,d) 中是闭的. 我们知道 $\overline{X}_0$ 在 (X,d) 中是闭的，且是包含它的最小的闭集. 因此 $(\overline{X}_0,d)$是完备的, 且 X_0 在 $(\overline{X}_0,d)$ 中稠. 用通俗的话说，从 (X_0,d) 到 $(\overline{X}_0,d)$ 的过程，我们填满了原来在 (X_0,d) 中存在的“空洞”，使之成为一个完备空间.

例如：有理数全体组成的空间 $\mathbb{Q}$ 是不完备的, 即：存在有理数组成的Cauchy列（见例1.4.6)，它收敛的极限不是有理数. 而实数 $\mathbb{R}$ 是一个完备的距离空间, 也就是说我们可以“做闭包”，把 $\mathbb{Q}$ 扩展为完备的实数空间 $\mathbb{R}$. 或者说是把 $\mathbb{Q}$ 嵌入到另一个完备空间 $\mathbb{R}$ 中，这里嵌入意味着：

i) $\mathbb{Q}$ 中元素的距离不变(等距离嵌入);

ii) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠;

iii) $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化空间.

对于一般的距离空间 (X,d), 如果 X不完备, 我们可以使用类似的方法, 把 X嵌入到一个完备的距离空间中，或者说把 X 扩充进一些元素，使之完备.

定理 1.4.13 任何距离空间(X,d), 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, 使得 (X,d)和 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$的一个稠子空间等距, 且在等距的意义下,这样的空间$(\widetilde{X},\widetilde{d})$是唯一的.

称$(\widetilde{X},\widetilde{d})$为$(X,d)$的完备化空间.

证明 1. 构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$.

(1) 把(X,d)中的Cauchy列全体表示为 $\widetilde{X}$，如果两个Cauchy列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, 则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素, 即 $\widetilde{x}=\widetilde{y}$. 对于 $\widetilde{X}$ 中的元素 $\widetilde{x}=\{x_n\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}$ 定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.4.6}$$

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$是X中的Cauchy列, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$m,n>N$时, $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$, 且 $d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$，于是由三角不等式

$$|\,d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\,|\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon.$$

$\therefore\{d(x_n,y_n)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$中的一个Cauchy数列, 于是 $\{d(x_n,y_n)\}$ 收敛. 这说明 $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 有意义.

(2)证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ 的选择无关. 如果$\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x_n^{'}\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y_n^{'}\}$. $\{x_n^{'}\}$, $\{y_n^{'}\}$ 也是 X 中的Cauchy列, 则 $d(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n^{'},y_n^{'})$. 事实上, 因为

$$| d(x_n,y_n)-d(x_n^{'},y_n^{'}) |\leq d(x_n,x_n^{'})+d(y_n,y_n^{'})\to 0(n\to\infty).$$

$\therefore d(x_n,y_n)-d(x_n^{'},y_n^{'})\to 0(n\to\infty)$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n^{'},y_n^{'})$. 即 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ 相对应的Cauchy列的选择无关.

容易验证 $\widetilde{d}$是$\widetilde{X}$ 中的距离.

2.证明 (X,d) 与 $(\widetilde{X},\ \widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距.

设 $\widetilde{X}_0$ 是由 X 中元素作成的常驻列 $\{x\}$ 的全体, 显然 $X_0\subset X, X_0$ 是 X 的一个子空间.令 $T:(X,d)\to(\widetilde{X},\ \widetilde{d})$, $x\in X$, $Tx=(x,x,\cdots)$.

(1) 显然 $Tx\in\widetilde{X}, x,y\in X$, $\widetilde{x}=(x,x,\cdots)\widetilde{y}=(y,y,\cdots), \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim\limits_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y)$. 即 $T:X\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射.

(2)$TX=\widetilde{X}_0$在$\widetilde{X}$ 中稠

$\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$, 令$\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$(由$x=\{x_n\}$产生),$\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$. 以下证$\widetilde{x}_k\to x(k\to\infty)$.$\forall\varepsilon>0,\because\{x_n\}$是Cauchy列,$\therefore$存在 N, 当$k,n\geq N$时, $d(x_n,x_k)<\varepsilon$. 即

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leq\varepsilon\quad(k\geq N).\tag{1.4.7}$$

所以 $(\widetilde{X}_0,\widetilde{d})$ 在 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中稠. 即 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠.

3.证明 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$是完备的.

(1)设 $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的Cauchy列. $\because\widetilde{X}_0$在$\widetilde{X}$ 中稠, $\therefore$对于每一个$\widetilde{x}_n$, 存在一个 $\widetilde{y}_n=\{y_n,y_n,y_n,\cdots\}\in\widetilde{X}_0$, 使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots).\tag{1.4.8}$$

(2)令 $\widetilde{y}=(y_1,y_2,\cdots)$, 由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$中的Cauchy列,

$$\begin{aligned}d(y_n,y_m)&=d(\widetilde{y}_n,\widetilde{y}_m)\\&\leq d(\widetilde{y}_n,\widetilde{x}_n)+d(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)+d(\widetilde{x}_m,\widetilde{y}_m)\\&<\frac{1}{n}+d(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)+\frac{1}{m}\to 0(n,m\to\infty)\end{aligned}$$

$\therefore\widetilde{y}$ 是 (X,d)中的一个Cauchy列,即 $\widetilde{y}\in\widetilde{X}$.

(3)我们有

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y})\leq\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)+\widetilde{d}(\widetilde{y}_n,\widetilde{y})\leq\frac{1}{n}+\widetilde{d}(\widetilde{y}_n,\widetilde{y})\to 0(n\to\infty).\tag{1.4.9}$$

即 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{y}, \therefore \widetilde{X}_0$ 是完备的.

唯一性. 如果存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化, 于是存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X等距, 因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距, 设它们之间的等距映射为 φ. 任取 $x \in \widetilde{X}$, 存在 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_0$, 使得$\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0(n \to \infty)$. 设 $\widetilde{y}_n = \varphi(\widetilde{x}_n)$, $\widetilde{y}_n$是$\widetilde{Y}$ 中的收敛点列, 即存在 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, 使得 $\widetilde{y}_n \to \widetilde{y}(n \to \infty)$.定义$\widetilde{x} \to \widetilde{y}, (x \in \widetilde{X})$. 这是从 $\widetilde{X}$ 到 $\widetilde{Y}$ 的等距映射, 即在等距的意义下, 完备化是唯一的. □

注1 以上的证明是一个严格的且十分形式化证明. 读者在学习的时候要结合有理数的完备化（有理数如何“完备成”实数）这个具体的背景，把上述的每一个步骤与有理数完备化的每一个步骤相对照，才能够真正理解上述证明. 例如 π、$\sqrt{2}$ 对应的Cauchy数列的“代表元”可以是

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \cdots\}, \tag{1.4.10}$$

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142 \cdots\}, \tag{1.4.11}$$

$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 就是由这样的一些Cauchy列组成的. 其中的距离

$$d(\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \cdots\}, \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142 \cdots\}) \tag{1.4.12}$$

是数列

$$\{3-1, 3.1-1.4, 3.14-1.41, 3.141-1.414, 3.1415-1.4142, \cdots\}$$

的极限，等于$\pi - \sqrt{2}$. 而

$$\{3, 3, 3, \cdots\},\ \{3.1, 3.1, 3.1, \cdots\},\ \{3.14, 3.14, 3.14, \cdots\},\ \cdots \tag{1.4.13}$$

$$\{1, 1, 1, \cdots\},\ \{1.4, 1.4, 1.4, \cdots\},\ \{1.41, 1.41, 1.41, \cdots\},\ \cdots \tag{1.4.14}$$

是与其相关的常驻列. 读者只有从具体的、简单的实例中才能切实了解 $\widetilde{X}, \widetilde{d}$ 的意义.

注2 从形式上看，完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 并不包含原来的空间，但是一定要注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 $\widetilde{X}_0$, 它和原来的空间 (X, d)等距同构，也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$中，作为它的一个稠子集.

注3 距离空间完备化以后, 空间中的Cauchy列都收敛. 从另一个角度说, 空间 X被适度地扩大为 $\widetilde{X}$. 原来的“空洞”已经被全部填满. 这点是十分重要的. 以后我们会看到, 这使得一些在原空间 X 中无解的问题(例如微分方程), 在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有“较弱”意义下的解.

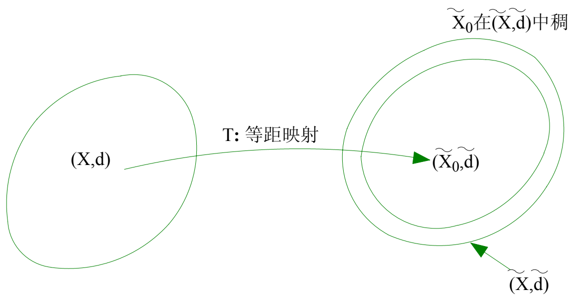

图 1.11: picc3

§1.5　完备距离空间的性质和一些应用

1.5.1 闭球套定理

在完备的距离空间，类似于数学分析中的区间套定理, 我们有以下定理

定理 1.5.1　X是完备的距离空间, $\overline{S}_n = \overline{S}(x, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$是$X$中的一系列闭球套：

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \tag{1.5.1}$$

且$r_n \to 0(n \to \infty)$, 则存在X中唯一的一点$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$.

证明　设$\{x_n\}$是球心组成的点列, 所以$d(x_n, x_m) < r_n(m > n)$. $\because r_n \to 0(n \to \infty), \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是Cauchy列. $\because X$ 完备, $\therefore \exists x$, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

由于 $d(x_n, x_m) < r_n$, 由距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \le r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \ge N)$, 于是我们有$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)(n \ge N)$. 如果存在$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, 则对于任意的$n$, 有$d(x_n, y) \le r_n$, 令$n \to \infty$, 则 $d(x, y) = 0$, 即$x = y$.
□

1.5.2 Baire纲定理

定义 1.5.2 设(X,d)是距离空间, $E\subset X$, 如果E不在X的任何开集中稠密, 则称E是疏集.

注1 疏集E中没有内点(因为$x\in E$,如果 x是内点，存在$S(x,r)\subset E$, 则E在$S(x,r)$中稠).

注2 Cantor集是疏集（Cantor集没有内点）.

定义 1.5.3 如果一个集合E可以表示成为可数多个疏集的并集, 即

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n, \tag{1.5.2}$$

其中E_n是疏集$(n=1,2,\cdots)$, 则称E是第一纲集. 不是第一纲集的集合称为第二纲集.

定理 1.5.4 (Baire) 完备的距离空间是第二纲集.

证明 假如不然.

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 疏集, 所以对于 $\forall$ 开球 S,E_1 在 S 中不稠. $\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$ 使得 $\overline{S}_1\bigcap E_1=\emptyset$且$\overline{S}_1$ 的半径小于1. 同理在 S_1中, 存在$\overline{S}_1$, $\overline{S}_2\bigcap E_2=\emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$. 一直做下去, 我们得到闭球套 $\overline{S}_1\supset\overline{S}_2\cdots\supset\overline{S}_n\supset\cdots$, 且$r_n<\frac{1}{2^n}$. $\because$ X完备, $r_n\to 0$, 由闭球套定理知存在唯一的点$x_0\in X$, $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n$. 但$\overline{S}_n\bigcap E_n=\emptyset$, $\therefore$ 对于 $\forall n, x_0\in\overline{S}_n$, $x_0\overline{\in}E_n$, 与$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n$矛盾. $\therefore X$ 不是第一纲集, 只能是第二纲集. □

例 1.5.5 设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E是非空的，且 E的补集是第一纲集.

证明

但是要举出点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的. 头一个这样的例子是Weierstrass建立的. 下面这个由级数定义的函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b_n\pi x), \tag{1.5.3}$$

其中$0<a<1$, 而b是奇的整数, 且$ab>1+\frac{3}{2}\pi$. 由于这个函数项级数各项连续，且一致收敛, 所以和函数连续. 进一步可以证明$f(x)$在每一点均不可微（证明略）.

1.5.3 不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学中最重要的问题之一. 所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把它映射为自身，即 $Tx = x$.

代数方程、微分方程、积分方程中的许多问题都可以转化为不动点问题. 例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令 $Tx = x^2 - 2x + 1$ 则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x$, $x \in \mathbb{R}$, 也就是说，映射 T 有没有的不动点.

考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\,|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

两边积分,问题转化为积分方程：

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.5}$$

令

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.6}$$

则 T 是一个从 $x(t)$ 到 Tx 的映射. 问题转化为这个积分算子 Tx 是否有不动点, 即在空间 X 是否存在元素 x, 满足 $Tx = x$.

定理 1.5.6 (压缩映射原理–Banach不动点定理) 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$, 如果对于任意的 $x, y \in X$,不等式

$$d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y) \tag{1.5.7}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$, 则存在唯一的 $\overline{x} \in X$, 使得

$$T\overline{x} = \overline{x}.$$

证明 (1) T是连续的. 事实上$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x,y) < \delta$ 时

$$d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) 使用迭代的方法求 $\overline{x}$. 任取 $x_0 \in X$, 令$x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$, $\cdots$, $x_{n+1} = Tx_n$, $\cdots$. 如果 $x_n \to \bar{x}$, 则由 T 连续可推出 $\overline{x} = T\overline{x}$. $\therefore$ 问题转化为 $\{x_n\}$ 是否是Cauchy列. 由于

$d(x_1,x_2)=d(Tx_0,Tx_1)\le\theta d(x_0,x_1)=\theta d(x_0,Tx_0)$

$d(x_2,x_3)=d(Tx_1,Tx_2)\le\theta d(x_1,x_2)=\theta^2 d(x_0,Tx_0)$

$\cdots$

$d(x_n,x_{n+1})\le\theta^n d(x_0,Tx_0)$,

$\cdots$ 于是对于任意的自然数p,

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+p})&\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\\&\le\theta^n d(x_0,Tx_0)+\theta^{n+1}d(x_0,Tx_0)+\cdots+\theta^{n+p-1}d(x_0,Tx_0)\\&<\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0).\end{aligned}$$

$\because 0<\theta<1,\therefore\{x_n\}$是Cauchy列. $\because(X,d)$ 完备, $\therefore$ 存在 $\overline{x}$, 使得 $x_n\to\overline{x}(n\to\infty)$. 由于 T 是连续的，有 $T\overline{x}=\overline{x}$.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得 $T\overline{y}=\overline{y}$. 则

$$d(\overline{x},\overline{y})=d(T\overline{x},T\overline{y})\le\theta d(\overline{x},\overline{y}).$$

由于 $0<\theta<1$, 于是 $d(\overline{x},\overline{y})=0$, 故$\overline{x}=\overline{y}$.

注1 距离空间 (X,d) 完备是必须的.

注2 条件 $0<\theta<1, d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)$, 不能改为 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$.

注3 由于 $d(x_n,x_{n+p})\le\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0)$, 令$p\to\infty$, 其误差为：

$$d(x_n,\overline{x})\le\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0),$$

收敛的速度很快.

注4 定理中并没有要求 T 是线性算子.

定理 1.5.7 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果存在自然数 n_0 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta d(x,y),\tag{1.5.8}$$

其中 $0<\theta<1$, 则 T 有唯一的不动点.

证明 $\because T^{n_0}$ 满足定理 (5.4.6), $\therefore$ 存在$\overline{x}$，使得$T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$. $\because T^{n_0}(Tx)=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x}$, $\therefore T\overline{x}$ 也是T^{n_0}的不动点. $\because T^{n_0}$ 不动点是唯一的, 所以

$$T\overline{x}=\overline{x}.$$

即 $\overline{x}$ 是 T 的不动点.

设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点,则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点, 由 T^{n_0}不动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步地, 我们还有以下的不动点定理.

定理 1.5.8 (Brouwer) 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,设 $T: B \to B$ 是一个连续映射,则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

定理 1.5.9 (Schauder) 设 C 是完备距离空间 X 中的一个闭凸子集, $T: C \to C$, 且$T(C)$列紧,则 T 在 C上必有一个不动点.

1.5.4 压缩映射原理的应用

例 1.5.10 (微分方程)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续,且对于变量 x 满足Lipschitz条件, 即

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \leq K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

则方程(5.4.3) 在 $t = t_0$的某个邻域中有唯一解.

取 $\delta > 0$, 使得$\delta K < 1$, 在空间 $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上考虑如下积分算子:

$$Tx = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau,$$

则 T 是从 $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 到 $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 自身的映射,由于

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= \max_{t_0-\delta \leq t \leq t_0+\delta} \mid \int_{t_0}^{t} [f(x(\tau),\tau) - f(y(\tau),\tau)]d\tau \mid \\ &\leq K \max_{t_0-\delta \leq t \leq t_0+\delta} \int_{t_0}^{t} \mid x(\tau) - y(\tau) \mid d\tau \\ &\leq K\delta \max_{t_0-\delta \leq t \leq t_0+\delta} \mid x(t) - y(t) \mid \\ &= K\delta \cdot d(x,y). \end{aligned}$$

由于 $0 < K\delta < 1$，且 $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 是完备的, 由压缩映射原理, 方程 (5.4.3) 在 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上有唯一解.

例 1.5.11 考虑线性方程组

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1$, 则方程组有唯一解.

设

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.5.10}$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 则 T 是 $\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$ 的一个映射, 由于

$$\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i)]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} | \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} |^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{n} | \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} |^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \theta d(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

其中 $\theta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1$, 根据压缩映射原理, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

例 1.5.12 在上例中，若条件改为

$$\alpha = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.11}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

事实上，如果 n 维向量空间的距离定义为

$$d(x, y) = \max_{1\le i\le n} | \xi_i - \eta_i |, \tag{1.5.12}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. 同样令

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

则

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1,Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} |\,(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)}+b_i)-(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)}+b_i)\,| \\
&= \max_{1\le i\le n} |\,\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})\,| \\
&= \max_{1\le j\le n} |\,\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\,| \cdot \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} |\,a_{ij}\,| \\
&= \alpha\ d(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

根据压缩映射原理, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

注 上述两个不同的条件，都可确定方程组 (1.5.9) 有唯一解，原因在于研究问题时选取的距离不同.

例 1.5.13 Fredhom 积分方程

$$x(t)=\varphi(l)+\mu\int_a^b k(l,s)x(s)ds, \tag{1.5.13}$$

其中 $k(s,t),\varphi(t)$是$a\le t\le b, a\le s\le b$ 上的连续函数.

令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{1.5.14}$$

T是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$的映射, 对于任意的 $x,y\in C[a,b]$, 有

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1,Tx_2) &= \max_{a\le t\le b} |\,\mu\,|\,|\int_a^b [k(t,s)(x_1(s)-x_2(s))]ds\,| \\
&\le \mu\,|\,b-a\,|\,M\max_{a\le t\le b} |\,x_1(t)-x_2(t)\,| \\
&= \mu\,|\,b-a\,|\,Md(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

其中

$$M=\max_{\substack{a\le s\le b\\ a\le t\le b}} |\,k(s,t)\,|\,.$$

当 $\mu\,|\,b-a\,|\,M<1$ 时, 由压缩映射原理，方程 (1.5.13) 有唯一解.

例 1.5.14 Volterra 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.15}$$

其中 $k(t,s)$是$a \le t \le b, a \le s \le b$ 上的连续函数. 令

$$Tx = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射, 对于任意的 $x, y \in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned} | Tx_1 - Tx_2 | &= | \mu | \left| \int_a^t k(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds \right| \\ &\le | \mu | \ M(t-a) \max_{a \le t \le b} | x_1(t) - x_2(t) |, \end{aligned}$$

其中 $M = \max_{\substack{a \le s \le b \\ a \le t \le b}} | k(s,t) |$，进一步有

$$\begin{aligned} | T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\ &\le | \mu |^2 \ M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a \le t \le b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | \, d\tau \\ &= | \mu |^2 \ M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a \le t \le b} | x_1(t) - x_2(t) | \, . \end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$| T^nx_1 - T^nx_2 | \le | \mu |^n \ M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a \le t \le b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.17}$$

所以 $d(T^nx_1, T^nx_2) \le \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2)$, 由于 $\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$,$\therefore$ 对于充分大的 $n, 0 < \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$. 由定理 (5.4.7), 方程 (1.5.15) 存在唯一解.

习题 1

1. 设(X,d)是距离空间, 令$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. 求证$(X,\rho)$也是距离空间.

2. 设$d_1, d_2, \cdots, d_m, \cdots$是集$X$上的距离. 证明
   $(1) d = \sup_{1 \le i \le m} d_i$;
   $(2) d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2}$;
   $(3) d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k}{1+d_k}$
   中的每一个d也是X中的距离.

3. 设X是在$| z | < 1$中解析且在$| z | \le 1$上连续的复函数的全体.在其中定义

   $$d(x,y) = \max_{|t|=1} | x(t) - y(t) | \, .$$

   证明(X,d)是距离空间.

4. 在$\mathbb{R}^1$上定义$d(x,y) = \arctan | x - y |$, 问$(\mathbb{R}^1, d)$是不是距离空间?

5. 在n维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中,对于

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

定义$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mid x_i-y_i \mid$. 其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$n$个正数,证明$d$是$\mathbb{R}^n$中的距离, 并且按距离收敛等价于按坐标收敛.

6. 设X为距离空间, $A\subset X$. 证明A的一切内点组成的集必为开集.

7. 设X按照距离d为距离空间, $A\subset X$非空. 令

$$f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y) \qquad (x\in X).$$

证明$f(x)$是X上的连续函数.

8. 证明:

(1)距离空间中的闭集必为可数个开集的交;

(2)距离空间中的开集必为可数个闭集的并.

9. 设X是完备的距离空间,$\{F_n\}(n=1,2,3,\cdots)$为X中的一列闭集:

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots.$$

并且$F_n\neq\emptyset$, $\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ ($d(F_n)$表示F_n的直径, 即$\{F_n\}$中任意两点的距离的上确界). 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

10. 设X为距离空间,F_1,F_2为X中不相交的闭集. 证明存在X上的连续函数$f(x)$,使得当$x\in F_1$时$f(x)=0$; 当$x\in F_2$ 时$f(x)=1$.

11. 设f是定义在距离空间X上的实函数, 证明f连续的充分必要条件是下列条件之一成立:

(a) 对任何实数α, $\{x:f(x)>\alpha\}$及α, $\{x:f(x)<\alpha\}$均为开集;

(b) 对任何实数α, $\{x:f(x)\geq\alpha\}$及α, $\{x:f(x)\leq\alpha\}$均为闭集.

12. 设X是可分的距离空间,$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$为$X$的一个覆盖,则从$\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$ 中可取可数个集组成X的一个覆盖.

13. 证明如果距离空间是可分的, 则它的任意子空间也是可分的; 反之, 如果距离空间不可分, 它的子空间是否也不可分?

14. 设X为距离空间, F_1,F_2为X中不相交的闭集. 证明存在开集G_1,G_2, 使得$G_1\cap G_2=\emptyset, G_1\supset F_1, G_2\supset F_2$.

15. 设$f(x)$是由距离空间X到距离空间X_1中的连续映射, A在X中稠密, 证明$f(A)$在$f(X)$中稠密.

16. 给定距离空间(X,d),设$M\subset X$是紧集. 求证M上连续函数必有界,亦达到它的上、下确界.

17. 设$S\subset X, S$是自列紧集,$x\in X$,有

$$d(x,S)=\inf_{y\in S}d(x,y).$$

证明存在一个点$x_0\in S$, 使$d(x,S)=d(x,x_0)$.

18. 设M是$C[a,b]$中的有界集.证明集合

$$S = \{F(x) = \int_a^x f(t)dt \mid f \in M\}$$

是列紧集.

19. 证明紧集的闭子集是紧集.

20. 设X是距离空间, $M \subset X$是紧集, $f: M \to \mathbb{R}^1$是连续函数, 则$f(x)$在M上一致连续.

21. 设(M,d)是一个紧距离空间,$E \subset C(M)$, 其中$C(M)$表示M上一切实值或复值连续函数全体. E中函数一致有界并满足下列不等式：

$$\mid x(t_1) - x(t_2) \mid \leq cd(t_1,t_2)^\alpha \ \forall x \in E, t_1, t_2 \in M.$$

其中$0 < \alpha \leq 1, c > 0$, 求证E在$C(M)$中是列紧集.

22. 设D是$[0,1]$区间上具有连续导数(在端点$t = 1, t = 0$分别具有左、右导数) 的实函数全体.在D上定义

$$d(x,y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \mid x(t) - y(t) \mid + \sup_{0 \leq t \leq 1} \mid x'(t) - y'(t) \mid .$$

(1)证明D是距离空间;

(2)指出D中点列按距离收敛的意义;

(3)证明D是完备的.

23. 设X是全体正整数所成的集合.

$$d(m,n) = \mid m^{-1} - n^{-1} \mid .$$

证明(X,d)不完备.

24. 证明距离空间中的$Cauchy$列是有界的.

25. 在一个距离空间(X,d)中, 求证$Cauchy$列是收敛列当且仅当其中存在一个收敛子列.

26. 证明完备距离空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一距离空间中的完备子空间必是闭子集.

27. 若d_1, d_2是在同一集合X上的两个度量且存在正数a, b使得对一切$x, y \in X$

$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y).$$

证明(X,d_1)和(X,d_2)中的Cauchy序列是相同的.

28. 设X是完备的距离空间.$\mathfrak{F}$是X上的实连续函数族且具有性质：对于每一个$x \in X$,存在常数$M_x > 0$, 使得对于每一个$F \in \mathfrak{F}$,

$$\mid F(x) \mid \leq M_x.$$

证明存在开集U以及常数$M > 0$,使得对于每一个$x \in U$及所有$F \in \mathfrak{F}$.

$$\mid F(x) \mid \leq M.$$

29. 证明如果F_1, F_2是完备的距离空间X中的集,其中一个是紧集，另一个是闭集.则存在$x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$,使得

$$d(F_1, F_2) = d(x_0, y_0).$$

其中

$$d(F_1, F_2) = \inf_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} d(x, y).$$

30. 求证$[0,1]$上的多项式全体定义距离

$$d(p, q) = \int_0^1 \mid p(x) - q(x) \mid dx \quad (p, q\text{是多项式})$$

是不完备的,并指出它的完备化空间.

31. 记S是只有有限项不为零的实数列全体.在S上引进距离

$$d(x, y) = \sup_{k \geq 1} \mid \xi_k - \eta_k \mid .$$

其中$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in S$. 求证$(S, d)$不完备,并指出它的完备化空间.

32. 设距离空间(X, d)是完全有界的,求证X的完备化空间是列紧空间.

33. 设X是全体有理数组成的集合且$d(x, y) = \mid x - y \mid$,问什么是$(X, d)$的完备化空间?

34. 设(X, d)是距离空间.映射$T : X \to X$满足

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \ \forall \ x, y \in X, x \neq y.$$

并已知T有不动点.证明此不动点唯一.

35. 设T是距离空间(X, d)上的压缩映射. 证明$T^n \ (n \in N)$也是压缩映射,并说明逆命题不一定成立.

36. 设X是完备的距离空间.T是X上到自身的映射. 在闭球$\overline{B} = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$上, $d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$且$d(x_0, Tx_0) < (1-\theta)r$, 其中$0 \leq \theta < 1$. 证明$T$在$\overline{B}$上有唯一不动点.

37. 证明存在闭区间$[0,1]$上的连续函数$x(t)$,使得

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin x(t) - a(t).$$

其中$a(t)$是给定的$[0,1]$上的连续函数.

38. 给定函数$y(\bullet) \in C[0,1]$,常数$\lambda, \mid \lambda \mid < 1$. 证明积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = y(t)$$

在$C[0,1]$中有唯一解.

39. 设$f(t) \in C[0,1]$,求出方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t x(s) ds, t \in [0,1]$$

的连续解.

40. 设T为完备距离空间X到X的映射.如果

$$\alpha_0 = \inf_{n} \sup_{x \neq y} \frac{d(T^n x, T^n y)}{d(x, y)} < 1.$$

则T存在唯一的不动点.