

拓扑学基础第一次测验

一、判断题（共 10 题，30 分）

1、紧致空间的每个紧致子集是闭集。

(3.0)

正确答案： 错误

2、可分的度量空间是第二可数空间。

(3.0)

正确答案： 正确

3、拓扑空间的道路连通分支是开集。

(3.0)

正确答案： 错误

4、从 Hausdorff 空间到紧致空间的连续双射为同胚。

(3.0)

正确答案： 错误

5、设 $f:X \rightarrow Y$, $g:Y \rightarrow Z$ 都是商映射, 则 $gf:X \rightarrow Z$ 也是商映射。

(3.0)

正确答案： 正确

6、 T_3 空间总是 T_1 空间。

(3.0)

正确答案： 错误

7、标准直线的有理数子空间 Q 与子空间 $\{1/n:n \in \mathbb{N}\}$ 同胚。

(3.0)

正确答案： 错误

8、拓扑空间一个子集 A 的内部的补集与 A 的补集的闭包相同。

(3.0)

正确答案： 正确

9、拓扑空间的一个收敛点列的极限点唯一。(3.0)

正确答案： 错误

10、列紧的度量空间是紧致的。(3.0)

正确答案： 正确

二、简答题（共6题，30分）

1、标准直线与单位圆周(5.0)

正确答案：

紧致性是拓扑性质。标准直线非紧致，而单位圆周是紧致的。或

子集的分割性是拓扑性质。标准直线的单点子集是分割子集，而单位圆周的单点子集不是分割子集。

2、拓扑正弦曲线与平面丁字子空间 $\{(x, 0) \mid x \in I\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$

(5.0)

正确答案：

局部连通性是拓扑性质。拓扑正弦曲线不是局部连通的，而 T 是局部连通的。

3、标准直线与直线上的有限补空间

(5.0)

正确答案：

$[0, 1]$ 是标准直线上的闭集，直线上的有限补空间的闭集或为整个直线，或为一个有限集。

4、标准平面与单位球面

(5.0)

正确答案：

紧致性是拓扑性质。标准平面是非紧致的，而单位球面是紧致的。

5、直线上的可数补空间与直线上的下极限拓扑空间

(5.0)

正确答案：

连通性是拓扑性质。直线上的可数补空间是连通的，而直线上的下极限拓扑空间是不连通的。

或者直线上的可数补空间上的非空真子集 F 为闭集当且仅当 F 为可数子集，而直线上的下极限拓扑空间的非空闭集总是不可数的。

6、整数集合上的数字拓扑空间与有理数集合上的离散拓扑空间

(5.0)

正确答案:

有理数集合上的离散拓扑空间的每个单点集都是开集，整数集合上的数字拓扑空间的偶数单点集不是开集。

三、填空题（共3题，20分）

1、乘积拓扑空间 $X \times Y$ 的一个拓扑基是

(5.0)

正确答案:

第1空: $\{U \times V: U \text{ 是 } X \text{ 的开集, } V \text{ 是 } Y \text{ 的开集}\}$; 或 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, 其中 \mathcal{B}_1 是 X 的一个基, \mathcal{B}_2 是 Y 的一个基。

2、 X 是 T_4 空间当且仅当(非定义)

(10.0)

正确答案:

第1空: 对于 X 的任意闭集 F 和包含 F 的开集 U , 存在包含 F 的开集 V , 使得 $\text{Cl}(V) \subset U$;

第2空: 对于 X 的任意两个非空不交闭集 A, B , 存在连续函数 $f: X \rightarrow Y$, 使得 $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ 。

3、叙述开集版本的焊接引理:

(5.0)

正确答案:

第1空: 设 A, B 是拓扑空间 X 的开子集, $X = A \cup B$, $f: A \rightarrow Y$ 和 $g: B \rightarrow Y$ 连续, 且对于任意 $x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$, 则有连续映射 $H: X \rightarrow Y$, 使得 H 是 f 和 g 的扩张。

四、论述题（共2题，20分）

1、设 A 为 Hausdorff 空间 X 的紧致子集。证明商空间 X/A 是 Hausdorff 空间。

(10.0)

参考答案: A 为 Hausdorff 空间 X 的紧致子集, 故 A 为闭集。2 分

设 $p: X \rightarrow X/A$ 为商映射。对于 X 中任意 x , 记 $p(x)=[x]$ 。对于 X/A 中不同两点 $[x], [y]$, 若 x 和 y 都不在 A 中, 因 X 是 Hausdorff 空间, 故存在 X 中不交开集 U, V , 使得 $x \in U, y \in V$ 。令 $U' = U \cap (X-A), V' = V \cap (X-A)$, 则 U', V' 是 X/A 中不交开集, $[x] \in U', [y] \in V'$ 。3 分

下设 $x \in X-A, a \in A$ 。因 X 是 Hausdorff 空间, 故存在 X 中不交开集 U_a, V_a , 使得 $x \in U_a, y \in V_a$ 中。 A 是紧致的, $\{V_a | a \in A\}$ 覆盖了 A , 故它有有限子覆盖, 不妨为 V_{a_1}, \dots, V_{a_n} 。2 分

令 U'' 为所有 U_{a_1}, \dots, U_{a_n} 之交, V'' 为所有 V_{a_1}, \dots, V_{a_n} 之并, 则 U'', V'' 是 X 中不交的开集, $x \in U'', A \subset V''$, 从而 $U^* = p(U'')$ 是 X/A 中包含 $[x]$ 的开集, $V^* = p(V)$ 是 X/A 中包含 $[a]$ 的开集, U^* 与 V^* 不交。2 分

故 X/A 是 Hausdorff 空间。1 分

2、设 f 是从单位球面到标准直线的连续函数, $\{0, 1\}$ 在 f 的像中。证明对于任意 $t \in (0, 1)$, $f^{-1}(t)$ 不可数。

(10.0)

参考答案: 反证. 记单位球面为 S 。若 $f^{-1}(t)$ 可数, 则 $S - f^{-1}(t)$ 是连通的(需要验证, 否则扣 2 分)。5 分

但 $f(X - f^{-1}(t)) = ((-\infty, t) \cap f(X)) \cup ((t, +\infty) \cap f(X))$ 为两个非空不交开集之并, 故不连通。3 分

这与连续映射保持连通性相矛盾。2 分