内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 6 投影算子的加权和

§ 6 投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

§ 6 投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

所谓 T ***的几何分解***即**按照 T 的特征把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对简单的.**

§ 6 投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

所谓 T ***的几何分解***即**按照 T 的特征把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对简单的.**

显然, **在有限维的情况, 线性算子 $A=(a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子空间来实现它的几何分解.**

§ 6　投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

所谓 T ***的几何分解***即**按照 T 的特征把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对简单的.**

显然, **在有限维的情况, 线性算子 $A=(a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子空间来实现它的几何分解.**

在第3第4节我们看到，对于紧的线性算子T，也有类似的几何分解

$$T=\sum_n \lambda_n P_n,$$

§ 6 投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

所谓 T ***的几何分解***即**按照 T 的特征把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对简单的.**

显然, **在有限维的情况, 线性算子 $A=(a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子空间来实现它的几何分解.**

在第3第4节我们看到，对于紧的线性算子T，也有类似的几何分解

$$T=\sum_n \lambda_n P_n,$$

我们希望在更一般的情况下，研究投影算子加权和谱的性质.

§ 6 投影算子的加权和

设 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子,

所谓 T ***的几何分解***即**按照 T 的特征把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对简单的.**

显然, **在有限维的情况, 线性算子 $A = (a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子空间来实现它的几何分解.**

在第3第4节我们看到，对于紧的线性算子T，也有类似的几何分解

$$T = \sum_n \lambda_n P_n,$$

我们希望在更一般的情况下，研究投影算子加权和谱的性质.

一、投影算子和投影算子的加权和

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dot{+} X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \mathrm{j} = 1, 2.$$

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 P **是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, P **是沿着 X_2 方向到 X_1 上的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身的线性算子 P 称为是***投影算子***, 如果 $P^2 = P$.*

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dot{+} X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 **P 是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, **P 是沿着 X_2 方 向 到 X_1 上 的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身 的线性算子 P 称为是***投影算子***, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 **P 是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, **P 是沿着 X_2 方向到 X_1 上的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身的线性算子 P 称为是* **投影算子**, *如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 **P 是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, **P 是沿着 X_2 方 向 到 X_1 上 的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身 的线性算子 P 称为是***投影算子***, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P)$,

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 P **是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, P **是沿着 X_2 方 向 到 X_1 上 的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身 的线性算子 P 称为是***投影算子***, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P)$,

即 $\mathcal{R}(P)$ **和** $\mathcal{N}(P)$ **互为另一个的代数补.**

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 **P 是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, **P 是沿着 X_2 方 向 到 X_1 上 的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身 的线性算子 P 称为是***投影算子***, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P)$,

即 **$\mathcal{R}(P)$ 和 $\mathcal{N}(P)$ 互为另一个的代数补.**

内积空间中的投影算子是我们十分感兴趣的, 并且是十分重要的.

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \jmath = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 P **是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, P **是沿着 X_2 方向到 X_1 上的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身的线性算子 P 称为是*投影算子*, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P)$,

即 $\mathcal{R}(P)$ **和** $\mathcal{N}(P)$ **互为另一个的代数补.**

内积空间中的投影算子是我们十分感兴趣的, 并且是十分重要的.

定义 6.6.2 *内积空间 X 上的投影算子 P 称为正交的, 如果它的值域和零空间相互正交,即 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.*

一、投影算子和投影算子的加权和

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dot{+} X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j,\ \text{j} = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 **P 是从 X 上到 X_1 中的投影**, 从几何观点看, **P 是沿着 X_2 方 向 到 X_1 上 的投影, 且 $P^2 = P$ (幂等的).**

定义 6.6.1 *从线性空间 X 上到它自身 的线性算子 P 称为是投影算子, 如果 $P^2 = P$.*

注 设 P 是线性空间 X 上的投影算子,

那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足:

$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dot{+} \mathcal{N}(P)$,

即 **$\mathcal{R}(P)$ 和 $\mathcal{N}(P)$ 互为另一个的代数补.**

内积空间中的投影算子是我们十分感兴趣的, 并且是十分重要的.

定义 6.6.2 *内积空间 X 上的投影算子 P **称为正交的**, 如果**它的值域和零空间相互正交,即 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.***

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P **是投影算子,**

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P **是投影算子,**

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P **是投影算子,**

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P **是正交的,**$m \perp n$**,** 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P **是投影算子,**

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P **是正交的,** $m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. $\square$

定理 6.6.4 ***Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.***

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P 是投影算子,

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P 是正交的,$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 必要性. 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$,

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P 是投影算子,

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P 是正交的,$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 必要性. 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$,

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P **是投影算子,**

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P **是正交的,**$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 **必要性.** **当** P **是正交投影算子,** 则对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$,

$(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ **是实的,** 由定理5.4.7知 P 是自共轭的.

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P 是投影算子,

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P 是正交的,$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 必要性. 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$,

$(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ 是实的, 由定理5.4.7知 P 是自共轭的.

充分性. 若 P 是自共轭的投影算子, 对于 $\forall x \in H$,

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P 是投影算子,

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P 是正交的,$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 必要性. 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$,

$(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ 是实的, 由定理5.4.7知 P 是自共轭的.

充分性. 若 P 是自共轭的投影算子, 对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = n + r$.

命题 6.6.3 *正交投影算子是连续的.*

证明 因为 P 是投影算子,

对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$.

因为 P 是正交的,$m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$,

所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

定理 6.6.4 *Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子 当且仅当 P 是自共轭的.*

证明 必要性. 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$,

$(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ 是实的, 由定理5.4.7知 P 是自共轭的.

充分性. 若 P 是自共轭的投影算子, 对于 $\forall x \in H$,

存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = n + r$.

$(r, n) = (Pr, n) = (r, P^* n) = (r, Pn) = (r, 0) = 0$, 即 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$, P 是一个正交的投影算子. □

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间** H **中的集合族** $\{M_n\}$ **称为是相互正交的, 如果** $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的***相互正交的***, ***闭的线性子空间族***,

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 $Hilbert$ 空间 H 中的***相互正交的***, ***闭的线性子空间族***,

称 M **是** $\{M_n\}$ ***的正交和:***

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的***相互正交的***, ***闭的线性子空间族***,

称 M 是 $\{M_n\}$ 的正交和:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \, , \tag{6.6.1}$$

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的***相互正交的***, ***闭的线性子空间族***,

称 M ***是*** $\{M_n\}$ ***的正交和***:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots , \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x **能唯一地表示为**

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的**相互正交的**, **闭的线性子空间族**,

称 M **是** $\{M_n\}$ **的正交和:**

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots , \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x **能唯一地表示为**

$$x = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{6.6.2}$$

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的**相互正交的**, **闭的线性子空间族**,

称 M **是** $\{M_n\}$ **的正交和:**

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots , \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x **能唯一地表示为**

$$x = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{6.6.2}$$

其中 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{6.6.3}$$

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的相互正交的, 闭的线性子空间族,

称 M 是 $\{M_n\}$ 的正交和:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots, \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x 能唯一地表示为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots, \tag{6.6.2}$$

其中 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{6.6.3}$$

进一步地, 如果 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $\sum\limits_n \|x_n\|^2 \leqslant \infty$, 则存在 $x \in M$, 使得 $x = \sum\limits_n x_n$.

定义 6.6.5 ***Hilbert 空间*** H ***中的集合族*** $\{M_n\}$ ***称为是相互正交的, 如果*** $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.

设 $\{M_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的***相互正交的, 闭的线性子空间族***,

称 M ***是*** $\{M_n\}$ ***的正交和:***

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots, \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x **能唯一地表示为**

$$x = x_1 + x_2 + \cdots, \tag{6.6.2}$$

其中 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{6.6.3}$$

进一步地, 如果 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $\sum\limits_n \|x_n\|^2 \leqslant \infty$, 则存在 $x \in M$, 使得 $x = \sum\limits_n x_n$.

定义 6.6.6 *在 Hilbert 空间 H 中*, ***一个算子列*** $\{P_n\}$ ***(对于*** $\forall n$, $P_n \neq 0$ ***), 称为是单位分解***, *如果*

定义 6.6.5 ***Hilbert* 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m$, $n \neq m$.**

设 $\{M_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的**相互正交的**, ***闭的线性子空间族***,

称 M **是 $\{M_n\}$ 的正交和:**

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots , \tag{6.6.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x **能唯一地表示为**

$$x = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{6.6.2}$$

其中 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{6.6.3}$$

进一步地, 如果 $x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $\sum\limits_n \|x_n\|^2 \leqslant \infty$, 则存在 $x \in M$, 使得 $x = \sum\limits_n x_n$.

定义 6.6.6 *在 Hilbert 空间 H 中*, ***一个算子列 $\{P_n\}$ (对于 $\forall n$, $P_n \neq 0$), 称为是单位分解***, *如果*

(1) 每一个 P_i 都是正交投影算子;

(2) $P_nP_m = 0 \ (n \neq m)$;

(2) $P_n P_m = 0 \ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, 它的收敛是在强收敛的意义下.

(2) $P_nP_m = 0\ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, *它的收敛是在强收敛的意义下.*

注1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子.

(2) $P_nP_m = 0\ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, *它的收敛是在强收敛的意义下.*

注1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子.

注2 $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ 意味着 对于 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{m\to\infty} \| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n x - x \| = 0$.

命题 6.6.7 设 $\{P_n\}$ *是一个单位分解*, $\mathcal{R}(P_n)$ *是* P_n *的值域*,***则*** $\mathcal{R}(P_n) \perp \mathcal{R}(P_m)$ $(n \neq m)$, ***且*** $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$.

(2) $P_nP_m = 0\ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, 它的收敛是在强收敛的意义下.

注1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子.

注2 $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ 意味着 对于 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{m\to\infty} \| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n x - x \| = 0$.

命题 6.6.7 设 $\{P_n\}$ *是一个单位分解*, $\mathcal{R}(P_n)$ 是 P_n 的值域,**则** $\mathcal{R}(P_n) \perp \mathcal{R}(P_m)$ $(n \neq m)$, **且** $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$.

反之, $\{\mathcal{R}_n\}$ 是 ***Hilbert 空间*** H ***中的一族闭的线性子空间***, 且 $\mathcal{R}_n \perp \mathcal{R}_m (n \neq m)$, 令 P_n 是从 H 到 $\mathcal{R}_n$ 的正交投影算子, 那么 $\{P_n\}$ ***是*** H ***的一个单位分解***.

(2) $P_nP_m = 0\ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, 它的收敛是在强收敛的意义下.

注1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子.

注2 $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ 意味着 对于 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{m\to\infty} \| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n x - x \| = 0$.

命题 6.6.7 设 $\{P_n\}$ 是一个单位分解, $\mathcal{R}(P_n)$ 是 P_n 的值域,**则** $\mathcal{R}(P_n)\perp\mathcal{R}(P_m)$ $(n \neq m)$, **且** $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$.

反之, $\{\mathcal{R}_n\}$ 是 ***Hilbert* 空间** H **中的一族闭的线性子空间**, 且 $\mathcal{R}_n\perp\mathcal{R}_m(n \neq m)$, 令 P_n 是从 H 到 $\mathcal{R}_n$ 的正交投影算子, 那么 $\{P_n\}$ **是** H **的一个单位分解.**

证明留给读者.

定义 6.6.8 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \big| \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x$ 存在$\}$.

定义 6.6.8 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \big| \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x$ 存在$\}$.

注1 **显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.**

定义 6.6.8 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \big| \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x$ 存在$\}$.

注1 **显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.**

注2 令 $T_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$, 则 T_m 是在强收敛的意义下收敛到 T.

定义 6.6.8 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \big| \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x$ 存在$\}$.

注1 **显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.**

注2 令 $T_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$, 则 T_m 是在强收敛的意义下收敛到 T.

例 6.6.9 *在**有限维空间**, 若 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的对称线性算子, A 可以表示为一个对称矩阵 $A = (a_{ij})$,*

定义 6.6.8 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \big| \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \text{ 存在}\}$.

注1 **显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.**

注2 令 $T_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$, 则 T_m 是在强收敛的意义下收敛到 T.

例 6.6.9 在**有限维空间**, 若 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的对称线性算子, A 可以表示为一个对称矩阵 $A = (a_{ij})$,

A 在其特征子空间上的投影算子 $\{P_m\}_{m=1}^{k}$ 形成一个单位分解,

定义 6.6.8 H 是一个 *Hilbert* 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为**投影算子的加权和**, 其中 $\mathcal{D}(T) = \{x \in H \,|\, \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \text{ 存在}\}$.

注1 **显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.**

注2 令 $T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$, 则 T_m 是在强收敛的意义下收敛到 T.

例 6.6.9 在**有限维空间**, 若 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的对称线性算子, A 可以表示为一个对称矩阵 $A = (a_{ij})$,

A ***在其特征子空间上的投影算子*** $\{P_m\}_{m=1}^{k}$ ***形成一个单位分解,***

且 A 可以表示为投影算子的加权和

$$Ax = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m P_m x. \tag{6.6.5}$$

例 6.6.10 设 Hilbert 空间 $H = l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基,

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H = l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n},\, \delta_{2n},\, \cdots\}$. 令 $P_n:\ l^2 \to l^2$

$$P_n x = (x, e_n)e_n,\ n = 1, 2, \cdots .$$

例 6.6.10 设 Hilbert 空间 $H = l^2[1, \infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n}, \delta_{2n}, \cdots\}$. 令 $P_n: \ l^2 \to l^2$

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \ n = 1, 2, \cdots .$$

显然

$$Ix = x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x. \tag{6.6.6}$$

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H = l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n},\ \delta_{2n},\ \cdots\}$. 令 $P_n:\ l^2 \to l^2$

$$P_n x = (x, e_n)e_n,\ n = 1, 2, \cdots .$$

显然

$$Ix = x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}P_n x. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}P_n,\ m = 1, 2, \cdots ,$$

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H=l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n=\{\delta_{1n},\,\delta_{2n},\,\cdots\}$. 令 $P_n:\ l^2\to l^2$

$$P_nx=(x,e_n)e_n,\ n=1,2,\cdots.$$

显然

$$Ix=x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\sum_{n=1}^{\infty}P_nx. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}P_n,\ m=1,2,\cdots,$$

有

$$\|(I-S_m)x\|\to 0\ (m\to\infty).$$

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H = l^2[1, \infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n}, \delta_{2n}, \cdots\}$. 令 $P_n: \ l^2 \to l^2$

$$P_n x = (x, e_n)e_n, \ n = 1, 2, \cdots .$$

显然

$$Ix = x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} P_n, \ m = 1, 2, \cdots ,$$

有

$$\|(I - S_m)x\| \to 0 \ (m \to \infty).$$

即 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解.

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H=l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n=\{\delta_{1n},\ \delta_{2n},\ \cdots\}$. 令 $P_n:\ l^2\to l^2$

$$P_nx=(x,e_n)e_n,\ n=1,2,\cdots .$$

显然

$$Ix=x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\sum_{n=1}^{\infty}P_nx. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}P_n,\ m=1,2,\cdots ,$$

有

$$\|(I-S_m)x\|\to 0\ (m\to\infty).$$

即 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解.

注意 S_m 并不按算子的范数收敛到 I. □

例 6.6.10 设 *Hilbert* 空间 $H = l^2[1, \infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n},\ \delta_{2n},\ \cdots\}$. 令 $P_n:\ l^2 \to l^2$

$$P_n x = (x, e_n)e_n,\ n = 1, 2, \cdots .$$

显然

$$Ix = x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} P_n,\ m = 1, 2, \cdots ,$$

有

$$\|(I - S_m)x\| \to 0\ (m \to \infty).$$

即 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解.

注意 S_m 并不按算子的范数收敛到 I. □

二、投影算子加权和的性质

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T)=H$ **当且仅当** $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ **是有界的.**

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T)=H$ ***当且仅当*** $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ ***是有界的.***

证明 设集合 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M>0$, 使得 $\forall n,\ |\lambda_n|\leqslant M$.

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T)=H$ **当且仅当** $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ **是有界的.**

证明 设集合 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M>0$, 使得 $\forall n,\ |\lambda_n|\leqslant M$.

对于 $\forall x\in H$, 由于 $\{P_n\}$ **是** H **的一个单位分解,** $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|P_nx\|^2$,

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T) = H$ **当且仅当** $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ **是有界的.**

证明 设集合 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall n$, $|\lambda_n| \leqslant M$.

对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ **是 H 的一个单位分解,** $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2$,

令

$$y_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x,$$

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T) = H$ **当且仅当** $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ **是有界的.**

证明 设集合 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall n$, $|\lambda_n| \leqslant M$.

对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ **是** H **的一个单位分解**, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2$,

令

$$y_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x,$$

则

$$\|y_m - y_{m+p}\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \to 0 \ (m \to \infty),$$

二、投影算子加权和的性质

投影算子加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.11 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, T 是由 *(6.6.4)* 式定义的投影算子的加权和, 则 $\mathcal{D}(T) = H$ **当且仅当** $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ **是有界的.**

证明 设集合 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall n$, $|\lambda_n| \leqslant M$.

对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ **是** H **的一个单位分解,** $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2$,

令

$$y_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x,$$

则

$$\|y_m - y_{m+p}\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \to 0 \ (m \to \infty),$$

即 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 由于 H 是 Hilbert 空间, $\{y_n\}$ 在 H 中收敛, 我们有 $\mathcal{D}(T) = H$.

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, 且 $\|x_{n_k}\| = 1$.

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, **且** $\|x_{n_k}\| = 1$.

定义 $x = \sum\limits_{k} \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$, 则 $x \in H$,

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$**, 且** $\|x_{n_k}\| = 1$**.**

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$**,** 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$**, 且** $\|x_{n_k}\| = 1$**.**

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$**,** 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, 且 $\|x_{n_k}\| = 1$.

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$, 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

注1 我们看到当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$**,** **且** $\|x_{n_k}\| = 1$**.**

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$**,** 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

注1 **我们看到当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.**

注2 **但是 $\mathcal{D}(T)$ 在 H 中总是稠密的, 即 $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.**

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, **且** $\|x_{n_k}\| = 1$.

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$, 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. $\square$

注1 **我们看到当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.**

注2 **但是 $\mathcal{D}(T)$ 在 H 中总是稠密的, 即 $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.**

事实上, 对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$**, 且** $\|x_{n_k}\| = 1$**.**

定义 $x = \sum_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$**,** 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum_n \lambda_n P_n x = \sum_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. $\square$

注1 **我们看到当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.**

注2 **但是 $\mathcal{D}(T)$ 在 H 中总是稠密的, 即 $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.**

事实上, 对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$$

其中 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, 且 $\|x_{n_k}\| = 1$.

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$, 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

注1 我们看到当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.

注2 但是 $\mathcal{D}(T)$ 在 H 中总是稠密的, 即 $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.

事实上, 对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$$

其中 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 n, 使得

$$\|x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n\| < \varepsilon,$$

反之, 如果 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的,

则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}| \geqslant K$,

令 $x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$**, 且** $\|x_{n_k}\| = 1$**.**

定义 $x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$**,** 则 $x \in H$,

但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素,

$\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

注1 **我们看到当** $\{\lambda_n\}$ **无界时, 它的定义域不是全空间.**

注2 **但是** $\mathcal{D}(T)$ **在** H **中总是稠密的, 即** $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$**.**

事实上, 对于 $\forall x \in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$$

其中 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 n, 使得

$$\|x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n\| < \varepsilon,$$

而 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in \mathcal{D}(T)$.

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的 当且仅当* $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ ***是有界的, 并且*** $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 并且 $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.*

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的* 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ ***是有界的, 并且*** $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的 当且仅当* $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ *是有界的, 并且* $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$.

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的* 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ ***是有界的, 并且*** $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$.

对于任意的 n, 令 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且 $\|x_n\| = 1$,

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的* 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ *是有界的, 并且* $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$.

对于任意的 n, 令 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且 $\|x_n\| = 1$,

由 $Tx_n = \lambda_n x_n$, 有 $\|T\| \geqslant |\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的投影算子加权和是有界的* 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ ***是有界的, 并且*** $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$.

对于任意的 n, 令 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且 $\|x_n\| = 1$,

由 $Tx_n = \lambda_n x_n$, 有 $\|T\| \geqslant |\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

即 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 有界. 且 $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_1|, \cdots\}$. □

定理 6.6.12 *定理 6.6.11 中的***投影算子加权和是有界的** 当且仅当 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ ***是有界的, 并且*** $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令 $M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\|Tx\|^2 = \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2$$

$$\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$.

反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$.

对于任意的 n, 令 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且 $\|x_n\| = 1$,

由 $Tx_n = \lambda_n x_n$, 有 $\|T\| \geqslant |\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

即 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 有界. 且 $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_1|, \cdots\}$. □

结合定理 6.6.11 和定理 6.6.12 有

定理 6.6.13 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和 T 是有界的 充分必要条件是 $\mathcal{D}(T) = H$.

三、投影算子加权和的谱

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x,\ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I - T$ **也是投影算子的加权和,**

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x, \ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I - T$ **也是投影算子的加权和,**

我们从分析 $\lambda I - T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I-T)x=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_n)P_nx,\ x\in\mathcal{D}(T),\tag{6.6.7}$$

$\lambda I-T$ **也是投影算子的加权和,**

我们从分析 $\lambda I-T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

引理 6.6.14 $\lambda I-T$ *是一一的当且仅当* $\lambda\neq\lambda_n,\ n=1,2,\cdots.$

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x,\ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I - T$ **也是投影算子的加权和,**

我们从分析 $\lambda I - T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

引理 6.6.14 $\lambda I - T$ *是一一的当且仅当* $\lambda \neq \lambda_n,\ n = 1, 2, \cdots.$

证明 **考虑方程** $(\lambda I - T)x = 0$ **的解,** 由于 $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$,

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I-T)x=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_n)P_nx,\ x\in\mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I-T$ **也是投影算子的加权和,**

我们从分析 $\lambda I-T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

引理 6.6.14 $\lambda I-T$ *是一一的当且仅当* $\lambda\neq\lambda_n,\ n=1,2,\cdots.$

证明 **考虑方程 $(\lambda I-T)x=0$ 的解,** 由于 $H=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(P_n)$,

则 $x\in H$ 可以唯一的写为 $x=x_1+x_2+\cdots$, 其中 $x_n\in\mathcal{R}(x_n)$.

三、投影算子加权和的谱

下面我们来考虑投影算子加权和的谱分析,

由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x, \; x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I - T$ 也是投影算子的加权和,

我们从分析 $\lambda I - T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

引理 6.6.14 $\lambda I - T$ *是一一的当且仅当* $\lambda \neq \lambda_n,\; n = 1, 2, \cdots$.

证明 考虑方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 的解, 由于 $H = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$,

则 $x \in H$ 可以唯一的写为 $x = x_1 + x_2 + \cdots$, 其中 $x_n \in \mathcal{R}(x_n)$.

于是

$$(\lambda I - T)x = \sum_n (\lambda - \lambda_n)x_n = 0.$$

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, 则对于任意的 n, $x_n = 0$, 即 $x = 0$, $\lambda I - T$ 是一一的.

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, **则对于任意的** n, $x_n = 0$, **即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

如果 $\lambda \neq \lambda_n$**, 则对于任意的** n, $x_n = 0$**, 即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$**,** 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, **则对于任意的** n, $x_n = 0$, **即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{6.6.8}$$

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, 则对于任意的 n, $x_n = 0$, 即 $x = 0$, $\lambda I - T$ 是一一的.

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{6.6.8}$$

引理 6.6.15 *设 T 为 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和, 则 $\lambda I - T$ 的值域在 H 中是稠密的, 当且仅当 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$.*

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, **则对于任意的** n, $x_n = 0$, **即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ **不是一一的**,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{6.6.8}$$

引理 6.6.15 *设 T 为 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和,* ***则 $\lambda I - T$ 的值域在 H 中是稠密的, 当且仅当 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$.***

证明 如果 $\lambda = \lambda_n$, $\lambda I - T$ 的值域正交于 $\mathcal{R}(P_n)$, 由于 $P_n \neq 0$, $\mathcal{R}(P_n)$ 是非空的闭子空间, **所以 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中不稠密.**

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, **则对于任意的** n, $x_n = 0$, **即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{6.6.8}$$

引理 6.6.15 *设 T 为 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和,* ***则*** $\lambda I - T$ ***的值域在*** H ***中是稠密的, 当且仅当*** $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

证明 如果 $\lambda = \lambda_n$, $\lambda I - T$ 的值域正交于 $\mathcal{R}(P_n)$, 由于 $P_n \neq 0$, $\mathcal{R}(P_n)$ 是非空的闭子空间, **所以** $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ **在** H **中不稠密.**

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 对于任何的 $y \in H$,

$$y = y_1 + y_2 + \cdots,$$

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, **则对于任意的** n, $x_n = 0$, **即** $x = 0$, $\lambda I - T$ **是一一的.**

如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0} I - T$ 不是一一的,

λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{6.6.8}$$

引理 6.6.15 *设 T 为 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和,* ***则 $\lambda I - T$ 的值域在 H 中是稠密的, 当且仅当 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$.***

证明 如果 $\lambda = \lambda_n$, $\lambda I - T$ 的值域正交于 $\mathcal{R}(P_n)$, 由于 $P_n \neq 0$, $\mathcal{R}(P_n)$ 是非空的闭子空间, **所以 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中不稠密.**

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 对于任何的 $y \in H$,

$$y = y_1 + y_2 + \cdots,$$

其中 $y_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_N\| < \varepsilon.$$

令 $x_0 = \sum_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

令 $x_0 = \sum_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. $\square$

令 $x_0 = \sum_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. $\square$

注 ***引理 6 6.14 和引理 6.6.15 说明 $\sigma_r(T) = \emptyset$.***

令 $x_0 = \sum_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. □

注 *引理 6 6.14 和引理 6.6.15 说明 $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

引理 6.6.16 设 T 为 *Hilbert* 空间 H 上投影算子的加权和, **则** $\mathcal{D}(\lambda I - T) = H$ 当且仅当*存在一个正数* $\delta > 0$, *使得对于所有的* n, $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta > 0$*(即* $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ *和零有正距离.)*

令 $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. □

注 *引理 6 6.14 和引理 6.6.15 说明 $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

引理 6.6.16 设 T 为 *Hilbert* 空间 H 上投影算子的加权和, **则** $\mathcal{D}(\lambda I - T) = H$ 当且仅当*存在一个正数 $\delta > 0$, 使得对于所有的 n, $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta > 0$(即 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 和零有正距离.)*

证明 如果 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 和零有正距离.

令 $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. $\square$

注 ***引理 6 6.14 和引理 6.6.15 说明*** $\sigma_r(T) = \emptyset$.

引理 6.6.16 设 T 为 *Hilbert* 空间 H 上投影算子的加权和, ***则*** $\mathcal{D}(\lambda I - T) = H$ 当且仅当***存在一个正数*** $\delta > 0$, ***使得对于所有的*** n, $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta > 0$***(即*** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ ***和零有正距离.)***

证明 **如果** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **和零有正距离.**

对于 $\forall y \in H$, $y = y_1 + y_2 + \cdots$, 其中 $y_n \in \mathcal{R}(P_n)$.

令 $x_0 = \sum_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. □

注 ***引理 6 6.14 和引理 6.6.15 说明 $\sigma_r(T) = \emptyset$.***

引理 6.6.16 设 T 为 *Hilbert* 空间 H 上投影算子的加权和, **则** $\mathcal{D}(\lambda I - T) = H$ 当且仅当*存在一个正数* $\delta > 0$, *使得对于所有的* n, $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta > 0$*(即* $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ *和零有正距离.)*

证明 **如果** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **和零有正距离.**

对于 $\forall y \in H$, $y = y_1 + y_2 + \cdots$, 其中 $y_n \in \mathcal{R}(P_n)$.

令

$$x = \sum_{n} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n.$$

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{n} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_n \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)x &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n (\sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n) \\ &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_n = \sum_n y_n = y,\end{aligned}$$

由于

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}\|y_n\|^2\leqslant\frac{1}{\delta^2}\sum_n\|y_n\|^2\leqslant\frac{1}{\delta^2}\|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x\in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I-T)x&=\sum_n(\lambda-\lambda_n)P_n(\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}y_n)\\&=\sum_n(\lambda-\lambda_n)\frac{1}{\lambda-\lambda_n}y_n=\sum_n y_n=y,\end{aligned}$$

即 $y\in\mathcal{R}(\lambda I-T)$, $\mathcal{R}(\lambda I-T)=H$.

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_n \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$(\lambda I - T)x = \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n (\sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n)$$

$$= \sum_n (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_n = \sum_n y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

反之, 如果 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$**.**

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_n \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)x &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n \Big(\sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n\Big) \\ &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_n = \sum_n y_n = y,\end{aligned}$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

反之, 如果 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

对于 $\forall x \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, $y = (\lambda I - T)x$, 根据定义

$$y = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda - \lambda_n) P_n x. \tag{6.6.10}$$

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_n \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)x &= \sum_n (\lambda-\lambda_n) P_n \Big(\sum_n (\lambda-\lambda_n)^{-1} y_n\Big) \\ &= \sum_n (\lambda-\lambda_n) \frac{1}{\lambda-\lambda_n} y_n = \sum_n y_n = y,\end{aligned}$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

反之, 如果 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

对于 $\forall x \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, $y = (\lambda I - T)x$, 根据定义

$$y = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda-\lambda_n) P_n x. \tag{6.6.10}$$

根据**正交投影算子是连续的**, $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $(\lambda-\lambda_n)^{-1} P_n$ 是连续的,

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_n \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)x &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n \Big(\sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n\Big) \\ &= \sum_n (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_n = \sum_n y_n = y,\end{aligned}$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

反之, 如果 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

对于 $\forall x \in \mathcal{D}(\lambda I - T)$, $y = (\lambda I - T)x$, 根据定义

$$y = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda - \lambda_n) P_n x. \tag{6.6.10}$$

根据**正交投影算子是连续的**, $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $(\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n$ 是连续的,

结合(6.6.10)有

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\ =&\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x = P_k x.\end{aligned}$$

结合(6.6.10)有

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\
&=\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x=P_k x.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x=x, \tag{6.6.11}
$$

结合(6.6.10)有

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\ &=\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x=P_k x.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x=x, \tag{6.6.11}$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 也是投影算子的加权和, 由于

结合(6.6.10)有

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\
=&\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x = P_k x.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x = x, \tag{6.6.11}
$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ **也是投影算子的加权和**, 由于

$$
\mathcal{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,
$$

结合(6.6.10)有

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\Big(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x\Big)\\
=&\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x=P_k x.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x=x, \tag{6.6.11}
$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 也是投影算子的加权和, 由于

$$
\mathcal{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,
$$

根据定理 6.6.11 推知, $\{|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}$ 是有界的, 即 $\exists\delta>0$, $|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant\delta^{-1}, n=1,2,\cdots.$

结合(6.6.10)有

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\
&=\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x=P_k x.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x=x, \tag{6.6.11}
$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 也是投影算子的加权和, 由于

$$
\mathcal{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,
$$

根据定理 6.6.11 推知, $\{|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}$ 是有界的, 即 $\exists\delta>0$,
$|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant\delta^{-1}, n=1,2,\cdots$.
换言之 $|\lambda-\lambda_n|\geqslant\delta>0, \{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离. □

结合(6.6.10)有

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y =&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x)\\ =&\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_n x=P_k x.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k y=\sum_k P_k x=x, \tag{6.6.11}$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ **也是投影算子的加权和**, 由于

$$\mathcal{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,$$

根据定理 6.6.11 推知, $\{|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}$ 是有界的, 即 $\exists\delta>0$,
$|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant\delta^{-1}, n=1,2,\cdots$.

换言之 $|\lambda-\lambda_n|\geqslant\delta>0, \{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离. □

推论 6.6.17 **如果 $\lambda\neq\lambda_n$, 则投影算子的加权和 $\lambda I-T$ 的逆算子存在,**

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x, \; y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x, \ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x, \ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

$$(\lambda I - T)^{-1}y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1}P_n x,\ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda \in \sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda \neq \lambda_n$; **(2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x,\ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda \in \sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda \neq \lambda_n$**; (2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

注3 $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}}$.

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x,\ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda \in \sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda \neq \lambda_n$; **(2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

注3 $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}}$.

定理 6.6.18 设 T *是投影算子的加权和, 即*

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x, \ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda \in \sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda \neq \lambda_n$**; (2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

注3 $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}}$.

定理 6.6.18 设 T *是投影算子的加权和, 即*

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

其中 $\{P_n\}$ *是单位分解, 且* T *是有界的,*

$$(\lambda I - T)^{-1}y = \sum_n (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n x,\ y \in \mathcal{R}(\lambda I - T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda \in \rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda \in \sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda \neq \lambda_n$; **(2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

注3 $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}}$.

定理 6.6.18 设 T *是投影算子的加权和, 即*

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

其中 $\{P_n\}$ 是单位分解, 且 T 是有界的,

则 T 的共轭算子 T^* 是

$$T^* = s - \sum_n \overline{\lambda}_n P_n. \tag{6.6.13}$$

证明 对于 $\forall x,\ y \in H$, **由于 P_n 是自共轭的,**

$$(\lambda I-T)^{-1}y=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_nx,\ y\in\mathcal{R}(\lambda I-T). \qquad (6.6.12)$$

并且逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1 $\lambda\in\rho(T)$ **当且仅当** $\{|\lambda-\lambda_n|\}$ **与零有正距离.**

注2 $\lambda\in\sigma_c(T)$ **当且仅当 (1)** $\lambda\neq\lambda_n$; **(2)** λ **是** $\{\lambda_n\}$ **的一个聚点.**

注3 $\sigma(T)=\overline{\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}}$.

定理 6.6.18 设 T *是投影算子的加权和*, *即*

$$T=s-\sum_n\lambda_nP_n,$$

其中 $\{P_n\}$ *是单位分解*, *且* T *是有界的*,

则 T *的共轭算子* T^* *是*

$$T^*=s-\sum_n\overline{\lambda}_nP_n. \qquad (6.6.13)$$

证明 对于 $\forall x,\ y \in H$, **由于 P_n 是自共轭的,**

$$
\begin{aligned}
(y, Tx) &= (y, \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x) = \lim_{m\to\infty}(y, \sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x) \\
&= (\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (T^* y, x).
\end{aligned}
$$

$\square$

证明 对于 $\forall x,\ y \in H$, **由于 P_n 是自共轭的,**

$$(y, Tx) = (y, \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x) = \lim_{m\to\infty}(y, \sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x)$$

$$= (\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (T^* y, x). \qquad \square$$

定理 6.6.19 *有界线性算子 T 是投影算子的加权和*

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

证明 对于 $\forall x,\ y \in H$, **由于 P_n 是自共轭的,**

$$
\begin{aligned}
(y, Tx) &= (y, \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x) = \lim_{m\to\infty} (y, \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x) \\
&= (\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \overline{\lambda}_n P_n y, x) = (\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n P_n y, x) = (T^* y, x).
\end{aligned}
$$

□

定理 6.6.19 *有界线性算子 T 是投影算子的加权和*

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

则 T 是自共轭的当且仅当所有的 λ_n 都是实的.

证明 对于 $\forall x,\ y \in H$, **由于 P_n 是自共轭的,**

$$(y, Tx) = (y, \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x) = \lim_{m\to\infty}(y, \sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x)$$

$$= (\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_n P_n y, x) = (T^* y, x). \qquad \square$$

定理 6.6.19 *有界线性算子 T 是投影算子的加权和*

$$T = s - \sum_{n}\lambda_n P_n,$$

则 T 是自共轭的当且仅当所有的 λ_n 都是实的.

定理 6.6.20 *投影算子的**加权和** T*

$$T = \sum_{n}\lambda_n P_n,$$

是紧的,当且仅当

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, ***满足*** $|\lambda_n| > \alpha$ ***的*** λ_n ***的个数是有限的.***

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, ***满足*** $|\lambda_n| > \alpha$ ***的*** λ_n ***的个数是有限的.***

证明 " $\Leftarrow$ " 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, ***满足*** $|\lambda_n| > \alpha$ ***的*** λ_n ***的个数是有限的.***

证明 ” $\Leftarrow$ ” 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, ***满足*** $|\lambda_n| > \alpha$ ***的*** λ_n ***的个数是有限的.***

证明 "$\Leftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n **的值域** $\mathcal{R}(P_n)$ **是有限维的;**

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, **满足** $|\lambda_n| > \alpha$ **的** λ_n **的个数是有限的.**

证明 ” $\Leftarrow$ ” 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

由条件(1) T_m **是有穷秩的, 因此是紧的.**并且

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n ***的值域*** $\mathcal{R}(P_n)$ ***是有限维的;***

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, ***满足*** $|\lambda_n| > \alpha$ ***的*** λ_n ***的个数是有限的.***

证明 "$\Leftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

由条件(1) T_m 是有穷秩的, 因此是紧的.并且

$$\begin{aligned} \| (T - T_m)x \|^2 &= \| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m} \lambda_n P_n x \|^2 \leqslant \sup_{\lambda \neq \lambda_1, \cdots \lambda_m} |\lambda_n|^2 \| \sum_n P_n x \|^2 \\ &\leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 . \end{aligned} \tag{6.6.14}$$

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n **的值域** $\mathcal{R}(P_n)$ **是有限维的;**

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, **满足** $|\lambda_n| > \alpha$ **的** λ_n **的个数是有限的.**

证明 "$\Leftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

由条件(1) T_m **是有穷秩的, 因此是紧的.**并且

$$\begin{aligned}\| (T - T_m)x \|^2 &= \| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m} \lambda_n P_n x \|^2 \leqslant \sup_{\lambda \neq \lambda_1, \cdots \lambda_m} |\lambda_n|^2 \| \sum_n P_n x \|^2 \\ &\leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 .\end{aligned} \tag{6.6.14}$$

于是根据定理 6.3.14, T 是紧的线性算子.

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n **的值域** $\mathcal{R}(P_n)$ **是有限维的;**

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, **满足** $|\lambda_n| > \alpha$ **的** λ_n **的个数是有限的.**

证明 ” $\Leftarrow$ ” 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

由条件(1) T_m 是有穷秩的, 因此是紧的.并且

$$\| (T - T_m)x \|^2 = \| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m} \lambda_n P_n x \|^2 \leqslant \sup_{\lambda \neq \lambda_1, \cdots \lambda_m} |\lambda_n|^2 \| \sum_n P_n x \|^2 \tag{6.6.14}$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 .$$

于是根据定理 6.3.14, T 是紧的线性算子.

” $\Rightarrow$ ” 由关于紧算子谱分解的第四节中的定理 6.4.3、推论 6.4.4 和定理6.4.5, 说明定理的两个条件也是必要的. □

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n 的值域 $\mathcal{R}(P_n)$ 是有限维的;

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, 满足 $|\lambda_n| > \alpha$ 的 λ_n 的个数是有限的.

证明 " $\Leftarrow$ " 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子.

由条件(1) T_m 是有穷秩的, 因此是紧的.并且

$$\| (T - T_m)x \|^2 = \| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m} \lambda_n P_n x \|^2 \leqslant \sup_{\lambda \neq \lambda_1, \cdots \lambda_m} |\lambda_n|^2 \| \sum_n P_n x \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 . \tag{6.6.14}$$

于是根据定理 6.3.14, T 是紧的线性算子.

" $\Rightarrow$ " 由关于紧算子谱分解的第四节中的定理 6.4.3、推论 6.4.4 和定理6.4.5, 说明定理的两个条件也是必要的. $\square$

注 从(6.6.14) 式我们看到，这里投影算子加权的收敛是按范数收敛。