内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 *(***Riesz表示定理** *)*

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)

设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函,

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2， 且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)

设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函,

则存在唯一的 $y_f \in H$, *使得*

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)

设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函,

***则存在唯一的** $y_f \in H$, 使得*

$$f(x) = (x, y_f), \ \forall x \in H, \tag{5.3.1}$$

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)

设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函,

则存在唯一的 $y_f \in H$, *使得*

$$f(x) = (x, y_f),\ \forall x \in H, \tag{5.3.1}$$

并且

$$\|f\| = \|y_f\|. \tag{5.3.2}$$

§ 3 Hilbert空间的共轭空间 Hilbert空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是 L^2，且 L^2 是一个 Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的 Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过 Riesz 表示定理说明: Hilbert 空间 H 的共轭空间和 H 在等距同构的意义下相等.

一、Riesz表示定理， Hilbert空间的共轭空间

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)

设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函,

***则存在唯一的** $y_f \in H$, 使得*

$$f(x) = (x, y_f), \ \forall x \in H, \tag{5.3.1}$$

并且

$$\|f\| = \|y_f\|. \tag{5.3.2}$$

证明 如果 $f = 0$, 取 $y_f = 0$ 即定理成立.

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理,** $H = M \oplus M^{\perp}$.

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的**真闭子空间**, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理,** $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中 $z \in M$, $x_0 \in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理,** $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中 $z \in M$, $x_0 \in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{f(x)}{f(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的**真闭子空间**, **根据投影定理**, $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中 $z \in M$, $x_0 \in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{f(x)}{f(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

即

$$f(x) = f(x_0)(x, x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0).$$

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的**真闭子空间, 根据投影定理,** $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中 $z \in M$, $x_0 \in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{f(x)}{f(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

即

$$f(x) = f(x_0)(x, x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0).$$

令 $y_f = \overline{f(x_0)} x_0$, 我们有

假定 $f \neq 0$, $\because f$ 连续, $\therefore f$ 的零空间

$$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$$

是 H 的真闭子空间, **根据投影定理,** $H = M \oplus M^{\perp}$.

由于 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 所以存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$.

对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中 $z \in M$, $x_0 \in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{f(x)}{f(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

即

$$f(x) = f(x_0)(x, x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0).$$

令 $y_f = \overline{f(x_0)} x_0$, 我们有

$$f(x) = (x, y_f).$$

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \ \forall x \in H,$$

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \ \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \ \ \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \ \ \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示.

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H = \mathbb{R}^3$,

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H = \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^3), \tag{5.3.4}$$

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f\left(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}\right)\right| = \left(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f\right) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H = \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3), \tag{5.3.4}$$

其中 $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$,

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x|\leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f\left(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}\right)\right| = \left(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f\right) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H = \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^3), \tag{5.3.4}$$

其中 $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$,

即相应的 $y_f = \overrightarrow{n}$, 它是平面 $f(x) = 0$ 的法向量.

唯一性 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x \in H$, $f(x) = (x, g_f)$ 则有

$$(x, y_f) = (x, g_f), \quad \forall x \in H,$$

于是推出 $g_f - y_f = 0$, 即 $g_f = y_f$. 由于

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \left|(x, y_f)\right| \leqslant \left\|y_f\right\|,$$

且

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \left|f(\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|})\right| = (\frac{y_f}{\left\|y_f\right\|}, y_f) = \left\|y_f\right\|.$$

所以 $\|f\| = \left\|y_f\right\|$.

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间上的连续线性泛函 有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H = \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^3), \tag{5.3.4}$$

其中 $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$,

即相应的 $y_f = \overrightarrow{n}$, 它是平面 $f(x) = 0$ 的法向量.

注2 从证明中可知, 线性泛函 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 的正交补集 $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 是一维的.

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$. 另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$. 另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$. 另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.
于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.

另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.

于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.

另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.

于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的**一一对应的保范映射.**

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.
于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的**一一对应的保范映射.**
τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.
于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的**一一对应的保范映射.**
τ **不是线性的, 但是共轭线性**的, 即

$$\tau(\alpha\ f_1 + \beta\ f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{5.3.7}$$

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y 是 H 上的连续线性泛函, 即$f_y \in H^*$.

于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的一一对应的保范映射.

τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

$$\tau(\alpha\ f_1 + \beta\ f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{5.3.7}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{5.3.8}$$

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.

另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y 是 H 上的连续线性泛函, 即$f_y \in H^*$.

于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的一一对应的保范映射.

τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

$$\tau(\alpha\ f_1 + \beta\ f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{5.3.7}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{5.3.8}$$

则 H^* 是一个Hilbert空间,

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.
于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的**一一对应的保范映射.**
τ **不是线性的, 但是共轭线性的**, 即

$$\tau(\alpha\ f_1 + \beta\ f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{5.3.7}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{5.3.8}$$

则 H^* 是一个Hilbert空间,
τ 是 $H^* \to H$ 两个Hilbert空间之间的共轭同构映射. 如果我们对共轭同构的 Hilbert 空间不加区别, 于是 $H^* = H$.

注3 由 Riesz 表示定理, 任意的 $f \in H^*$, 对应唯一的 $y_f \in H$, 使 $f(x) = (x, y_f)$.
另一方面, 对于任意的 $y \in H$, 令

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.5}$$

显然 f_y **是 H 上的连续线性泛函,** 即$f_y \in H^*$.
于是, 我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{5.3.6}$$

τ 是 H^* 到 H 的**一一对应的保范映射.**
τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

$$\tau(\alpha\ f_1 + \beta\ f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{5.3.7}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{5.3.8}$$

则 H^* 是一个Hilbert空间,
τ 是 $H^* \to H$ 两个Hilbert空间之间的共轭同构映射. 如果我们对共轭同构的 Hilbert 空间不加区别, 于是 $H^* = H$.
即 H^* 在共轭同构的意义下看成与 H 等同, 可以说 Hilbert 空间是自共轭的.

二、Hilbert 空间上的共轭算子

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 Hilbert 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 Hilbert 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^* : \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 Hilbert 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*: \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*: \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

使得共轭算子的定义与 有限维空间线性算子 （矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*:\quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

使得共轭算子的定义与 有限维空间线性算子 （矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

下面我们在 **Hilbert** 空间 H 上定义共轭算子,

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*: \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

使得共轭算子的定义与 有限维空间线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

下面我们在 **Hilbert** 空间 H 上定义共轭算子,

设 $A \in \mathcal{B}(H)$, 目标：如何规定A^*.

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*: \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

使得共轭算子的定义与 有限维空间线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

下面我们在 **Hilbert** 空间 H 上定义共轭算子,

设 $A \in \mathcal{B}(H)$, 目标：如何规定A^*.

对于任意的 $y \in H$, 我们知道 (Ax, y) 是 H 上的一个有界线性泛函 $f_{A,y}$

二、Hilbert 空间上的共轭算子

当 X 是 **Hilbert** 空间时,空间是自共轭的.

特别的 $\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$ 和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间.

在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子 A^*，即 A^* 应满足

$$A^*: \quad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）

使得共轭算子的定义与 有限维空间线性算子 （矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

下面我们在 **Hilbert** 空间 H 上定义共轭算子,

设 $A \in \mathcal{B}(H)$, 目标：如何规定A^*.

对于任意的 $y \in H$, 我们知道 (Ax, y) 是 H 上的一个有界线性泛函 $f_{A,y}$

且 $$\| f_{A,y} \| \leq \| A \| \| y \|,$$

由 Riesz 表示定理， 存在唯一的 $z \in H$，使得

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

由 Riesz 表示定理， 存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

由 Riesz 表示定理， 存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子， 并且它是线性的，

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子，并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

由 Riesz 表示定理， 存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子， 并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子，并且它是线性的，
事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2,$$

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子，并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2,$$

即 B 是从 H 到 H 的线性算子.

由 Riesz 表示定理， 存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子， 并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2,$$

即 B 是从 H 到 H 的线性算子.

且由 Riesz 表示定理

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子，并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2,$$

即 B 是从 H 到 H 的线性算子.

且由 Riesz 表示定理

$$\| By \| = \| z \| = \| f_{A,y} \| \leq \| A \| \| y \|,$$

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是从 H 到 H 的算子，并且它是线性的，

事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2,$$

即 B 是从 H 到 H 的线性算子.

且由 Riesz 表示定理

$$\| By \| = \| z \| = \| f_{A,y} \| \leq \| A \| \| y \|,$$

即由（5.3.10a）式唯一的确定了一个有界线性算子 B.

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$, ***我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子,*** 记为 A^*, 即

定义 5.3.2 设 H 是 *Hilbert* 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,**我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子,** 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,***我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子*** B ***称为*** A ***的共轭算子,*** *记为* A^*, *即*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,***我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子***, *记为 A^*, 即*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

定义 5.3.2 设 H 是 *Hilbert* 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,**我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子,** 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

定义 5.3.2 *设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,* ***我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子,*** *记为 A^*, 即*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$, ***我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子***, 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,*我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子*, 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子(矩阵)的共轭算子(共轭矩阵)的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子, 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,*我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子*, 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^* y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

(3) $(AB)^* = B^* A^*$;

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,*我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子,* 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 *Hilbert* 空间 H 上的*有界线性算子, 则*

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

(3) $(AB)^* = B^*A^*$;

(4) 对于常数 $\alpha \in K$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

定义 5.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$,我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子, 记为 A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

注1 A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子.

注2 这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义形式完全一样,

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$.

由共轭算子的定义(5.3.10b), 我们可以证明

定理 5.3.3 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

(3) $(AB)^* = B^*A^*$;

(4) 对于常数 $\alpha \in K$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$;

(5) 若 A^{-1} 存在且有界, 则 $(A^*)^{-1}$ 也存在且有界, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2)\\ &= \overline{\alpha}_1(x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),\end{aligned}$$

证明 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) \\
&= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),
\end{aligned}
$$

A^* 是线性算子. 且

证明 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) \\
&= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),
\end{aligned}
$$

A^* 是线性算子. 且

$$
\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|A^* y\| \, \|y\| ,
$$

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2) \\ &= \overline{\alpha}_1(x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),\end{aligned}$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|A^* y\| \, \|y\|,$$

于是有

$$\|A^* y\| \leqslant \|A\| \, \|y\|,$$

证明 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) \\
&= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),
\end{aligned}
$$

A^* 是线性算子. 且

$$
\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|A^* y\| \, \|y\| \, ,
$$

于是有

$$
\|A^* y\| \leqslant \|A\| \, \|y\| \, ,
$$

即

$$
\|A^*\| \leqslant \|A\| \, . \tag{5.3.11}
$$

证明 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) \\
&= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),
\end{aligned}
$$

A^* 是线性算子. 且

$$
\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \|y\| \leqslant \|A\| \|A^* y\| \|y\|,
$$

于是有

$$
\|A^* y\| \leqslant \|A\| \|y\|,
$$

即

$$
\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.11}
$$

即 A^* 有界. **在(5.3.10b)中用 A^* 代替 A,** 我们又可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$
(A^* x, y) = (x, A^{**} y).
$$

证明 (1) 因为

$$(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2)$$
$$= \overline{\alpha}_1(x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \|y\| \leqslant \|A\| \|A^* y\| \|y\|,$$

于是有

$$\|A^* y\| \leqslant \|A\| \|y\|,$$

即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.11}$$

即 A^* 有界. **在(5.3.10b)中用 A^* 代替 A,** 我们又可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^* x, y) = (x, A^{**} y).$$

因此, 对于任何的 $x, y \in H$, 有

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2)\\ &= \overline{\alpha}_1(x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),\end{aligned}$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \|y\| \leqslant \|A\| \|A^* y\| \|y\|,$$

于是有

$$\|A^* y\| \leqslant \|A\| \|y\|,$$

即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.11}$$

即 A^* 有界. **在(5.3.10b)中用 A^* 代替 A,** 我们又可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^* x, y) = (x, A^{**} y).$$

因此, 对于任何的 $x, y \in H$, 有

$$\overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, A^* x) = \overline{(A^* x, y)} = \overline{(x, A^{**} y)}.$$

证明 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2) \\
&= \overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),
\end{aligned}
$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y, A^*y) = (AA^*y, y) \leqslant \|AA^*y\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|A^*y\| \, \|y\|,$$

于是有

$$\|A^*y\| \leqslant \|A\| \, \|y\|,$$

即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.11}$$

即 A^* 有界. 在(5.3.10b)中用 A^* 代替 A, 我们又可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^*x, y) = (x, A^{**}y).$$

因此, 对于任何的 $x, y \in H$, 有

$$\overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, A^*x) = \overline{(A^*x, y)} = \overline{(x, A^{**}y)}.$$

于是我们有

$$(x, Ay) = (x, A^{**}y), \quad \forall x, y \in H,$$

证明 (1) 因为

$$(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2)$$
$$= \overline{\alpha}_1(x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) = (AA^* y, y) \leqslant \|AA^* y\| \|y\| \leqslant \|A\| \|A^* y\| \|y\|,$$

于是有

$$\|A^* y\| \leqslant \|A\| \|y\|,$$

即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.11}$$

即 A^* 有界. **在(5.3.10b)中用 A^* 代替 A,** 我们又可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^* x, y) = (x, A^{**} y).$$

因此, 对于任何的 $x, y \in H$, 有

$$\overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, A^* x) = \overline{(A^* x, y)} = \overline{(x, A^{**} y)}.$$

于是我们有

$$(x, Ay) = (x, A^{**} y), \quad \forall x, y \in H,$$

即 $(A^*)^* = A$.

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\| .$$

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\| .$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\| .$$

(2)—(4) 容易验证.

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|\,.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|\,.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|\,.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|\,.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

即 $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

即 $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

注 十分重要的是, **Hilbert 空间 H 上的有界线算子 A 和它的共轭算子 A^* 是定义在同一个空间上的,**

在 (5.3.11)中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|\,.$$

因此

$$\|A\| = \|A^*\|\,.$$

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

即 $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

注 十分重要的是, **Hilbert 空间 H 上的有界线算子 A 和它的共轭算子 A^* 是定义在同一个空间上的,**

即 $A, A^* \in \mathcal{B}(H)$.

推论 5.3.4

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 . \tag{5.3.12}$$

推论 5.3.4

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 . \tag{5.3.12}$$

证明 由于

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 ,$$

推论 5.3.4

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 . \tag{5.3.12}$$

证明 由于

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 ,$$

同时

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*Ax\| \, \|x\| \leqslant \|A^*A\| \, \|x\|^2 ,$$

推论 5.3.4

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 . \tag{5.3.12}$$

证明 由于

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 ,$$

同时

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*Ax\| \, \|x\| \leqslant \|A^*A\| \, \|x\|^2 ,$$

即

$$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| .$$

推论 5.3.4

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 . \tag{5.3.12}$$

证明 由于

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 ,$$

同时

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*Ax\| \, \|x\| \leqslant \|A^*A\| \, \|x\|^2 ,$$

即

$$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| .$$

于是式（5.3.12）成立。