

内蒙古大学 数学科学学院
泛函分析 期中考试试卷（二） 参考答案及评分细则

一、（本题满分15分）

设 (X, d) 是一个距离空间, $A \subset X$, A 在 X 中是稠密的 \Leftrightarrow 对于 X 中的任何非空开集 U , 有 $U \cap A \neq \emptyset$.

证明: \Leftarrow) 要证明 $X \subset \overline{A}$. 对于 $\forall x \in X$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $B(x, \varepsilon)$ 是开集, 结合条件有 $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 因此 $x \in \overline{A}$ 5分

\Rightarrow) 设 U 是 X 中的非空开集. 由于 U 非空, 故存在 $x \in U$. 又由于 U 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 因为 A 在 X 中是稠密, 所以 $x \in \overline{A}$, 从而 $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 由此可知 $U \cap A \neq \emptyset$ 15分

二、（本题满分20分）

考虑空间 s , 即实数列 $\{\xi_k\}$ 的全体. 设 $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$ 是两个实数列, 定义

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

证明:

- (1) 上面定义的 $d(x, y)$ 是 s 上的距离;
- (2) 在空间 s 中的收敛等价于按每个坐标收敛.

证明:(1)距离定义的(1), (2), (3)显然成立. 验证距离定义的条件(4) 成立. 考虑 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, $t \in (0, \infty)$, $\varphi(t)$ 是单增的. 设 $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$, $z = \{\zeta_k\}$, 由于

$$|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|.$$

结合 $\varphi(t)$ 是单增的, 则

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

在上面不等式两边乘以 $\frac{1}{2^k}$ 并求和, 有

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

因此 $d(x, y)$ 是 s 上的距离. 10分

(2)必要性. 对于任意给定的 k_0 , 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$, 由于 $d(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 对于这个 $\varepsilon_0 > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $d(x_n, x) < \varepsilon_0$, 即:

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} < \varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

由于每项都是正的, 于是我们有

$$\frac{1}{2^{k_0}} \frac{|\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}|}{1 + |\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}|} < \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad (n > N)$$

结合 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ 是单增的, 我们有

$$|\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}| < \varepsilon,$$

即

$$\xi_{k_0}^{(n)} \rightarrow \xi_{k_0} \quad (n \rightarrow \infty).$$

..... 15分

充分性. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon$. 由于 $\xi_k^{(n)} \rightarrow \xi_k (n \rightarrow \infty) (k = 1, 2, \dots, K)$, 所以存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon/2 \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

于是当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛到 x 20分

三、(本题满分20分)

1. 叙述内积空间的定义;
2. 叙述内积空间内积产生的范数应满足的平行四边形法则;
3. 证明在 $C[0, 1]$ 上不能引进一种内积 (\cdot, \cdot) , 使其产生的范数是 $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$.

解: 1. 设 X 是数域 \mathbb{K} 上的线性空间, 如果对于任意 $x, y \in X$, 有 \mathbb{K} 中的一个数 (x, y) 与它们对应, 使得对任意的 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, 满足

- (i) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- (ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- (iii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
- (iv) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 (\cdot, \cdot) 是 X 上的一个内积, 定义了内积的空间 X 称为内积空间. 5分

2. 设 X 是内积空间, 则 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 是 X 上的范数, 且满足平行四边形法则, 即

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X.$$

..... 10分

证明3. 取 $x = x(t) \equiv 1, y = y(t) = t, \forall t \in [0, 1]$, 于是

$$\|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x + y\| = 2, \|x - y\| = 1,$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5, 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

因此 $\|\cdot\|$ 不满足平行四边形法则, 从而范数不可以由任何内积诱导. 20分

四、(本题满分15分)

设 X 是内积空间, M 是 X 的任意一个子集, 证明: M^\perp 是 X 中的闭子空间.

证明(1) M^\perp 是子空间. 任取 $x \in M^\perp, y \in M^\perp$, 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

因此 $\alpha x + \beta y \in M^\perp$, 即 M^\perp 是 X 的子空间. 7分

(2) 证明 M^\perp 是闭的. 如果 $\{x_n\} \subseteq M^\perp$, 且 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 则对于任意的 $z \in M$, 由内积的连续性可得

$$(x, z) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, z) = 0.$$

因此 $x \in M^\perp$, 所以 M^\perp 是闭子空间. 15分

五、(本题满分15分)

设 $x(t) \in C[a, b]$, 记 $\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, $\|x\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, 证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

证明: 若 $x(t) \equiv 0$, 命题显然成立. 若 $x(t)$ 不恒等于零, $|x(t)|$ 是连续函数. 由闭区间上的连续函数的性质, 存在 $t_0 \in [a, b]$ 使得

$$|x(t_0)| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = \|x\|_\infty > 0.$$

一方面, 由于

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\int_a^b |x(t_0)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \leq \|x\|_\infty.$$

..... 7分

另一方面, 由 $|x(t)|$ 在 t_0 点处的连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x(t)| > |x(t_0)| - \varepsilon > 0, \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b].$$

于是

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (|x(t_0)| - \varepsilon)^p dt)^{\frac{1}{p}} = (\|x\|_\infty - \varepsilon)(2\delta)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$. 综上 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ 15分

六、(本题满分15分)

证明存在闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数 $x(t)$, 使得:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos x(t) - b(t)$$

其中: $b(t)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数.

证明: 在空间 $C[0, 1]$ 上考虑如下映射:

$$Tx(t) = \frac{1}{2} \sin x(t) - a(t),$$

则 T 是从 $C[0, 1]$ 到 $C[0, 1]$ 自身的映射. 对于 $\forall x, y \in C[0, 1], \forall t \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |(\frac{1}{2} \sin x(t) - a(t)) - (\frac{1}{2} \sin y(t) - a(t))| \\ &= |\frac{1}{2} \sin x(t) - \frac{1}{2} \sin y(t)| \\ &= \frac{1}{2} |2 \cos \frac{x(t) + y(t)}{2} \sin \frac{x(t) - y(t)}{2}| \\ &\leq |\sin \frac{x(t) - y(t)}{2}| \\ &\leq \frac{1}{2} |x(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [0, 1]} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \frac{1}{2} |x(t) - y(t)| = \frac{1}{2} d(x, y). \end{aligned}$$

由压缩映射原理知存在唯一的 $x_0 \in C[0, 1]$ 使得

$$Tx_0 = x_0.$$

即

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \sin(x_0(t)) - a(t).$$

..... 15分