一、(1) 定义非零元的线性空间 X 的 Hamel 基.

25' (2) Hilbert 空间 H 上的投影定理.

(3) Baire 纲定理

(4) 实赋范线性空间 X 上的 Hahn-Banach 定理

(5) 非零 Banach 空间 X 上有界线性算子 A 的谱半径公式

二、(1) 以下关于 Banach 空间及其上的有界线性算子叙述正确的是

10' A. X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，则 $L(X,Y)$ 为 Banach 空间

B. $A\in L(X)$，$\|I-A\|<1$，则 A 有界可逆

C. 若 X 可分则其对偶空间 X^* 可分；

D. l^1 为自反空间

(2) 以下关于有界线性算子的谱理论叙述正确的是

A. 设 X 为 Banach 空间，$A\in L(X)$ 则 $\sigma_p(A)$ 非空

B. $A\in L(X)$ 则 A 有非平凡的不变子空间

C. 设 S 为可分的 Hilbert 空间上的单边移位算子，则 S 为紧算子

D. $A\in L(X)$ 为紧算子，则 $\sigma(A)\setminus\{0\}=\sigma_p(A)\setminus\{0\}$.

(3) 以下关于赋范空间的叙述正确的是

A. $C[0,1]$ 在最大值范数下为 Banach 空间.

B. 空间 l^∞ 中的有界集是可分的

C. 设 M 为赋范线性空间 X 的子空间且 $M\neq X$，则存在向量 $x\in X$ 使 $\|x\|=1$ 且 $\inf_{y\in M}\|x-y\|=1$.

D. $C[0,1]$ 中的子集 F 是紧的当且仅当 F 一致有界且同等连续

(4) 以下关于内积空间叙述正确的是

A. 极化恒等式并不蕴含平行四边形法则.

B. l^2 为 Hilbert 空间，其正规正交基也是 Hamel 基

C. 设 M 为 Hilbert 空间 H 的线性流形，则 $M^\perp$ 为 H 的子空间.

D. l^1 为内积空间.

三、设 Y 为 Banach 空间，Y'' 为其二次对偶空间. 证明存在等距映射 $T: Y\to Y''$
10' 使得 $\|T(y)\|=\|y\|$ 对任何 $y\in Y$ 成立.

四. 设 X, Y 均为赋范线性空间，证明线性算子 $A: X\to Y$ 有界的充要条件是
10' $A^{-1}\{y\in Y:\|y\|<1\}$ 内部非空.

五：设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 l^2 上的一个正规正交基. S 为 l^2 上的单边移位算子.
15' 对每个 $n\geq 1$ 满足 $Se_n=e_{n+1}$. 证明如下命题

(1) $\sigma(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq 1\}$.

(2) 对每个 $n\geq 1$，记 $T=S^n$，则 T^*T-TT^* 为投影算子.

六：设 H 为复数域上的 Hilbert 空间，A 为 H 上的有界线性算子.
10' 证明：A 是自伴的当且仅当 $(Ax,x)\in\mathbb{R}$ 对每个 H 中的向量 x 成立.

七：设 $K\subseteq\mathbb{C}$ 为非空紧集，证明存在 l^2 上有界线性算子 A 使得 $\sigma(A)=K$.
10'

泛函期末（2018.1.12 石瑞）

1. 设 $C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上全体连续函数的集合.

(1) 在 $C[0,1]$ 中用分析的语言叙述列紧集的等价刻画（Arzela-Ascoli定理）

(2) 证明上述定理（其中 $C[0,1]$ 中元素的范数定义如下：$\forall f\in C[0,1]$，定义 f 的范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，在此范数下 $C[0,1]$ 成为距离空间）

2. 设 H 为复数域上的Hilbert空间，T 为 H 上的有界线性算子满足 $T=T^*$ 且 $(Tx,x)\geq 0$ 对 H 中的任意向量 x 均成立. 试证明：对 H 中的任意向量 x 与 y，均有不等式 $|(Tx,y)|^2\leq (Tx,x)(Ty,y)$.

3. $\forall h\in C[0,1]$，定义 h 的范数 $\|h\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|h(x)|$，已知 $C[0,1]$ 在此范数下构成完备的Banach空间，构造如下两个集合：$X=\{f\in C[0,1]: f(0)=0\}$ 与 $K=\{f\in X: \int_0^1 f(x)\,dx=0\}$

证明：(1) X 与 K 均为 $C[0,1]$ 的Banach子空间；

(2) $\forall g\in X$ 且 $\|g\|=1$，均有 g 到 K 的距离 $d(g,K)<1$.

4. 设 T_i 为Hilbert空间 l^2 上的有界线性算子，$i=1,2$. 任给Hilbert空间 $l^2\oplus l^2$ 中的向量 $x=(x_1,x_2)$，其中 $x_i\in l^2$，$i=1,2$. 其范数 $\|x\|=(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2)^{\frac{1}{2}}$. 定义Hilbert空间 $l^2\oplus l^2$ 上的算子矩阵 T 如下：$Tx=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1x_1\\ T_2x_2\end{pmatrix}$.

(1) 试证明 $\|T\|=\max\{\|T_1\|,\|T_2\|\}$；

(2) 若 T_2 为单边移位算子且 $T_1=T_2^*$，试计算 T 的谱半径.

5. 设 T 为Banach空间 X 上的线性算子.

(1) 若 T 的值域维数有限，判断 T 是否有界？若有界给出证明，若无界举出反例；

(2) 若 T 为紧算子且 X 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 x，试说明依范数极限 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=Tx$ 成立.

6. 设 $\{\beta_n\}_{n=1}^{N}$ 在 l^p 中，其中 $1<p<\infty$，$\beta_n\in\mathbb{R}$，$N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，在赋范线性空间 $Y=\{\{\xi_n\}_{n=1}^{N}\in\mathbb{R}^N: \|\{\xi_n\}_{n=1}^{N}\|_p\triangleq(\sum_{n=1}^{N}|\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}<+\infty\}$ 上定义线性算子 T 满足 $T(\{\xi_n\}_{n=1}^{N})=\{\beta_n\xi_n\}_{n=1}^{N}$，$\forall\{\xi_n\}_{n=1}^{N}\in Y$. 证明：(1) T 为有界算子；

(2) 若 $(Y,\|\cdot\|_p)$ 上全体有界线性算子组成的集合可分，则 $N<+\infty$.

试卷B

一.(15分) 叙述并证明距离空间上压缩映像原理，并指出定理的条件是必要的.

二.(15分) 1.设X,Y是赋范线性空间，$A: X\to Y$是线性算子.

(1) 叙述A有界线性算子及算子范数的定义,

(2) 证明A的有界性和连续性是等价的.

2、设f是Banach空间 $C[a,b]$上的线性泛函 $f(x)=3x(a)-4x(b)$,

其中$x\in C[a,b]$，求f的范数.

三.(15分) 叙述距离空间中列紧集、完全有界集以及紧集之间的关系 并证明完全有界集是可分的.

四 1.(5分) 设X是Banach空间，如果 $A\in L(X)$并且$\|A\|<1$, 证明$I-A$具有有界逆.

2.(15分). 设X是Banach空间，$\{x_n\}$是X中的点列，并且$x_n \xrightarrow{w} x$, 证明

(1) 证明 $\{x_n\}$在X中有界

(2) 设$A: X\to X$是有界线性算子. 证明: $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$

(3) 设$A: X\to X$是紧(全连续)线性算子, 证明$Ax_n\to Ax$

五.1(10分). 设H是Hilbert空间，f是H上的有界线性泛函，证明存在唯一的$y_f\in H$使得

(1) $f(x)=(x,y_f)\ \forall x\in H$　　(2) $\|f\|=\|y_f\|$

2.(6分) 设X是赋范线性空间，$x_0\in X$是非零向量，证明存在X上的有界线性泛函满足：

$\|f\|=1$并且 $f(x_0)=\|x_0\|$.

六.1.(6分) 设X是自反空间. G是X的对偶空间X'中的闭子空间. 证明$({}^{\circ}G)^{\circ}=G$

2.(10分) 设A是Hilbert空间H到自身的处处有定义的线性算子,

满足对任意的$x,y\in H$有$(Ax,y)=(x,Ay)$, 用闭图形(图像)定理及共鸣定理两种方法

证明A是有界线性算子