内蒙古大学 数学科学学院

泛函分析 期末考试试卷（二）参考答案及评分细则

一、（本题满分20分）

设$C[a,b]$=$\{x(t)\,|\,x(t)$在$[a,b]$上连续$\}$, 定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

证明: (1) 以上定义的$\|\cdot\|$是一个范数；(2)$C[a,b]$在以上范数下是一个Banach空间.

证明: (1) 显然$\|\cdot\|$满足范数定义的前三条, 即非负性, 严格正性, 正齐次性. 下面验证$\|\cdot\|$满足三角不等式. 任取$x=x(t),y=y(t)\in C[a,b]$. 对于任意$t\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}|x(t)+y(t)| &\leqslant |x(t)|+|y(t)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)|\\ &= \|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

所以$\|x+y\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)+y(t)|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 因此$\|\cdot\|$是$C[a,b]$上的范数. $\cdots\cdots$ 10分

(2) 设$\{x_n\}$是$C[a,b]$中的Cauchy列, 其中$x_n=x_n(t)$. 我们分以下三步来证明.

(i) 由于$\{x_n(t)\}$ 是$C[a,b]$ 中的Cauchy 列, 故对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n,m\geq N$ 时,

$$\|x_n-x_m\|=\max_{a\leq t\leq b}\mid x_n(t)-x_m(t)\mid<\varepsilon,$$

从而 $\forall t\in[a,b]$, $\mid x_n(t)-x_m(t)\mid<\varepsilon\ \ (n,m\geq N)$. 因此$\{x_n(t)\}$ 是$\mathbb{R}$ 中的一个Cauchy数列. 由$\mathbb{R}$ 的完备性可知存在$x(t)$, 使得

$$x_n(t)\to x(t)\quad(n\to\infty).$$

(ii) 下面证$x(t)\in C[a,b]$.

当$n,m\geq N$ 时,

$$\mid x_n(t)-x_m(t)\mid<\varepsilon,\ \forall t\in[a,b].$$

对于固定的 t, 令$m\to\infty$, 有

$$\mid x_n(t)-x(t)\mid\leq\varepsilon\ (n\geq N),\ \forall t\in[a,b],$$

即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到$x(t)$. 因此$x(t)$连续, 即$x(t)\in C[a,b]$.

(iii) 当$n \geq N$时

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,\ \forall t \in [a, b],$$

所以

$$\max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon,$$

即 $\|x_n - x\| \leq \varepsilon\ (n \geq N)$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. ·························· 20分

二、(本题满分20分)

1. 叙述闭算子的定义;

2. 给出线性算子是闭算子的充分必要条件;

3. 在$C[a,b]$中考虑线性算子T:

$$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ D(T) = C^1[a, b].$$

证明:(1) T是无界线性算子; (2) T是闭的线性算子.

1. 解: 设X, X_1是赋范空间, T 是从X中到X_1中的线性算子. 如果T的图像$G(T) = \{(x, Tx) \in X \times X_1 \,|\, x \in D(T)\}$在乘积赋范空间$X \times X_1$中是闭的, 则称$T$是闭算子. ·························· 5分

2. 解: 设X, X_1是赋范空间, T 是从X中到X_1中的线性算子, 则T是闭算子当且仅当: 如果对于$\forall \{x_n\} \subset D(T)$, $x_n \to x \in X$ 及$Tx_n \to y \in X_1$, 一定可以推出: $x \in D(T)$, 且$y = Tx$. ·························· 10分

3. 证明:(1)取$x_n(t) = \sin nt \in C[a, b]$, 则对于充分大的$n$, $\|x_n\| = 1$,

$$T(\sin nt) = n \cos nt.$$

于是$\|Tx_n\| = n \to \infty$. 因此T是无界线性算子. ·························· 15分

(2)设$x_n \in D(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_n \to y$, 要证$x \in D(T)$且$Tx = y$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x = y$.

由于$\{x_n'(s)\}$一致收敛于$y(s)$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^t x_n'(s) \mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} [x_n(t) - x_n(a)] = x(t) - x(a),$$

故积分和极限可以交换位置, 从而

$$x(t) - x(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^t x_n'(s) \mathrm{d}s = \int_a^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s) \mathrm{d}s = \int_a^t y(s) \mathrm{d}s.$$

因此

$$x(t)=x(a)+\int_a^t y(s)\mathrm{d}s,$$

进而$x'(t)=y(t)\in C[a,b]$. 所以$x(t)\in C^1[a,b]$, 且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=y(t)$. 由此可知$T$是闭算子. ·························· 20分

三、(本题满分20分)

1. 设A是Hilbert空间上的有界线性算子, 叙述A的共轭算子A^*的定义, A是自共轭算子的定义;

2. 设A是Hilbert空间H上的有界自共轭算子.

证明: (1) 对于$\forall x\in H$, (Ax,x)是实的;

(2) A的特征值是实的.

1. 解: 如果对于任意的$x,y\in H$,

$$(Ax,y)=(x,A^*y),$$

则称A^*是A的共轭算子. ·························· 5分

如果$A^*=A$, 即对于任意的$x,y\in H$,

$$(Ax,y)=(x,Ay),$$

则称A是自共轭算子. ·························· 10分

2. 证明: (1) 由于A是自共轭算子, 故对于$\forall x\in H$,

$$(Ax,x)=(x,Ax)=\overline{(Ax,x)},$$

从而(Ax,x)是实的. ·························· 15分

(2)设λ是A的特征值, $x\neq 0$是对应的特征向量. 由于A是自共轭的有界线性算子, 故

$$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Ax,x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\overline{\lambda}(x,x).$$

再由$x\neq 0$可得$\lambda=\overline{\lambda}$, 即$\lambda$是实数. 因此$A$的特征值是实的. ··············· 20分

四、(本题满分15分)

1. 设X是一个距离空间, 叙述集合M在X中列紧的定义;

2. 叙述紧线性算子的定义;

3．设X是Banach空间, T是从X到X的紧线性算子, 叙述紧线性算子谱点的基本性质.

解: 1. 如果M中的任何点列都有收敛的子列, 则称M在X中是列紧集. $\cdots$ 5分

2. 设X,Y是赋范空间, $T: X \to Y$是一个线性算子, 如果对于X中的任何有界集A, T关于A的值域的闭包$\overline{T(A)}$是紧的, 则称T是紧的线性算子. $\cdots\cdots\cdots$ 10分

3.紧线性算子谱点的基本性质:

(1) 紧线性算子只有至多可数个特征值, 并且除了0以外, 这些特征值无聚点.

(2) 紧线性算子除了0点可能是连续谱外，没有别的连续谱.

(3) 紧线性算子除了0点可能是剩余谱外，没有别的剩余谱. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

五、(本题满分15分)

1．叙述Hilbert空间中的Riesz表示定理;

2. 设H是Hilbert空间, $\varphi(x,y)$是定义在$H\times H$上的共轭双线性泛函, 即关于x是线性的, 关于y是共轭线性的, 并且存在常数C, 使得$|\varphi(x,y)| \leqslant C\|x\|\cdot\|y\|$, $(x,y\in H)$. 请用Riesz表示定理证明存在有界线性算子算子$A\in\mathcal{B}(H)$使得对所有$x,y\in H$, $\varphi(x,y)=(x,Ay)$.

1. 解: 设H是Hilbert空间, f 是H上的有界线性泛函, 则存在唯一的$y_f\in H$, 使得

$$f(x)=(x,y_f),\ \forall x\in H,$$

并且$\|f\|=\|y_f\|$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

2. 证明: 固定$y\in H$, 由$x\to\varphi(x,y)$定义H上的有界线性泛函, 由Riesz表示定理, 存在$z=z(y)\in H$, 使得

$$\varphi(x,y)=(x,z),\ \forall x\in H.$$

定义映射$A: y\to z(y)$, 于是$\varphi(x,y)=(x,Ay)$, $\forall x,y\in H$. 以下证明A是线性的, 有界的.

事实上, 对于任意的$x,y_1,y_2\in H$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}(x,A(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)) &= \varphi(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\\ &= \overline{\alpha_1}\varphi(x,y_1)+\overline{\alpha_2}\varphi(x,y_2)\\ &= \overline{\alpha_1}(x,Ay_1)+\overline{\alpha_2}(x,Ay_2)\\ &= (x,\alpha_1Ay_1+\alpha_2Ay_2),\end{aligned}$$

从而$A(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 Ay_1+\alpha_2 Ay_2$. 再由Riesz表示定理及条件可知

$$\|Ay\|=\|\varphi(\cdot,y)\|=\sup_{x\in H,\|x\|=1}|\varphi(x,y)|\leqslant C\|y\|.$$

因此A是H上的有界线性算子. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

六、(本题满分10分)

谈谈你对距离空间、赋范线性空间、内积空间的认识，它们之间有什么关系. 简述：通过学习泛函分析这门课程你学到了什么.

解: 距离空间是在非空集合X上赋予二元映射$d: X\times X\to\mathbb{R}$, 并满足四个条件，即非负性，严格正性，对称性及三角不等式, 我们称d是距离，(X,d)为距离空间.

赋范线性空间是在线性空间X上赋予映射$\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$, 并满足四个条件，即非负性，正定性，正齐次性及三角不等式, 我们称$\|\cdot\|$是X上的范数，$(X,\|\cdot\|)$为赋范线性空间.

内积空间是在线性空间X上赋予二元映射$(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$, 并满足四个条件，即非负性，共轭对称性，关于第一变元满足齐次性和可加性, 我们称$(\cdot,\cdot)$是X上的内积，$(X,(\cdot,\cdot))$为内积空间.

赋范空间中的范数可诱导一个距离, 反过来线性空间上的距离不一定可以由范数诱导, 例如空间s. 线性空间上的距离可以由范数诱导的充分必要条件是距离满足平移不变性和相似性.

内积空间中的内积可以诱导一个范数, 反过来赋范空间中的范数未必一定可由内积诱导, 例如空间$C[a,b]$. 赋范空间中的范数可由内积诱导的充分必要条件是范数满足平行四边形法则.

叙述部分(略). $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分