

 内蒙古大学数学科学学院

# 泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话: 0471-4992491 (H) , 13947103671  
Emai: [masun@imu.edu.cn](mailto:masun@imu.edu.cn)

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这—空间中可定义不同的范数.

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这—空间中可定义不同的范数.

对于任意的  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 定义范数:

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 定义范数:

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择定义一个合理、简单、易于解决问题范数.

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 定义范数:

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

它诱导的距离为:

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

## § 4 等价的范数 有限维赋范空间

### 一、等价的范数

如同在一个空间上可以定义不同的距离一样,

我们也可以在同一线性空间上定义不同的范数, 从而产生不同的赋范空间.

实际上, 要根据所研究的具体问题, 选择 定义一个合理、简单、易于解决问题范数 .

**例 2.4.1**  $\mathbb{R}^n$  按通常意义下的加法、数乘, 成为一个线性空间.

我们在这一空间中可定义不同的范数.

对于任意的  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 定义范数:

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.4.1)$$

它诱导的距离为:

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.2)$$

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  是一赋范空间.

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  是一赋范空间.

一般地,  $X$  是一个线性空间, 可赋以不同的范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$ ,

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  是一赋范空间.

一般地,  $X$  是一个线性空间, 可赋以不同的范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$ ,

这样  $(X, \|\cdot\|_1)$  与  $(X, \|\cdot\|_2)$  成为两个不同的赋范空间.

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  是一赋范空间.

一般地,  $X$  是一个线性空间, 可赋以不同的范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$ ,

这样  $(X, \|\cdot\|_1)$  与  $(X, \|\cdot\|_2)$  成为两个不同的赋范空间.

然而不同的范数之间可能具有等价关系,

在这一范数下,  $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$  是完备的, 可分的.

(2)  $\mathbb{R}^n$  中可定义范数  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|. \quad (2.4.3)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  是一赋范空间.

(3) 定义范数  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|. \quad (2.4.4)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  是一赋范空间.

一般地,  $X$  是一个线性空间, 可赋以不同的范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$ ,

这样  $(X, \|\cdot\|_1)$  与  $(X, \|\cdot\|_2)$  成为两个不同的赋范空间.

然而不同的范数之间可能具有等价关系,

即这样的空间中收敛性一样.

下面我们给出**两个范数等价的定义**：

下面我们给出**两个范数等价的定义**：

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

下面我们给出**两个范数等价的定义**：

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** **在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.**

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** **在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.**

**证明** 事实上, 由 **2.4.5** 式可知,

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.

**证明** 事实上, 由 **2.4.5** 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

下面我们给出**两个范数等价的定义**：

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** **在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.**

**证明** 事实上, 由 **2.4.5 式**可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合**(2.4.6式)**和**(2.4.7式)**, 命题得证. □

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.

**证明** 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合(2.4.6式)和(2.4.7式), 命题得证. □

**注** 在两个等价范数产生的赋范空间中, 同一个元素的范数可能不同, 但是收敛性一样.

下面我们给出**两个范数等价的定义**:

**定义 2.4.2** 设  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是线性空间  $X$  上的两个范数, 如果存在  $a > 0, b > 0$ , 使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \quad (2.4.5)$$

则称范数  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是**等价的**.

**命题 2.4.3** 在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列  $\{x_n\}$  的收敛性一样.

**证明** 事实上, 由 2.4.5 式可知,

$$\|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.6)$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \rightarrow 0 \implies \|x_n - x_0\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \quad (2.4.7)$$

结合(2.4.6式)和(2.4.7式), 命题得证. □

**注** 在两个等价范数产生的赋范空间中, 同一个元素的范数可能不同, 但是收敛性一样.

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

(1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

- (1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;
- (2)  $\{x_n\}$  是  $(X, d_1)$  中的Cauchy列当且仅当  $\{x_n\}$  是  $(X, d_2)$  中的Cauchy列;

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

- (1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;
- (2)  $\{x_n\}$  是  $(X, d_1)$  中的Cauchy列当且仅当  $\{x_n\}$  是  $(X, d_2)$  中的Cauchy列;
- (3)  $(X, d_1)$  是完备的 当且仅当  $(X, d_2)$  是完备的.

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

- (1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;
- (2)  $\{x_n\}$  是  $(X, d_1)$  中的Cauchy列当且仅当  $\{x_n\}$  是  $(X, d_2)$  中的Cauchy列;
- (3)  $(X, d_1)$  是完备的 当且仅当  $(X, d_2)$  是完备的.

**注**  $(X, \|\cdot\|_1)$   $(X, \|\cdot\|_2)$  代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

- (1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;
- (2)  $\{x_n\}$  是  $(X, d_1)$  中的Cauchy列当且仅当  $\{x_n\}$  是  $(X, d_2)$  中的Cauchy列;
- (3)  $(X, d_1)$  是完备的 当且仅当  $(X, d_2)$  是完备的.

**注**  $(X, \|\cdot\|_1)$   $(X, \|\cdot\|_2)$  代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

**例 2.4.5** 在例2.4.1中  $\mathbb{R}^n$  上定义了三个不同的 范数  $\|x\|, \|x\|_1, \|x\|_\infty$ ,

进一步的我们有

**推论 2.4.4** 设  $X$  是一个线性空间,

$\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  是  $X$  上定义的两个等价的范数,

令  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$  和  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  分别是  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  诱导出的距离. 则

- (1)  $\{x_n\}$  在  $(X, d_1)$  中收敛到  $x$  当且仅当  $\{x_n\}$  在  $(X, d_2)$  中收敛到  $x$ ;
- (2)  $\{x_n\}$  是  $(X, d_1)$  中的Cauchy列当且仅当  $\{x_n\}$  是  $(X, d_2)$  中的Cauchy列;
- (3)  $(X, d_1)$  是完备的 当且仅当  $(X, d_2)$  是完备的.

**注**  $(X, \|\cdot\|_1)$   $(X, \|\cdot\|_2)$  代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集、开集一样).

**例 2.4.5** 在例2.4.1中  $\mathbb{R}^n$  上定义了三个不同的 范数  $\|x\|, \|x\|_1, \|x\|_\infty$ , 它们满足

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| = \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|; \quad (2.4.8)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_{\infty}. \quad (2.4.9)$$

因而  $\|x\|$ ,  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_{\infty}$  三个范数等价.

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_{\infty}. \quad (2.4.9)$$

因而  $\|x\|$ ,  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_{\infty}$  三个范数等价.

下面我们将看到,  $\mathbb{R}^n$  上定义的所有范数都等价.

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sqrt{n} \|x\|_{\infty}. \quad (2.4.9)$$

因而  $\|x\|$ ,  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_{\infty}$  三个范数等价.

下面我们将看到,  $\mathbb{R}^n$  上定义的所有范数都等价.

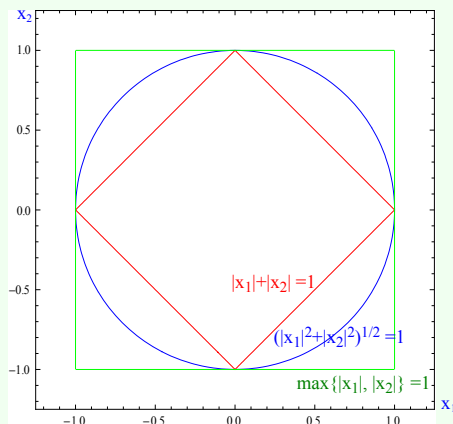


Figure 2.4.1: 等价的范数

## 二、有限维空间

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构,

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构,  
在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构,  
在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 设  $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 设  $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$T$  是一个从  $X$  到  $\mathbb{R}^n$  的同构映射.

对于  $\forall x \in X$ ,  $\|\cdot\|$  与  $\mathbb{R}^n$  的范数等价, 事实上

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 设  $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$T$  是一个从  $X$  到  $\mathbb{R}^n$  的同构映射.

对于  $\forall x \in X$ ,  $\|\cdot\|$  与  $\mathbb{R}^n$  的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 设  $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$T$  是一个从  $X$  到  $\mathbb{R}^n$  的同构映射.

对于  $\forall x \in X$ ,  $\|\cdot\|$  与  $\mathbb{R}^n$  的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

其中  $\beta = (\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2)^{1/2}$  是与  $x$  无关的常数.

## 二、有限维空间

下面我们将证明有限维的赋范空间代数上与  $\mathbb{R}^n$  同构, 在拓扑意义下与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

**定理 2.4.6** 任意  $n$  维赋范空间必与  $\mathbb{R}^n$  代数同构拓扑同胚.

**证明**  $(X, \|\cdot\|)$  是  $n$  维赋范空间, 于是存在一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\forall x \in X$ , 可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

令  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 设  $T : x \in X \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$T$  是一个从  $X$  到  $\mathbb{R}^n$  的同构映射.

对于  $\forall x \in X$ ,  $\|\cdot\|$  与  $\mathbb{R}^n$  的范数等价, 事实上

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2} = \beta \|\bar{x}\|,$$

其中  $\beta = (\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2)^{1/2}$  是与  $x$  无关的常数.

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

于是  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  不等于零.

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

于是  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  不等于零.

$\therefore f(\bar{x}) > 0$ .

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

于是  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  不等于零.

$\therefore f(\bar{x}) > 0$ .

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ , 结合式有

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

于是  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  不等于零.

$\therefore f(\bar{x}) > 0$ .

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ , 结合式有

$$\begin{aligned}
 |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)| &= ||x| - |y|| \\
 &\leq \|x - y\| \leq \bar{\beta} \|\bar{x} - \bar{y}\|.
 \end{aligned}$$

反之,在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S$ 上,  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S = \{\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = 1\}.$$

定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n\|,$$

在 $S$ 上,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 不同时为零, 且 $e_1, \dots, e_n$ 线性无关,

于是  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  不等于零.

$\therefore f(\bar{x}) > 0$ .

对于任意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ , 结合式有

$$\begin{aligned} |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \dots, \eta_n)| &= ||x| - |y|| \\ &\leq \|x - y\| \leq \bar{\beta} \|\bar{x} - \bar{y}\|. \end{aligned}$$

$\therefore f(\bar{x})$ 是连续的.

$\therefore S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\because S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$  在  $S$  上取到最小值,

即存在  $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$ , 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

$\because S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$  在  $S$  上取到最小值,

即存在  $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$ , 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{\left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

$\because S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$  在  $S$  上取到最小值,

即存在  $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$ , 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即  $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$ .  $\therefore X$  与  $\mathbb{R}^n$  同胚.

□

$\because S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$  在  $S$  上取到最小值,

即存在  $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$ , 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即  $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$ .  $\therefore X$  与  $\mathbb{R}^n$  同胚. □

注 有限维空间中的收敛性与  $\mathbb{R}^n$  相同, 即按坐标收敛.

$\because S$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭的有界集, 是紧的集合.

$\therefore f(\bar{x})$  在  $S$  上取到最小值,

即存在  $\alpha > 0, \forall \bar{x} \in S$ , 有

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha.$$

于是对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \frac{x}{\|\bar{x}\|} \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k e_k}{\left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2}} \right\| \|\bar{x}\| \geq \alpha \|\bar{x}\|.$$

即  $\alpha \|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta \|\bar{x}\|$ .  $\therefore X$  与  $\mathbb{R}^n$  同胚. □

注 有限维空间中的收敛性与  $\mathbb{R}^n$  相同, 即按坐标收敛.

有限维的赋范空间是 Banach 空间.

### 三、有限维赋范空间的几何特征

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

$\therefore X$ 是无穷维的,  $\therefore$ 由 $x_1$ 生成的子空间是 $X$ 的真闭子空间.

$\therefore$ 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\| = 1$ , 使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

$\therefore X$ 是无穷维的,  $\therefore$ 由 $x_1$ 生成的子空间是 $X$ 的真闭子空间.

$\therefore$ 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\| = 1$ , 使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$ .

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的,  $\therefore$ 由 $x_1$ 生成的子空间是 $X$ 的真闭子空间.

$\therefore$ 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\| = 1$ , 使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$ .

令  $X_2$  是由  $\{x_1, x_2\}$  生成的子空间,

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

$\therefore X$ 是无穷维的,  $\therefore$ 由 $x_1$ 生成的子空间是 $X$ 的真闭子空间.

$\therefore$ 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\| = 1$ , 使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$ .

令  $X_2$  是由  $\{x_1, x_2\}$  生成的子空间,

同样存在  $x_3 \in S, \forall x \in X_2$ ,

$$\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}.$$

### 三、有限维赋范空间的几何特征

有限维空间中的有界集是列紧集.

**定理 2.4.7** 赋范空间是有限维的当且仅当 $X$ 中的任何有界集是列紧的.

**证明** 必要性由定理2.4.6可知.

下证充分性. 假如不然,  $X$ 是无穷维的.

考虑 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ , 任取 $x_1 \in S$ , 记 $X_1$ 为由 $x_1$ 生成的子空间.

$\because X$ 是无穷维的,  $\therefore$ 由 $x_1$ 生成的子空间是 $X$ 的真闭子空间.

$\therefore$ 由Riesz 引理, 存在 $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\| = 1$ , 使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$ .

令  $X_2$  是由  $\{x_1, x_2\}$  生成的子空间,

同样存在  $x_3 \in S, \forall x \in X_2$ ,

$$\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}.$$

特别地 $\|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}, \|x_3 - x_1\| > \frac{1}{2}$ .

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.



这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\therefore$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\because$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论 2.4.8, 则  $X$  是有限维的.

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\therefore$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论 2.4.8, 则  $X$  是有限维的.

**注2** 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\because$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论 2.4.8, 则  $X$  是有限维的.

**注2** 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有有限维空间, 任何有界闭集都是自列紧的,

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\therefore$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论 2.4.8, 则  $X$  是有限维的.

**注2** 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有有限维空间, 任何有界闭集都是自列紧的,

但是在无穷维赋范空间, 就没有“那么多”的紧集合,

这样一直做下去, 得到  $S$  中的无穷点列  $\{x_n\}$ ,

$$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2} (i \neq j),$$

所以  $\{x_n\}$  中不存在收敛的子列, 与  $S$  列紧矛盾.

$\therefore X$  是有限维的.

□

我们有以下推论

**推论 2.4.8** 设  $X$  是一个无穷维的赋范空间, 那么单位球  $B(0, 1)$  和单位球面  $S(0, 1)$  都不是紧的.

**注1** 在无穷维空间, 单位球 (面) 不是列紧的. ( $\therefore$  存在  $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ ).

如果单位球 (面) 列紧, 由推论 2.4.8, 则  $X$  是有限维的.

**注2** 列紧性在距离空间是十分重要的性质,

在有有限维空间, 任何有界闭集都是自列紧的,

但是在无穷维赋范空间, 就没有“那么多”的紧集合,

这是有限维空间和无穷维空间的**主要区别**.