

内蒙古大学 数学科学学院
泛函分析 期末考试试卷（二）

（闭卷120 分钟）

一、（本题满分20分）

设 $C[a, b] = \{x(t) \mid x(t) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续}\}$, 定义

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

证明: (1) 以上定义的是一个范数; (2) $C[a, b]$ 在以上范数下是一个Banach空间.

二、（本题满分20分）

1. 叙述闭算子的定义;
2. 给出线性算子是闭算子的充分必要条件;
3. 在 $C[a, b]$ 中考虑线性算子 T :

$$T = \frac{d}{dt}, \quad D(T) = C^1[a, b].$$

证明: (1) T 是无界线性算子; (2) T 是闭的线性算子.

三、（本题满分20分）

1. 设 A 是Hilbert空间上的有界线性算子, 叙述 A 的共轭算子 A^* 的定义, A 是自共轭算子的定义;
2. 设 A 是Hilbert空间 H 上的有界自共轭算子.

证明: (1) 对于 $\forall x \in H$, (Ax, x) 是实的;

(2) A 的特征值是实的.

四、（本题满分15分）

1. 设 X 是一个距离空间, 叙述集合 M 在 X 中列紧的定义;
2. 叙述紧线性算子的定义;
3. 设 X 是Banach空间, T 是从 X 到 X 的紧线性算子, 叙述紧线性算子谱点的基本性质.

五、（本题满分15分）

1. 叙述Hilbert空间中的Riesz表示定理;
2. 设 H 是Hilbert空间, $\varphi(x, y)$ 是定义在 $H \times H$ 上的共轭双线性泛函, 即关于 x 是线性的, 关于 y 是共轭线性的, 并且存在常数 C , 使得 $|\varphi(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$, $(x, y \in$

H). 请用Riesz表示定理证明存在有界线性算子算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有 $x, y \in H$, $\varphi(x, y) = (x, Ay)$.

六、(本题满分10分)

谈谈你对距离空间、赋范线性空间、内积空间的认识，它们之间有什么关系，简述：通过学习泛函分析这门课程你学到了什么。