内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间. 赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.
赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.
但是我们知道, “长度”并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.
赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.
但是我们知道, “长度”并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.
$x = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量, 它们之间的角度可以用它们的内积

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.

赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.

但是我们知道, “长度”并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.

$x=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量, 它们之间的角度可以用它们的内积

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\| x \|\| y \| \cos\theta$$

表示出来, 其中

$$\| x \|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{(x,x)},$$

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.

赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.

但是我们知道, "长度" 并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.

$x=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量, 它们之间的角度可以用它们的内积

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\|x\|\|y\|\cos\theta$$

表示出来, 其中

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{(x,x)},$$

$\|y\|=\sqrt{(y,y)}$ 分别是 x 和 y 的长度（模）.

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.
赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.
但是我们知道, "长度"并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.
$x = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量, 它们之间的角度可以用它们的内积

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \| x \|\| y \| \cos\theta$$

表示出来, 其中

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(x, x)},$$

$\| y \| = \sqrt{(y, y)}$ 分别是 x 和 y 的长度（模）.

本章目标： **把 n 维欧氏空间中"角度"、"正交"以及内积这样一些概念引入到一般的线性空间, 建立起内积空间的一整套理论.**

第三章　内积空间与 Hilbert 空间

如同有限维的欧氏空间R^n, 线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间.
赋范空间中有**元素的范数(模)**, 两个元素之间的**距离**这些重要的概念.
但是我们知道, “长度”并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念.
$x=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的向量, 它们之间的角度可以用它们的内积

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\| x \|\| y \| \cos\theta$$

表示出来, 其中

$$\| x \|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{(x,x)},$$

$\| y \|=\sqrt{(y,y)}$ 分别是 x 和 y 的长度（模）.

本章目标： **把 n 维欧氏空间中“角度”、“正交”以及内积这样一些概念引入到一般的线性空间, 建立起内积空间的一整套理论.**

首先我们需要把 n 维欧氏空间内积具有的最基本的性质抽象出来, 在一般的线性空间引入内积的定义.

§1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

§1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义距离、范数、内积这些概念,

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义距离、范数、内积这些概念,

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, 其内积定义为

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义距离、范数、内积这些概念,

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, 其内积定义为

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1 a_2 + b_1 b_2),$$

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义**距离**、**范数**、**内积**这些概念,
设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, 其**内积定义为**

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

§ 1　内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义**距离**、**范数**、**内积**这些概念，

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$，其**内积定义为**

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

并且满足：

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义**距离**、**范数**、**内积**这些概念,

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, 其**内积定义为**

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

并且满足:

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0;(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$, 当且仅当 $\mathbf{a}=0$; (2) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\overline{(\mathbf{b},\mathbf{a})}$;

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义距离、范数、内积这些概念,

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, 其内积定义为

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

并且满足:

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0;(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$, 当且仅当 $\mathbf{a}=0$;   (2) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\overline{(\mathbf{b},\mathbf{a})}$;

(3) $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$;   (4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

§ 1 内积空间的基本性质

一、内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^2$ 中可以定义距离、范数、内积这些概念,

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2), \mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, 其内积定义为

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

并且满足:

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0; (\mathbf{a},\mathbf{a})=0$, 当且仅当 $\mathbf{a}=0$; (2) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\overline{(\mathbf{b},\mathbf{a})}$;

(3) $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$; (4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

我们把这样的一些性质抽象出来，把他们作为内积需满足的基本性质.

定义 3.1.1 H *是数域* $\mathbb{K}$ *上的线性空间*,

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$***, 有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$***, 有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$***, 有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, *当且仅当* $x = 0$*;*

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与它对应, 使得对任意的 $x, y \in H, a \in K$,满足

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与它对应, 使得对任意的 $x, y \in H, a \in K$, 满足

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与它对应, 使得对任意的 $x, y \in H, a \in K$ ，满足

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$***, 有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义了内积的空间 H 称为**内积空间**.

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,
如果对于任意 $x, y \in H$***, 有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义了内积的空间 H 称为**内积空间**.

注1 (x, y) 是一个**二元函数**,

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, ***有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应, 使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***, 满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, *当且仅当* $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ *是* H *上的一个* **内积**,

定义了内积的空间 H *称为***内积空间**.

注1 (x, y) 是一个**二元函数**,

对于每一个固定的 $y \in H, (x, y)$ 是 H 上的一个**线性泛函**.

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与它对应, 使得对任意的 $x, y \in H, a \in K$,满足

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义了内积的空间 H 称为**内积空间**.

注1 (x, y) 是一个**二元函数**,

对于每一个固定的 $y \in H, (x, y)$ 是 H 上的一个**线性泛函**.

注2 $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}(x, y)$, 即

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$**, 有** $\mathbb{K}$ **中的一个数** (x, y) **与它对应, 使得对任意的** $x, y \in H, a \in K$ **, 满足**

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0,$ 当且仅当 $x = 0;$

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)};$

(3) $(ax, y) = a(x, y);$

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义了内积的空间 H 称为**内积空间**.

注1 (x, y) 是一个**二元函数**,

对于每一个固定的 $y \in H, (x, y)$ 是 H 上的一个**线性泛函**.

注2 $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}(x, y)$, 即

内积对于后一个变量是共轭线性.

定义 3.1.1 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,

如果对于任意 $x, y \in H$, ***有*** $\mathbb{K}$ ***中的一个数*** (x, y) ***与它对应，使得对任意的*** $x, y \in H, a \in K$ ***，满足***

(1) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0$, 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(3) $(ax, y) = a(x, y)$;

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个 **内积**,

定义了内积的空间 H 称为**内积空间**.

注1 (x, y) 是一个**二元函数**,

对于每一个固定的 $y \in H, (x, y)$ 是 H 上的一个**线性泛函**.

注2 $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}(x, y)$, 即

内积对于后一个变量是共轭线性.

注3 对于实数域上的线性空间, **可以定义实的内积空间**, 这时内积满足的第 (2) 条改为 $(x, y) = (y, x)$.

例 3.1.2 对 $x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. **定义**

例 3.1.2 **对** $x = (x_1, \cdots, x_n); y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. **定义**

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \tag{3.1.1}$$

例 3.1.2 对 $x=(x_1,\cdots,x_n); y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

例 3.1.2 *对* $x=(x_1,\cdots,x_n); y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. *定义*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

例 3.1.2 对 $x=(x_1,\cdots,x_n); y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例 3.1.2 *对* $x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. *定义*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例 3.1.3 *在复的* n *维向量空间* $\mathbb{C}^n$ *中可以类似的定义内积:*

例 3.1.2 *对* $x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. *定义*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}\quad(x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例 3.1.3 *在复的 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中可以类似的定义内积:*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}, \tag{3.1.3}$$

例 3.1.2 *对* $x=(x_1,\cdots,x_n); y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. *定义*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例 3.1.3 *在复的* n *维向量空间* $\mathbb{C}^n$ *中可以类似的定义内积:*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}, \tag{3.1.3}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$; $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$.

例 3.1.2 *对* $x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. *定义*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此 $\mathbb{R}^n$ **一个(实的)内积空间.**

下面我们可以看到，由这个内积**可定义（范数）**：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}\quad(x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例 3.1.3 *在复的 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中可以类似的定义内积:*

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}, \tag{3.1.3}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n);\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$.

在**此内积下** $\mathbb{C}^n$ **成为一个内积空间**.

二、由内积生成的范数

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.
为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.
为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. 为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\big|(x, y)\big|^2 \leq (x, x)(y, y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.

为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \leq (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. 为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \left|\lambda\right|^2 (y,y) \ge 0. \tag{3.1.5}$$

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. 为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + \left|\lambda\right|^2 (y, y) \geq 0. \tag{3.1.5}$$

设 $y \neq 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入上式知

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. 为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \left|\lambda\right|^2 (y,y) \ge 0. \tag{3.1.5}$$

设 $y \ne 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入上式知

$$(x,x) - 2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} + \frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} \ge 0,$$

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. 为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*

设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\big|(x,y)\big|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \big|\lambda\big|^2(y,y) \ge 0. \tag{3.1.5}$$

设 $y \neq 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入上式知

$$(x,x) - 2\frac{\big|(x,y)\big|^2}{(y,y)} + \frac{\big|(x,y)\big|^2}{(y,y)} \ge 0,$$

因此 $\big|(x,y)\big|^2 \le (x,x)(y,y)$. 当 $y=0$, $(y,y)=0$, 不等式显然成立.

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.
为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 (*Schwarz不等式*)
设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \left|\lambda\right|^2 (y,y) \ge 0. \tag{3.1.5}$$

设 $y \neq 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入上式知

$$(x,x) - 2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} + \frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} \ge 0,$$

因此 $\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y)$. 当 $y = 0, (y,y) = 0$, 不等式显然成立.

注1 其中**等号当且仅当 x 与 y 线性相关时成立**($x = -\lambda y$).

二、由内积生成的范数

在内积空间中, 希望类似于在 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义元素的范数 $\|\mathbf{x}\|$, 且 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.
为验证这样定义的范数 $\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.4 *(Schwarz不等式)*
设 H 是内积空间, 对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{3.1.4}$$

思路分析: **我们利用内积的定义, 即四个条件来证明.**

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对任意的 $x, y \in H$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda(y,x) + \left|\lambda\right|^2 (y,y) \ge 0. \tag{3.1.5}$$

设 $y \neq 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入上式知

$$(x,x) - 2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} + \frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)} \ge 0,$$

因此 $\left|(x,y)\right|^2 \le (x,x)(y,y)$. 当 $y = 0, (y,y) = 0$, 不等式显然成立.

注1 其中**等号当且仅当 x 与 y 线性相关时成立**($x = -\lambda y$).

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k,$ ）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\mid x_ky_k\mid\leq(\sum_{k=1}^{n}\mid x_k\mid^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}\mid y_k\mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k,$）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\leq(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x\in H$, 定义*

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k,$）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} | x_k y_k | \leq (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间* H *上, 对于任意的* $x \in H$, *定义*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, ）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} | x_k y_k | \leq (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x \in H$, 定义*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k,$）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\leq(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x\in H$, 定义*

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ ***是 H 上的一个范数.***

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

对于(iv)三角不等式, 由 Schwarz 不等式我们有

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k,$ ）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} | x_ky_k | \le (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x\in H$, 定义*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

对于(iv)三角不等式, 由 Schwarz 不等式我们有

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) \le \|x+y\|\,\|x\| + \|x+y\|\,\|y\| = \|x+y\|\,(\|x\|+\|y\|),$$

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k,$ ）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\leq(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x\in H$, 定义*

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

对于(iv)三角不等式, 由 Schwarz 不等式我们有

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)\leq\|x+y\|\,\|x\|+\|x+y\|\,\|y\|=\|x+y\|\,(\|x\|+\|y\|),$$

于是

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\,.$$

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k$,）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} | x_k y_k | \le (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x \in H$, 定义*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

对于(iv)三角不等式, 由 Schwarz 不等式我们有

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) \le \|x+y\| \|x\| + \|x+y\| \|y\| = \|x+y\| (\|x\| + \|y\|),$$

于是

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

故 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 是 H 上由内积产生的范数.

注2 结合例3.1.2（$(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k$,）可知, Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\leq(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

是 Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.5 *在内积空间 H 上, 对于任意的 $x\in H$, 定义*

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数.

事实上, (3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii).

对于(iv)三角不等式, 由 Schwarz 不等式我们有

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)\leq\|x+y\|\,\|x\|+\|x+y\|\,\|y\|=\|x+y\|\,(\|x\|+\|y\|),$$

于是

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

故 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是 H 上由内积产生的范数.

从而我们有下述结论：

从而我们有下述结论:

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

内积空间中定义了范数，由范数又可以定义距离，这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

从而我们有下述结论:

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间*.

内积空间中定义了范数, 由范数又可以定义距离, 这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由 Schwarz 不等式我们可以得到:

从而我们有下述结论:

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

内积空间中定义了范数, 由范数又可以定义距离, 这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由 Schwarz 不等式我们可以得到:

定理 3.1.7 *设 H 是内积空间, 则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数. 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时 $(x_n, y_n) \to (x,y)$.*

从而我们有下述结论:

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

内积空间中定义了范数, 由范数又可以定义距离, 这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由 Schwarz 不等式我们可以得到:

定理 3.1.7 *设 H 是内积空间, 则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数. 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时 $(x_n, y_n) \to (x,y)$.*

分析: 只要证明 $|(x_n,y_n)-(x,y)| \to 0\ (n\to\infty)$. 注意到 $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$, 通过加一项, 再减掉这一项, 利用 Schwarz 不等式来证明.

证明 由 Schwarz 不等式

从而我们有下述结论：

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

内积空间中定义了范数，由范数又可以定义距离，这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由 Schwarz 不等式我们可以得到：

定理 3.1.7 *设 H 是内积空间，则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数. 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时 $(x_n, y_n) \to (x,y)$.*

分析: 只要证明 $|(x_n,y_n)-(x,y)| \to 0\ (n\to\infty)$. 注意到 $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$, 通过加一项，再减掉这一项，利用 Schwarz 不等式来证明.

证明 由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}\big|(x_n,y_n)-(x,y)\big| &\le \big|(x_n,y_n)-(x_n,y)\big| + \big|(x_n,y)-(x,y)\big| \\ &\le \|y_n-y\|\,\|x_n\| + \|x_n-x\|\,\|y\|,\end{aligned}$$

从而我们有下述结论：

定理 3.1.6 *每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

内积空间中定义了范数，由范数又可以定义距离，这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由 Schwarz 不等式我们可以得到：

定理 3.1.7 *设 H 是内积空间，则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数. 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时 $(x_n, y_n) \to (x,y)$.*

分析: 只要证明 $|(x_n,y_n)-(x,y)| \to 0 \ (n\to\infty)$. 注意到 $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$, 通过加一项，再减掉这一项，利用 Schwarz 不等式来证明.

证明 由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}\left|(x_n,y_n)-(x,y)\right| &\le \left|(x_n,y_n)-(x_n,y)\right| + \left|(x_n,y)-(x,y)\right| \\ &\le \|y_n-y\|\,\|x_n\| + \|x_n-x\|\,\|y\|,\end{aligned}$$

因为 $\{\|x_n\|\}$ 有界，所以 $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

定理 3.1.8 设集合 M 在内积空间 H 中稠密, 若 $x_0 \in H$, 且有

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则 $x_0 = 0$

定理 3.1.8 *设集合 M 在内积空间 H 中稠密, 若 $x_0 \in H$, 且有*

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则 $x_0 = 0$

分析: 只要证 $(x_0, x_0) = 0$.

定理 3.1.8 *设集合 M 在内积空间 H 中稠密, 若 $x_0 \in H$, 且有*

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则 $x_0 = 0$

分析: 只要证 $(x_0, x_0) = 0$.

证明 **由 M 在 H 中稠**, 对任意 $x_0 \in H$, 存在 $x_n \in M(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

定理 3.1.8 设集合 M 在内积空间 H 中稠密, 若 $x_0 \in H$, 且有

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则 $x_0 = 0$

分析: 只要证 $(x_0, x_0) = 0$.

证明 **由 M 在 H 中稠**, 对任意 $x_0 \in H$, 存在 $x_n \in M (n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$x_n \to x_0 (n \to \infty).$$

由内积的连续性

$$(x_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x_0) = 0,$$

定理 3.1.8 *设集合 M 在内积空间 H 中稠密, 若 $x_0 \in H$, 且有*

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则 $x_0 = 0$

分析: 只要证 $(x_0, x_0) = 0$.

证明 **由 M 在 H 中稠**, 对任意 $x_0 \in H$, 存在 $x_n \in M(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$x_n \to x_0(n \to \infty).$$

由内积的连续性

$$(x_0, x_0) = \lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) = 0,$$

所以 $x_0 = 0$.

三、内积和相应范数的关系

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设* H *是内积空间, 对于任何的* $x, y \in H$ *,有*

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 设 H *是内积空间, 对于任何的* $x, y \in H$ *,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 **由内积定义的范数**, 易知

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x,y\in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 **由内积定义的范数**, 易知

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y), \qquad (a)$$

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 由内积定义的范数, 易知

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y), \tag{a}$$

$$\|x-y\|^2=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y), \tag{b}$$

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,
下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 由内积定义的范数, 易知

$$\|x+y\|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y), \qquad (a)$$

$$\|x-y\|^2 = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y), \qquad (b)$$

$$\|x+iy\|^2 = (x,x) - i(x,y) + i(y,x) + (y,y), \qquad (c)$$

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 **由内积定义的范数**, 易知

$$\|x+y\|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y), \qquad (a)$$

$$\|x-y\|^2 = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y), \qquad (b)$$

$$\|x+iy\|^2 = (x,x) - i(x,y) + i(y,x) + (y,y), \qquad (c)$$

$$\|x-iy\|^2 = (x,x) + i(x,y) - i(y,x) + (y,y), \qquad (d)$$

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 由内积定义的范数, 易知

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y), \qquad (a)$$
$$\|x-y\|^2=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y), \qquad (b)$$
$$\|x+iy\|^2=(x,x)-i(x,y)+i(y,x)+(y,y), \qquad (c)$$
$$\|x-iy\|^2=(x,x)+i(x,y)-i(y,x)+(y,y), \qquad (d)$$

由第一式和第二式相加, 得到平行四边形法则.

三、内积和相应范数的关系

前面由内积引出范数,

下面讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.9 *设 H 是内积空间, 对于任何的 $x, y \in H$,有*

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 **由内积定义的范数**, 易知

$$\|x+y\|^2 = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y), \qquad (a)$$
$$\|x-y\|^2 = (x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y), \qquad (b)$$
$$\|x+iy\|^2 = (x,x)-i(x,y)+i(y,x)+(y,y), \qquad (c)$$
$$\|x-iy\|^2 = (x,x)+i(x,y)-i(y,x)+(y,y), \qquad (d)$$

由第一式和第二式相加, 得到平行四边形法则.

由 $(a)-(b)+i(c)-i(d)$ 可得极化恒定式.

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为:

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和;

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

如果 $x \perp y$, 平行四边形法则成为

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2 \quad (\text{勾股定理})$$

.

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

如果 $x \perp y$, 平行四边形法则成为

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2 \quad (\text{勾股定理})$$

(2) 由**内积可定义一个范数** $\Rightarrow$ **内积空间必定是一个赋范空间**.

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

如果 $x \perp y$, 平行四边形法则成为

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2 \quad \text{(勾股定理)}$$

(2) 由**内积可定义一个范数** $\Rightarrow$ **内积空间必定是一个赋范空间**.

再**由范数诱导出的距离** $\Rightarrow$ 它又可以**成为一个距离空间**.

问题: 反之, **是否每个线性赋范空间 X 都能赋以内积 (x, y)，使原来的范数总可以表示成为 $\sqrt{(x,x)}$.**

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为:

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和;

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

如果 $x \perp y$, 平行四边形法则成为

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2 \quad \text{(勾股定理)}$$

(2) 由**内积可定义一个范数** $\Rightarrow$ **内积空间必定是一个赋范空间**.

再**由范数诱导出的距离** $\Rightarrow$ 它又可以**成为一个距离空间**.

问题: 反之, **是否每个线性赋范空间 X 都能赋以内积 (x,y), 使原来的范数总可以表示成为 $\sqrt{(x,x)}$.**

答案: **一般并非如此**, 而是**有条件**的,

注 (1) 平行四边形法则的**几何解释**为：

平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这是**内积空间的特征性质**.

在**有了正交性的概念**以后,

如果 $x \perp y$, 平行四边形法则成为

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2 \quad (\text{勾股定理})$$

(2) 由**内积可定义一个范数** $\Rightarrow$ **内积空间必定是一个赋范空间**.

再**由范数诱导出的距离** $\Rightarrow$ 它又可以**成为一个距离空间**.

问题: 反之, **是否每个线性赋范空间** X **都能赋以内积** (x, y) **, 使原来的范数总可以表示成为** $\sqrt{(x, x)}$**.**

答案: **一般并非如此**, 而是**有条件**的,

X 能赋以内积的 **充要条件** **是**: X **中的范数满足平行四边形法则.**

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, ***如果范数满足平行四边形法则***, 则***可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.***

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, ***如果范数满足平行四边形法则***, 则***可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.***

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x,y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

定理 3.1.10 设 X *是赋范空间*, ***如果范数满足平行四边形法则***, *则* ***可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.***

证明大意: 在实的空间, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot,\cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, ***如果范数满足平行四边形法则***, 则***可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.***

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 **先证明对整数成立**,

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 **先证明对整数成立**,

然后对有理数成立,

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: 在实的空间, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 先证明对整数成立,

然后对有理数成立,

再加上 $(\cdot, \cdot)_1$ 的连续性, 推出对所有的实数均有 $(cx, y)_1 = c(x, y)_1$.

进一步 复的赋范空间的内积,

定理 3.1.10 设 X *是赋范空间, 如果范数满足平行四边形法则, 则可以在* X *中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是* X *中原来的范数.*

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 **先证明对整数成立**,

然后对有理数成立,

再加上 $(\cdot, \cdot)_1$ 的**连续性**, **推出对所有的实数**均有 $(cx, y)_1 = c(x, y)_1$.

进一步 **复的赋范空间的内积**,

对于任意的 $x, y \in X$,令

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: 在实的空间, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot, \cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 先证明对整数成立,

然后对有理数成立,

再加上 $(\cdot, \cdot)_1$ 的连续性, 推出对所有的实数均有 $(cx, y)_1 = c(x, y)_1$.

进一步 复的赋范空间的内积,

对于任意的 $x, y \in X$,令

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1 \tag{3.1.10}$$

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: 在实的空间, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x,y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot,\cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) 要用到范数满足平行四边形法则.

证明满足条件(3)(齐次)可以 先证明对整数成立,

然后对有理数成立,

再加上 $(\cdot,\cdot)_1$ 的连续性, 推出对所有的实数均有 $(cx,y)_1 = c(x,y)_1$.

进一步 复的赋范空间的内积,

对于任意的 $x, y \in X$,令

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) = (x,y)_1 + i(x,iy)_1 \tag{3.1.10}$$

则由 $(\cdot,\cdot)_1$ 的性质, 可以验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的内积, 且 $\sqrt{(x,x)} = \|x\|$.

定理 3.1.10 设 X 是赋范空间, *如果范数满足平行四边形法则*, 则*可以在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数.*

证明大意: **在实的空间**, 对于任意的 $x, y \in X$, 令

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可直接验证 $(\cdot,\cdot)_1$ 满足内积条件(1)和(2),

证明满足条件(4) **要用到范数满足平行四边形法则**.

证明满足条件(3)(齐次)可以 **先证明对整数成立**,

然后对有理数成立,

再加上 $(\cdot,\cdot)_1$ 的**连续性**, **推出对所有的实数**均有 $(cx, y)_1 = c(x, y)_1$.

进一步 **复的赋范空间的内积**,

对于任意的 $x, y \in X$,令

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1 \tag{3.1.10}$$

则由 $(\cdot,\cdot)_1$ 的性质, 可以验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的内积, 且 $\sqrt{(x,x)} = \|x\|$.

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生, 这个赋范空间即可以看作内积空间.

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生, 这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中, 令

$$x(t)=1, \quad y(t)=t,$$

则 $x+y=1+t$, $x-y=1-t$, 于是

注: 范数是由内积产生的充要条件: 平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生, 这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中, 令

$$x(t) = 1, \quad y(t) = t,$$

则 $x + y = 1 + t$, $x - y = 1 - t$, 于是

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1, \quad \|x + y\| = 2, \quad \|x - y\| = 1,$$

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生，这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中，令

$$x(t)=1,\quad y(t)=t,$$

则 $x+y=1+t$, $x-y=1-t$, 于是

$$\|x\|=1,\quad \|y\|=1,\quad \|x+y\|=2,\quad \|x-y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5,$$

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生，这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中，令

$$x(t)=1,\quad y(t)=t,$$

则 $x+y=1+t$, $x-y=1-t$, 于是

$$\|x\|=1,\quad \|y\|=1,\quad \|x+y\|=2,\quad \|x-y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5,$$

但是 $\|x\|^2+\|y\|^2=2$.

注: 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生，这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中，令

$$x(t) = 1, \quad y(t) = t,$$

则 $x+y=1+t$, $x-y=1-t$, 于是

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1, \quad \|x+y\| = 2, \quad \|x-y\| = 1,$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5,$$

但是 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$.

根据平行四边形法则，$C[0,1]$ (同样 $C[a,b]$) 中的范数不是由内积产生的.

注: 范数是由内积产生的充要条件: 平行四边形法则成立.

如果这个范数可以由内积产生, 这个赋范空间即可以看作内积空间.

不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.11 在 $C[0,1]$ 中, 令

$$x(t)=1,\quad y(t)=t,$$

则 $x+y=1+t$, $x-y=1-t$, 于是

$$\|x\|=1,\quad \|y\|=1,\quad \|x+y\|=2,\quad \|x-y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5,$$

但是 $\|x\|^2+\|y\|^2=2$.

根据平行四边形法则, $C[0,1]$ (同样 $C[a,b]$) 中的范数不是由内积产生的.

即在空间 $C[0,1]$ 上 不能定义一个内积, 使它产生的范数为 $C[0,1]$ 中原来的范数 (按最大值定义的范数).

四、完备的内积空间

四、完备的内积空间

在赋范空间中我们看到空间是否完备是十分重要的, 在**内积空间中，是否完备**也是很重要的.

四、完备的内积空间

在赋范空间中我们看到空间是否完备是十分重要的, 在**内积空间中, 是否完备**也是很重要的.

定义 3.1.12 *完备的内积空间称为Hilbert空间.*

四、完备的内积空间

在赋范空间中我们看到空间是否完备是十分重要的, 在**内积空间中，是否完备**也是很重要的.

定义 3.1.12 *完备的内积空间称为Hilbert空间.*

根据 "完备空间的任何一个闭子空间也是完备的" 我们可以得到:

四、完备的内积空间

在赋范空间中我们看到空间是否完备是十分重要的, 在**内积空间中，是否完备**也是很重要的.

定义 3.1.12 *完备的内积空间称为Hilbert空间.*

根据 "完备空间的任何一个闭子空间也是完备的" 我们可以得到:

定理 3.1.13 *设 H 是一个Hilbert空间, $Y \subset H$ 是的一个线性子空间, 那么 Y 是一个Hilbert空间当且仅当 Y 是闭的.*

例 3.1.14 $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)是 Hilbert 空间.

四、完备的内积空间

在赋范空间中我们看到空间是否完备是十分重要的, 在**内积空间中，是否完备**也是很重要的.

定义 3.1.12 *完备的内积空间称为Hilbert空间.*

根据 "完备空间的任何一个闭子空间也是完备的" 我们可以得到:

定理 3.1.13 *设 H 是一个Hilbert空间, $Y \subset H$ 是的一个线性子空间, 那么 Y 是一个Hilbert空间当且仅当 Y 是闭的.*

例 3.1.14 $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)是 *Hilbert* 空间.

注： 内积空间是一种特殊的赋范空间, 从泛函分析发展的历史上看, 人们首先注意到的是内积空间而不是赋范空间, 内积空间特别是 Hilbert 空间是欧氏空间最自然的“推广”, 它们具有与欧氏空间十分相近的许多性质, 迄今为止仍然是应用最广泛的一类空间.

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schimidt 在 1908 年引入的.

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schimidt 在 1908 年引入的.

例 3.1.15 *l^2 是 Hilbert 空间.*

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schimidt 在 1908 年引入的.

例 3.1.15 ***l^2 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in l^2$, $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}. \tag{3.1.11}$$

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schimidt 在 1908 年引入的.

例 3.1.15 *l^2 是 Hilbert 空间.*

对任意 $x, y \in l^2$, $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}. \tag{3.1.11}$$

由 *Hölder* 不等式

$$\left|(x, y)\right| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\eta_k}|^2)^{1/2},$$

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schmidt 在 1908 年引入的.

例 3.1.15 *l^2 是 Hilbert 空间.*

对任意 $x, y \in l^2$, $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}. \tag{3.1.11}$$

由 *Hölder* 不等式

$$\left|(x, y)\right| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k\right|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\overline{\eta_k}\right|^2\Big)^{1/2},$$

易证 (x, y) 满足内积4个条件. 由它产生范数

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k\right|^2\Big)^{1/2}. \tag{3.1.12}$$

在内积空间和 Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语, 与欧几里得几何中的语言相似, 它是由 E.Schimidt 在 1908 年引入的.

例 3.1.15 *l^2 是 Hilbert 空间.*

对任意 $x, y \in l^2$, $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}. \tag{3.1.11}$$

由 *Hölder* 不等式

$$\left|(x, y)\right| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k\right|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\overline{\eta_k}\right|^2\Big)^{1/2},$$

易证 (x, y) 满足内积4个条件. 由它产生范数

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k\right|^2\Big)^{1/2}. \tag{3.1.12}$$

所以 l^2 是 Hilbert 空间.

例 3.1.16 $L^2[a,b]$ ***是 Hilbert 空间.***

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

注意到:

$$\big|(x,y)\big| \leq \Big|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\Big| \leq \Big(\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \big|y(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

注意到:

$$\big|(x,y)\big| \leq \Big|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\Big| \leq \Big(\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big|\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \big|y(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

易知 (x,y) 是 $L^2[a,b]$ 上的内积.

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

注意到:

$$\big|(x,y)\big| \le \big|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\big| \le (\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t|)^{1/2}(\int_a^b \big|y(t)\big|^2\mathrm{d}t)^{1/2}.$$

易知 (x,y) 是 $L^2[a,b]$ 上的内积.

由这个内积产生的范数是

$$\|x\| = [\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1.14}$$

例 3.1.16 $L^2[a,b]$ ***是 Hilbert 空间.***

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

注意到:

$$\big|(x,y)\big| \leq \Big|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\Big| \leq \Big(\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big|\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b \big|y(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

易知 (x,y) **是** $L^2[a,b]$ **上的内积**.

由这个内积产生的范数是

$$\|x\| = \Big[\int_a^b \big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1.14}$$

所以 $L^2[a,b]$ 是Hilbert空间.

例 3.1.16 ***$L^2[a,b]$* 是 *Hilbert* 空间.**

对任意 $x, y \in L^2[a,b]$, 定义

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

注意到:

$$|(x,y)| \leq |\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t| \leq (\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t|)^{1/2}(\int_a^b |y(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}.$$

易知 (x,y) 是 $L^2[a,b]$ 上的内积.

由这个内积产生的范数是

$$\|x\| = [\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1.14}$$

所以 $L^2[a,b]$ 是Hilbert空间.

注: 不是所有的内积空间都是Hilbert空间.

例 3.1.17 *在全体连续函数组成的线性空间 X 上, 定义*

例 3.1.17 *在全体连续 函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

例 3.1.17 *在全体连续 函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.
由此内积产生的范数为

$$\|x\|=[\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

例 3.1.17 *在全体连续 函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.
由此内积产生的范数为

$$\|x\|=[\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

例 3.1.17 *在全体连续函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

$$\|x\| = [\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

例 3.1.17 *在全体连续函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

$$\|x\|=[\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

注: 空间是否完备是由全体 Cauchy 列是否都收敛决定的.

例 3.1.17 *在全体连续函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.
由此内积产生的范数为

$$\|x\| = [\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

注： 空间是否完备是由全体 Cauchy 列是否都收敛决定的.

由距离空间完备化定理, **任何一个内积空间 X 都可以完备化**(因为它也是一个距离空间), 即

例 3.1.17 *在全体连续 函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

$$\|x\|=[\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

注： **空间是否完备是由全体 Cauchy 列是否都收敛决定的**.

由距离空间完备化定理, **任何一个内积空间 X 都可以完备化**(因为它也是一个距离空间), 即

完备成为一个 Hilbert 空间 H, X 等距同构于 H 中的一个稠子集.

例 3.1.17 *在全体连续 函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

$$\|x\| = [\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

注： 空间是否完备是由全体 Cauchy 列是否都收敛决定的.

由距离空间完备化定理, **任何一个内积空间 X 都可以完备化**(因为它也是一个距离空间), 即

完备成为一个 Hilbert 空间 H, X 等距同构于 H 中的一个稠子集.

在等距同构的意义下, 这样的**完备化空间是唯一**的.

例 3.1.17 *在全体连续函数组成的线性空间 X 上, 定义*

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X 是一个内积空间.

由此内积产生的范数为

$$\|x\|=[\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.16}$$

但 X 在范数 $\|\cdot\|$ 下不完备 (见例1.1.15和例2.1.8).

X **是一个内积空间**, 但**不是 Hilbert空间.**

注： 空间是否完备是由全体 Cauchy 列是否都收敛决定的.

由距离空间完备化定理, **任何一个内积空间 X 都可以完备化**(因为它也是一个距离空间), 即

完备成为一个 Hilbert 空间 H, X 等距同构于 H 中的一个稠子集.

在等距同构的意义下, 这样的**完备化空间是唯一**的.

例3.1.17中的空间 X, 完备化以后成为 $L^2[a,b]$.