内蒙古大学数学科学学院

# 泛函分析

# Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

# § 3　正交系和正交基

**元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中**扮演着重要的角色.

# § 3　正交系和正交基

**元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中**扮演着重要的角色.

**在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量** $e_1, e_2, ..., e_n$,

# § 3　正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.
在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$,
则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即

# § 3　正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.

在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$,

则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即

在空间中建立了一组坐标系,

# § 3 正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.
在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$,
则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即
在空间中建立了一组坐标系,
空间中的任何一个元素都可以由这组坐标的线性组合表示出来.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_i = (x, e_i),\ \ i = 1, 2, ..., n,$

# § 3 正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.

在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$,

则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即

在空间中建立了一组坐标系,

空间中的任何一个元素都可以由这组坐标的线性组合表示出来.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_i = (x, e_i),\ \ i = 1, 2, ..., n,$

并且向量的长度

# § 3 正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.
在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n,$
则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即
在空间中建立了一组坐标系,
空间中的任何一个元素都可以由这组坐标的线性组合表示出来.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_i = (x, e_i),\ \ i = 1, 2, ..., n,$
并且向量的长度

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} | (x, e_i) |^2)^{\frac{1}{2}}.$$

# § 3 正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和 Hilbert 空间中扮演着重要的角色.
在 $n$ 维欧氏空间, 选定 $n$个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$,
则形成 $n$ 维空间中的一组正交基,即
在空间中建立了一组坐标系,
空间中的任何一个元素都可以由这组坐标的线性组合表示出来.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_i = (x, e_i),\ \ i = 1, 2, ..., n,$
并且向量的长度

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} | (x, e_i) |^2)^{\frac{1}{2}}.$$

目标: 在一般的内积空间中也可以 类似的引入正交基、投影、 坐标分解这些十分重要的概念, 建立起一套完整的空间坐标理论.

# 一、 内积空间中的正交系

## 一、 内积空间中的正交系

先给出正交系和标准正交系的概念.

## 一、 内积空间中的正交系

**先给出正交系和标准正交系的概念.**

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ *是内积空间* $X$ *中的子集.*

# 一、 内积空间中的正交系

先给出正交系和标准正交系的概念.

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.
如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时**, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 中的一个**正交系**.

# 一、 内积空间中的正交系

**先给出正交系和标准正交系的概念.**

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.
如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时,** $(x_\alpha, x_\beta) = 0$**,** 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $X$ 中的一个***正交系***.
**若** $\|x_\alpha\| = 1, \forall\alpha \in I$**,** 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个***标准正交系***.

## 一、 内积空间中的正交系

**先给出正交系和标准正交系的概念.**

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.

如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时**, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 中的一个***正交系***.

**若** $\|x_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in I$, 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个***标准正交系***.

在内积空间中, **正交集** **是线性无关的**, 见下述定理.

## 一、 内积空间中的正交系

先给出正交系和标准正交系的概念.

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.

如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时**, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 中的一个**正交系**.

**若** $\|x_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in I$, 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个**标准正交系**.

在内积空间中, **正交集** **是线性无关的**, 见下述定理.

**定理 3.3.2** 设 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是内积空间 $X$ 中的正交集, 则 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的. 如果 $X$ 是 $k$ 维的, 则任何的 $x \in X$ 都可以表示为

$$x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n.$$

# 一、 内积空间中的正交系

先给出正交系和标准正交系的概念.

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.

如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时**, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $X$ 中的一个***正交系***.

*若* $\|x_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in I$, 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个***标准正交系***.

在内积空间中, **正交集** **是线性无关的**, 见下述定理.

**定理 3.3.2** *设 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是内积空间 $X$ 中的正交集, 则 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的. 如果 $X$ 是 $k$ 维的, 则任何的 $x \in X$ 都可以表示为*

$$x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n.$$

分析: 设 $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$, 要证明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 线性无关,

## 一、 内积空间中的正交系

**先给出正交系和标准正交系的概念.**

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.

如果**当** $\alpha \neq \beta$ **时**, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 中的一个***正交系***.

*若* $\|x_\alpha\| = 1, \forall \alpha \in I$, 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个***标准正交系***.

在内积空间中, **正交集** **是线性无关的**, 见下述定理.

**定理 3.3.2** *设 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是内积空间 $X$ 中的正交集, 则 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的. 如果 $X$ 是 $k$ 维的, 则任何的 $x \in X$ 都可以表示为*

$$x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n.$$

**分析:** 设 $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$, 要证明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 线性无关,

即证明 $\alpha_i = 0 (i = 1, \cdots, m)$.

## 一、 内积空间中的正交系

先给出正交系和标准正交系的概念.

**定义 3.3.1** 设 $\{x_\alpha\}, \alpha \in I$ 是内积空间 $X$ 中的子集.
如果当 $\alpha \neq \beta$ 时, $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, 则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $X$ 中的一个**正交系**.
若 $\|x_\alpha\| = 1, \forall\alpha \in I$, 称 $\{x_\alpha\}$ 是一个**标准正交系**.

在内积空间中, **正交集** **是线性无关的**, 见下述定理.

**定理 3.3.2** 设 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是内积空间 $X$ 中的正交集, 则 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的. 如果 $X$ 是 $k$ 维的, 则任何的 $x \in X$ 都可以表示为

$$x = \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n.$$

分析: 设 $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$, 要证明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 线性无关,
即证明 $\alpha_i = 0(i = 1, \cdots, m)$.

证明思路: 注意到 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是正交系, 根据正交系的定义. 可考虑对方程两边作内积.

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对** $e_m, \;\; m = 1, ..., k$ **作内积得**

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对** $e_m, \ \ m = 1, ..., k$ **作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对** $e_m, \quad m = 1, ..., k$ **作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

这说明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的.

(2) 如果 $X$ 是 $k$ 维的.

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对** $e_m, \quad m = 1, ..., k$ **作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

这说明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的.

(2) 如果 $X$ 是 $k$ 维的.

因 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的, **则对于任何的** $x \in X$ **都可以表示为** $\{e_1, ..., e_k\}$ **的线性组合**. 即:

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对** $e_m, \quad m = 1, ..., k$ **作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

这说明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的.

(2) 如果 $X$ 是 $k$ 维的.

因 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的, **则对于任何的** $x \in X$ **都可以表示为** $\{e_1, ..., e_k\}$ **的线性组合.** 即:

$$x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n.$$

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对 $e_m, \quad m = 1, ..., k$ 作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

这说明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的.

(2) 如果 $X$ 是 $k$ 维的.

因 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的, **则对于任何的 $x \in X$ 都可以表示为 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合.** 即:

$$x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n.$$

**两边对 $e_m, \quad m = 1, ...k$ 作内积, 有**

**证明** (1) 对于 $\{e_1, ..., e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = 0,$$

**两边都对 $e_m$, $m = 1, ..., k$ 作内积得**

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (e_n, e_m) = \alpha_m (e_m, e_m) = \alpha_m.$$

这说明 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的.

(2) 如果 $X$ 是 $k$ 维的.

因 $\{e_1, ..., e_k\}$ 是线性无关的, **则对于任何的 $x \in X$ 都可以表示为 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合.** 即:

$$x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n.$$

**两边对 $e_m$, $m = 1, ...k$ 作内积, 有**

$$(x, e_m) = (\sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (e_n, e_m) = \lambda_m.$$

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注2** 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$.（$x$在$e_n$上投影的长度.）

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注2** 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$.（$x$在$e_n$上投影的长度.）

显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处,

注1 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

注2 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$.（$x$在$e_n$上投影的长度.）

显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处,

这也是我们更关注正交分解的重要原因.

## 二、 正交投影

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注2** 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$.（$x$在$e_n$上投影的长度.）

显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处,

这也是我们更关注正交分解的重要原因.

## 二、 正交投影

**定理 3.3.3** 设 $\{e_n\}$ *是内积空间* $X$ *中的标准正交系*, $x \in X$, $a_1, \cdots, a_n$ *是* $n$ *个数*,

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注2** 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$. （$x$在$e_n$上投影的长度.）

显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处,

这也是我们更关注正交分解的重要原因.

## 二、 正交投影

**定理 3.3.3** 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 $X$ 中的*标准正交系*, $x \in X$, $a_1, \cdots, a_n$ 是 $n$ 个数,

*当且仅当* $a_k = (x, e_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$ *时*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$$

*取得最小值.*

**注1** 在无穷维空间, 由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 可以证明其中的正交集是线性无关的.

**注2** 从证明中可以看到, 如果空间中的一个元素 $x$ 能表示成一个正交集 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的线性组合, 则 $e_n$ 前的系数为 $\alpha_n = (x, e_n)$.（$x$在$e_n$上投影的长度.）

显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处,

这也是我们更关注正交分解的重要原因.

## 二、 正交投影

**定理 3.3.3** 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 $X$ 中的***标准正交系***, $x \in X$, $a_1, \cdots, a_n$ 是 $n$ 个数,

***当且仅当*** $a_k = (x, e_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$ ***时***

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$$

***取得最小值.***

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理**, 有

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理,** 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)-a_k\right|^2$$

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理**, 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)-a_k\right|^2$$

所以**当且仅当** $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ **时**, $\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k\|$ **取最小值**.

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理**, 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\big|(x,e_k)-a_k\big|^2$$

所以**当且仅当** $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ **时**, $\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k\|$ **取最小值**.

**注1** 从证明中看到 $x-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **和** $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ **张成的子空间** $M$ **正交**.

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理**, 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)-a_k\right|^2$$

所以**当且仅当** $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ **时**, $\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|$ **取最小值**.

**注1** 从证明中看到 $x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **和** $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ **张成的子空间** $M$ **正交**.

**注2** **称** $x_0=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **为** $x$**在** $M$ **上的投影**, $x$ **到** $M$ **的距离**为 $\|x-x_0\|$.

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理**, 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)-a_k\right|^2$$

所以**当且仅当** $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ **时**, $\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k\|$ **取最小值**.

**注1** 从证明中看到 $x-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **和** $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ **张成的子空间** $M$ **正交**.

**注2** **称** $x_0=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **为** $x$**在** $M$ **上的投影**, $x$ **到** $M$ **的距离为** $\|x-x_0\|$.

**注3** 当$M=\mathrm{Span}\{e_1\}$是一维的子空间时，$x$在 $M$ 上的投影为：$(x,e_1)e_1$.

**证明** 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k, e_i) = (x,e_i)-(x,e_i) = 0(i=1,2,\cdots,n),$$

**应用勾股定理,** 有

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|^2 = \|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2$$

$$= \|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}((x,e_k)-a_k)e_k\|^2 = \|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)-a_k\right|^2$$

所以**当且仅当** $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ **时,** $\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k\|$ **取最小值**.

**注1** **从证明中看到** $x-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **和** $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ **张成的子空间** $M$ **正交**.

**注2** **称** $x_0=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ **为** $x$**在** $M$ **上的投影**, $x$ **到** $M$ **的距离为** $\|x-x_0\|$.

**注3** **当**$M=\mathrm{Span}\{e_1\}$**是一维的子空间时，**$x$**在** $M$ **上的投影为：**$(x,e_1)e_1$.

# 三、 正交基

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的**正交系**,

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的*正交系*,

*如果包含它的最小闭子空间是全空间* $X$, 则 $\{x_a\}, a \in I$ 称是 $X$ 的 ***正交基***.

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的*正交系*,
*如果包含它的最小闭子空间是全空间* $X$, 则 $\{x_a\}, a \in I$ 称是 $X$ 的 *正交基*.

**例 3.3.5** *在空间* $R^n$ 中

$$e_k = (0, 0, \cdots\cdots 0, 1, 0, \cdots, 0) \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

*是* $R^n$ *中的标准正交基.*

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的*正交系*,

*如果包含它的最小闭子空间是全空间* $X$, 则 $\{x_a\}, a\in I$ 称是 $X$ 的 *正交基*.

**例 3.3.5** *在空间* $R^n$ 中

$$e_k=(0,0,\cdots\cdots 0,1,0,\cdots,0)\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

*是* $R^n$ *中的标准正交基*.

**例 3.3.6** $l^2$ 中

$$e_n=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots)\qquad (n=1,2,\cdots)$$

是 $l^2$ *的标准正交基*.

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的*正交系*,
*如果包含它的最小闭子空间是全空间* $X$, 则 $\{x_a\}, a \in I$ 称是 $X$ 的 ***正交基***.

**例 3.3.5** *在空间* $R^n$ 中

$$e_k = (0, 0, \cdots\cdots 0, 1, 0, \cdots, 0) \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

***是*** $R^n$ ***中的标准正交基***.

**例 3.3.6** $l^2$ 中

$$e_n = (0, 0, \cdots 0, 1, 0, \cdots) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

是 $l^2$ ***的标准正交基***.

**证明** **由** $l^2$ **中定义的内积:**

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的正交系,
如果包含它的最小闭子空间是全空间 $X$, 则 $\{x_a\}, a\in I$ 称是 $X$ 的 正交基.

**例 3.3.5** 在空间 $R^n$ 中

$$e_k=(0,0,\cdots\cdots 0,1,0,\cdots,0) \qquad k=1,2,\cdots,n.$$

是 $R^n$ 中的标准正交基.

**例 3.3.6** $l^2$ 中

$$e_n=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

是 $l^2$ 的标准正交基.

**证明** 由 $l^2$ 中定义的内积:

对任意 $x,y\in l^2$, $x=(\xi_k)$, $y=(\eta_k)$, 定义

## 三、 正交基

**定义 3.3.4** $\{x_a\}_{a\in I}$ 是 $X$ 中的正交系,

如果包含它的最小闭子空间是全空间 $X$, 则 $\{x_a\}, a\in I$ 称是 $X$ 的 正交基.

**例 3.3.5** 在空间 $R^n$ 中

$$e_k=(0,0,\cdots\cdots 0,1,0,\cdots,0)\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

是 $R^n$ 中的标准正交基.

**例 3.3.6** $l^2$ 中

$$e_n=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots)\qquad (n=1,2,\cdots)$$

是 $l^2$ 的标准正交基.

**证明** 由 $l^2$ 中定义的内积:

对任意 $x,y\in l^2$, $x=(\xi_k)$, $y=(\eta_k)$, 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k}.$$

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的标准正交系.

(2) 下面证明是标准正交基.

按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的标准正交系.

(2) 下面证明是标准正交基.

按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.

若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的标准正交系.

(2) 下面证明是标准正交基.

按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.

若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.

于是我们要证明:

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的标准正交系.

(2) 下面证明是标准正交基.

按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.
若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.

于是我们要证明:
任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**
**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**
**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**
**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**
**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathbf{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**

**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**

**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

则

$$\|x_n - x\| = \Big( \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k \Big)^{1/2} = \Big( \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \Big)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**
**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**
**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

则

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

**即 $x$ 可以由 $\{e_n\}$ 的线性组合逼近.**

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**

**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**

**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

则

$$\|x_n - x\| = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2\Big)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

**即 $x$ 可以由 $\{e_n\}$ 的线性组合逼近.**

$\therefore H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中.

(1) 易验证 $\{e_n\}$ 是 $l^2$ 中的**标准正交系**.

(2) 下面证明**是标准正交基**.

**按照正交基的定义只需证明包含正交系的最小闭子空间是全空间.**

**若能证明出全空间 $H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中即可.**

**于是我们要证明:**

**任意 $x \in H$, 存在 $x_n \in \mathrm{span}\{e_i\}$, 使得 $x_n \to x$, $n \to \infty$.**

事实上, 对于 $x \in H$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

则

$$\|x_n - x\| = \Big( \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k \Big)^{1/2} = \Big( \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \Big)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

**即 $x$ 可以由 $\{e_n\}$ 的线性组合逼近.**

$\therefore H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中.

这就证明了 $\{e_n\}$ 是一个标准正交基.

**例 3.3.7** *设* $x(t)$ *是* $[-\pi,\pi]$ *上连续可微的函数，且* $x(-\pi)=x(\pi)$.

**例 3.3.7 设 $x(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上连续可微的函数, 且 $x(-\pi) = x(\pi)$.**

*在数学分析中知, $x(t)$* ***可展成它的 Fourier 级数, 而且这个 Fourier 级数一致收敛到 $x(t)$.*** *即*

**例 3.3.7 设 $x(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上连续可微的函数，且 $x(-\pi) = x(\pi)$.**

*在数学分析中知, $x(t)$* ***可展成它的 Fourier 级数，而且这个 Fourier 级数一致收敛到 $x(t)$.*** *即*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

**例 3.3.7 设 $x(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微的函数，且 $x(-\pi)=x(\pi)$.**

*在数学分析中知, $x(t)$* ***可展成它的 Fourier 级数，而且这个 Fourier 级数一致收敛到 $x(t)$.*** *即*

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kt+b_k\sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t.$$

在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中, 通过直接的积分计算有:

**例 3.3.7 设 $x(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微的函数，且 $x(-\pi)=x(\pi)$.**

*在数学分析中知, $x(t)$* ***可展成它的 Fourier 级数，而且这个 Fourier 级数一致收敛到*** *$x(t)$. 即*

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t.$$

在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中, 通过直接的积分计算有:

**命题 3.3.8** ***在线性空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中定义内积***

**例 3.3.7 设 $x(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微的函数，且 $x(-\pi)=x(\pi)$.**

*在数学分析中知, $x(t)$* ***可展成它的 Fourier 级数，而且这个 Fourier 级数一致收敛到 $x(t)$.*** *即*

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t.$$

在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中, 通过直接的积分计算有:

**命题 3.3.8** ***在线性空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中定义内积***

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t.$$

*则三角函数系:*

**例 3.3.7** **设** $x(t)$ **是** $[-\pi,\pi]$ **上连续可微的函数，且** $x(-\pi)=x(\pi)$.

*在数学分析中知,* $x(t)$ ***可展成它的 Fourier 级数，而且这个 Fourier 级数一致收敛到*** $x(t)$. *即*

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t.$$

在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中, 通过直接的积分计算有:

**命题 3.3.8** ***在线性空间*** $L^2[-\pi,\pi]$ ***中定义内积***

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t.$$

*则三角函数系:*

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots) \tag{3.3.2}$$

*是* $L^2[-\pi,\pi]$ *中**实的标准正交集**（事实上它们是**一组标准正交基**）.*

**注** 同样可验证, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n = \pm 1, \pm 2, ...\}$ 也是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中**的另一个标准正交集**.

**注** 同样可验证, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n=\pm1,\pm2,...\}$ 也是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中**的另一个标准正交集**.

**定义 3.3.9** 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *是内积空间* $X$ *中的标准正交系.*

**注** 同样可验证, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n = \pm 1, \pm 2, ...\}$ 也是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中**的另一个标准正交集**.

**定义 3.3.9** 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *是内积空间* $X$ *中的标准正交系.*

*对于* $x \in X$, *我们**称*** $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ ***为*** $x$ ***关于*** $\{e_n\}$ ***的 Fourier 级数,***

**注** 同样可验证, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n = \pm 1, \pm 2, ...\}$ 也是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中**的另一个标准正交集**.

**定义 3.3.9** 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *是内积空间* $X$ *中的标准正交系.*

*对于* $x \in X$, *我们**称*** $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ ***为*** $x$ ***关于*** $\{e_n\}$ ***的 Fourier 级数,***

$(x, e_n)$ ***称为*** $x$ ***关于*** $\{e_n\}$ ***的 Fourier 系数.***

**注** 同样可验证, $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} \mid n=\pm1,\pm2,...\}$ 也是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中**的另一个标准正交集**.

**定义 3.3.9** 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *是内积空间 $X$ 中的标准正交系.*

*对于 $x\in X$, 我们**称** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ **为 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数,***

*$(x,e_n)$ **称为 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数.***

例3.3.3的 Fourier 展开的系数为:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x,\frac{1}{\sqrt{2\pi}});$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt);$$

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt \\ + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

我们知道**在数学分析中 Fourier级数的收敛是 按点收敛**.

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

我们知道**在数学分析中** Fourier**级数的收敛是** **按点收敛**.

下面我们在内积空间中讨论:

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$
\begin{aligned}
x(t) = {} & (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt \\
& + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,
\end{aligned} \tag{3.3.3}
$$

即：

$$
x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}
$$

我们知道**在数学分析中 Fourier级数的收敛是 按点收敛**.

下面我们在内积空间中讨论:

**(1) 在什么情况下, 式(3.3.4)中 $x(t)$ 的 Fourier 级数收敛,**

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

我们知道**在数学分析中 Fourier级数的收敛是 按点收敛**.

下面我们在内积空间中讨论:

**(1) 在什么情况下，式(3.3.4)中 $x(t)$ 的 Fourier 级数收敛,**

**(2) 如果收敛，是在什么意义下收敛？**

于是例3.3.3中 $x(t)$的 Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

我们知道**在数学分析中 Fourier级数的收敛是 按点收敛**.

## 下面我们在内积空间中讨论:

**(1) 在什么情况下, 式(3.3.4)中 $x(t)$ 的 Fourier 级数收敛,**

**(2) 如果收敛, 是在什么意义下收敛?**

**(3) 如果收敛, 级数是否收敛到 $x(t)$?**