内蒙古大学 数学科学学院

泛函分析 期中考试试卷（二）

（闭卷120 分钟）

一、（本题满分15分）

设(X,d)是一个距离空间, $A\subset X$, A在X中是稠密的$\Leftrightarrow$ 对于X中的任何非空开集U，有$U\cap A\neq\emptyset$.

二、（本题满分20分）

考虑空间s，即实数列$\{\xi_k\}$ 的全体. 设$x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}$是两个实数列, 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

证明：

(1) 上面定义的$d(x,y)$是s上的距离;

(2) 在空间s中的收敛等价于按每个坐标收敛.

三、（本题满分20分）

1、叙述内积空间的定义;

2. 叙述内积空间内积产生的范数应满足的平行四边形法则;

3. 证明在$C[0,1]$上不能引进一种内积$(\cdot,\cdot)$, 使其产生的范数是$\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$.

四、（本题满分15分）

设X是内积空间, M是X的任意一个子集，证明：$M^{\perp}$是X中的闭子空间.

五、（本题满分15分）

设$x(t)\in C[a,b]$, 记$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|x\|_\infty=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$, 证明

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty.$$

六、（本题满分15分）

证明存在闭区间$[0,1]$上的连续函数$x(t)$, 使得：

$$x(t)=\frac{1}{2}\cos x(t)-b(t)$$

其中：$b(t)$是$[0,1]$ 上的连续函数.