点集拓扑

一、常见拓扑空间及其性质

空间\性质	开集	闭集	邻域	内部	聚点	闭包	稠密	可分	收敛点	拓扑基
定义	1. 包含空集与全集 2. 有限交 3. 任意并	1. 包含空集与全集 2. 有限并 3. 任意交	包含含点 x 的某个开集的拓扑空间子集	所有内点的集合，也是包含在 A 中的最大开集	x 为聚点，若 X 每个邻域都有含 $A\setminus\{x\}$ 的点	A' 为 A 的所有聚点的集合，$\overline{A}=A'\cup A$，也是包含 A 的最小闭集	A 稠密，若 $\overline{A}=X$	存在可数稠密子集	x 的邻域包含$\{x_n\}$的几乎所有项	$\overline{\mathscr{B}}=\tau$
欧式 $(R,\tau_e)=E^1$	形如 (a,b) $(-\infty,a)$ (a,∞)	形如 $[a,b]$ $(-\infty,a]$ $[a,\infty)$	1 的邻域为 $(1-\delta,1+\delta)$	$(0,1]$ 的内部为 $(0,1)$	$(0,1]$ 的聚点为$[0,1]$	$[0,1)$ 的闭包为 $[0,1]$	N 不稠密，Q 稠密	可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为 $\{0\}$	$\{(a,b)\|a<b\}$
离散 (R,τ_s)	R 的任意子集	R 的任意子集	1 的邻域为包含 1 的 R 的任意子集	$(0,1]$ 的内部为 $(0,1]$	$(0,1]$ 的聚点为$\varnothing$	$[0,1)$ 的闭包为 $[0,1)$	N 不稠密，Q 不稠密	不可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为$\varnothing$	$\{a\|\forall a\in R\}$
平凡 (R,τ_t)	$R,\varnothing$	$R,\varnothing$	1 的邻域为 R	$(0,1]$ 的内部为 $\varnothing$	$(0,1]$ 的聚点为 R	$[0,1)$ 的闭包为 R	N 稠密，Q 稠密	可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为 R	R
余有限 (R,τ_f)	有限子集的余集并上空集	有限子集并 R	1 的邻域为 $R\setminus A$，其中 A 是有限集且不含 1	$(0,1]$ 的内部为 $\varnothing$	$(0,1]$ 的聚点为 R	$[0,1)$ 的闭包为 R	N 稠密，Q 稠密	可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为 R	有限子集的余集
余可数 (R,τ_c)	可数子集的余集并上空集	可数子集并 R	1 的邻域为 $R\setminus A$，其中 A 是可数集且不含 1	$(0,1]$ 的内部为 $\varnothing$	$(0,1]$ 的聚点为 R	$[0,1)$ 的闭包为 R	N 不稠密，Q 不稠密	不可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为$\varnothing$	可数子集的余集
(R,τ_1)	$\{(-\infty,a)\|a\in R\}$	$\{[a,+\infty)\|a\in R\}$	1 的邻域为 $(-\infty,\ 1+\delta)$	$(0,1]$ 的内部为 $\varnothing$	$(0,1]$ 的聚点为 $[0,+\infty)$	$[0,1)$ 的闭包为 $[0,+\infty)$	N 不稠密，Q 稠密	可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为 $[0,+\infty)$	$\{(-\infty,a)\|a\in Q\}$
(R,τ_2)	$\{[a,b)\|a<b\}$	$\{[a,b)\|a<b\}$	1 的邻域为 $[1,1+\delta)$	$(0,1]$ 的内部为 $(0,1)$	$(0,1]$ 的聚点为$[0,1)$	$[0,1)$ 的闭包为 $[0,1)$	N 不稠密，Q 稠密	可分	$\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$的收敛点集为 $\{0\}$	$\{[a,b)\|a\in R,b\in Q\}$

找聚点即找最小邻域

找收敛点即找最小邻域

邻域不唯一

A 的内部是在 A 中的最大开集

A 的闭包是包含 A 的最小闭集

拓扑基：拓扑基的成员时开集，开集都是拓扑基成员的并集

二、拓扑空间的连续映射（id 意义下）

原像\像	(R,τ_e)	(R,τ_s)	(R,τ_t)	(R,τ_f)	(R,τ_c)	(R,τ_1)	(R,τ_2)
(R,τ_e)	✓	✕	✓	✓	✓	✓	✕
(R,τ_s)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(R,τ_t)	✕	✕	✓	✕	✕	✕	✕
(R,τ_f)	✕	✕	✓	✓	✕	✕	✕
(R,τ_c)	✕	✕	✓	✓	✓	✕	✕
(R,τ_1)	✕	✕	✓	✕	✕	✓	✕
(R,τ_2)	✓	✕	✓	✕	✕	✓	✓

连续映射：
1.开集原像开集
2.闭集原像闭集
3.$\forall x$，U为x邻域，V为y邻域，有$f(U)\subset V$

大到小一定对，小到大一定错

三、不同拓扑空间中的开集与闭集

集合\空间	(R,τ_e)	(R,τ_s)	(R,τ_t)	(R,τ_f)	(R,τ_c)	(R,τ_1)	(R,τ_2)
$(0,1]$	非开非闭	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭
$[0,+\infty)$	仅是闭集	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	仅是闭集	既开又闭
$(-\infty,0)$	仅是开集	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	仅是开集	既开又闭
$R\backslash N$	仅是开集	既开又闭	非开非闭	非开非闭	仅是开集	非开非闭	仅是开集
$R\backslash\{1,2\}$	仅是开集	既开又闭	非开非闭	仅是开集	仅是开集	非开非闭	仅是开集
$(1,2)$	仅是开集	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	仅是开集
$[1,2)$	非开非闭	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	既开又闭
$[1,2]$	仅是闭集	既开又闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	非开非闭	仅是闭集
R	既开又闭	既开又闭	既开又闭	仅是闭集	仅是闭集	既开又闭	既开又闭

是小的闭集或开集，那也一定是大的闭集或开集

四、拓扑空间的重要拓扑性质

空间\性质	T_1	T_2	T_3	T_4	C_1	C_2	紧致	连通	道路连通	邻域基
(R,τ_e)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	1 的邻域基为 $\{(1-\delta,1+\delta)\}$
(R,τ_s)	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×，除非单点集	×，除非单点集	1 的邻域基为 1
(R,τ_t)	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	1 的邻域基为 R
(R,τ_f)	✓	×	×	×	×	×	✓	✓	✓	1 的邻域基为 $\{R\backslash A\}$， A 是有限集且不含 1
(R,τ_c)	✓	×	×	×	×	×	×	✓	✓	1 的邻域基为 $\{R\backslash A\}$，A 是可数集且不含 1
(R,τ_1)	×	×	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	1 的邻域基为 $\{(-\infty，1+\delta)\}$
(R,τ_2)	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	1 的邻域基为 $\{[1,1+\delta)\}$

T1 公理——验证单点集是否为闭集
T2 公理可以推出 T1 公理
T1 公理成立下，T4 公理推得 T3 公理推得 T2 公理
C2 公里可以推得 C1
紧致+T2 公理可以推得 T3，T4 公理
C2 公理与 T3 公理可以推得 T4 公理
E1 满足四大分离定理与两大可数定理
Tau2 满足四大分离定理
分离公理保证存在性即可

最小邻域构成邻域基
所有的开邻域构成邻域基
拓扑基（其中集合包含 x）构成邻域基，所以可以通过对拓扑进行点的限制得到邻域基

五、拓扑性质的遗传性与可乘性

	遗传性	**可乘性**
T_1	✓	✓
T_2	✓	✓
T_3	✓	✓
T_4	×	×
C_1	✓	✓
C_2	✓	✓
可分	×	✓
紧致	×	✓
连通	×	✓
道路连通	×	✓