大连理工大学

姓 名:__________

学 号:__________

院 系:__________

_____级_____班

线 订 装

课 程 名 称: 数学物理方程 试卷: 线上 考试形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院 考试日期: 2020年8月24日 试卷共 6 页

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
标准分	20	25	15	15	10	15	/	/	/	100
得 分							/	/	/	

得分	

一、 (20分) 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x + \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

非齐次

解: 由齐次化原理知: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x &, x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0 &, x\in\mathbb{R} \end{cases}$

的解为: $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin\xi\, d\xi\, d\tau$

$= \frac{1}{2}\int_0^t -\tau\cdot\left(\cos(x+(t-\tau)) - \cos(x-(t-\tau))\right) d\tau$

$= \frac{1}{2}\int_0^t 2\tau\sin x\sin(t-\tau)\, d\tau$

$= \sin x\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\, d\tau$

$= \sin x\left(\tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)\right)\Big|_0^t$

$= \sin x\,(t - \sin t)$

$= t\sin x - \sin x\sin t$

由达朗贝尔公式知. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0) = x+\sin x \end{cases}$

的解为: $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (y+\sin y)\, dy = tx + \sin x\sin t$

由于方程和初值条件是线性的. 由叠加原理可知 题目所给方程的解为: $u(x,t) = tx + t\sin x$

得分	

二、 (25分) 利用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u = u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi}{l}x, & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

解：作变量替换：$V(x,t) = e^{-t}u(x,t)$

则有：$\begin{cases} V_t - V_{xx} = e^{-t}(u_t - u - u_{xx}) = 0, & 0<x<l,\ t>0 \\ V(0,t) = V(l,t) = 0, & t>0 \\ V(x,0) = \sin\frac{\pi}{l}x, & 0\le x\le l \end{cases}$

分离变量法：$V(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程有：

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

则有：$T'(t) + \lambda T(t) = 0$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

边值条件：$X(0) = X(l) = 0$

求解方程：$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$

则若为非平凡解，$\lambda > 0$。此时 $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$ 代入边值条件有：

$A = 0$，$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ 若 $B \ne 0$，令 $\sqrt{\lambda}l = k\pi$，$k = 1,2,\cdots$

可知特征值为 $\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2$，$k=1,2,\cdots$ 因此 $X_k(x) = B_k\sin\frac{k\pi}{l}x$，$k=1,2,\cdots$

将 $\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2$ 代入 $T'(t) + \lambda T(t) = 0$，解得：

$T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k t} = A_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}$ $k=1,2,\cdots$

由叠加原理知 $V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$

代入初始条件有：$V(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x = \sin\frac{\pi}{l}x$

因此 $a_k = \begin{cases} 0, & k \ne 1 \\ 1, & k = 1 \end{cases}$ 因此 $V(x,t) = e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t}\sin\frac{\pi}{l}x$

因此 $u(x,t) = e^{t-(\frac{\pi}{l})^2 t}\sin\frac{\pi}{l}x$ □.

得分	

三、 (15分) 证明初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \lambda u + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T := (0,l) \times (0,T], \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + u(l,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $\bar{\Omega}_T$ 上满足

$$u(x,t) \le \max\left\{0,\ \sup_{x\in(0,l)} \varphi(x),\ \frac{1}{\lambda} \sup_{(x,t)\in\Omega_T} f(x,t)\right\},$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数.

证明: 若 u 在 (x^*, t^*) 上取到正的极大值, 则 $u(x^*, t^*) > 0$. 假设 (x^*, t^*) 在 Ω_T 内部.

则有 $u_t \geq 0$, $u_{xx} \leq 0$, $u > 0$, 此时有 $u = \frac{1}{\lambda}\left(a^2 u_{xx} - u_t + f(x,t)\right) \leq \frac{1}{\lambda} f(x,t)$.

因此 $u(x,t) \leq \frac{1}{\lambda} \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_T} f(x,t)$

若 (x^*, t^*) 取在边界上. 在 $x^*=0$ 或 $t^*=0$ 时, 有 $u(x^*, t^*) \leq \max(0, \sup\limits_{x\in(0,l)} \varphi(x))$

当 $x^*=l$ 时, $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$, 此时 $u(x^*, t) \leq 0$

综上: $u(x,t) \leq \max\left\{0, \sup\limits_{x\in(0,l)} \varphi(x), \frac{1}{\lambda} \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_T} f(x,t)\right\}$ □.

得分	

四、(15分) 设 $u = u(x,t) \in C^2([0,l] \times [0,\infty))$ ($l > 0$ 是常数) 满足

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in (0,l),\ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,l]. \end{cases}$$

试证明: 对任意 $t \geq 0$, 都有 $\int_0^l u_t^2 + 4u_x^2 dx = \int_0^l \psi^2 + 4|\varphi'|^2 dx$.

证: 设 $f(t) = \int_0^l u_t^2 + 4u_x^2 \, dx$

$f'(t) = \int_0^l 2u_t u_{tt} + 8u_x u_{xt} \, dx$

$= \int_0^l 8u_t u_{xx} + 8u_x u_{xt} \, dx$

$= 8(u_x u_t)\Big|_0^l = 0$

因此 $f(t) = C$. $f(0) = \int_0^l u_t^2(x,0) + 4u_x^2(x,0) \, dx$

$= \int_0^l \psi^2(x) + 4|\varphi'|^2 \, dx = C.$

即 $\int_0^l u_t^2 + 4u_x^2 dx = \int_0^l \psi^2 + 4|\varphi'|^2 dx$ □

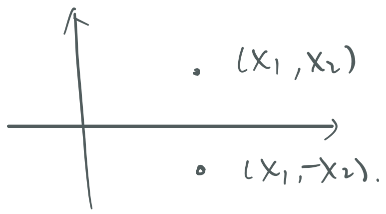
得分	

五、 (10分) 求半平面

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}$$

上的Green函数. [注意: 平面上调和方程的基本解为$\Gamma(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.]

解:



用静电源像法. $x=(x_1,x_2)$. $x^*=(x_1,-x_2)$

记 $V(x,y) = -\Gamma(|x^*-y|)$

则 V 在上半空间是调和函数.

$$V(x,y)\big|_{y_2=0} = -\Gamma(x_1-y_1, -x_2) = -\Gamma(|x-y|)$$

因此 $G(x,y) = V(x,y) + \Gamma(x,y)$

$$= -\Gamma(|x^*-y|) + \Gamma(|x-y|)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2} - \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

得分	

六、(15分) 设 $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$.

(i) 举例说明: 边值问题

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (\star)$$

的解不唯一.

(ii) 证明: 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是 $(\star)$ 的解, 且满足 $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} u(x, y) = 0$, 则 $u \equiv 0$ 于 $\bar{\Omega}$.

解: (i): $\partial\Omega = \{(x,y): x \in \mathbb{R},\ y = 0\}$.

该边值问题的解有: $u_1(x,y) = x$, $u_2(x,y) = 2x$.

(ii): 若 u 不恒等于0在 $\bar{\Omega}$, 则一定存在 M, s.t $u(M) \neq 0$. 不妨假设 $u(M) > 0$.

则用 Γ_R 表示半径为 R 的球面. 当 R 足够大时, 可使 M 在 Γ_R 和 $y=0$ 所围成的区域内. 又由条件 $\lim\limits_{r\to\infty} u(x,y) = 0$ 可得在 Γ_R 上有 $u|_{\Gamma_R} < u(M)$.

因此 u 在 $\partial\Omega$ 和 Γ_R 上都取不到最大值. 这与极值原理矛盾. 因此 $u \equiv 0$ 于 $\bar{\Omega}$. □