

内蒙古大学 数学科学学院  
**泛函分析** 期中考试试卷 (二) 参考答案及评分细则

一、(本题满分15分)

设 $(X, d)$ 是一个距离空间,  $A \subset X$ ,  $A$ 在 $X$ 中是稠密的 $\Leftrightarrow$ 对于 $X$ 中的任何非空开集 $U$ , 有 $U \cap A \neq \emptyset$ .

证明:  $\Leftarrow$ ) 要证明 $X \subset \overline{A}$ . 对于 $\forall x \in X$ , 对于 $\forall \varepsilon > 0$ , 由于 $B(x, \varepsilon)$ 是开集, 结合条件有 $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . 因此 $x \in \overline{A}$ . ..... 5分

$\Rightarrow$ ) 设 $U$ 是 $X$ 中的非空开集. 由于 $U$ 非空, 故存在 $x \in U$ . 又由于 $U$ 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$  使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$ . 因为 $A$ 在 $X$ 中是稠密, 所以 $x \in \overline{A}$ , 从而 $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . 由此可知 $U \cap A \neq \emptyset$ . ..... 15分

二、(本题满分20分)

考虑空间 $s$ , 即实数列 $\{\xi_k\}$  的全体. 设 $x = \{\xi_k\}$ ,  $y = \{\eta_k\}$ 是两个实数列, 定义

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

证明:

- (1) 上面定义的 $d(x, y)$ 是 $s$ 上的距离;
- (2) 在空间 $s$ 中的收敛等价于按每个坐标收敛.

证明:(1)距离定义的(1), (2), (3)显然成立. 验证距离定义的条件(4) 成立. 考虑 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ ,  $t \in (0, \infty)$ ,  $\varphi(t)$  是单增的. 设 $x = \{\xi_k\}$ ,  $y = \{\eta_k\}$ ,  $z = \{\zeta_k\}$ , 由于

$$|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|.$$

结合 $\varphi(t)$  是单增的, 则

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

在上面不等式两边乘以  $\frac{1}{2^k}$  并求和, 有

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

因此  $d(x, y)$  是  $s$  上的距离. ..... 10分

(2) 必要性. 对于任意给定的  $k_0$ , 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 令  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$ , 由于  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 对于这个  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 有  $d(x_n, x) < \varepsilon_0$ , 即:

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} < \varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

由于每项都是正的, 于是我们有

$$\frac{1}{2^{k_0}} \frac{|\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}|}{1 + |\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}|} < \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad (n > N)$$

结合  $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$  是单增的, 我们有

$$|\xi_{k_0}^{(n)} - \xi_{k_0}| < \varepsilon,$$

即

$$\xi_{k_0}^{(n)} \rightarrow \xi_{k_0} \quad (n \rightarrow \infty).$$

..... 15分

充分性. 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists K$ , 使得  $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon$ . 由于  $\xi_k^{(n)} \rightarrow \xi_k$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), 所以存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon/2 \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

于是当  $n > N$  时,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

即  $\{x_n\}$  在  $s$  中收敛到  $x$ . ..... 20分

三、(本题满分20分)

1. 叙述内积空间的定义;
2. 叙述内积空间内积产生的范数应满足的平行四边形法则;
3. 证明在  $C[0, 1]$  上不能引进一种内积  $(\cdot, \cdot)$ , 使其产生的范数是  $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ .

解: 1. 设  $X$  是数域  $\mathbb{K}$  上的线性空间, 如果对于任意  $x, y \in X$ , 有  $\mathbb{K}$  中的一个数  $(x, y)$  与它们对应, 使得对任意的  $x, y \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , 满足

- (i)  $(x, x) \geq 0$ ;  $(x, x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ ;
- (ii)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;
- (iii)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ;
- (iv)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ .

则称  $(\cdot, \cdot)$  是  $X$  上的一个内积, 定义了内积的空间  $X$  称为内积空间. .... 5分

2. 设  $X$  是内积空间, 则  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  是  $X$  上的范数, 且满足平行四边形法则, 即

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

..... 10分

证明3. 取  $x = x(t) \equiv 1$ ,  $y = y(t) = t$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , 于是

$$\|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x + y\| = 2, \|x - y\| = 1,$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5, 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

因此  $\|\cdot\|$  不满足平行四边形法则, 从而范数不可以由任何内积诱导. .... 20分

四、(本题满分15分)

设  $X$  是内积空间,  $M$  是  $X$  的任意一个子集, 证明:  $M^\perp$  是  $X$  中的闭子空间.

证明(1)  $M^\perp$  是子空间. 任取  $x \in M^\perp$ ,  $y \in M^\perp$ , 以及  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , 则对于任意的  $z \in M$ ,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

因此  $\alpha x + \beta y \in M^\perp$ , 即  $M^\perp$  是  $X$  的子空间. .... 7分

(2) 证明  $M^\perp$  是闭的. 如果  $\{x_n\} \subseteq M^\perp$ , 且  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则对于任意的  $z \in M$ , 由内积的连续性可得

$$(x, z) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, z) = 0.$$

因此  $x \in M^\perp$ , 所以  $M^\perp$  是闭子空间. .... 15分

### 五、(本题满分15分)

设  $x(t) \in C[a, b]$ , 记  $\|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ , 证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

证明: 若  $x(t) \equiv 0$ , 命题显然成立. 若  $x(t)$  不恒等于零,  $|x(t)|$  是连续函数. 由闭区间上的连续函数的性质, 存在  $t_0 \in [a, b]$  使得

$$|x(t_0)| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = \|x\|_\infty > 0.$$

一方面, 由于

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_a^b |x(t_0)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \leq \|x\|_\infty.$$

..... 7分

另一方面, 由  $|x(t)|$  在  $t_0$  点处的连续性, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$|x(t)| > |x(t_0)| - \varepsilon > 0, \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b].$$

于是

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left( \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (|x(t_0)| - \varepsilon)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = (\|x\|_\infty - \varepsilon)(2\delta)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty - \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$ . 综上  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ . ..... 15分

### 六、(本题满分15分)

证明存在闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数  $x(t)$ , 使得:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos x(t) - b(t)$$

其中:  $b(t)$  是  $[0, 1]$  上的连续函数.

证明: 在空间  $C[0, 1]$  上考虑如下映射:

$$Tx(t) = \frac{1}{2} \sin x(t) - a(t),$$

则  $T$  是从  $C[0, 1]$  到  $C[0, 1]$  自身的映射. 对于  $\forall x, y \in C[0, 1], \forall t \in [0, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \left( \frac{1}{2} \sin x(t) - a(t) \right) - \left( \frac{1}{2} \sin y(t) - a(t) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \sin x(t) - \frac{1}{2} \sin y(t) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| 2 \cos \frac{x(t) + y(t)}{2} \sin \frac{x(t) - y(t)}{2} \right| \\ &\leq \left| \sin \frac{x(t) - y(t)}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |x(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [0, 1]} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \frac{1}{2} |x(t) - y(t)| = \frac{1}{2} d(x, y). \end{aligned}$$

由压缩映射原理知存在唯一的  $x_0 \in C[0, 1]$  使得

$$Tx_0 = x_0.$$

即

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \sin(x_0(t)) - a(t).$$

..... 15分