第六章　线性算子的谱理论

§6.1　谱集和正则点集

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于了解和刻画线性算子是十分重要的. 在有限维空间X 上, 特征值刻画了有限维空间上线性算子的基本性质, 空间X 按这些特征值可以分解成若干个关于这个算子的不变子空间. 我们研究线性算子的特征值, 首先考虑$T_\lambda = \lambda I - T$, 其中$\lambda$ 是一个复数, I 是恒等算子. λ 取什么值时T_λ 有逆算子, 当T_λ 有逆算子T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的性质如何等问题是谱理论所关心的基本问题.

在有限维空间, 对于$T_\lambda x = 0$ 只有两种可能：(1) $T_\lambda x = 0$ 有非零解, 即λ 是T 的特征值; (2) $T_\lambda x = 0$ 无非零解, 即λ 是T 的正则点. 但在无穷维空间, 情况要复杂得多. 以下根据λ 的分类, 给出谱点和正则点的定义：

定义 6.1.1　设X 是复的Banach 空间, T 是从$\mathcal{D}(T) \subset X$ 到X 的线性算子. λ 称为T 的正则值, 如果$\lambda I - T$ 的值域$\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在X 中稠密, 并且$\lambda I - T$ 有连续的逆算子. 这样的λ 的全体称为T 的正则点集, 记为$\rho(T)$, 有时把逆算子$(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为$R_\lambda(T)$, 称其为T 的予解式.

予解集$\rho(T)$ 的补集称为T 的谱集, 记为$\sigma(T)$, 即$\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$, 若$\lambda \in \sigma(T)$, 称$\lambda$ 为T 的谱点.

注1　在这个定义中, 未要求T 是有界线性算子, $\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间.

注2　进一步我们还可以对T 的谱集合做进一步的分类：

(1) λ 称为T 的点谱, 如果$\lambda I - T$ 不是一一的. 点谱的全体记为$\sigma_p(T)$;

(2) λ 称为T 的连续谱, 如果$\lambda I - T$ 是一一的, $\lambda I - T$ 的值域在X 中稠密, 但是它的逆算子是不连续的. 连续谱的全体记为$\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为T 的剩余谱, 如果$\lambda I - T$ 是一一的, 但是$\lambda I - T$ 的值域在X 中不稠密. 剩余谱的全体记为$\sigma_r(T)$.

显然, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 和$\sigma_r(T)$ 是互不相交的集合, 并且

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{6.1.1}$$

注3　显然$\lambda \in \sigma_p(T)$ 的充要条件是$T_\lambda x = 0$ 有非零解. λ 称为T 的特征值, x 称为对应的特征元素, T_λ 的零空间$\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为T 关于λ 的特征子空间, 它包括零元素和T 的关于λ 的全体特征元素. T 关于λ 的特征子空间的维数$\dim\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值λ 的几何重数.

注4 上面定理提到的非零解必须属于$\mathcal{D}(T)\subset X$, 这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

例 6.1.2 设$H=L^2(-\infty,\infty)$, $T:H\to H$, $y=Tx$, 其中

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

可以证明, $\mathcal{D}(T)=H,\mathcal{R}(T)\subset H$, 当$x(t)=e^{iwt}$ 时,

$$\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}e^{iw\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{1+iw}e^{iwt}, \tag{6.1.2}$$

即如果T 作用在$x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到$\frac{1}{1+iw}x(t)$, 但是这并不意味着$\frac{1}{1+iw}$ 是T 的特征值, 事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$. 可以证明$\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子T 的互不相同的特征值, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素, 则$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证明 假如$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的, 设x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素, 即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}.$$

由于$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是特征元素, 于是

$$0=(\lambda_mI-T)x_m=\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于$\lambda_m\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m-1)$, $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 是线性无关的, 推出$\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$ 与$x_m\neq 0$ 矛盾. □

当T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设X 是Banach 空间, T 是从$\mathcal{D}(T)\subset X$ 到X 的闭线性算子, 那么对于$\forall\lambda\in\rho(T)$, $(\lambda I-T)^{-1}$ 是一个定义在全空间上的有界线性算子.

证明 $\lambda\in\rho(T)$, 由于$(\lambda I-T)^{-1}$ 是有界的, 故存在一个正数$m>0$, 使得

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant m\,\|x\|\,,\ \ \forall x\in\mathcal{D}(T). \tag{6.1.3}$$

对于$\forall y\in X$, 由于$\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在X 中稠, 存在$\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)x_n=y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知$\{x_n\}$ 也是Cauchy 列, 由于X 是Banach空间, 存在$x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 由于$T$ 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有$x\in\mathcal{D}(T),(\lambda I-T)x=y$, 即$\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$.

□

注 于是当T 是闭线性算子时, $\lambda\in\rho(T)$, 当且仅当$\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$ 且$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{B}(X)$.

例 6.1.5 设X 是有限维的Banach 空间, T 是从X 到X 的线性算子, 因为

$$\dim(\mathcal{N}(\lambda I-T))+\dim(\mathcal{R}(\lambda I-T))=\dim X,$$

其中dim 表示空间的维数, 因此$\lambda I-T$ 是一一的当且仅当$\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$, 因此$T$ 的剩余谱是空集. 如果$\lambda I-T$ 是一一的, $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在, 因为有限维空间上的线性算子是连续的, 这说明T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱, $\sigma_p(T)=\sigma(T)$. 如果(t_{ij}) 表示T 在X 的一组基下的相应的矩阵, 则

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}\big|\det(\lambda\delta_{ij}-t_{ij})=0\}. \tag{6.1.5}$$

例 6.1.6 在Hilbert 空间$H=l^2[1,\infty)$ 上, 我们定义右移算子$T:l^2\to l^2$,

$$T:(x_1,x_2,\cdots)\to(0,x_1,x_2,\cdots),$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$. 由于

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2,$$

我们有$\|T\|=1$. 因为$Tx=0$ 意味着$x=0$, 即0 不是特征值. 显然T 的值域$\mathcal{R}(T)=\{y=\{y_i\}\mid y_1=0\}$ 在H 中不稠, 于是$0\in\sigma_r(T)$.

注 上例说明在无穷维空间, 线性算子可以有不是特征值的谱点.

§6.2 有界线性算子谱的性质

6.2.1 有界线性算子的谱

在这一节我们研究有界线性算子, 有界线性算子的谱集是复数域$\mathbb{C}$ 中的非空紧集.

定理 6.2.1 设X 是Banach 空间, $T\in\mathcal{B}(X)$, 如果$\|T\|<1$, 则算子$I-T$ 有有界逆算子, 并且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n, \tag{6.2.1}$$

$$\left\|(I-T)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}. \tag{6.2.2}$$

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots, \tag{6.2.3}$$

记$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}T^k$, 则对于任何的自然数$m,n(m>n)$,

$$\|S_m-S_n\|=\|\sum_{k=n}^{m-1}T^k\|\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\|T\|^k.$$

由条件$\|T\|<1$ 知, S_n 是$\mathcal{B}(X)$ 中的Cauchy 列, 因为X 是Banach 空间, 从而$\mathcal{B}(X)$ 是Banach 空间, 所以S_n 按算子范数收敛到一个有界线性算子, 即(6.2.3)按范数收敛. 由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})=(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T)=I-T^n, \quad (6.2.4)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|T\|^n=0.$$

在(6.2.4)两边令$n\to\infty$, 得到

$$(I-T)(\sum_{k=0}^{\infty}T^k)=(\sum_{k=0}^{\infty}T^K)(I-T)=I.$$

这说明算子$I-T$ 有逆算子, 且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k.$$

我们还可以得到

$$\|(I-T)^{-1}\|=\|\sum_{k=0}^{\infty}T^k\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k=\frac{1}{1-\|T\|}.$$ □

定理 6.2.2 设X 是Banach 空间, $T\in\mathcal{B}(X)$, 则$\sigma(T)$ 是有界集.

证明 对于$|\lambda|>\|T\|$, 由于$\lambda I-T=\lambda(I-\frac{1}{\lambda}T)$, 因为$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|<1$, 由定理6.2.1, $I-\frac{1}{\lambda}T$ 有有界的逆算子,

$$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}(I-\frac{T}{\lambda})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n, \quad (6.2.5)$$

且由(6.2.2)

$$\|\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n\|\leqslant\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{\lambda}}=\frac{|\lambda|}{|\lambda|-\|T\|},$$

于是

$$\left\|(\lambda-T)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}, \quad (6.2.6)$$

即当$|\lambda|>\|T\|$, $\lambda\in\rho(T)$. □

定理 6.2.3 设T 是Banach 空间X 到X 的有界线性算子, $\lambda \in \rho(T)$, 且$|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$, 则$\lambda + \mu \in \rho(T)$, 即$\rho(T)$ 是一个开集.

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda + \mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

由于$\left\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\right\| < 1$, 由定理6.2.1 $[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]$ 有有界的逆算子, 于是

$$R_{\lambda+\mu}(T) = [I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]^{-1} R_\lambda(T), \tag{6.2.7}$$

且可以表示为$R_\lambda(T)$ 的幂级数,

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n (R_\lambda(T))^{n+1}.$$

□

注1 $T \in \mathcal{B}(X)$, 则$\sigma(T)$ 是位于闭球$\{z : |z| \leqslant \|T\|\}$ 中的有界闭集.

注2 从证明中我们看到, $z_0 \in \rho(T)$, 则集合$\{z : |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{6.2.8}$$

引理 6.2.4 设$\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T). \tag{6.2.9}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} =& (\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)(\mu I - T)^{-1} \\ =& (\lambda I - T)^{-1}[(\mu - \lambda)I + (\lambda I - T)](\mu I - T)^{-1} \\ =& (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1} + (\mu I - T)^{-1},\end{aligned}$$

引理得证. □

考虑在正则集$\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T) \ni \lambda :\to R_\lambda(T)$, 即从$\rho(T)$ 到有界线性算子组成的Banach空间$\mathcal{B}(X)$ 上的一个映射. 我们称这个映射在λ_0 点是连续的, 如果λ, $\lambda_0 \in \rho(T)$ 且$\lambda \to \lambda_0$ 时, 在算子范数收敛的意义下,

$$R_\lambda(T) \to R_{\lambda_0}(T) \ \ (\|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| \to 0, \ \lambda \to \lambda_0).$$

我们称这个映射是可微的, 如果当$\lambda \to \lambda_0$ 时,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \tag{6.2.10}$$

在$\mathcal{B}(X)$ 中按算子的范数收敛.

定理 6.2.5 在正则集$\rho(T)$ 中, 予解式$R_\lambda(T)$ 是关于λ 的算子值解析函数.

证明 首先证明$R_\lambda(T)$ 关于λ 连续. 设$\lambda_0 \in \rho(T)$, 令$h = \lambda - \lambda_0$, 由于(6.2.7)

$$R_\lambda(T) = R_{\lambda_0+h}(T) = [I + h(\lambda_0 I - T)^{-1}]^{-1} R_{\lambda_0}(T),$$

根据定理6.2.1, 只要$|h| < \frac{1}{2\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, 则$\|R_\lambda(T)\| < 2\|R_{\lambda_0}(T)\|$. 根据引理6.2.4

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| =&|h|\|R_\lambda(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\| \leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\| \\ \leqslant&2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|^2 \to 0\ (\lambda \to \lambda_0).\end{aligned}$$

再证$R_\lambda(T)$ 关于λ 可微. 由引理6.2.4 和$R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(T)R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2\ (\lambda \to \lambda_0).$$ □

定理 6.2.6 设T 是有界线性算子, 则$\sigma(T) \neq \emptyset$.

证明 假如不然, $\rho(T) = \mathbb{C}$, 由定理6.2.5 知$R_\lambda(T)$ 在复平面$\mathbb{C}$ 上解析. 当$|\lambda| > \|T\|$ 时, 由(6.2.5) 及(6.2.6)

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)^{-n-1} T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}. \tag{6.2.11}$$

因此, $\|R_\lambda(T)\|$ 在复平面上有界. 对于$\mathcal{B}(X)$ 上的任意一个有界线性泛函f (即$f \in \mathcal{B}(X)^*$), 令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{6.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数, 由于f 的连续性、定理6.2.5 和(6.2.11) 知, $u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数. 根据Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与λ 无关的常值函数. 由Hahn-Banach 定理知道, $\mathcal{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别$\mathcal{B}(X)$ 中不同的元素. 由于对于$\forall f \in \mathcal{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 是常值函数, 可以推知$R_\lambda(T)$ 是与λ 无关的常值算子. 由引理6.2.4推知$R_\lambda(T) \equiv 0$, 这与$I = (\lambda I - T)R_\lambda(T)$ 矛盾. □

定理 6.2.7 设H 是Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 则

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

证明 由于$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于$\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即$\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. 反之$\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知$\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. □

6.2.2 有界线性算子的谱半径

定理 6.2.8 设$T \in \mathcal{B}(X)$, 则极限

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{6.2.13}$$

存在.

证明 令$a_k = \log\left\|T^k\right\|$, 我们下面证明$\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf \frac{a_k}{k}$ $(k\to\infty)$. 因为

$$\left\|T^{m+k}\right\| \leqslant \|T^m\| \left\|T^k\right\|,$$

我们有$a_{m+k} \leqslant a_m + a_k$. 对于固定的正整数$m$, $k = mq+p$, 其中q, p 是整数使得$0 \leqslant p < m$. 那么$a_k \leqslant qa_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k}a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的m, 令$k\to\infty$, $\frac{q}{k} \to \frac{1}{m}$, 因此

$$\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m}a_m.$$

由于m 是任意的, $\limsup \frac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\frac{a_k}{k} \geqslant \beta$, 因此

$$\liminf \frac{a_k}{k} \geqslant \beta.$$

于是

$$\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf_k \frac{a_k}{k} \quad (k\to\infty),$$

即

$$\|T^k\|^{\frac{1}{k}} \to \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \quad (k\to\infty).$$ □

定义 6.2.9 称$r_\sigma(T) = \inf\limits_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为有界线性算子T 的谱半径.

定理6.2.8 显示, 对于任何正整数k, $r_\sigma(T) \leqslant \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$, 特别地

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{6.2.14}$$

事实上, 谱半径刻划了谱的范围, 我们有:

定理 6.2.10 $T \in \mathcal{B}(X)$, 则

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|. \tag{6.2.15}$$

证明 令$\alpha = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf\limits_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 首先证明$\alpha \leqslant \beta$. 对于$\forall\lambda \in \sigma(T)$, 可推知$\lambda^n \in \sigma(T^n)$. 假如不然, $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 由

$$\lambda^n - T^n = (\lambda I - T)P_\lambda(T) = P_\lambda(T)(\lambda I - T),$$

其中$P_\lambda(T) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知$\lambda I - T$ 的逆算子存在且有界, 即$\lambda \in \rho(T)$, 矛盾. 所以由定理6.2.2 $|\lambda^n| \leqslant \|T^n\|$, 即$|\lambda| \leqslant \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$|\lambda| \leqslant \beta = \inf_n\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样$\alpha \leqslant \beta$. 反之, 对于$\forall\varepsilon > 0$, 令$\lambda = \alpha + \varepsilon \in \rho(T)$, 根据定理6.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于λ 的解析函数, 因此它有唯一的Laurent 展开. 由定理6.2.2 知当$|\lambda| > \|T\|$ 时, 其展开式可以由(6.2.5)表示, 由Lanrent 展开的唯一性知$R_\lambda(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}T^n$. 因此$\|\lambda^n T^n\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 于是当n 充分大时,

$$\|T^n\| \leqslant |\lambda|^n = (a + \varepsilon)^n.$$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于$\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证. □

但是(6.2.14)中的严格不等号可以成立, 我们有:

例 6.2.11 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{1\}, r_\sigma(T) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < \|A\|$.

例 6.2.12 令$X = C[a, b]$, 考虑Volterra 积分算子 K:

$$(Kx)(s) = \int_a^s k(s, t)x(t)\,\mathrm{d}t,\ \ a \leqslant s \leqslant b,$$

其中核$k(s, t)$ 是$a \leqslant t$, $s \leqslant b$ 上的连续函数, 通过归纳法可以证明

$$\|K^k\| \leqslant \frac{M^k(b - a)^k}{(k - 1)!},\ k \geqslant 1, \tag{6.2.16}$$

其中$M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s, t)|$. 由此得到$r_\sigma(K) = 0$. 我们得到$\sigma(K) = \{0\}$.

§6.3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子, 紧算子的值域是有限维的或者在某种意义下性质相近于有限维, 因此它的结构, 特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构十分相似, 这使得紧算子有着十分广泛的应用背景.

6.3.1 紧线性算子的定义和例

定义 6.3.1 X, Y 是Banach 空间, $T : X \to Y$ 是一个线性算子, 如果对于X 中的任何有界子集A, T 关于A 的值域的闭包$\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子.

注1 T 是紧的, 当且仅当对于任何的有界点列$\{x_n\} \subset X$, 点列$\{Tx_n\}$ 一定包含一个收敛的子列.

注2 T 是紧的, 则T 一定是有界的, 否则将存在一个点列$\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且$\|Tx_n\| \to \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设$T \in \mathcal{B}(X,Y)$, T 的值域$\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$是有界闭集, 而$\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此$\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要X, Y 中有一个是有限维的, 则X 到Y 的有界线性算子是紧的. 如果T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 6.3.3 设$X = Y = l^2$, I 是从l^2 到l^2 的恒等算子, I 是连续线性算子, 但是I 不是紧的. 因为$\{e_n\}$ 是有界的, 但其中没有收敛的子列, 其中$e_n = (0, 0, \cdots, \underset{n}{1}, \cdots, 0)$.

从紧算子、紧集、完全有界集的定义我们有

定理 6.3.4 设X、Y 是Banach 空间, T 是从X 到Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

(1) T 是紧的线性算子;

(2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则$T(A)$ 包含在Y 的一个紧子集中;

(3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则$T(A)$ 包含在Y 的一个自列紧的子集之中;

(4) 对于X 中的任何有界点列$\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个Y 中收敛的子列;

(5) 对于X 中的任何有界集A, $T(A)$ 是Y 中的完全有界集.

例 6.3.5 在$C[a,b]$ 中考虑积分算子 K :

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)\, x(s) \mathrm{d}s, \tag{6.3.1}$$

其中$k(t,s)\in C([a,b]\times[a,b])$, 那么$K$ 是紧算子.

事实上, 令$M=\max\left\{|k(t,s)|\,\big|(t,s)\in[a,b]\times[a,b]\right\}$, 那么对于所有的$x\in C[a,b]$, $\|Kx\|\leqslant M(b-a)\|x\|$. 于是如果$B\subset C[a,b]$ 是一个有界集, 那么$K(B)$ 是有界集. 同时, 对于$\forall t_1,t_2\in[a,b]$ 和$\forall x\in C[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}\big|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)\big|^2&=\Big|\int_a^b[k(t_1,s)-k(t_2,s)]x(s)\,\mathrm{d}s\Big|^2\\&\leqslant\int_a^b\big|k(t_1,s)-k(t_2,s)\big|^2\mathrm{d}s\cdot\int_a^b\big|x(s)\big|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到$k(t,s)$ 是连续的, 因此$\{Kx|x\in C[a,b],x\in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的, 由Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是$C[a,b]$ 中的紧集. 于是K 是一个紧算子. □

例 6.3.6　设$H=l^2$, 令K 为从H 到H 的线性变换, 定义为$y=Kx$,

$$y_n=\alpha_n x_n,\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{6.3.2}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)$, α_n 是数值. 则K 是一个紧算子当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0. \tag{6.3.3}$$

证明　假如K 是紧的, 但$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\neq0$, 那么存在一个$\varepsilon>0$ 和$\{\alpha_n\}$ 的一个子列$\{\alpha_{n_k}\}$, 使得对于任何的k, 有$|\alpha_{n_k}|\geqslant\varepsilon$, 令

$$e_k=(\delta_{1n_k},\delta_{2n_k},\cdots),$$

其中δ_{ij} 是Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k=(\alpha_1\delta_{1n_k},\alpha_2\delta_{2n_k},\ \cdots)=(0,\ 0,\ \cdots,\alpha_{n_k},\ \cdots),\ \ k=1,2,\cdots,$$

于是对于$m\neq k$

$$\|Ke_m-Ke_k\|^2=|\alpha_{n_m}|^2+|\alpha_{n_m}|^2\geqslant2\varepsilon^2,$$

这与$\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

另一方面, 假如(6.3.3)成立, 对于$D=\big\{x\big|\,\|x\|\leqslant1\big\}$, 我们证明$A=K(D)$ 是紧的. 因为$\{\alpha_n\}$ 收敛到零, 于是$\|Kx\|\leqslant\{\max|\alpha_n|\}\|x\|$, 即$A$ 是有界的. 且对于$\forall y\in A$,

$$\sum_{n=N}^{\infty}|y_n|^2=\sum_{n=N}^{\infty}|\alpha_nx_n|^2\leqslant\max_{N\leqslant n}|\alpha_n|^2\sum_{n=N}^{\infty}|x_n|^2\leqslant\max_{N\leqslant n}|\alpha_n|^2\to0\ (N\to\infty). \tag{6.3.4}$$

因此, $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|y|^2$ 一致收敛到零, 所以A 是l^2 中的紧集, 即K 是一个紧算子. □

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令$\{\phi_n\}$ 和$\{\varphi_n\}$ 是Hilbert 空间$H=L^2\,[a,b]$ 中的两组正交集, 线性算子K:

$$\begin{aligned}Kx&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\phi_n(t)\int_a^b x(\tau)\overline{\varphi}_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\\&=\int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(t)\overline{\varphi}_n(\tau))x(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中$k(t,\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(t)\overline{\varphi}_n(\tau)$, 则$K$ 是紧的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

例 6.3.8 考虑$L^2[a,b]$ 上的乘法算子

$$F:x(t)\to f(t)x(t),$$

其中$f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然F 是一个有界线性算子, $\|F\|\leqslant\|f\|_{\infty}$, 可以证明$F$ 是紧的线性算子当且仅当$f(t)$ 几乎处处等于零.

6.3.2 紧线性算子的性质

定理 6.3.9 设X, Y 是Banach 空间, 从X 到Y 的全体紧算子记为$\mathcal{K}(X,Y)$, 特别地当$X=Y$ 时, 记为$\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设X,Y 是Banach 空间, 那么$\mathcal{K}(X,Y)$ 是$\mathcal{B}(X,Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设$T_1,T_2\in\mathcal{K}(X,Y)$, 由定义显然有$\alpha_1T_1+\alpha_2T_2\in\mathcal{K}(X,Y)$, 即$\mathcal{K}(X,Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间. 若$T_n\in\mathcal{K}(X,Y)$ 且$\|T_n-T\|\to0$ $(n\to\infty)$, 于是对于$\forall\varepsilon>0,\exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0}-T\|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{6.3.5}$$

设$B\subset X$ 是一个有界集, 因为T_{n_0} 紧, 所以$\overline{T_{n_0}(B)}$ 是Y 中的紧子集, 对$\overline{T_{n_0}(B)}$ 取$\frac{\varepsilon}{2}$ —网, 记为$\{y_1,y_2\ldots,y_m\}$, 我们有$\overline{T_{n_0}(B)}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}S(y_i,\frac{\varepsilon}{2})$, 其中$S(y_i,\frac{\varepsilon}{2})=\{y\in Y\mid d(y,y_i)<\frac{\varepsilon}{2}\}$. 由于$\{y_1,\cdots y_m\}$ 是$\overline{T_{n_0}(B)}$ 的$\frac{\varepsilon}{2}$ –网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)}\subset\bigcup_{i=1}^{m}S(y_i,\varepsilon),$$

即$\overline{T_{(B_1)}}$ 紧, T 是一个紧算子. □

例 6.3.11 设$k(t,s)\in L^2(I)$, 其中$I=\big\{(t,s)\big|a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b\big\}$, 则积分算子

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s,\ \ x\in L^2[a,b]\tag{6.3.6}$$

是从$L^2[a,b]$ 到自身的紧算子.

证明 由于

$$\phi_n(t) = (b-a)^{-\frac{1}{2}} \exp(2\pi i n \frac{t-a}{b-a}),\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

是$L^2[a,b]$ 的一组正交基,

$$\phi_{n,m}(t,s) = \phi_n(t)\overline{\phi_m(s)}$$

形成了$L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \to 0\ \ (N \to \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|,|m| \leqslant N} (k, \phi_{n,m})\phi_{n,m}.$$

由于$\mathcal{R}(K_N)$ 是$2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2和定理6.3.10 得知K 是紧的.

注 算子K 称为Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定义 6.3.12 设$\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ 是Hilbert 空间H 上的完备的正交基. 一个有界线性算子T 称为是Hilbert–Schmidt 算子, 如果

$$|T| = \{\sum_{\alpha \in A} \|Tx_\alpha\|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

是有限的. $|T|$ 称为算子的Hilbert–Schmidt 范数.

可以证明, T 是Hilbert–Schmidt 算子, 则

(1) $|T|$ 的值与Hilbert 空间中正交基的选择无关;

(2) $\|T\| \leq |T|$, $|T| = |T^*|$;

(3) 全体Hilbert–Schmidt 算子在Hilbert– Schmidt 范数下是一个Banach 空间;

(4) 若T 和S 都是Hilbert–Schmidt 算子, 则$|TS| \leqslant |T||S|$, 即全体Hilbert–Schmidt 算子在Hilbert–Schmidt 范数下组成一个Banach 代数;

(5) Hilbert–Schmidt 算子是紧的, 且是一列有穷秩算子在Hilbert–Schmidt 范数下收敛的极限.

定理 6.3.13 设H 是Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和T_2 中有一个是紧的, 那么T_1T_2 是紧的.

(2) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当T^*T 是紧的.

(3) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当T^* 是紧的.

证明 (1) 只须注意有界线性算子把有界集变为有界集, 把收敛的序列变为收敛的序列.

(2) 如果T 是紧的, 由(1) 有T^*T 紧的. 反之, 如果T^*T 是紧的, 设$x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理6.3.18有$T^*Tx_n \to 0\,(n \to \infty)$, 注意$\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \to 0, \tag{6.3.7}$$

即T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由(2) 知T^* 是紧的. □

注 以后可以看到, 定理6.3.2, 6.3.10 和6.3.13 意味着全体紧算子是Banach 代数$\mathcal{B}(H)$ 中的一个非零的闭的双边理想.

6.3.3 弱列紧

为了从有界性导出某种意义下的列紧性, 我们引入弱列紧的概念.

定义 6.3.14 设X 是赋范空间, $A \subset X$. 如果A 中的任意点列, 有一个弱收敛的子列, 则称集合A 是弱列紧的. 如果收敛的极限属于A, 则称集合A 是弱自列紧的.

定理 6.3.15 设H 是Hilbert 空间, 则对于H 中的任何有界点列$\{x_n\}$, 都存在它的一个子列$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $\{x_{n_k}\}$ 在H 中弱收敛, 即H 中的有界集是弱列紧的.

证明 令$M = \operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 那么$M \oplus M^\perp$ 在H 中稠. 对于每个$j \in \mathbb{N}$, 数列$(x_n, x_j)_{n=1}^\infty$ 是有界的, 因此对于每个$j \in \mathbb{N}$ 我们能够找到$\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_{j_k}}\}_{k=1}^\infty$, 使得$\{x_{n_{(j+1)_k}}\}_{k=1}^\infty$ 是$\{x_{n_{j_k}}\}_{k=1}^\infty$ 的子列且$(x_{n_{j_k}}, x_j)_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 使用对角线方法, 令$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty = \{x_{n_{k_k}}\}_{k=1}^\infty$, 于是对于每个$j \in \mathbb{N}$ 数列$(x_{n_k}, x_j)_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 注意到对于每个$x \in M^\perp$, $(x_{n_k}, x) = 0$. 因此对于任意的$x \in M \oplus M^\perp$, $(x_{n_k}, x)_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 结合$M \oplus M^\perp$ 在H 中稠, 定理可证. □

一般地, 我们有

定理 6.3.16 **(Eberlein—Шмулян)** 自反空间的单位(闭)球是弱(自)列紧的.

例 6.3.17 设$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是Hilbert 空间H 中的标准正交集, 根据Bessel 不等式, 对于任意的$x \in H$, 有$\|x\| \geqslant \sum\limits_{n=1}^\infty |(x, x_n)|^2$, 即$(x, x_n) \to 0\ (n \to \infty)$, 由Riesz 表示定理和弱收敛的定义, 我们有$x_n \xrightarrow{w} 0$.

特别地, 可分的Hilbert 空间的正交基弱收敛到零.

注 例6.3.17 说明弱收敛推不出按范数收敛, 可分的Hilbert 空间的正交基不是列紧的, 但是弱列紧的.

对于紧的线性算子, 我们有以下性质

定理 6.3.18 设H 是Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的充要条件是: 如果x_n 弱收敛零($x_n \xrightarrow{w} 0$), 则$\{Tx_n\}$ 按范数收敛到零, 即$Tx_n \to 0\ (n \to \infty)$.

证明 设T 是紧的, 如果Tx_n 不收敛到零, 则存在$\varepsilon > 0$, 及x_n 的子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{6.3.8}$$

由于$\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以$\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列, 不妨设

$$\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

由于$\{x_{n_k}\}$ 弱收敛到零, 所以对于$\forall y \in H$,

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^*y) \to 0 \ (k \to \infty),$$

即$\{Tx_{n_k}\}$ 弱收敛到零. 于是

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = w - \lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = 0, \tag{6.3.9}$$

与(6.3.8)矛盾.

反之, 如果$w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 一定有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 成立. 我们考虑H 中的一个有界点列$\{x_n\}$, 由定理6.3.15 存在一个弱收敛的点到$\{x_{n_k}\}$, 即$w - \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$. 由条件$\lim\limits_{n\to\infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即$\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

对于一般的Banach 空间, 我们有

定理 6.3.19 设X, Y 是Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, 则T 把弱紧集映成列紧集; 反之, 如果X 是自反的, T 把任何弱紧集都映成列紧集, 则T 是紧算子.

6.3.4 紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.20 线性算子$T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在$\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子T_n, 使得$\|T - T_n\| \to 0 \, (n \to \infty)$. 并且对于紧线性算子, 子空间$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 和$\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果T_n 是有穷秩的, 由定理6.3.2和定理6.3.10, 及$\|T - T_n\| \to 0(n \to \infty)$, 可知$T$ 是紧算子.

反之, 如果T 是紧的, 我们首先证明$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 是可分的. 令$\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ (A 是一个指标集)是$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 的一个正交基, 因为T 是紧的, 根据例6.3.17 和定理6.3.18, 对于A 中的每一个序列$\{\alpha_n\} \, (\alpha_n \neq \alpha_m, n \neq m)$, $Te_{\alpha_n} \to 0(n \to \infty)$, 因此对于每一个$\varepsilon > 0$, 仅存在有限个$\alpha \in A$, 使得$\|Te_\alpha\| \geqslant \varepsilon$, 由此可知$A$ 是至多可数的, 即$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 是可分的.

不妨设$\{e_n : n \in N\}$ 是$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 的正交基, P_m 是在$L_m = \mathrm{span}\,\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 的正交投影, 于是P_m 强收敛到P. 令$T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^{m} (x, e_n) Te_n. \tag{6.3.10}$$

由于T_m 的值域至多是m 维的, 所以T_m 是紧算子. 由范数的定义对于每一个m, 存在一个$x_m \in H$, $\|x_m\| = 1$, 使得

$$\|(T - T_m)x_m\| \geqslant \frac{1}{2}\|T - T_m\|. \tag{6.3.11}$$

对于$\forall g \in H$, 由于P_m 强收敛到P,

$$((P - P_m)x_m, g) = (x_m, (P - P_m)g) \to 0 \ (m \to \infty),$$

即$(P - P_m)\, x_m \xrightarrow{w} 0$. 根据定理6.3.18 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \to 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2\|(T - T_m)x_m\| \to 0, \tag{6.3.12}$$

即$T_m \to T$.

由于$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 是可分的, 设$\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是$\mathcal{N}(T)^{\perp}$ 中的可数稠子集, 从T 的有界性我们有$\{Ty_n \mid n \in N\}$ 在$\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此$\mathcal{R}(T)$ 是可分的. □

定理 6.3.21 令X, Y 是Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在$\mathcal{R}(T)$ 的一个有限维的子空间M, 使得对于$\forall x \in X$,

$$\inf\left\{\|Tx - m\| \,\middle|\, m \in M\right\} \leqslant \varepsilon \|x\|. \tag{6.3.13}$$

证明 任给$\varepsilon < 0$, D 是X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在$\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个ε —网. 令M 是这个ε -网张成的子空间, M 是有限维的, 并且对于$\forall y \in D, \mathrm{dist}(Ty, M) < \varepsilon$. 于是对于$\forall x \in X$,

$$\inf\left\{\|T(\frac{x}{\|x\|}) - m'\| \middle| m' \in M\right\} \leqslant \varepsilon,$$

所以

$$\inf\{\|Tx - m\| \,|m \in M\} \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

其中$m = \|x\|\, m'$. □

注 换句话说, 可以找到一个有限维的子空间和T 的值域$\mathcal{R}(T)$ 在上述意义下相距不超过ε, 粗略地说ε 越小, M 的维数越大.

§6.4 紧线性算子的谱

6.4.1 紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看作是有限维空间的线性算子(矩阵)特征值理论的推广, 它的许多结果是与有限维情况十分相近. 紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 6.4.1　恒等算子$I : X \to X$ 是紧的, 当且仅当$\dim X < \infty$.

证明　如果$\dim X = \infty$, 根据Riesz引理可以构造一个点列$\{x_n\}$, 使得$\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ $(n \neq m)$. 因此$\{x_n\}$ 无收敛的子列, 推知I 不是紧的. □

推论 6.4.2　$\dim X = \infty$, A 是X 到X 的紧线性算子, 且A^{-1} 存在, 则A^{-1} 不是有界线性算子.

证明　如果A^{-1} 有界, 由$A^{-1}A = I$, 知I 是紧的，结合定理6.4.1 推出矛盾. □

注1　如果$0 \in \rho(A)$, 则$\dim X < \infty$.

注2　若X 是无穷维的Banach 空间, A 是紧算子, 且A 是单射的, 则由Banach 逆算子定理$\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 6.4.3　设A 是赋范空间X 到X 的紧的线性算子, 那么对于$\forall \alpha > 0$, A 的特征值λ 满足$|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.

证明　假如不然, 存在$\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令x_n 是对应于λ_n 的一个特征元素, 根据命题6.1.3, 不同的特征值对应的特征向量是线性无关的, 令$M_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 于是对于$\forall x \in M_n$, 存在唯一的表达式

$$x = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\}. \tag{6.4.1}$$

于是

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1},$$

即

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}, \ \forall x \in M_n. \tag{6.4.2}$$

因为M_{n-1} 是闭的, 由引理1.1.12存在$y_n \in M_n, \|y_n\| = 1$,

$$\|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2} \ , \qquad \forall x \in M_{n-1}. \tag{6.4.3}$$

对于$m < n$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n) - Ty_m, \tag{6.4.4}$$

由(6.4.2) $Ty_n - \lambda_n y_n \in M_{n-1}$, 由于$m \leqslant n - 1$, $Ty_m \in M_{n-1}$, 根据(6.4.3) 和(6.4.4), 有

$$\| Ty_n - Ty_m \| = |\lambda_n| \, \| y_n + \frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n - \lambda_n y_n)] - Ty_m \| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| > \frac{\alpha_0}{2}, \tag{6.4.5}$$

即$\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与T 的紧性矛盾. □

推论 6.4.4　紧的线性算子A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了0 以外, 这些特征值无聚点.

定理 6.4.5　令A 是从赋范空间X 到X 的紧的线性算子, $\lambda \neq 0$, 那么$\lambda I - A$ 的零空间$\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的.

证明　考虑任意的$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n\| \leqslant 1, x_n \in \mathcal{N}(\lambda I - A)$. 由于$A$ 是紧的, $\{Ax_n\}$ 是收敛的, 由于$(\lambda I - A)x_n = 0$, $\lambda \neq 0$, $x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是$\{x_n\}$ 也是收敛的, 根据定理6.4.1 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的. □

注　后面第6节的定理6.6.17将说明定理6.4.3 和定理6.4.5得到的这两个条件是线性算子紧的充分必要条件.

6.4.2 紧算子的谱集

定理 6.4.6　A 是如上的紧的线性算子, 则对于任意的正整数n

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty, \tag{6.4.6}$$

且

$$\{0\} \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A) \subseteq \mathcal{N}(\lambda I - A)^2 \subseteq \cdots . \tag{6.4.7}$$

[1]

证明　因为$(\lambda I - A)0 = 0$, 由$(\lambda I - A)^n x = 0$ 可知$(\lambda I - A)^{n+1}x = 0$, 即(6.4.7)对于任何线性算子都成立. 注意到

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}(-A)^k \\ &= \lambda^n I - A\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}(-A)^{k-1} = \beta I - W,\end{aligned} \tag{6.4.8}$$

其中$\beta = \lambda^n, W = A\cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}$, 根据定理6.3.13 可知$W$ 是紧的, 由(6.4.8)和定理6.4.5 知$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^n < \infty$.

定理 6.4.7　设X 是Banach 空间, A 是从X 到X 的紧线性算了, $\lambda \neq 0$, 则$\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

证明　由定理6.4.5 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 是有限维的, 根据定理**??**, 存在X 的闭子空间M, 使得

$$X = \mathcal{N}(\lambda I - A)\dot{+}M,\ M \cap \mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}. \tag{6.4.9}$$

定义$T: M \to X$,

$$Tx = (\lambda I - A)x,\ x \in M.$$

显然$T \in \mathcal{B}(M, X)$, 且$\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{R}(T)$. 以下只须证明$\mathcal{R}(T)$ 是闭的. 容易看到T 是单射, 且存在$m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m\|x\|,\ x \in M. \tag{6.4.10}$$

[1]$\subseteq$ 表示包含于, $\subset$ 表示严格包含于.

假如不然, 存在$\{x_n\}\subset M, \|x_n\|=1, n=1,2,\cdots$, 使得$Tx_n\to 0(n\to\infty)$. 因为$A$是紧算子, 不妨设$Ax_n$ 收敛到y, 由$Tx_n=(\lambda I-A)x_n\to 0$, 可知$\lambda x_n\to y$, 由于$M$是闭子空间, $y\in M$, 于是

$$Ty=\lim_{n\to\infty}T(\lambda x_n)=0.$$

由T 是单射知$y=0$, 但是和

$$\|y\|=\lim_{n\to\infty}\|\lambda x_n\|=|\lambda|>0$$

矛盾, 推出(6.4.10)成立.

以下证明$\mathcal{R}(T)$ 是闭的. 对于$\forall y$, 如果存在$x_n\in M$, 且$y_n=(\lambda I-A)x_n$, $y_n\to y(n\to\infty)$, 根据(6.4.10)知$(\lambda I-A)^{-1}$ 是有界的, 由于$\{y_n\}$ 是有界的, 且$x_n=(\lambda I-A)^{-1}y_n$, 推出$\{x_n\}$ 是有界的, 注意到A 是紧的, 不妨设Ax_n 是收敛的, 由$\lambda x_n=y_n+Ax_n$, $\lambda\neq 0$, 可以知道$\{x_n\}$ 也是收敛的, 令$x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $x_0\in M$, 于是

$$(\lambda I-A)x_0=(\lambda I-A)(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}(\lambda I-A)x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

即$y\in\mathcal{R}(\lambda I-A)$, $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的.

注 从定理的证明和(6.4.10)可以看出, 如果$\lambda\neq 0$, 逆算子$(\lambda I-A)^{-1}$ 存在, 且是有界, 即$\sigma_c(A)\backslash\{0\}=\emptyset$.

以下讨论关于A 的剩余谱.

定理 6.4.8 X 是Banach 空间, $A\in\mathcal{K}(X)$, $\lambda\neq 0$. 若$\mathcal{N}(\lambda I-A)=\{0\}$, 则$\mathcal{R}(\lambda I-A)=X$.

证明 假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I-A)\neq X$, 令$X_0=X$, $X_1=(\lambda I-A)X_0=\mathcal{R}(\lambda I-A)$, $X_2=(\lambda I-A)X_1=\mathcal{R}(\lambda I-A)^2,\cdots$. 由定理6.4.7和(6.4.8)中的$W$ 是紧的, 可知$X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ 是X_0 的闭子空间. 由于$X_0\supset X_1$, 推知$X_1=(\lambda I-A)X_0\supseteq(\lambda I-A)X_1=X_2$, 由归纳可知:

$$X_0\supseteq X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots,\tag{6.4.11}$$

即

$$X\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)\supseteq\mathcal{R}(\lambda I-A)^2\supseteq\cdots,\tag{6.4.12}$$

并且$X_0\supset X_1$. 以下证明如果$X_{n-1}\supset X_n$, 则可知$X_n\supset X_{n+1}$. 假如不然

$$X_n=X_{n+1}=(\lambda I-A)X_n.\tag{6.4.13}$$

于是对于$\forall x\in X_{n-1}$, $(\lambda I-A)x\in X_n=X_{n+1}$, 由(6.4.13), 存在$y\in X_n$, 使得

$$(\lambda I-A)x=(\lambda I-A)y.$$

由于$\mathcal{N}(\lambda I-A)=\{0\}$, $(\lambda I-A)$ 是一一的, 推出$x=y\in X_n$, 即$X_{n-1}=X_n$ 矛盾. 结合$X_0\supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0\supset X_1\supset X_2\supset\cdots. \tag{6.4.14}$$

根据(6.4.14)和引理1.1.12存在$x_n\in X_n, \|x_n\|=1$, 且

$$d(x_n,X_{n+1})\geqslant\frac{1}{2},\ \ n=1,2,\cdots. \tag{6.4.15}$$

于是对于$n>m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m-Ax_n)=x_m+\{-x_n-\frac{(\lambda I-A)x_m-(\lambda I-A)x_n}{\lambda}\}=x_m-x \tag{6.4.16}$$

其中$x=x_n+\frac{(\lambda I-A)x_m-(\lambda I-A)x_n}{\lambda}\in X_{m+1}$. 由(6.4.15)和(6.4.16)有

$$\|Ax_m-Ax_n\|=|\lambda|\,\|x_m-x\|\geqslant\frac{|\lambda|}{2}>0,$$

即$\{Ax_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与A 是紧算子矛盾. □

定理6.4.8 说明$\sigma_r(A)\backslash\{0\}=\emptyset$. 综上我们有

定理 6.4.9 X 是Banach 空间, A 是从X 到X 的紧线性算子, 则

(1) $0\in\sigma(A)$, 除非$\dim X<\infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\}=\sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ 至多以0 为聚点.

6.4.3 例

下面对于紧线性算子, 考虑$\lambda=0$ 的情况. 如果X 是有限维的, 有两种可能, $0\in\sigma(A)=\sigma_p(A)$, 或者$0\in\rho(A)$; 当$X$ 是无穷维时, $0\in\sigma(A)$, 并且三种情况

$$0\in\sigma_p(A),\ 0\in\sigma_r(A),\ 0\in\sigma_c(A)$$

都是有可能的. 以下三个例子说明这一点.

例 6.4.10 设A 是从l^2 到l^2 的线性算子, 定义为:

$$Ax=(\frac{\xi_2}{1},\frac{\xi_3}{2},\frac{\xi_4}{3},\cdots),$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, 可以证明$A$ 把l^2 中的有界集映射成为列紧集, 即A 是紧的线性算子. 显然$Ax=0$ 有非零解, $x=(\xi_1,0,0,\cdots)$, 其中$\xi_1\neq0$, 即$0\in\sigma_p(A)$.

例 6.4.11 设A 是从l^2 到l^2 的线性算子, 定义为：

$$Ax = (0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots),$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然A 是紧的线性算子, 当$\lambda \neq 0$, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, 即$\lambda \notin \sigma_p(A)(\lambda \neq 0)$. 可以证明$\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$. A 没有特征值, 且唯一的谱点0 是A 的剩余谱.

例 6.4.12 设A 是从l^2 到l^2 的线性算子, 定义为：

$$Ax = (\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots),$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然, A 也是紧的线性算子, 对于$\lambda \neq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$, $\lambda \in \rho(A)$; $\lambda = \frac{1}{n}$, $\lambda = \sigma_p(A)$. 可以证明$0 \in \sigma_c(T)$.

§6.5 有界自共轭线性算子的谱

6.5.1 正常线性算子的谱

正常的和自共轭的线性算子是Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是$\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广. 由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

定理 6.5.1 设T 是Hilbert 空间H 上的正常算子, λ 是T 的特征值, x 是对应于λ 的特征元素. 则$\bar{\lambda}$ 是T 的共轭算子T^* 的特征值, x 是对应于$\bar{\lambda}$ 的特征元素, 并且

$$\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\bar{\lambda} I - T^*). \tag{6.5.1}$$

证明 因为T 是正常的, 当且仅当对于任意的$x \in H$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$. T 是正常的, 则$\lambda I - T$ 也是正常的. 因此$\|(\lambda I - T)x\| = 0$ 当且仅当$\big\|(\bar{\lambda} I - T^*)x\big\| = 0$. □

定理 6.5.2 T 是Hilbert 空间H 上的正常算子, $\mu \neq \lambda$, 则零空间$\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 和$\mathcal{N}(\mu I - T)$ 相互正交.

证明 令$x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$, 由于$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y)$, 结合定理6.5.1 有$(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$, 因此$(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, 由于$\mu \neq \lambda$, 所以$(x,\ y) = 0$. □

定理 6.5.3 正常算子的剩余谱是空集.

证明 设T 是Hilbert空间H 上的正常算子, 我们需要证明的是, 如果$(\lambda I - T)$ 是一一的, 那么$\lambda I - T$ 的值域$\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在H 中是稠密的.

设λ 不是T 的特征值, $y \in H$, 且$y \perp \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 即对于$\forall x \in H$, $(\lambda x - Tx,\ y) = 0$. 因为$((\lambda I - T)x,\ y) = \big(x,\ (\bar{\lambda} - T^*)y\big) = 0\ \ (\forall x \in H)$, 所以$y \in \mathcal{N}(\bar{\lambda} I - T^*)$. 由于$\lambda$ 不是T 的特征值, 所以$\bar{\lambda}$ 不是T^* 的特征值, 于是$y = 0$, 即$\mathcal{R}(\lambda I - T)^{\perp} = \{0\}$, 这意味着$\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在H 中稠密. □

对于正常算子的谱半径, 我们有

定理 6.5.4 设T 是Hilbert 空间H 中的正常算子, 则谱半径$r_\sigma(T) = \|T\|$.

证明 显然有$\|T^2\| = \|T\|^2$, 于是当$n = 2^m$(m 是正整数), $\|T^n\| = \|T\|^n$. 由定理6.2.8知

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}} ((\|T\|^n)^{\frac{1}{n}}) = \|T\|. \qquad \square$$

定理 6.5.5 一个复数λ 属于正常算子T 的谱集合的充分必要条件是存在一个点列$\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且$\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0\ \ (n \to \infty)$.

证明 必要性. 假如不然, 则存在逆算子, 且逆算子有界. 又因为T 是正常的, 由定理6.5.3, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在H 中稠, 于是有$\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当λ 是特征值, 命题成立. 若λ 不是特征值, 逆算子存在, 令$y_n = (\lambda I - T)x_n$, 即

$$x_n = (\lambda I - T)^{-1} y_n.$$

若$\lambda \in \rho(T)$, 则$(\lambda I - T)^{-1}$ 有界, $\exists M > 0$, 使得

$$\|x_n\| = \left\|(\lambda I - T)^{-1} y_n\right\| \leqslant M \|y_n\|,$$

由于左边趋近于1, 而右边趋近于零, 矛盾. □

注1 定理6.5.5 的证明中没有使用近似点谱的概念. 我们知道, 如果$\sigma_r(T) = \emptyset$, 那么$\sigma_a(T) = \sigma(T)$. 即对于正常算子来说, 由定理6.5.3可知, $\sigma_a(T) = \sigma(T)$, 由近似点谱的定义立即可以得到定理6.5.5 的结论.

注2 当T 是正常算子时, 若$\lambda \in \sigma(T)$, 但λ 不是特征值, 则$\lambda \in \sigma_c(T)$.

定理 6.5.6 T 是从Hilbert 空间H 到H 中正常的有界线性算子, 则$\overline{\mathcal{R}(T)}$ 和$\mathcal{N}(T)$ 互为正交补, 即

$$H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T). \tag{6.5.2}$$

证明 因为$\mathcal{N}(T)$ 是闭的, 根据定理**??** $H = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp}$, 由定理6.5.1, $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$, 所以$\mathcal{N}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(T)}$, 定理得证. □

定理 6.5.7 如果T 是正常算子, 则T 的指标(ascent)(即零链长)等于0 或者1.

证明 如果$x \in \mathcal{N}(T^2)$, 那么, $Tx \in \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T)$, 由定理6.5.6, $\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$,因此$Tx = 0$, 即$\mathcal{N}(T^2) = \mathcal{N}(T)$, 即$T$ 的指标不超过1. □

注 正常算子特征值λ 的代数重数和几何重数相等.

6.5.2 有界自共轭算子的谱

定理 6.5.8　有界自共轭算子T 的谱是实数集合的一个子集合，且

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|,\|T\|]. \tag{6.5.3}$$

证明　令$\lambda = \rho + i\sigma\ (\sigma \neq 0)$,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = (\rho x - Tx,\ \ \rho x - Tx) + (i\sigma x,\ \ i\sigma x) \geqslant |\sigma|^2\|x\|^2. \tag{6.5.4}$$

因此$\lambda I - T$ 是下方有界, 由定理6.5.5 知, $\lambda \in \rho(T)$, 由此可知T 的谱是实的, 结合定理6.2.2 可知$\sigma(T) \subset [-\|T\|,\|T\|]$. □

注　若T 是一个自共轭算子, 则

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$;

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

由定理5.4.7, 如果T 是Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子, 则对于$\forall x \in H$, $(Tx,\ x)$ 是实的. 对于T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计

定理 6.5.9　T 是Hilbert 空间H 到H 的有界自共轭线性算子, 令

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\quad M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x), \tag{6.5.5}$$

则

$$\sigma(T) \subset [m,M]. \tag{6.5.6}$$

证明　因为T 是自共轭算子, $\sigma(T)$ 是在实轴上. 下面证明对任意的实数$c > 0$, $\lambda = M + c \in \rho(T)$. 对于$\forall x \in H,\ x \neq 0$, 令$v = \frac{x}{\|x\|}$,

$$(Tx,x) = \|x\|^2(Tv,v) \leqslant \|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u) = (x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I - T)x\|\,\|x\| \geqslant ((\lambda I - T)x,x) = \lambda(x,x) - (Tx,x) \geqslant (\lambda - M)(x,x) = c\|x\|,$$

其中$c = \lambda - M > 0$. 根据定理6.5.5, $\lambda \in \rho(T)$. 对于$\lambda < m$, 可以用类似的方法证明$\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.5.10　T 是从Hilbert 空间H 到H 的有界自共轭线性算子, 则

$$\|T\| = \max\{|m|,|M|\} = \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{6.5.7}$$

证明 由Schwarz不等式有

$$\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\,\|x\| = \|T\|,$$

令$k=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$, 只须证明$\|T\|\leqslant k$. 由于$T$ 是自共轭的, 对于$x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$, 运用平行四边形法则(定理**??**), 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(Tx,y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y),(x+y))-(T(x-y),(x-y))]\\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2]=k.\end{aligned}$$

取$\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx,y)=|(Tx,y)|,$$

则

$$|(Tx,y)|=(Tx,\alpha y)=Re(Tx,\alpha y)\leqslant k,$$

由定理5.4.8推出$\|T\|\leqslant k$. □

结合定理6.5.4可知

推论 6.5.11 T 是Hilbert 空间H 到H 的有界自共轭线性算子, 则

$$\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\sigma(T)\}=r_\sigma(T)=\|T\|=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{6.5.8}$$

定理 6.5.12 T 是Hilbert 空间H 到H 的有界自共轭线性算子, m,M 同定理6.5.9, 则:

$$m\in\sigma(T),\quad M\in\sigma(T). \tag{6.5.9}$$

证明 对于$c>0$, 算子$T+cI$ 相应的m,M 以及$\sigma(T)$ 都向右平移c, 因此不妨设$0\leqslant m\leqslant M$. 由定理6.5.10, $\|T\|=M$, 根据M 的定义, 存在点列$\{x_n\}\subset H,\|x_n\|=1$, $n=1,2,\cdots$, 且$(Tx_n,x_n)\to M$ $(n\to\infty)$, 于是

$$\begin{aligned}&\|Tx_n-Mx_n\|^2=(Tx_n-Mx_n,Tx_n-Mx_n)\\ &=\|Tx_n\|^2-2M(Tx_n,x_n)+M^2\|x_n\|^2\leqslant 2M^2-2M(Tx_n,x_n)\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

由定理6.5.5 $M\in\sigma(T)$. 类似地, 可以证明$m\in\sigma(T)$.

注 由推论6.5.11 结合$\sigma(T)$ 是闭的, 也可以证明定理6.5.12.

更一般地, 为了研究谱的分布, 我们可以引入数值域的概念.

定义 6.5.13 H 是Hilbert 空间, $T\in\mathcal{B}(H)$, 令

$$W(T)=\{(Tx,x)|\,\|x\|=1\}, \tag{6.5.10}$$

$W(T)$ 称为T 的数值域.

定理 6.5.14 H 是Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则

(1) $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$;

(2) 如果$d(\lambda, \overline{w(T)}) = d > 0$, 则$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d}$.

证明 设$\lambda \notin \overline{W(T)}$, 则$d(\lambda, \overline{W(T)}) = d > 0$. 对于$\forall x \in H, \|x\| = 1$, 由Schwarz 不等式

$$d \leqslant |\lambda - (Tx, x)| = |(\lambda x - Tx, x)| \leqslant \|\lambda x - Tx\|,$$

所以$(\lambda I - T)^{-1}$ 存在(定义域为$\mathcal{R}(\lambda I - T)$), 且$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d}$. 于是$\lambda \in \rho(T)$, 或者$\lambda \in \sigma_r(T)$. 如果$\lambda \in \sigma_r(T)$, 那么$\mathcal{R}(\lambda I - T)^{\perp} \neq \{0\}$, 由于$\mathcal{R}(\lambda I - T)^{\perp} = \mathcal{N}(\bar{\lambda} I - T^*)$, $\bar{\lambda}$ 是T^* 的特征值, 令x 为T^* 关于$\bar{\lambda}$ 的特征元素, $\|x\| = 1$, $T^*x = \bar{\lambda} x$, 那么$(Tx, x) = (x, T^*x) = \lambda(x, x) = \lambda$, 于是$\lambda \in W(T)$, 矛盾. 于是$\lambda$ 属于T 的正则集$\rho(T)$, 定理得证. □

注 可以证明$W(T)$ 是一个凸集. 当T 是正常算子的时, $\overline{W(T)}$ 是包含$\sigma(T)$ 的最小的闭的凸包.

显然当T 是自共轭算子时, 定理6.5.9 是定理6.5.14的特殊情况.

6.5.3 紧的正常算子的谱分解

紧的正常算子的谱分解有着十分简明的形式，它从结构上刻画了紧算子的基本性质.

定理 6.5.15 (**紧的正常算子的谱分解**)设H 是一个Hilbert 空间, T 是紧的正常算子, λ_1, λ_2,... 是T 的非零特征值, P_i 是在对应的特征元素空间上的正交投影算子(有穷秩的), 则$T = \sum\limits_i \lambda_i P_i$, 在$\mathcal{B}(H)$ 中按范数收敛.

证明 令$M = \operatorname{span}\{\mathcal{R}(P_i), i = 1, 2, \cdots\}$, P 是在$M^{\perp}$ 上的正交投影. 如果$M^{\perp} \neq \{0\}$, 则对于任何$x \in M^{\perp}$, $y \in H$, 我们有

$$(Tx, P_i y) = (x, T^* P_i y) = \lambda_i (x, P_i y) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots).$$

所以$Tx \in M^{\perp}$, 即$TM^{\perp} \subset M^{\perp}$. 同理可以证明$T^* M^{\perp} \subset M^{\perp}$. 令$S = T|_{M^{\perp}}$, S 在$M^{\perp}$ 上是正常的, S 的特征值是T 的特征值, S 的特征元素是T 包含在$M^{\perp}$ 中的特征元素, 由M 的定义(包含了T 所有的非零特征值), S 可能有的特征值只有零. 由紧算子谱的结构, $\sigma(S) = \{0\}$, 由定理6.2.10, 谱半径$r_\sigma(s) = 0$, 再根据定理6.5.4,

$$\|S\| = r_\sigma(S) = 0, \tag{6.5.11}$$

即S 是零算子, 这就是说T 在$M^{\perp}$ 为零算子. 于是对于$\forall x \in H$,

$$Tx = TPx + T\sum_i P_i x = \sum_i TP_i x = \sum_i \lambda P_i x. \tag{6.5.12}$$

如果$\{\lambda_i\}$ 是无穷列, 对于$\forall x \in H$, $\|x\| = 1$ 和$m \in \mathbb{N}$

$$\| \left(T - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \right) x \| = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \|P_i x\|^2$$
$$\leqslant \sup \left\{ |\lambda_i|^2 \mid i \geqslant m+1 \right\} \|x\|^2 = \sup \left\{ |\lambda_i|^2 | i \geqslant m+1 \right\}^2 .$$

因为$\lambda_i \to 0$, 所以$T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ 按范数收敛. □

注1 定理6.5.15 说明紧的正常算子可以展开成有穷秩的正交投影算子的加权和, 类似于有限维空间中对称算子的对角化, 并且级数的收敛是按范数收敛. (对比定义6.6.4, 其收敛是强收敛.)

注2 反之, 如果$\lambda_i \to 0$ (或者仅有有限个λ_i) $\lambda_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, P_i 是有穷秩的非零正交投影, $P_i P_j = 0$ $(i \neq j)$, 那么

$$T = \sum_i \lambda_i P_i$$

在$\mathcal{B}(H)$ 中的收敛, 并且由定理6.6.15 和定理6.6.17 推知, T 是紧的正常算子. 根据引理6.6.10, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 是T 的非零特征值, $\mathcal{R}(P_i)$ 是对应的特征空间. 如果λ_i 都是实的, 由定理6.6.16 T 是自共轭的.

定理 6.5.16 (**Hilbert-Schmidt 展开定理**) 若T 是Hilbert 空间H 上的紧的正常算子, 则存在μ_j $(\mu_j \to 0)$ (或者μ_j 只有有限个), 和一个在H 中正交的序列$\{e_j\}$, 使得

$$Tx = \sum_j \mu_j (x, e_j) e_j, \ \forall x \in H. \tag{6.5.13}$$

相反地, 由上式定义的算子T 是紧的、正常的, μ_j 是T 的特征值, e_j 是对应的特征元素.

当T 是自共轭的, 以上结论对一个实的Hilbert 空间也成立.

证明 由定理6.5.15, 可令$T = \sum\limits_i \lambda_i P_i$, 对于每一个$i$, $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}\}$ 是$\mathcal{R}(P_i)$ 的正交基, 令$\mu_{i_k} = \lambda_i$ $(k = 1, \cdots, i_m)$,

$$Tx = x = \sum_i \lambda_i \sum_k (P_i x, e_{i_k}) e_{i_k} = \sum_i \sum_k \mu_{i_k} (x, e_{i_k}) e_{i_k}.$$

经重新排序可得以上结论. 相反地, 可以由定理6.6.15 和6.6.17 证明. 关于自共轭算子的结论可由定理6.6.16 给出. □

定理 6.5.17 令T 是一个紧的正常算子, $\{\lambda_j\}$ 是T 的非零特征值(计算按照重数), 且$|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$, 则$|\lambda_1| = \|T\|$, 且对于$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup \left\{ \|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1 \right\}. \tag{6.5.14}$$

如果T 是自共轭的, 以上结论在实的Hilbert 空间也成立.

证明 由于T 是正常的, 谱半径$r_\sigma = \|T\|$, 由T 是紧的, $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, 得到$|\lambda_1| = \|T\|$.

令$\{x_j\}$ 是正交列, $\|x_j\| = 1$, 使得$Tx_j = \lambda_j x_j$. 我们选择$y_j = x_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 那么对于任意的$x \perp y_1, y_2, \cdots y_n$, $\|x\| = 1$ 我们有

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \| \sum_{j>n} \lambda_j (x,\ y_j)\, y_j \|^2 = \sum_{j>n} |\lambda_j|^2 \, |(x, y_j)|^2 \\ &\leqslant |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j>n} |(x,\ x_j)|^2 \leqslant |\lambda_{n+1}|^2 \, \|x\| = |\lambda_{n+1}|^2 , \end{aligned} \tag{6.5.15}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1, y_2, \cdots, y_n \in H} \sup \{\|Tx\|,\ x \perp y_1, \cdots, y_n,\ \|x\| = 1\}.$$

对于任意的y_1, y_2, $\cdots$, y_n, 令x 是$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的非零线性组合, $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}$, $\|x\| = 1$, 其中系数α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1,\ y_1) + a_2(x_2,\ y_1) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1) = 0 \\ a_1(x_1,\ y_2) + a_2(x_2,\ y_2) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2) = 0 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_1(x_1,\ y_n) + a_2(x_2,\ y_n) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n) = 0, \end{cases}$$

即$x \perp \{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$. 由于

$$\|Tx\|^2 = \| \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (x, x_j) x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j|^2 \, |(x, x_j)|^2 \geqslant |\lambda_{n+1}|^2 \, \|x\|^2 = |\lambda_{n+1}|^2 ,$$

我们有

$$|\lambda_{n+1}| \leqslant \inf_{y_1, \cdots, y_n \in H} \sup \{\|Tx\| :\ x \perp y_1, \cdots, y_n,\ \|x\| = 1\}. \tag{6.5.16}$$

结合(6.5.15)和(6.5.16), 定理得证. □

推论 6.5.18 T 是Hilbert 空间H 上的紧的自共轭算子, 那么T 有一个实特征值λ, 使得$|\lambda| = \|T\|$.

6.5.4 极大极小原理

对于紧的自共轭算子A, 由于$\|A\| = \sup \{(Ax, x) \,|\, \|x\| = 1\}$, 并且$A$ 的不同的特征值所对应的特征元素相互正交, 使用类似定理6.5.17 的方法, 我们有

$$|\lambda_n| = \sup \{|(Ax, x)| \,|\, x \perp \mathrm{span}\, \{e_1, \cdots, e_{n-1}\}, \|x\| = 1\}, \tag{6.5.17}$$

其中$e_1,\cdots,e_{n-1}$ 是对应于$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 的特征元素.

进一步地, 如果我们按正负值把特征值排列起来, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots < 0. \tag{6.5.18}$$

我们有

定理 6.5.19 (**极大极小原理**)设A 是Hilbert 空间H 中的紧自共轭算子, 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x\in E_{n-1}^\perp} \{(Ax,x) \mid \|x\|=1\}, \tag{6.5.19}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x\in E_{n-1}^\perp} \{(Ax,x) \mid \|x\|=1\}, \tag{6.5.20}$$

其中E_{n-1} 是H 中的任意$n-1$ 维闭的线性子空间.

证明 注意到

$$x = \sum \alpha_i^+ e_i^+ + \sum \alpha_j^- e_j^-,$$

则对于$\forall x \in H$, $\|x\|=1$,

$$(Ax,x) = \sum \lambda_i^+ \left|\alpha_i^+\right|^2 + \sum \lambda_j^- \left|\alpha_j^-\right|^2.$$

令$\mu_n = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\{(Ax,x) \mid \|x\|=1,\ x\in E_{n-1}\}$. 对于$\forall E_{n-1}$, 在 $\operatorname{span}\{e_1^+,\cdots,e_n^+\}$ 中总有向量$x_n \neq 0$, $\|x_n\|=1$, 使得$x_n \perp E_{n-1}$, 于是

$$\sup_{x\perp E_{n-1}} (Ax,x) \geqslant (Ax_n,x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^+ \left|\alpha_i^+\right|^2 \geqslant \lambda_n^+,$$

即$\mu_n \geqslant \lambda_n^+$. 反之, 取$E_{n-1} = \operatorname{span}\{e_1^+,\cdots,e_{n-1}^+\}$, 则对于$\forall x\in H$, $\|x\|=1$, 有

$$\lambda_n^+ = \sup_{x\perp E_{n-1}} (Ax,x),$$

即$\lambda_n^+ \geqslant \mu_n$. 于是$\lambda_n^+ = \mu_n = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\{(Ax,x) \mid \|x\|=1\}$. 若用$-A$ 代替A 可证(6.5.20). □

§6.6 * 投影算子的加权和

设T 是Hilbert 空间上的有界线性算子, 所谓T 的几何分解即按照T 的特征把空间H 分为一些部分(可能是无穷多个), 使得T 在每一个部分上是相对简单的. 显然, 在有限维的情况, 线性算子$A=(a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子

空间来实现它的几何分解. 在第3第4节我们看到，对于紧的线性算子T，也有类似的几何分解

$$T = \sum_n \lambda_n P_n,$$

我们希望在更一般的情况下，研究投影算子加权和谱的性质.

6.6.1 单位分解和投影算子的加权和

定义 6.6.1 Hilbert 空间H 中的集合族$\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果$M_n \perp M_m, n \neq m$. 设$\{M_n\}$ 是Hilbert 空间H 中的相互正交的, 闭的线性子空间族, 称M 是$\{M_n\}$ 的正交和：

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots, \tag{6.6.1}$$

如果对于$\forall x \in M$, x 能唯一地表示为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots, \tag{6.6.2}$$

其中$x_n \in M_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{6.6.3}$$

进一步地, 如果$x_n \in M_n, n = 1, 2, \cdots, \sum\limits_n \|x_n\|^2 \leqslant \infty$, 则存在$x \in M$, 使得$x = \sum\limits_n x_n$.

定义 6.6.2 在Hilbert 空间H 中, 一个算子列$\{P_n\}$ (对于$\forall n$, $P_n \neq 0$), 称为是单位分解, 如果

(1) 每一个P_i 都是正交投影算子;

(2) $P_n P_m = 0$ $(n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, 它的收敛是在强收敛的意义下.

注1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子.

注2 $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ 意味着对于$\forall x \in H$, $\lim\limits_{m\to\infty} \| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n x - x \| = 0$.

命题 6.6.3 设$\{P_n\}$ 是一个单位分解, $\mathcal{R}(P_n)$ 是P_n 的值域, 则$\mathcal{R}(P_n) \perp \mathcal{R}(P_m)$ $(n \neq m)$, 且$H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$. 反之, $\{\mathcal{R}_n\}$ 是Hilbert 空间H 中的一族闭的线性子空间, 且$\mathcal{R}_n \perp \mathcal{R}_m (n \neq m)$, 令$P_n$ 是从H 到$\mathcal{R}_n$ 的正交投影算子, 那么$\{P_n\}$ 是H 的一个单位分解.

证明留给读者.

定义 6.6.4 H 是一个Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n x,\ x\in\mathcal{D}(T), \tag{6.6.4}$$

称为投影算子的加权和, 其中$\mathcal{D}(T)=\{x\in H \big| \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x \text{ 存在}\}$.

注1 显然T 是一个线性算子, 但T 可能是无界的.

注2 令$T_m=\sum\limits_{n=1}^{m}\lambda_n P_n$, 则$T_m$ 是在强收敛的意义下收敛到T.

例 6.6.5 在有限维空间, 若A 是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^n$ 的对称线性算子, A 可以表示为一个对称矩阵$A=(a_{ij})$, A 在其特征子空间上的投影算子$\{P_m\}_{m=1}^{k}$ 形成一个单位分解, 且A 可以表示为投影算子的加权和

$$Ax=\sum_{m=1}^{k}\lambda_m P_m x. \tag{6.6.5}$$

例 6.6.6 设Hilbert 空间$H=l^2[1,\infty)$, $\{e_n\}$ 是H 中的正交基, 即$e_n=\{\delta_{1n},\delta_{2n},\cdots\}$. 令$P_n:\ l^2\to l^2$

$$P_n x=(x,e_n)e_n,\ n=1,2,\cdots.$$

显然

$$Ix=x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\sum_{n=1}^{\infty}P_n x. \tag{6.6.6}$$

令

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}P_n,\ m=1,2,\cdots,$$

有

$$\|(I-S_m)x\|\to 0\ (m\to\infty).$$

即$\{P_n\}$ 是H 的一个单位分解. 注意S_m 并不按算子的范数收敛到I. □

6.6.2 投影算子的加权和的性质

投影算子的加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 6.6.7 设H 是一个Hilbert 空间, T 是由(6.6.4)定义的投影算子的加权和, 则$\mathcal{D}(T)=H$ 当且仅当$\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的.

证明 设集合$\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 即存在$M>0$, 使得$\forall n$, $|\lambda_n|\leqslant M$. 对于$\forall x\in H$, 由于$\{P_n\}$ 是H 的一个单位分解, $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2$, 令

$$y_m=\sum_{n=1}^{m}\lambda_n P_n x,$$

则

$$\|y_m - y_{m+p}\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \to 0\ (m \to \infty),$$

即$\{y_n\}$ 是Cauchy 列, 由于H 是Hilbert 空间, $\{y_n\}$ 在H 中收敛, 我们有$\mathcal{D}(T) = H$.

反之, 如果$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是无界的, 则存在其中的一个子列$\{|\lambda_{n_1}|, |\lambda_{n_2}|, \cdots\}$, 使得$|\lambda_{n_k}| \geqslant K$, 令$x_{n_k} \in \mathcal{R}(P_{n_k})$, 且$\|x_{n_k}\| = 1$. 定义$x = \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} x_{n_k}$, 则$x \in H$, 但是注意到$\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素, $\sum\limits_n \lambda_n P_n x = \sum\limits_k x_{n_k}$ 在H 不收敛, 即$x \notin \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(T) \neq H$. □

注1　我们看到当$\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.

注2　但是$\mathcal{D}(T)$ 在H 中总是稠密的, 即$\overline{\mathcal{D}(T)} = H$. 事实上, 对于$\forall x \in H$, 由于$\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$$

其中$x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 于是对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数n, 使得

$$\|x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n\| < \varepsilon,$$

而$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in \mathcal{D}(T)$.

定理 6.6.8　定理6.6.7 中的投影算子加权和是有界的当且仅当$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 并且$\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$.

证明　假设$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 是有界的, 令$M = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$, 于是

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \| \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^2 \| P_n x \|^2 \\ &\leqslant M^2 \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \| P_n x \|^2 = M^2 \| x \|^2,\end{aligned}$$

即T 是有界的, 且$\|T\| \leqslant M$. 反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$. 对于任意的$n$, 令$x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且$\|x_n\| = 1$, 由$Tx_n = \lambda_n x_n$, 有$\|T\| \geqslant |\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 即$\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 有界. 且$\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_1|, \cdots\}$. □

结合定理6.6.7和6.6.8有

定理 6.6.9　Hilbert 空间H 上的投影算子加权和T 是有界的充分必要条件是$\mathcal{D}\ (T) = H$.

6.6.3 投影算子的加权和的谱

下面我们来考虑投影算子的加权和的谱分析, 由于

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) P_n x,\ x \in \mathcal{D}(T), \tag{6.6.7}$$

$\lambda I-T$ 也是投影算子的加权和, 我们从分析$\lambda I-T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手.

引理 6.6.10 $\lambda I-T$ 是一一的当且仅当$\lambda\neq\lambda_n$, $n=1,2,\cdots$.

证明 考虑方程$(\lambda I-T)x=0$ 的解, 由于$H=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(P_n)$, 则$x\in H$ 可以唯一的写为$x=x_1+x_2+\cdots$, 其中$x_n\in\mathcal{R}(x_n)$. 于是

$$(\lambda I-T)x=\sum_n(\lambda-\lambda_n)x_n=0.$$

如果$\lambda\neq\lambda_n$, 则对于任意的n, $x_n=0$, 即$x=0$, $\lambda I-T$ 是一一的. 如果$\lambda=\lambda_{n_0}$, 于是对于$x_{n_0}\in\mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\|=1$, $(\lambda I-T)x_{n_0}=0$, $\lambda_{n_0}I-T$ 不是一一的, λ_{n_0} 是投影算子加权和T 的特征值, 我们得到

$$\sigma_p(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}. \tag{6.6.8}$$

引理 6.6.11 设T 为Hilbert 空间H 上的投影算子加权和, 则$\lambda I-T$ 的值域在H 中是稠密的, 当且仅当$\lambda\neq\lambda_n$, $n=1,2,\cdots$.

证明 如果$\lambda=\lambda_n$, $\lambda I-T$ 的值域正交于$\mathcal{R}(P_n)$, 由于$P_n\neq 0$, $\mathcal{R}(P_n)$ 是非空的闭子空间, 所以$\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在H 中不稠密. 如果$\lambda\neq\lambda_n$, $n=1,2,\cdots$. 对于任何的$y\in H$,

$$y=y_1+y_2+\cdots,$$

其中$y_n\in\mathcal{R}(P_n)$, 所以对于$\forall\varepsilon>0$, 存在N, 使得

$$\|y-y_1-y_2-\cdots-y_N\|<\varepsilon.$$

令$x_0=\sum\limits_{n=1}^{N}(\lambda-\lambda_n)^{-1}y_n$, 则$x_0\in\mathcal{D}(\lambda I-T)$, 且

$$y_0=(\lambda I-T)x_0=y_1+y_2+\cdots+y_n,$$

即$y_0\in\mathcal{R}(\lambda I-T)$, 且$\|y-y_0\|<\varepsilon$, 我们有$\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在H 中稠. □

注 引理6.6.10 和引理6.6.11 说明$\sigma_r(T)=\emptyset$.

引理 6.6.12 设T 为Hilbert 空间H 上投影算子的加权和, 则$\mathcal{D}(\lambda I-T)=H$ 当且仅当存在一个正数$\delta>0$, 使得对于所有的n, $|\lambda-\lambda_n|\geqslant\delta>0$(即$\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离.)

证明 如果$\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离. 对于$\forall y\in H$, $y=y_1+y_2+\cdots$, 其中$y_n\in\mathcal{R}(P_n)$.令

$$x=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}y_n.$$

由于

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}\|y_n\|^2\leqslant\frac{1}{\delta^2}\sum_n\|y_n\|^2\leqslant\frac{1}{\delta^2}\|y\|^2, \tag{6.6.9}$$

可知$x\in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I-T)x&=\sum_n(\lambda-\lambda_n)P_n(\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}y_n)\\&=\sum_n(\lambda-\lambda_n)\frac{1}{\lambda-\lambda_n}y_n=\sum_n y_n=y,\end{aligned}$$

即$y\in\mathcal{R}(\lambda I-T)$, $\mathcal{R}(\lambda I-T)=H$.

反之, 如果$\mathcal{R}(\lambda I-T)=H$. 对于$\forall x\in\mathcal{D}(\lambda I-T)$, $y=(\lambda I-T)x$, 根据定义

$$y=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_nx. \tag{6.6.10}$$

根据正交投影算子是连续的, $\lambda\neq\lambda_n$, $n=1,2,\cdots$, $(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 是连续的, 结合(6.6.10)有

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_ky=&(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_nx)\\&=\lim_{m\to\infty}(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_k\sum_{n=1}^{m}(\lambda-\lambda_n)P_nx=P_kx.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_k(\lambda-\lambda_k)^{-1}P_ky=\sum_kP_kx=x, \tag{6.6.11}$$

即$(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 也是投影算子的加权和, 由于

$$\mathcal{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,$$

根据定理6.6.7推知, $\{|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}$ 是有界的, 即$\exists\delta>0$, $|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant\delta^{-1},n=1,2,\cdots$. 换言之$|\lambda-\lambda_n|\geqslant\delta>0,\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离. □

推论 6.6.13　如果$\lambda\neq\lambda_n$, 则投影算子的加权和$\lambda I-T$ 的逆算子存在,

$$(\lambda I-T)^{-1}y=\sum_n(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_nx,\ y\in\mathcal{R}(\lambda I-T). \tag{6.6.12}$$

并且逆算子$(\lambda I-T)^{-1}$ 有界的充要条件是$\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注1　$\lambda\in\rho(T)$ 当且仅当$\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注2　$\lambda\in\sigma_c(T)$ 当且仅当 (1) $\lambda\neq\lambda_n$; (2) λ 是$\{\lambda_n\}$ 的一个聚点.

注3　$\sigma(T)=\overline{\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}}$.

定理 6.6.14 设T 是投影算子的加权和, 即

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

其中$\{P_n\}$ 是单位分解, 且T 是有界的, 则T 的共轭算子T^* 是

$$T^* = s - \sum_n \overline{\lambda}_n P_n. \tag{6.6.13}$$

证明 对于$\forall x,\ y \in H$, 由于P_n 是自共轭的,

$$\begin{aligned}(y, Tx) &= (y, \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n x) = \lim_{m\to\infty} (y, \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n x) \\ &= (\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \overline{\lambda}_n P_n y, x) = (\sum_{n=1}^\infty \overline{\lambda}_n P_n y, x) = (T^* y, x).\end{aligned}$$

□

定理 6.6.15 有界线性算子T 是投影算子加权和, 则T 是正常算子.

定理 6.6.16 有界线性算子T 是投影算子的加权和

$$T = s - \sum_n \lambda_n P_n,$$

则T 是自共轭的当且仅当所有的λ_n 都是实的.

定理 6.6.17 投影算子的加权和T 是紧的, 当且仅当

(1) 对于每一个$\lambda_n \neq 0$, P_n 的值域$\mathcal{R}(P_n)$ 是有限维的;

(2) 对于每一个正数$\alpha > 0$, 满足$|\lambda_n| > \alpha$ 的λ_n 的个数是有限的.

证明 ”$\Leftarrow$” 对于$\forall \varepsilon > 0$, 由条件(2), 满足$|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$, 令

$$T_m = \sum_{n=1}^m \lambda_n P_n,$$

其中P_n 是与λ_n 相应的投影算子. 由条件(1) T_m 是有穷秩的, 因此是紧的. 并且

$$\| (T - T_m)x \|^2 = \| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m} \lambda_n P_n x \|^2 \leqslant \sup_{\lambda \neq \lambda_1, \cdots \lambda_m} |\lambda_n|^2 \| \sum_n P_n x \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 .$$

根据定理6.3.20, T 是紧的线性算子. □

”$\Rightarrow$” 由关于紧算子谱分解的第4小节中的定理6.4.3、推论6.4.4 和定理6.4.5, 说明定理的两个条件也是必要的. □

注 从(??) 式我们看到，这里投影算子加权的收敛是按范数收敛。

习题 6

1. 设$X = C[0,1]$, $A : u(t) \to t \cdot u(t)$. 证明$A$ 有界且$\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$.
2. 证明右移算子$S_r : l^2 \to l^2$, 即

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots) \to (0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$$

的谱是闭的单位圆盘$M = \{\lambda |\, |\lambda| \leqslant 1\}$.

3. 若λ 是等距线性算子T 的特征值, 证明$|\lambda| = 1$.
4. 设$H = L^2(-\infty, \infty)$, 定义$T : H \to H, y = Tx$, 其中

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

证明$\lambda = (1 + iw)^{-1}$ 是算子T 的连续谱.

5. 求出$y = Kx$ 的本征值, 其中$y(t) = \int_{-1}^{1} (1 - 3t\tau) x(\tau) d\tau$.
6. 证明若线性算子具有有穷秩, 则它的所有谱点都是点谱.
7. 假定$k(t,\tau) \geqslant 0, a \leqslant t, \tau \leqslant b$, λ 是$y = Kx$ 的非零本征值, 其中$y(t) = \int_a^b k(t,\tau) x(\tau) d\tau$, 若相应的本征函数$\phi(t) (a \leqslant t \leqslant b)$ 是正的. 证明$\mathcal{N}(\lambda \mathrm{I} - K)$ 是一维的.
8. 设X 是Banach 空间Y 中的闭线性子空间, 并设L 是Y 到其自身的线性算子, 且$L(X) \subset X$. 令$\sigma_Y(L)$ 表示$L : Y \to Y$ 的谱, $\sigma_X(L)$ 表示L 限制在X 上的算子的谱. 证明$\sigma_X(L) \subset \sigma_Y(L)$.
9. 讨论下列定义在$l^2(-\infty, \infty)$ 上的算子的谱，其中 S_r 是右移算子.

   (1) $S_r + 2I$;

   (2) $S_r + \lambda I$;

   (3) $\beta S_r + \lambda I$, 其中$\beta \neq 0$;

   (4) S_r^2;

   (5) $\alpha S_r^2 + \beta S_r + 2I$, 其中$\alpha \neq 0$. q

10. 考虑定义在$l^2[0, \infty)$ 上的算子$T = S_r + S_l$，其中 S_r 是右移算子， S_l 是左移算子. 证明$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [-2, 2]$.
11. 考虑定义在$l^2(0, \infty)$ 上的算子Φ:

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots) = (\phi(1) x_1, \phi(2) x_2, \cdots),$$

其中$\sup\limits_n |\phi(n)| < \infty$.

   (1) 证明对$\forall n, \phi(n) \in \sigma_p(\Phi)$ 且$\sigma(\Phi) = \overline{\sigma_p(\Phi)}$;

   (2) Φ 是否自伴? 若不是的话, 在什么情况下是自伴的?

12. 考虑定义在$l^2(0, \infty)$ 上的算子$L = T + \Phi$, 其中T, Φ 是练习12、13中所给定的, 假定$\phi(n)$ 是实的. (1) 证明若$\lambda \in \sigma(L)$, 则$|\lambda| \leqslant 2 + \|\Phi\|$, 其中$\|\Phi\| = \sup\limits_n |\phi(n)|$;

   (2) 证明L 是自伴的;

(3) 证明L 不是紧的;

(4) 假定$\phi(n)$ 是实的, 且$\phi(n) \to \lambda_0(n \to \infty)$. 证明$\sigma_c(L) = [-2-\lambda_0, 2-\lambda_0]$;

(5) 若$\phi(n) \to 0$ 且对某个n 有$|\phi(n)| > \sqrt{2}$. 证明L 至少有一个特征值.

13. 设X 是Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, n 是自然数, λ_0 是T^n 的特征值, 则必存在λ_0 的某个n 次根是T 的特征值.

14. 若$A: H \to H$ 是复Hilbert 空间H 上的有界线性算子, 试证AA^* 和A^*A 是自共轭的和正的, 并证明AA^* 和A^*A 的谱是实的, 而且不能包含负值. 对方阵B 来说, 试问第二个论断的推论是什么?

15. 给定数列$\{a_n\}$, 在空间l^2 上定义算子A 如下

$$A: (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, \cdots).$$

(1) 证明$A \in \mathcal{B}(l^2)$ 的充要条件是$\exists M > 0$, 使得$|a_n| \leqslant M$;

(2) 若$A \in \mathcal{B}(l^2)$, 求$\sigma(A)$ 并判别谱点类型.

16. 设X 是Banach 空间, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X)$, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T_n - T\| \to 0(n \to \infty)$. 证明如果$\lambda_0 \in \rho(T)$, 则当$n$ 充分大时, $\lambda_0 \in \rho(T_n)$, 且$\lim\limits_{n}(\lambda_0\mathrm{I} - T_n)^{-1} = (\lambda_0\mathrm{I} - T)^{-1}$.

17. 设X 是Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\alpha \in \rho(T)$, $A = R_\alpha(T)$. 证明

(1) 如果$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 使$\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则$\mu \in \sigma(A)$ 当且仅当$\lambda \in \sigma(T)$;

(2) 如果$\mu \in \rho(A)$, 且$\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则$R_\mu(A) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}R_\lambda(T)$.

18. 设F 是复平面上有界的无穷闭集. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, 是$F$ 的一个可数稠密子集, 在l^1 中定义算子T 为

$$y = Tx: \ y = \{\alpha_n \xi_n\}, \quad x = \{\xi_n\}.$$

证明

(1) T 是从l^1 到l^1 的有界线性算子;

(2) 每个α_n 都是T 的特征值;

(3) $\sigma(T) = F$;

(4) $F \backslash (\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sigma_c(T)$.

19. 设T 是Banach 空间X 上有界线性算子, 且$T^2 = T$. 证明如果$T \neq 0$, 且$T \neq I$, 则$\sigma(T) = \{0, 1\}$.

20. 设L 是从X 到X 上的有界线性映射, 假定L^{-1} 存在且连续. 证明$\sigma(L^{-1}) = \sigma(L)^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} | \lambda \in \sigma(L)\}$.

21. 设A 是Hilbert 空间H 上的有界线性算子, 证明

(1) $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ 按范数收敛, e^A 是一个有界线性算子;

(2) e^A 和A 是可交换的;

(3) 如果$\sigma(A)$ 位于复平面的左半平面, 则有$\left\|e^{At}\right\| \to 0(t \to +\infty)$;

(4) 如果u 是方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au$ 的解, 则$\|u(t)\| \to 0(t \to \infty)$.

22. 设$p(r)$ 是关于r 的复系数多项式, 即$p(r) = a_0r^n + \cdots + a_n$, 其中$a_0 \neq 0$, $n \geqslant 0$. L 是复Banach空间X 到其自身上的有界线性算子, 定义$p(L) = a_0L^n + \cdots + a_nI$. 证明$\sigma(p(L)) = p(\sigma(L)) = \{p(\lambda)|\lambda \in \sigma(L)\}$.

23. 证明对复Banach 空间X 上的任意算子$T \in \mathcal{B}(X)$,

$$r_\sigma(\alpha T) = |\alpha| r_\sigma(T),\ r_\sigma(T^k) = [r_\sigma(T)]^k\ (k \in \mathbb{N}),$$

这里r_σ 表示谱半径.

24. 设H 是Hilbert 空间, $S, T \in \mathcal{B}(H)$, 则$r_\sigma(ST) = r_\sigma(TS)$.

25. 如果X 是复Banach 空间, $S, T \in \mathcal{B}(X)$ 且$ST = TS$, 证明$r_\sigma(ST) \leqslant r_\sigma(S) \cdot r_\sigma(T)$.

26. 设$\{P_1, \cdots, P_m\}$ 是Hilbert 空间H 上的一个单位分解. 证明

$$\mathcal{R}(P_1) = \bigcap_{j=2}^{m} \mathcal{N}(P_j),\ \mathcal{R}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \mathcal{N}(P_j).$$

27. 设$\{P_1, \cdots, P_m\}(m \geqslant 2)$ 是单位分解. 证明$\{Q_2, \cdots, Q_m\}$ 是单位分解, 这里$Q_2 = P_1 + P_2, Q_i = P_i(3 \leqslant i \leqslant m)$.

28. 设T 是$\mathbb{C}^3$ 上的矩阵算子

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

求T 的特征值与特征向量并确定相应的T 的单位分解, 其中相应的投影算子用矩阵表示.

29. 设L 是Hilbert 空间H 上的自共轭算子. 证明若L 是正交投影算子, 则L 的特征值仅为0 和1, 或者是0 或1.

30. 设H 是n 维复Hilbert 空间, 并没$L : H \to H$ 是自共轭算子, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是H 中的任一标准正交集, (l_{ij}) 是L 在这组基下的矩阵表示, 设$p(\lambda) = \det(l_{ij} - \lambda\delta_{ij})$. 证明

(1) L 的特征值恰是$p(\lambda)$ 的零点. 因式$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, 这里根$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ 是互不相同的, $m_i \geqslant 1$, 并且$m_1 + \cdots + m_k = n$;

(2) 对于$1 \leqslant i \leqslant k$, 设$R_i = \{x \in H\,|Lx = \lambda_i x\}$ 证明$\dim R_i = m_i$;

(3) 证明$L = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$, 这里$P_i$ 是R_i 上的正交投影算子.

31. 设$\phi_1, \cdots, \phi_n, \psi_1, \cdots, \psi_n \in L_2(I)$ 并且$k(s,t) = \sum\limits_{i=1}^{k} \phi_i(s)\overline{\psi_i(t)}$. 假定$k(s,t) = \overline{k(t,s)}$.

(1) 证明积分算子$y = Kx$, $y(s) = \int_I k(s,t)x(t)\mathrm{d}t$ 是具有有穷秩的自共轭算子;

(2) 确定K 的特征值及特征元素;

(3) 若特征值是非负的, $L^2(I)$ 中是否存在函数集$\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$, 使得$k(s,t) = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i(s)\overline{\xi_i(t)}$. 若特征值是负的, 情况如何?

32. 设K 是由$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 所给定的$L^2[-\pi, \pi]$ 上的线性算子. 证明在以下几种情形下, K 是具有有穷秩的自共轭算子, 并确定所有的非零特征值$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$ 及相应的投影算子$\{P_1, \cdots, P_m\}$ 使得$K = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$.

(1) $k(t,\tau)=4\cos(t-\tau)$;

(2) $k(t,\tau)=1+\cos(t-\tau)$;

(3) $k(t,\tau)=1+\cos(t-\tau)+\sin 2(t+\tau)$;

(4) $k(t,\tau)=\sin 3(t-\tau)$;

(5) $k(t,\tau)=\sum\limits_{n=1}^{N}\{a_n\cos n(t-\tau)+b_n\sin n(t-\tau)\}$.

33. 考虑定义在$l^2(0,\infty)$ 上的算子Φ,

$$\Phi:(x_1,x_2,\cdots)\to(\phi(1)x_1,\phi(2)x_2,\cdots)$$

(1) 证明Φ 是投影算子的加权和;

(2) 求出Φ 的谱;

(3) 假定对$\forall n,\phi(n)\neq 0$, 证明Φ^{-1} 存在且Φ^{-1} 是投影算子的加权和, 并给出Φ^{-1} 的谱; (4) 进一步假定$|\phi(n)|\to\infty(n\to\infty)$, 证明Φ^{-1} 是紧的;

(5) 假定$\phi(n)\to\lambda_0(n\to\infty)$, 这里$\lambda_0$ 是有限的. 证明$(\Phi-\lambda_0 I)$ 是紧的.

34. 设L 是Hilbert 空间H 上的自共轭算子, $\{\phi_n\}$ 是L 的特征元素组成的标准正交集. 并令M 是由$\{\phi_n\}$ 张成的H 的闭线性子空间. 假定L 的每个特征元素都属于M. 证明

(1) 若$M=H$ (即$\{\phi_n\}$ 是H 的标准正交基), 则L 是投影算子的加权和, 且$\sigma(L)=\overline{\sigma_p(L)}$.

(2) 若L 的连续谱包含一个非平凡区间, 则$M\neq H$, 即$\{\phi_n\}$ 不是H 的基.

35. 考虑线性算子$T:C[a,b]\to C[a,b]$,

$$(Tx)(s)=\int_a^b\frac{k(s,t)x(t)}{|s-t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t,\ \forall x\in C[a,b],$$

其中$k(s,t)$ 是$a\leqslant t,\ s\leqslant b$ 上的连续函数, $0<\alpha<1$. 证明T 是紧算子.

36. 证明按等式$Jx=x$ 定义的嵌入算子$J:C^1[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子, 其中$C^1[a,b]$ 中的范数定义为

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x(t)'\right|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,\ \forall x\in C^1[a,b].$$

37. 试证Banach空间X 中的点集M 是列紧的一个充分条件是

(1) M 是有界的;

(2) 存在强收敛于单位算子的紧算子序列$\{T_n\}$, 使得在M 上一致地有$\|T_nx-x\|\to 0$.

38. 举例说明存在有界线性但非紧的算子T, 使T^2 是紧的.

39. 证明由l^2 到l 的任何有界线性算子必是紧的.

40. 设T 为l^2 上线性算子, 记$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ (第n 个坐标为1, 其余为0), $n=1,2,\cdots$, 线性算子T 定义为

$$Te_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}e_j,$$

其中$\sum\limits_{k,j=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$. 证明$T$ 是 l^2 上的紧算子.

41. 在Hilbert空间l^2 中, $\{e_n\}$ 如上题, l^2 上的线性算子A 定义为

$$Ae_i = \frac{1}{i}e_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots.$$

证明A 是l^2 上的紧算子.

42. $T: l^p \to l^p,\ 1 \leqslant p < \infty,$

$$x = \{\xi_j\},\ y = \{\eta_j\} = Tx,\ \eta_j = \xi_j / j.$$

证明T 是紧的.

43. 设$k(x, y)$ 是全平面上的可测函数, 而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < \infty,$$

定义$L^2(-\infty, \infty)$ 上的线性算子T :

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y.$$

问T 是否是$L^2(-\infty, \infty)$ 上的全连续算子.

44. 设H 是Hilbert 空间, 它具有可数的正规正交基$\{e_1, e_2, \cdots\}$, 即$(e_n, e_m) = \delta_{nm}$. $L: X \to X$ 是紧的线性算子, 定义$L_n: X \to X$,

$$L_n x = \sum_{i.j=1}^{n} (x, e_i)(Le_i, e_j) e_j.$$

证明L_n 是紧的并且$\|L_n - L\| \to 0 (n \to \infty)$.

45. 设AP 表示定义在$(-\infty, +\infty)$ 上满足条件

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

的复值函数$x(t)$ 的全体. 其上的内积定义为

$$(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)} \,\mathrm{d}t.$$

设$x_0 \in AP$, 定义$y = Lx$

$$y(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_0(t - \tau) x(\tau) \,\mathrm{d}\tau.$$

证明

(1) L 是从AP 到AP 中的有界线性映射;

(2) 若$x_0(t) = e^{i\alpha t}$, 其中α 是个实数, 则L 是自共轭的, 紧的线性算子.

46. 证明Hilbert 空间H 上的正交投影P 是紧的当且仅当P 的值域是有限维的.

47. 设$L: X \to Y$ 是紧算子, M 是X 的线性子空间. 证明L 在M 上的限制, 即$L: M \to Y$ 是紧的.

48. 设$L: X \to X$ 是有界线性算子, 并满足$\|Lx\| \geqslant \alpha \|x\|$, $\forall x \in X$, 其中$\alpha > 0$, 证明L 是紧的当且仅当X 是有限维的.

49. 设$\omega_n \in \mathbb{C}, \omega_n \to 0 (n \to \infty)$. 证明映射$T: \{\xi_n\} \mapsto \{\omega_n \xi_n\} \quad (\forall \{\xi_n\} \in l^p)$ 是$l^p (p \geqslant 1)$ 上的紧算子.

50. 设X 是Banach 空间, A 是X 到其自身上的紧算子, X_0 是X 的闭子空间并使得$A(X_0) \subset X_0$. 证明映射$T: [x] \to [Ax]$ 是商空间X/X_0 上的紧算子.

51. 设X, Y, Z 是Banach 空间, $X \subset Y \subset Z$, 如果$X \to Y$ 的嵌入映射是紧的, $Y \to Z$ 的嵌入映射是连续的. 证明$\forall \varepsilon > 0$, $\exists c(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\|x\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X + c(\varepsilon) \|x\|_Z \quad (\forall x \in X).$$

52. 设$K: L_2(I) \to L_2(I)$ 是积分算子, $y = Kx$,

$$y(t) = \int_I k(t, s) x(s) \mathrm{d}s.$$

假定I 是紧的, $k(t, s)$ 是连续的. 证明

(1) K 是紧的;

(2) 存在与非零特征值相对应的连续的特征函数;

(3) 与特征值$\lambda = 0$ 对应的特征函数情况如何?

53. 设T 为Hilbert 空间H 上的有界线性算子, $\{e_n\}$ 为H 中完备的正规正交系, 若对任何m, n, 有$(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}$, 则$T$ 是自共轭的.

54. 设T 是复的内积空间H 上的有界线性算子, 证明如果对$\forall x \in H$, $(Tx, x) = 0$, 则$T = \theta$. 对于实空间, 此结果成立否? 当T 是自共轭的, 则不论H 是实的还是复的, 只要$(Tx, x) = 0\,(x \in H)$, 就有$T = \theta$.

55. T 为定义在完备内积空间H 上的有界线性算子, 如果存在$\alpha_0 > 0$, 使$(Tx, x) \geqslant \alpha_0 (x, x)$, 则称$T$ 为正定的. 证明凡正定算子必有有界逆算子T^{-1}, 且 $\|T^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0}$.

56. 设T 是紧的自伴算子, $n \in \mathbb{N}$ 是奇数, 则仅存在唯一紧自伴算子A, 使得$A^n = T$.

57. 试给出这样的紧自共轭线性算子$T: l^2 \to l^2$ 的例子, 它具有纯点谱, 并使得非零特征元素的集合

(1) 是一有限点集;

(2) 是一无限点集, 而且对应的特征元素构成l^2 中之一稠密集;

(3) 是一无限点集, 而且对应的特征元素生成l^2 中这样的子空间, 使得该子空间的闭包的正交补是有限维的;

(4) 与(3)中的一样, 但正交补是无限维的. 在每一情形试求由特征元素组成的完全的标准正交集.

58. 设H 是Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$ 是自共轭算子. 证明$T \geqslant 0$ 当且仅当$\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

59. 设T 是Hilbert 空间H 上紧的自共轭算子, 并设$T = \sum\limits_{n} \lambda_n P_n$ 是T 的谱分解, 非零特征值$\{\lambda_n\}$ 可被分成两个集合$\wedge_+$ 和$\wedge_-$, 即正的和负的特征值. 算子$T_+ = \sum\limits_{\lambda_n \in \wedge_+} \lambda_n P_n$, $T_- = -\sum\limits_{\lambda_n \in \wedge_-} \lambda_n P_n$ 被称为是T 的正、负部. 证明

(1) $T = T_+ - T_-$;

(2) $(T_+ x, x) \geqslant 0, (T_- x, x) \geqslant 0, \forall x \in H$;

(3) $T_+ T_- = T_- T_+ = 0$;

(4) 设$|T| = T_+ + T_-$, 则$T \leqslant |T|$, $-T \leqslant |T|$.

60. 设$k(t,s) \in L^2(I \times I)$, 定义$y = Kx$,

$$y(t) = \int_I k(t,s) x(s) \mathrm{d}s,$$

其中$k(t,s) = \overline{k(s,t)}$.

(1) 证明K 是$L^2(I)$ 上紧的自伴算子, $\|K\| \leqslant \|k\|_2$;

(2) 设$\{e_n(t)\}$ 是K 的与特征值$\{\mu_n\}$ 相对应的特征元素组成的标准正交基. 假定$|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \cdots$. 证明$k(t,s) = \sum\limits_{n} \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 在$L^2(I \times I)$ 中收敛;

(3) 证明$\|k\|_2 = (\int_I \int_I |k(t,s)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n} |\mu_n|^2$;

(4) 证明$\|K\| = |\mu_1|$.

61. (接60题)假定I 是闭的、有界的. $k(t,s)$ 关于t, s 连续. 若算子K 是正的, $k(t,s)$ 是实值的, 证明

(1) 若μ_n 是非零特征值, 则存在与它相应的连续的实值的特征函数$e_n(t)$;

(2) 设$k_N(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n e_n(t) e_n(s)$, $h_N(t,s) = k(t,s) - k_N(t,s)$. 证明$h_N(t,t) \geqslant 0, \forall t \in I$;

(3) 存在M, 使得对所有t 及N 有$k_N(t,t) \leqslant k(t,t) \leqslant M$;

(4) 对每个固定的t,

$$|\sum_{i=m}^{n} \mu_i e_i(t) e_i(s)|^2 \leqslant M \sum_{i=m}^{n} \mu_i e_i(t)^2 \to 0 \ (m, n \to \infty)$$

关于s 一致地收敛;

(5) 级数$k(t,s) = \sum\limits_{n} \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 逐点收敛;

(6) 级数$k(t,s) = \sum\limits_{n} \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 关于t 和s 一致收敛.