内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

§3 赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

$\mathbb{R}^n$ 空间中的 凸集:

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

$\mathbb{R}^n$ 空间中的 凸集:

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 其连线也在 A中, 则称 A 是凸的.

§ 3　赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

$\mathbb{R}^n$ **空间中的 凸集**:

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 其连线也在 A中, 则称 A 是凸的.

同样, 在一般的赋范空间中, 也可定义凸集:

§ 3 赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

$\mathbb{R}^n$ 空间中的 凸集:

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 其连线也在 A中, 则称 A 是凸的.

同样, 在一般的赋范空间中, 也可定义凸集:

定义 2.3.1 *设 X 是线性空间, $A \subset X$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 任意的 $\alpha : 0 < \alpha < 1$, 都有*

§ 3 赋范空间的凸集和子空间

内容：赋范空间的几何结构

(1) 赋范空间中的凸集;

(2) 子空间;

(3) Riesz 引理.

一、凸集

$\mathbb{R}^n$ 空间中的 凸集:

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 其连线也在 A中, 则称 A 是凸的.

同样, 在一般的赋范空间中, 也可定义凸集:

定义 2.3.1 *设 X 是线性空间, $A \subset X$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 任意的 $\alpha : 0 < \alpha < 1$, 都有*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in A,$$

则称 A 是 X 中的 ***凸集***

注1 **两个凸集的交集是凸的.**

注1 **两个凸集的交集是凸的.**

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in B,$$

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha) y \in A \cap B$.

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

注1 两个凸集的交集是凸的.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x+(1-\alpha) y \in A ; \quad \text{和} \quad \alpha x+(1-\alpha) y \in B,$$

即 $\alpha x+(1-\alpha) y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的凸包, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的最小凸集.

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x,y\in A\cap B$, 有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in A;\quad \text{和}\quad \alpha x+(1-\alpha)y\in B,$$

即 $\alpha x+(1-\alpha)y\in A\cap B$.

注2 $A\subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的**最小凸集**.

定理 2.3.2 设 $B(0,1)=\{x\in X|\ \|x\|<1\}$ *是赋范空间 X 中开的单位球, 则 $B(0,1)$ 是凸的.*

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A\cap B$, 有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in A; \quad \text{和} \quad \alpha x+(1-\alpha)y\in B,$$

即 $\alpha x+(1-\alpha)y\in A\cap B$.

注2 $A\subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的**最小凸集**.

定理 2.3.2 设 $B(0,1)=\{x\in X|\ \|x\|<1\}$ *是赋范空间* X *中开的单位球, 则* $B(0,1)$ *是凸的.*

分析: **用凸集的定义证明**.

证明 对于任意的 $x, y\in B(0,1)$ 及 $0<\alpha<1$. **要证明** $\alpha x+(1-\alpha)y\in A$, **即它的范数小于1.**

注1 **两个凸集的交集是凸的.**

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的**最小凸集**.

定理 2.3.2 设 $B(0,1) = \{x \in X | \, \|x\| < 1\}$ *是赋范空间* X *中开的单位球, 则* $B(0,1)$ *是凸的.*

分析: **用凸集的定义证明.**

证明 对于任意的 $x, y \in B(0,1)$ 及 $0 < \alpha < 1$. **要证明** $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, **即它的范数小于1.**

$$\because \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + (1-\alpha)\|y\| < \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的**最小凸集**.

定理 2.3.2 设 $B(0,1) = \{x \in X | \, \|x\| < 1\}$ *是赋范空间* X *中开的单位球, 则* $B(0,1)$ ***是凸的***.

分析: **用凸集的定义证明**.

证明 对于任意的 $x, y \in B(0,1)$ 及 $0 < \alpha < 1$. **要证明** $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$**, 即它的范数小于1.**

$$\because \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + (1-\alpha)\|y\| < \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

因此, $B(0,1)$ 是一个凸集.

注1 **两个凸集的交集是凸的**.

事实上, 如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A \cap B$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A; \quad \text{和} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in B,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha)y \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集.

这个凸集称为 A 的**凸包**, 记为 $C_0(A)$.

$C_0(A)$ 是包含 A 的**最小凸集**.

定理 2.3.2 设 $B(0,1) = \{x \in X | \, \|x\| < 1\}$ *是赋范空间* X *中开的单位球, 则* $B(0,1)$ *是凸的*.

分析: **用凸集的定义证明**.

证明 对于任意的 $x, y \in B(0,1)$ 及 $0 < \alpha < 1$. **要证明** $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$**, 即它的范数小于1.**

$$\because \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \le \|\alpha x\| + (1-\alpha)\|y\| < \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

因此, $B(0,1)$ 是一个凸集.

注 单位球是 0 点的一个凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

注 单位球是 0 点的一个凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

例 2.3.3 *设 x 是由有序实数组 $x = (x_1, x_2)$ 组成的向量空间, 在 x 上定义*

注 单位球是 0 点的一个凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

例 2.3.3 设 x *是由有序实数组* $x=(x_1,x_2)$ *组成的向量空间, 在* x *上定义*

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\ x_1\ |}+\sqrt{|\ x_2\ |})^2.$$

注 单位球是 0 点的一个凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

例 2.3.3 设 x *是由有序实数组* $x=(x_1,x_2)$ *组成的向量空间, 在* x *上定义*

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\ x_1\ |}+\sqrt{|\ x_2\ |})^2.$$

则曲线 $\varphi(x)=1$ 围成的区域不是凸集,

注 单位球是 0 点的一个凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

例 2.3.3 *设 x 是由有序实数组 $x=(x_1,x_2)$ 组成的向量空间, 在 x 上定义*

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\ x_1\ |}+\sqrt{|\ x_2\ |})^2.$$

则曲线 $\varphi(x)=1$ 围成的区域不是凸集,

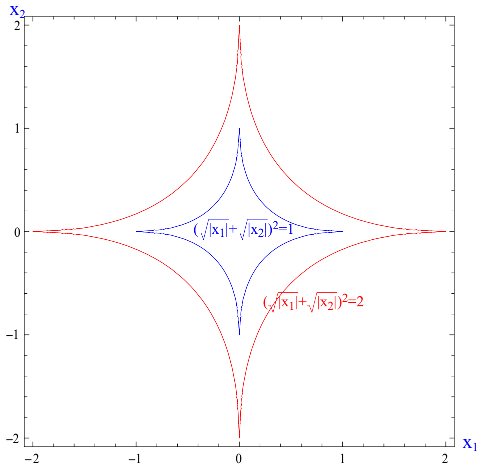

Figure 2.3.1: 不是凸集

由定理2.3.2, 从图 (2.3.1) 可知 $\varphi(x)$ 不是 x 上的范数. 注意这里$p=\frac{1}{2}<1$.

二、子空间

二、子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1 \subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

二、子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1 \subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间,* $X_1 \subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1 = X$.

二、子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1 \subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间*, $X_1 \subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1 = X$**.**

证明 对任意的 $x \in X$, 只需证明 $x \in X_1$ 即可.

二、子空间

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1\subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1,\|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间*, $X_1\subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1=X$**.**

证明 对任意的 $x\in X$, 只需证明 $x\in X_1$ 即可.

(1) 由于 X_1是一个子空间, 于是 $0\in X_1$.

二、子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1 \subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间,* $X_1 \subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1 = X$**.**

证明 对任意的 $x \in X$, 只需证明 $x \in X_1$ 即可.

(1) 由于 X_1是一个子空间, 于是 $0 \in X_1$.

(2) 假设 $x \neq 0$, 因为 X_1 是开的,于是 $\exists \delta > 0$, 使得

$$B(0, \delta) \subset X_1.$$

二、子空间

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1\subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1,\|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间*, $X_1\subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1=X$**.**

证明 对任意的 $x\in X$, 只需证明 $x\in X_1$ 即可.

(1) 由于 X_1是一个子空间, 于是 $0\in X_1$.

(2) 假设 $x\neq 0$, 因为 X_1 是开的,于是 $\exists\delta>0$, 使得

$$B(0,\delta)\subset X_1.$$

因此, $\frac{\delta x}{2\|x\|}\in X_1$, 这是由于

二、子空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1 \subset X, X_1$ 是 X 的一个子空间, 则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X *是一个赋范空间*, $X_1 \subset X$ ***是一个子空间, 如果*** X_1 ***是开集, 则*** $X_1 = X$.

证明 对任意的 $x \in X$, 只需证明 $x \in X_1$ 即可.

(1) 由于 X_1是一个子空间, 于是 $0 \in X_1$.

(2) 假设 $x \neq 0$, 因为 X_1 是开的,于是 $\exists \delta > 0$, 使得

$$B(0, \delta) \subset X_1.$$

因此, $\frac{\delta x}{2\|x\|} \in X_1$, 这是由于

$$\left\| \frac{\delta x}{2 \| x \|} \right\| = \frac{\delta \| x \|}{2 \| x \|} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta} (\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}) \in X_1.$$

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta}\left(\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}\right) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta} (\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta}(\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.

但是在无穷维空间， 子空间就可能不是闭的.

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta}\left(\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}\right) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.
但是在无穷维空间， 子空间就可能不是闭的.

例 2.3.5 设$Y = \{\{x_n\} \in l^\infty \mid$ *存在*$N \in \mathbb{N}$, *使得*$x_n = 0$ *对于*$n > N\}$, *即 Y 中的数列仅仅前有限项不等于零，显然 Y 是 l^∞ 的一个线性子空间. 但是 Y 不是闭的.*

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta} (\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.
但是在无穷维空间， 子空间就可能不是闭的.

例 2.3.5 *设$Y = \{\{x_n\} \in l^\infty \mid$ 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$x_n = 0$ 对于$n > N\}$, 即 Y 中的数列仅仅前有限项不等于零， 显然 Y 是 l^∞ 的一个线性子空间. 但是 Y 不是闭的.*

事实上， 令 $y_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, 显然 $y_n \in Y$， 并且

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta}\left(\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}\right) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.
但是在无穷维空间， 子空间就可能不是闭的.

例 2.3.5 *设$Y = \{\{x_n\} \in l^\infty \mid$ 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$x_n = 0$ 对于$n > N\}$, 即 Y 中的数列仅仅前有限项不等于零，显然 Y 是 l^∞ 的一个线性子空间. 但是 Y 不是闭的.*

事实上，令 $y_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, 显然 $y_n \in Y$，并且

$$\|y_n - y\| = \|(0, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots)\| = \frac{1}{n+1}.$$

注意到 X_1 是一个线性子空间, 于是

$$x = \frac{2 \parallel x \parallel}{\delta}(\frac{\delta x}{2 \parallel x \parallel}) \in X_1.$$

因此, $X \subset X_1$, 故 $X = X_1$. $\square$

在$\mathbb{R}^n$ 空间, 所有的子空间都是闭的.
但是在无穷维空间, 子空间就可能不是闭的.

例 2.3.5 设$Y = \{\{x_n\} \in l^\infty \mid$ *存在*$N \in \mathbb{N}$, *使得*$x_n = 0$ *对于*$n > N\}$, *即 Y 中的数列仅仅前有限项不等于零, 显然 Y 是 l^∞ 的一个线性子空间. 但是 Y 不是闭的.*

事实上, 令 $y_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, 显然 $y_n \in Y$, 并且

$$\|y_n - y\| = \|(0, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots)\| = \frac{1}{n+1}.$$

因此$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$, 所以$\lim_{n\to\infty} y_n = y$. 但是 $y \notin Y$, 因此 Y 不是闭的. $\square$

但是我们有下面的定理:

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则 X* ***的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间****.*

但是我们有下面的定理：

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则 X* ***的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间****.*

证明 根据定理 $2.1.4$，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数, 且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

但是我们有下面的定理：

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则* ***X 的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.***

证明 根据定理 $2.1.4$，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数, 且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

定理 2.3.7 *X 是赋范空间, $X_1 \subset X$ 是子空间, 则*

但是我们有下面的定理：

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则* ***X 的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.***

证明 根据定理 2.1.4，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数, 且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

定理 2.3.7 *X 是赋范空间, $X_1 \subset X$ 是子空间, 则*

(1) ***若子空间 X_1 是完备的, 则 X_1 是闭的;***

但是我们有下面的定理:

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则* ***X 的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.***

证明 根据定理 2.1.4, 范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数, 且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

定理 2.3.7 *X 是赋范空间, $X_1 \subset X$ 是子空间, 则*

(1) ***若子空间 X_1 是完备的, 则 X_1 是闭的;***

(2) ***若 X 是 Banach 空间, X_1 是 X 的闭子空间, 则 X_1 一定是 Banach 空间.***

但是我们有下面的定理：

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间，则 X* ***的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.***

证明 根据定理 2.1.4，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数，且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的，则结论可得.

定理 2.3.7 *X 是赋范空间，$X_1 \subset X$ 是子空间，则*

(1) ***若子空间 X_1 是完备的，则 X_1 是闭的;***

(2) ***若 X 是 Banach 空间，X_1 是 X 的闭子空间，则 X_1 一定是 Banach 空间.***

证明 (1) 由完备性的定义和定理（1.3.11）："A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列的极限属于 A." 可证

但是我们有下面的定理:

定理 2.3.6 *设 X 是一个赋范空间, 则 X **的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间**.*

证明 根据定理 2.1.4，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数, 且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

定理 2.3.7 *X 是赋范空间, $X_1 \subset X$ 是子空间, 则*
*(1) **若子空间 X_1是完备的, 则 X_1 是闭的**;*
*(2) **若 X 是 Banach 空间, X_1 是 X 的闭子空间, 则 X_1 一定是Banach空间**.*

证明 (1) 由完备性的定义和定理（1.3.11）: “A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列的极限属于 A.” 可证

(2) 根据定理:完备空间的任何闭子空间完备（命题1.4.7）.

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

例 2.3.8 *c 表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

例 2.3.8 *c 表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_{k} |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

例 2.3.8 *c 表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 ***c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.***

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

我们要证明 $x_0 \in c$, 即: x_0是一个收敛的数列.

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

我们要证明 $x_0 \in c$, 即: x_0是一个收敛的数列.

即证明x_0是一个 Cauchy 数列.

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 ***c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.***

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

我们要证明 $x_0 \in c$, 即: x_0是一个收敛的数列.

即证明x_0是一个 Cauchy 数列.

由于 $c \subset l^\infty$, 所以 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的 Cauchy 列,且 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时,

例 2.3.8 c *表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

我们要证明 $x_0 \in c$, 即: x_0是一个收敛的数列.

即证明x_0是一个 Cauchy 数列.

由于 $c \subset l^\infty$, 所以 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的 Cauchy 列,且 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\|x_n - x_0\| \leq \sup |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3.2}$$

例 2.3.8 *c 表示收敛数列的全体, 定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则 c 是一个赋范空间.

在通常加法和数乘的意义下, c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间.

命题 2.3.9 *c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间.*

分析: **只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c.**

证明 设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列, 即: $x_n \to x_0$ 其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $x_0 = \{\xi_0^{(n)}\}$.

我们要证明 $x_0 \in c$, 即: x_0是一个收敛的数列.

即证明x_0是一个 Cauchy 数列.

由于 $c \subset l^\infty$, 所以 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的 Cauchy 列,且 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\|x_n - x_0\| \le \sup |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3.2}$$

因此, 当 $n \ge N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$）,

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_{_N} = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. $\square$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_{_N} = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. □

所以 c 是 Banach 空间 l^{∞} 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_{_N} = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. □

所以 c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

推论 2.3.10 *c 是 Banach 空间.*

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. $\square$

所以 c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

推论 2.3.10 *c 是 Banach 空间.*

例 2.3.11 $c_0 = \{$*全体收敛于零的数列*$\}$, *定义范数*

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,
$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），
所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,
$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
于是
$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$
即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. $\square$

所以 c 是 Banach 空间 l^{∞} 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

推论 2.3.10 *c 是 Banach 空间.*

例 2.3.11 $c_0 = \{$*全体收敛于零的数列*$\}$, *定义范数*
$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.3.3}$$

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），

所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. □

所以 c 是 Banach 空间 l^{∞} 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

推论 2.3.10 *c 是 Banach 空间.*

例 2.3.11 $c_0 = \{$*全体收敛于零的数列*$\}$, *定义范数*

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.3.3}$$

则 c_0 是 c 的闭子空间.

当 $n \geq N$ 时, 对于每一个 k,
$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个收敛的数列（当$(k \to \infty)$），
所以 $\exists K$, 当 $k, l > K$ 时,
$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
于是
$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$
即 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 即收敛的数列, 所以 $x_0 \in c$. □

所以 c 是 Banach 空间 l^{∞} 的闭子空间. 由定理2.3.7 知

推论 2.3.10 *c 是 Banach 空间.*

例 2.3.11 $c_0 = \{$*全体收敛于零的数列*$\}$, *定义范数*
$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.3.3}$$
则 c_0 是 c 的闭子空间.

证明分析: **只需证明**, **若**

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \ (n \to \infty),$$

则 x_0 **是收敛到零的数列**.

证明分析: 只需证明, 若

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \ (n \to \infty),$$

则 x_0 是收敛到零的数列.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n, 当 k 充分大时

证明分析: **只需证明**, **若**

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \ (n \to \infty),$$

则 x_0 **是收敛到零的数列**.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n，当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \le |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < \varepsilon$$

证明分析: **只需证明**, **若**

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \ (n \to \infty),$$

则 x_0 **是收敛到零的数列**.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n, 当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(0)} = 0$$

证明分析: 只需证明, 若

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}\ (n \to \infty),$$

则 x_0 是收敛到零的数列.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n, 当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(0)} = 0$$

我们有 $x_0 \in c_0$, 即 c_0 是 c 的闭子空间.

证明分析: **只需证明**, **若**

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}\ (n \to \infty),$$

则 x_0 **是收敛到零的数列**.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n, 当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(0)} = 0$$

我们有 $x_0 \in c_0$, 即 c_0 是 c 的闭子空间.

注 $c_0 \subset c \subset l^\infty$ (都是 l^∞ 的闭子空间).

证明分析: 只需证明, 若

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \ (n \to \infty),$$

则 x_0 是收敛到零的数列.

注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 所以对于充分大的给定的 n, 当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \le |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(0)} = 0$$

我们有 $x_0 \in c_0$, 即 c_0 是 c 的闭子空间.

注 $c_0 \subset c \subset l^\infty$ (都是 l^∞ 的闭子空间).

进一步地, **可以证明 c_0 是可分的 Banach空间**.

三、Riesz引理

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠,** 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是** $M = X$.

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是 $M = X$**.

(3) 这表明: **若 M 是 X 中的一个真闭子空间, 则一定存在一个点, 它和 M 有正距离**.

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是 $M = X$**.

(3) 这表明: **若 M 是 X 中的一个真闭子空间, 则一定存在一个点, 它和 M 有正距离**.

这是一个很重要的几何性质.

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是 $M = X$**.

(3) 这表明: **若 M 是 X 中的一个真闭子空间, 则一定存在一个点, 它和 M 有正距离**.

这是一个很重要的几何性质.

在通常的三维 Euclidean 空间, 平面外的一个向量x与平面 M 的距离,

$$d(x, M) = \| x \| \text{当且仅当 } x \text{与平面 } M \text{正交(垂直)}.$$

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是 $M = X$**.

(3) 这表明: **若 M 是 X 中的一个真闭子空间, 则一定存在一个点, 它和 M 有正距离**.

这是一个很重要的几何性质.

在通常的三维 Euclidean 空间, 平面外的一个向量x与平面 M 的距离,

$d(x, M) = \| x \|$当且仅当 x与平面 M正交(垂直).

在一般的赋范空间中没有正交的概念 (因为没有定义内积, 内积的定义见第三章), 但是我们仍然能够问:

三、Riesz引理

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个**真子空间**, 那么 M **可能在 X 中稠**, 例如多项式的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间.

(2) **若 M 是 X 的闭子空间**, 由前面讲的闭集的性质知, M **要在 X 中稠只能是 $M = X$**.

(3) 这表明: **若 M 是 X 中的一个真闭子空间, 则一定存在一个点, 它和 M 有正距离**.

这是一个很重要的几何性质.

在通常的三维 Euclidean 空间, 平面外的一个向量x与平面 M 的距离,

$d(x,M) = \| x \|$当且仅当 x与平面 M正交(垂直).

在一般的赋范空间中没有正交的概念 (因为没有定义内积, 内积的定义见第三章), 但是我们仍然能够问:

"X 是一个 Banach 空间, 如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间, 那么是否存在一个点, 它和 M 的距离 $d(x,M) = \| x \| > 0$?"

“X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?”

“X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?”

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

“X 是一个 Banach 空间, 如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间, 那么是否存在一个点, 它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?”

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

"X 是一个 Banach 空间, 如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间, 那么是否存在一个点, 它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?"

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $X_0 \subset X$, 且 X_0 是 X 的闭的真子空间, 则*

“X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x,M)=\| x \|>0$?”

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $X_0 \subset X$, 且 X_0 是 X 的闭的真子空间, 则*

对于 $\forall \varepsilon > 0$, ***存在*** $x_0 \in X$, ***使得*** $\|x_0\| = 1$, ***且对于*** $\forall x \in X_0$,

“X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?”

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $X_0 \subset X$, 且 X_0 是 X 的闭的真子空间, 则*

对于 $\forall \varepsilon > 0$, ***存在*** $x_0 \in X$, ***使得*** $\|x_0\| = 1$, ***且对于*** $\forall x \in X_0$,

$$\|x - x_0\| > 1 - \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

“X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x, M) = \| x \| > 0$?”

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $X_0 \subset X$, 且 X_0 是 X 的闭的真子空间, 则*

对于 $\forall \varepsilon > 0$, ***存在*** $x_0 \in X$, ***使得*** $\|x_0\| = 1$, ***且对于*** $\forall x \in X_0$,

$$\|x - x_0\| > 1 - \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

证明 (1) $\forall x_1 \in X \backslash X_0$, **记**

$$d = \inf_{x \in X_0} \|x - x_1\|.$$

"X 是一个 Banach 空间，如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x,M)=\| x \|>0$?"

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $X_0\subset X$, 且 X_0 是 X 的闭的真子空间, 则*

对于 $\forall\varepsilon>0$, ***存在*** $x_0\in X$, ***使得*** $\|x_0\|=1$, ***且对于*** $\forall x\in X_0$,

$$\|x-x_0\|>1-\varepsilon. \tag{2.3.4}$$

证明 (1) $\forall x_1\in X\backslash X_0$, **记**

$$d=\inf_{x\in X_0}\|x-x_1\|.$$

(2) **因** X_0 **是闭的, 故** $d>0$.

"X 是一个 Banach 空间, 如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间, 那么是否存在一个点, 它和 M 的距离 $d(x,M)=\| x \|>0$?"

在一般的Banach 空间，这一问题的 **答案可能是否定的**.

但是我们可以有下面的结论：泛函分析中十分重要的 **Riesz引理**.

引理 2.3.12 ***(F.Riesz)*** *设* $(X,\|\cdot\|)$ *是一个赋范空间*, $X_0\subset X$, *且* X_0 *是* X *的闭的真子空间, 则*

对于 $\forall\varepsilon>0$, ***存在*** $x_0\in X$, ***使得*** $\|x_0\|=1$, ***且对于*** $\forall x\in X_0$,

$$\|x-x_0\|>1-\varepsilon. \tag{2.3.4}$$

证明 (1) $\forall x_1\in X\backslash X_0$, **记**

$$d=\inf_{x\in X_0}\|x-x_1\|.$$

(2) **因** X_0 **是闭的, 故** $d>0$.

这是因为: 否则就存在 $x_n\in X_0$, 且 $\|x_n-x_1\|\to 0$. 再由 X_0 闭, 可推出 $x_1\in X_0$.

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

(4) **令** $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, 则 $\|x_0\| = 1$, 对于任何 $x \in X_0$, 有

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

(4) 令 $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, 则 $\|x_0\| = 1$, 对于任何 $x \in X_0$, 有

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \|x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|}\|(\|x_1 - x_2\|x + x_2) - x_1\|\| \\
&> \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \cdot d > 1 - \varepsilon.(\because x_2 \in X_0)
\end{aligned}$$

$\square$

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

(4) **令** $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, 则 $\|x_0\| = 1$, 对于任何 $x \in X_0$, 有

$$\begin{aligned}\|x - x_0\| &= \|x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|}\|(\|x_1 - x_2\|x + x_2) - x_1\|\| \\ &> \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \cdot d > 1 - \varepsilon.(\because x_2 \in X_0)\end{aligned}$$

□

注1 . **在一般情况下, 定理的结论** ”$> 1 - \varepsilon$” **如果换成** ”$= 1$”**, 定理不能够成立**.

(3) 不妨设 $\varepsilon < 1$, 则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$. **由下确界的定义, 存在** $x_2 \in X_0$, 使得

$$\|x_2 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

(4) **令** $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, **则** $\|x_0\| = 1$, **对于任何** $x \in X_0$, **有**

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \|x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}\| \\
&= \frac{1}{\|x_1 - x_2\|}\|(\|x_1 - x_2\|x + x_2) - x_1\|\| \\
&> \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \cdot d > 1 - \varepsilon.(\because x_2 \in X_0)
\end{aligned}$$

$\square$

注1 . 在一般情况下, 定理的结论 $" > 1 - \varepsilon"$ **如果换成** $" = 1"$**, 定理不能够成立**.

注2 本定理中 X_0 是**闭的是很重要的**. 若不是闭的, 结论可能不成立.