泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

§4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续(保证解的稳定性).

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续(保证解的稳定性).

我们根据 Banach 空间的基本性质来研究这些问题, 我们**将得到开映射定理和逆算子定理**.

定义 4.4.1 *(逆算子) 设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子.*

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续(保证解的稳定性).

我们根据 Banach 空间的基本性质来研究这些问题, 我们**将得到开映射定理和逆算子定理**.

定义 4.4.1 *(逆算子) 设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子. 如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1, 使得*

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续(保证解的稳定性).

我们根据 Banach 空间的基本性质来研究这些问题, 我们**将得到开映射定理和逆算子定理**.

定义 4.4.1 *(逆算子) 设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子. 如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1, 使得*

$$T_1 T = I_X \quad (X\text{中的单位算子}), \qquad T T_1 = I_{X_1} \quad (X_1\text{中的单位算子}),$$

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为**求方程 $Tx = y$ 的解**, 即考虑 T^{-1} 是否**存在、唯一**以及 T^{-1} 是否**连续**(保证解的稳定性).

我们根据 Banach 空间的基本性质来研究这些问题, 我们**将得到开映射定理和逆算子定理**.

定义 4.4.1 *(**逆算子**) 设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子. 如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1, 使得*

$$T_1 T = I_X \quad (X\text{中的单位算子}), \qquad T T_1 = I_{X_1} \quad (X_1\text{中的单位算子}),$$

则称算子 T 有逆算子, *T_1 称为 T 的逆算子, 记为 $T_1 = T^{-1}$.*

§ 4 开映射定理与逆算子定理

一、逆算子

若对任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, **则称 T 是单射**,这时可定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}, 称 T^{-1} **为 T 的逆算子**.

众多数学问题, 都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续(保证解的稳定性).

我们根据 Banach 空间的基本性质来研究这些问题, 我们**将得到开映射定理和逆算子定理**.

定义 4.4.1 *(逆算子) 设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子. 如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1, 使得*

$$T_1 T = I_X \quad (X\text{中的单位算子}), \qquad T T_1 = I_{X_1} \quad (X_1\text{中的单位算子}),$$

则称算子 T 有逆算子, *T_1 称为 T 的逆算子, 记为 $T_1 = T^{-1}$.*

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ Tx_1 \neq Tx_2,$$

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ Tx_1 \neq Tx_2,$$

这意味着 $Tx = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$.

注2 T^{-1} 如果存在, **则 T^{-1} 是唯一的**.

$$T^{-1}:\ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T), \qquad y_0 \mapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0).$$

注3 可以证明 T^{-1} **也是线性算子**, 即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

注4 $(T^{-1})^{-1} = T$.

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ Tx_1 \neq Tx_2,$$

这意味着 $Tx = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$.

注2 T^{-1} 如果存在, **则 T^{-1} 是唯一的**.

$$T^{-1}:\ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T), \qquad y_0 \mapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0).$$

注3 可以证明 T^{-1} **也是线性算子**, 即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

注4 $(T^{-1})^{-1} = T$.

问题: 研究在什么条件下 T^{-1} 存在, 什么条件下 T^{-1} 有界.

定理 4.4.2 *T 是赋范空间 X 到赋范空间 X_1 的线性算子, 如果存在 $m > 0$, 使得*

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2,$$

这意味着 $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.

注2 T^{-1} 如果存在, **则 T^{-1} 是唯一的**.

$$T^{-1}: \ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T), \qquad y_0 \mapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0).$$

注3 可以证明 T^{-1} **也是线性算子**, 即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

注4 $(T^{-1})^{-1} = T$.

问 题: 研究在什么条件下 T^{-1} 存在, 什么条件下 T^{-1} 有界.

定理 4.4.2 *T 是赋范空间 X 到赋范空间 X_1 的线性算子, 如果存在 $m > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \geq m\|x\|(x \in X), \tag{4.4.1}$$

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ Tx_1 \neq Tx_2,$$

这意味着 $Tx = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$.

注2 T^{-1} 如果存在, **则 T^{-1} 是唯一的**.

$$T^{-1}: \ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T), \qquad y_0 \mapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0).$$

注3 可以证明 T^{-1} **也是线性算子**, 即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

注4 $(T^{-1})^{-1} = T$.

问题: 研究在什么条件下 T^{-1} 存在, 什么条件下 T^{-1} 有界.

定理 4.4.2 *T 是赋范空间 X 到赋范空间 X_1 的线性算子, 如果存在 $m > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \geq m\|x\| (x \in X), \tag{4.4.1}$$

则 T 存在有界的逆算子 T^{-1}.

注1 T 存在逆算子充要条件是: T 是空间 X 到空间 X_1 中的一对一映射, 即: 对于 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathscr{D}(T)$,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2,$$

这意味着 $Tx = 0 \ \Rightarrow \ x = 0.$

注2 T^{-1} 如果存在, **则 T^{-1} 是唯一的**.

$$T^{-1}: \ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(T), \qquad y_0 \mapsto x_0 \quad (y_0 = Tx_0).$$

注3 可以证明 T^{-1} **也是线性算子**, 即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2.$

注4 $(T^{-1})^{-1} = T.$

问 题: 研究在什么条件下 T^{-1} 存在, 什么条件下 T^{-1} 有界.

定理 4.4.2 *T 是赋范空间 X 到赋范空间 X_1 的线性算子, 如果存在 $m > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \geq m\|x\| (x \in X), \tag{4.4.1}$$

则 T 存在有界的逆算子 T^{-1}.

注1 T^{-1} 是从 $\mathscr{R}(T)$到 $\mathscr{D}(T)$ 的映射, $\mathscr{R}(T)$不一定是全空间 X_1, $\mathscr{D}(T)$ 不一定是全空间 X.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子存在.

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子存在.

(2) 对于任意的 $y \in X_1$, $T^{-1}y \in X$. 由条件

$$\|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|,$$

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子存在.

(2) 对于任意的 $y \in X_1$, $T^{-1}y \in X$. 由条件

$$\|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|,$$

即 $\|y\| \geq m\|T^{-1}y\|$, 于是我们有

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子存在.

(2) 对于任意的 $y \in X_1$, $T^{-1}y \in X$. 由条件

$$\|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|,$$

即 $\|y\| \geq m\|T^{-1}y\|$, 于是我们有

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|, \ \forall y \in X, \tag{4.4.2}$$

注2 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可.

分析:(1) 首先证明 T 有逆算子, 即证明 T 是一对一的映射. 这只要证明$Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) 再证明 T^{-1} 是有界的.

证明 (1) T 是 $1-1$ 的.

如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但

$$\|T(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|,$$

因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子存在.

(2) 对于任意的 $y \in X_1$, $T^{-1}y \in X$. 由条件

$$\|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|,$$

即 $\|y\| \geq m\|T^{-1}y\|$, 于是我们有

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|, \ \forall y \in X, \tag{4.4.2}$$

T^{-1} 是有界线性算子.

二、开映射定理

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 *设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.*

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.

定理 4.4.4 *(开映射定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.

定理 4.4.4 *(开映射定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

说明: (1) 定理要求条件: $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出 "开映射" 的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.

定理 4.4.4 *(开映射定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

说明: (1) **定理要求条件**: $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

(2) **定理表明**: 当 T 是有界线性算子时, 如果 $TX = X_1$, X, X_1 都是 Banach 空间, 则对于开集 G, TG一定是开集.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 *设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.*

定理 4.4.4 *(开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.*

说明: (1) **定理要求条件**: $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

(2) **定理表明**: 当 T 是有界线性算子时, 如果 $TX = X_1$, X, X_1 都是 Banach 空间, 则对于开集 G, TG一定是开集.

(3) **注意 T 是开映射与 T 是连续的区别.**

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是开映像.

定理 4.4.4 *(开映射定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

说明: (1) 定理要求条件: $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

(2) 定理表明: 当 T 是有界线性算子时, 如果 $TX = X_1$, X, X_1 都是 Banach 空间, 则对于开集 G, TG一定是开集.

(3) **注意 T 是开映射与 T 是连续的区别.**

T 是开映像: T 把一个开集映成开集.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是开映像.

定理 4.4.4 *(开映射定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

说明: (1) 定理要求条件: $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

(2) 定理表明: 当 T 是有界线性算子时, 如果 $TX = X_1$, X, X_1 都是 Banach 空间, 则对于开集 G, TG一定是开集.

(3) **注意 T 是开映射与 T 是连续的区别.**

T 是开映像: T 把一个开集映成开集.

T 连续 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开的, 即 $G \subset X_1$, G 是开集 $\Rightarrow T^{-1}(G)$ 是开集.

二、开映射定理

下面证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

首先给出“开映射”的定义.

定义 4.4.3 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 的开集, 则称 T 是**开映像**.

定理 4.4.4 (开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

说明: (1) 定理要求条件: $\mathscr{D}(T)=X$, $\mathscr{R}(T)=X_1$, $TX=X_1$.

(2) 定理表明: 当 T 是有界线性算子时, 如果 $TX=X_1$, X, X_1 都是 Banach 空间, 则对于开集 G, TG一定是开集.

(3) **注意 T 是开映射与 T 是连续的区别.**

T 是开映像: T 把一个开集映成开集.

T 连续 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开的, 即 $G\subset X_1$, G 是开集 $\Rightarrow T^{-1}(G)$ 是开集.

(4) 如果线性算子 T 是开映射, 且 T 的逆算子存在, 则 T 的逆算子 T^{-1} 是连续的, 即有界线性算子.

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X=\cup_{k=1}^{\infty}\overline{B}(0,k),\qquad X_1=TX=\cup_{k=1}^{\infty}T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach 空间，是第二纲集,**

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**)**:**

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X=\cup_{k=1}^{\infty}\overline{B}(0,k),\qquad X_1=TX=\cup_{k=1}^{\infty}T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集，

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**)：

对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ (其中 $\delta=r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 Banach 空间，是第二纲集,
于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**):
对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (其中 $\delta = r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty}\overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty}T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集，
于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**)：
对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ (其中 $\delta=r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.
(i) **“压缩”** 证 $x\in T\overline{B}(0,k_0)\Rightarrow \frac{x}{c}\in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 Banach 空间，是第二纲集，

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过"平移和压缩变换"**)：

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (其中 $\delta = r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.

(i) **"压缩"** 证 $x \in T\overline{B}(0,k_0) \Rightarrow \frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

$\because x \in T\overline{B}(0,k_0)$, 即：$\exists y \in B_1(0,k_0)$, $x = Ty$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty}\overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty}T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**)：

对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (其中 $\delta = r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.

(i) **“压缩”** 证 $x \in T\overline{B}(0,k_0) \Rightarrow \frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

$\because x \in T\overline{B}(0,k_0)$, 即：$\exists y \in B_1(0,k_0)$, $x = Ty$

由于T是线性算子， $\frac{x}{c} = T\frac{y}{c}$, 由于 $\frac{y}{c} \in B(0,\frac{k_0}{c})$, 所以 $\frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过"平移和压缩变换"**)：

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (其中 $\delta = r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.

(i) **"压缩"** 证 $x \in T\overline{B}(0,k_0) \Rightarrow \frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

$\because x \in T\overline{B}(0,k_0)$, 即：$\exists y \in B_1(0,k_0)$, $x = Ty$

由于T是线性算子， $\frac{x}{c} = T\frac{y}{c}$, 由于 $\frac{y}{c} \in B(0,\frac{k_0}{c})$, 所以 $\frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

(ii) **"平移"** $\forall x \in B_1(0,r_0)$, $x + y_0 \in B_1(y_0,r_0)$, $y_0 - x \in B_1(y_0,r_0)$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X=\cup_{k=1}^{\infty}\overline{B}(0,k),\qquad X_1=TX=\cup_{k=1}^{\infty}T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,

于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过“平移和压缩变换”**)：

对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ (其中 $\delta=r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.

(i) **“压缩”** 证 $x\in T\overline{B}(0,k_0)\Rightarrow\frac{x}{c}\in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

$\because x\in T\overline{B}(0,k_0)$, 即：$\exists y\in B_1(0,k_0)$, $x=Ty$

由于T是线性算子， $\frac{x}{c}=T\frac{y}{c}$, 由于 $\frac{y}{c}\in B(0,\frac{k_0}{c})$, 所以 $\frac{x}{c}\in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$

(ii) **“平移”** $\forall x\in B_1(0,r_0)$, $x+y_0\in B_1(y_0,r_0)$, $y_0-x\in B_1(y_0,r_0)$

由于 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠，所以对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists z_1,z_2\in T\overline{B}(0,k_0)$, 使得

$$\|x+y_0-z_1\|<\varepsilon,\quad \|y_0-x-z_2\|<\varepsilon,$$

证明 (1) 设 B 是 X 中的球, B_1 是 X_1中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k), \qquad X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 X_1 是 **Banach** 空间，是第二纲集,
于是存在 k_0, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0, r_0)$ 中稠.

(2)由 T 的线性性质可推出(**通过"平移和压缩变换"**)：
对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (其中 $\delta = r_0/k_0$), 使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

我们在这给出上述结论的证明.
(i) **"压缩"** 证 $x \in T\overline{B}(0,k_0) \Rightarrow \frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$
$\because x \in T\overline{B}(0,k_0)$, 即：$\exists y \in B_1(0,k_0)$, $x = Ty$
由于T是线性算子， $\frac{x}{c} = T\frac{y}{c}$, 由于 $\frac{y}{c} \in B(0,\frac{k_0}{c})$, 所以 $\frac{x}{c} \in T\overline{B}(0,\frac{k_0}{c})$
(ii) **"平移"** $\forall x \in B_1(0,r_0)$, $x + y_0 \in B_1(y_0,r_0)$, $y_0 - x \in B_1(y_0,r_0)$
由于 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠，所以对于$\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_1, z_2 \in T\overline{B}(0,k_0)$, 使得

$$\|x + y_0 - z_1\| < \varepsilon, \quad \|y_0 - x - z_2\| < \varepsilon,$$

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \leq \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中： $\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中：$\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中： $\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \leq \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中：$\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \leq \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中：$\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

(3)下面 **结合 T 的连续性**, 我们证明对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.3}$$

(注意：这里的关系是包含,而不是前面的稠密.

并且$T\overline{B}(0, r)$ 不一定等于 $\overline{T\overline{B}(0, r)}$)

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中： $\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

(3)下面 **结合 T 的连续性**, 我们证明对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.3}$$

(注意：这里的关系是包含,而不是前面的稠密.

并且$T\overline{B}(0, r)$ 不一定等于 $\overline{T\overline{B}(0, r)}$)

事实上, (i) 对于任意的 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$,

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中： $\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0,1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0,\varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

(3)下面 **结合 T 的连续性**, 我们证明对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2} r\delta). \tag{4.4.3}$$

（注意：这里的关系是包含,而不是前面的稠密.

并且$T\overline{B}(0,r)$ 不一定等于 $\overline{T\overline{B}(0,r)}$ ）

事实上, (i) 对于任意的 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$,

因为 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2})$ 中稠密,（这是因为： $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠）

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \leq \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中： $\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

(3)下面 **结合 T 的连续性**, 我们证明对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.3}$$

（注意：这里的关系是包含,而不是前面的稠密.
并且$T\overline{B}(0, r)$ 不一定等于 $\overline{T\overline{B}(0, r)}$)

事实上, (i) 对于任意的 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$,

因为 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2})$ 中稠密,（这是因为： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$ 在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠）

于是存在 $x_1 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2})$, 使得

于是有

$$\|2x - z_1 + z_2\| \le \|x + y_0 - z_1\| + \|x - y_0 + z_2\| < 2\varepsilon$$

即： $\|x - \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\| < \varepsilon$ 其中：$\frac{z_1 - z_2}{2} \in T\overline{B}(0, k_0)$.

这证明了$T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠.

(iii) 由 T 的线性性质[证明方法类似(i)]，可以推出 $T\overline{B}(0, 1)$ 在小球 $B_1(0, \frac{r_0}{k_0})$中稠

进一步的有： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠

(3)下面 **结合 T 的连续性**, 我们证明对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.3}$$

(注意：这里的关系是包含,而不是前面的稠密.

并且$T\overline{B}(0, r)$ 不一定等于 $\overline{T\overline{B}(0, r)}$)

事实上, (i) 对于任意的 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$,

因为 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2})$ 中稠密,（这是因为： $T\overline{B}(0, \varepsilon)$ 在 $B_1(0, \varepsilon\delta)$ 中稠）

于是存在 $x_1 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2})$, 使得

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$.......

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$.......

(iii) 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$.......

(iii) 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{4.4.4}$$

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$.......

(iii) 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{4.4.4}$$

(iv)因为 X 是 Banach 空间及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$.......

(iii) 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{4.4.4}$$

(iv)因为 X 是 Banach 空间及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,

$$\text{即存在 } x_0 \in X, \qquad \text{使得 } x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \ \|x_0\| \leq 1. \tag{4.4.5}$$

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}.$$

令 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{2^2})$.

(ii) 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密,

于是存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$.

令 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$......

(iii) 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{4.4.4}$$

(iv)因为 X 是 Banach 空间及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,

$$\text{即存在 } x_0 \in X, \qquad \text{使得 } x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \ \|x_0\| \leq 1. \tag{4.4.5}$$

由于 T 是连续线性算子, 结合(4.4.4)式, 有

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=1}^{n} x_k) = T(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k) = T(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = Tx_0. \tag{4.4.6}$$

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集 .**

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集.**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, 存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r>0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集 .**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, **存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.**

设 $Tx \in TG$, $x \in G$, 因为 G 是开集, 存在 x 的邻域 $B(x,r_1) \subset G$.

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集.**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, 存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.

设 $Tx \in TG$, $x \in G$, 因为 G 是开集, 存在 x 的邻域 $B(x,r_1) \subset G$.

取正数 $r_2 < r_1$, 则

$$\overline{B}(x,r_2) \subset B(x,r_1) \subset G,$$

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r>0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集 .**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, **存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.**

设 $Tx \in TG$, $x \in G$, 因为 G 是开集, 存在 x 的邻域 $B(x,r_1) \subset G$.

取正数 $r_2 < r_1$, 则

$$\overline{B}(x,r_2) \subset B(x,r_1) \subset G,$$

因此

$$T\overline{B}(x,r_2) \subset TG. \tag{4.4.8}$$

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r>0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集 .**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, 存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.

设 $Tx \in TG$, $x \in G$, 因为 G 是开集, 存在 x 的邻域 $B(x,r_1) \subset G$.

取正数 $r_2 < r_1$, 则

$$\overline{B}(x,r_2) \subset B(x,r_1) \subset G,$$

因此

$$T\overline{B}(x,r_2) \subset TG. \tag{4.4.8}$$

由于 $\overline{B}(x,r_2) = x + \overline{B}(0,r_2)$, 因此

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0,1)$.

于是我们证明了 $T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$ （因为原来假定 $y_0 \in B_1(0,\frac{\delta}{2})$）.

$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0,\frac{1}{2}\delta)$. 由 T 的线性性质, 对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.7}$$

(4) **最后结合 T 是一个线性算子, 证明对于 X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集 .**

也就是要证明任取 $Tx \in TG$, $x \in G$, 存在 Tx 的一个小邻域包含在 TG 中.

设 $Tx \in TG$, $x \in G$, 因为 G 是开集, 存在 x 的邻域 $B(x,r_1) \subset G$.

取正数 $r_2 < r_1$, 则

$$\overline{B}(x,r_2) \subset B(x,r_1) \subset G,$$

因此

$$T\overline{B}(x,r_2) \subset TG. \tag{4.4.8}$$

由于 $\overline{B}(x,r_2) = x + \overline{B}(0,r_2)$, 因此

$$T\overline{B}(x, r_2) = Tx + T\overline{B}(0, r_2) \supset Tx + B_1(0, \frac{1}{2}r_2\delta) = B_1(Tx, \frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

$$T\overline{B}(x,r_2) = Tx + T\overline{B}(0,r_2) \supset Tx + B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta) = B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

$$T\overline{B}(x,r_2) = Tx + T\overline{B}(0,r_2) \supset Tx + B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta) = B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

……………………………………

小结： 证明的步骤：

$$T\overline{B}(x,r_2)=Tx+T\overline{B}(0,r_2)\supset Tx+B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta)=B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

………………………………

小结： 证明的步骤：

(1) $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠(X_1 是第二纲集);

$$T\overline{B}(x,r_2)=Tx+T\overline{B}(0,r_2)\supset Tx+B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta)=B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

……………………………

小结： 证明的步骤：

(1) $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠(X_1 是第二纲集);

(2)$T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠（T 线性）;

$$T\overline{B}(x,r_2)=Tx+T\overline{B}(0,r_2)\supset Tx+B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta)=B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

………………………………

小结： 证明的步骤：

(1) $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠(X_1 是第二纲集);

(2)$T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠（T 线性）;

(3) $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$（$X$ 是完备的；T 连续），

$$T\overline{B}(x,r_2) = Tx + T\overline{B}(0,r_2) \supset Tx + B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta) = B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

……………………………

小结： 证明的步骤：

(1) $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠(X_1 是第二纲集);

(2)$T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠（T 线性）;

(3) $T\overline{B}(0,r) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$（$X$ 是完备的; T 连续），

由此可推出逆算子定理;

$$T\overline{B}(x,r_2)=Tx+T\overline{B}(0,r_2)\supset Tx+B_1(0,\frac{1}{2}r_2\delta)=B_1(Tx,\frac{1}{2}r_2\delta),\tag{4.4.9}$$

（这是因为 $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$）

由式(4.4.8) 和式(4.4.9)说明 Tx 是 TG 的内点, 所以 TG 是 X_1 中的开集.

……………………………

小结： 证明的步骤：

(1) $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠(X_1 是第二纲集);

(2)$T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠（T 线性）;

(3) $T\overline{B}(0,r)\supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta)$（$X$ 是完备的; T 连续），

由此可推出逆算子定理;

(4) X 中的任意一个开集 G, 一定有 TG 是开集.

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注2 在证明的第二部分, **由稠密性证明包含时**, **选出了一个点列** x_n,

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注2 在证明的第二部分, **由稠密性证明包含时**, **选出了一个点列** x_n, 由于 X 是 **Banach** 空间, 且点列的前 n 项范数的和收敛, 可知级数收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. 这是证明的关键之一.

注3 T 的线性性质, 在定理的证明中非常重要.

注4 T **的连续性这个条件, 定理中用在(4.4.5)(4.4.6)式中**: 当

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} TS_n = y_0, \end{cases} \tag{4.4.10}$$

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注2 在证明的第二部分, **由稠密性证明包含时**, **选出了一个点列** x_n, 由于 X 是 **Banach** 空间, 且点列的前 n 项范数的和收敛, 可知级数收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. 这是证明的关键之一.

注3 T 的线性性质, 在定理的证明中非常重要.

注4 T **的连续性这个条件, 定理中用在**(4.4.5)(4.4.6)**式中**: 当

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} TS_n = y_0, \end{cases} \tag{4.4.10}$$

由 T 连续, 推出 $Tx_0 = y_0$.

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注2 在证明的第二部分, **由稠密性证明包含时**, **选出了一个点列** x_n, 由于 X 是 **Banach** 空间, 且点列的前 n 项范数的和收敛, 可知级数收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. 这是证明的关键之一.

注3 T 的线性性质, 在定理的证明中非常重要.

注4 T **的连续性这个条件, 定理中用在**(**4.4.5**)(**4.4.6**)**式中**: 当

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} TS_n = y_0, \end{cases} \tag{4.4.10}$$

由 T 连续, 推出 $Tx_0 = y_0$.

以后可以看到, 只要 T 是闭算子, 这个性质就可以成立, 不一定要求 T 连续.

注1 定理中要求 X_1 是 Banach 空间, 证明中仅用到 X_1 是第二纲集, 即条件可放宽为 X_1 是第二纲集.

注2 在证明的第二部分, **由稠密性证明包含时**, **选出了一个点列** x_n, 由于 X 是 **Banach** 空间, 且点列的前 n 项范数的和收敛, 可知级数收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. 这是证明的关键之一.

注3 T 的线性性质, 在定理的证明中非常重要.

注4 T **的连续性这个条件, 定理中用在**(4.4.5)(4.4.6)**式中**: 当

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} TS_n = y_0, \end{cases} \tag{4.4.10}$$

由 T 连续, 推出 $Tx_0 = y_0$.

以后可以看到, 只要 T 是闭算子, 这个性质就可以成立, 不一定要求 T 连续.

注5 如果线性算子 T 的逆算子 T^{-1} 存在, 式 (4.4.7)就**意味着 T^{-1} 的逆算子有界**, 因为对于 T^{-1} 来说, 它把小球 $B_1(0, \frac{1}{2}r\delta)$ 映到闭球 $\overline{B}(0, r)$ 中, 即"放大的比例"不超过 $\frac{\delta}{4}$.

三、逆算子定理

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*
设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*
设 T 是从 $Banach$ 空间 X 上到 $Banach$ 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*
设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1}是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.
(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,
即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*
设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.

(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,

即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.

在这样的条件下才能有结论: T^{-1} 有界.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*
设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.
(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,
即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.
在这样的条件下才能有结论: T^{-1} 有界.

证明 (1) 由条件知 T^{-1} 存在.

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*

设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1}是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.

(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,

即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.

在这样的条件下才能有结论: T^{-1} 有界.

证明 (1) 由条件知 T^{-1} 存在.

(2) 由开映像定理的证明 (式 (4.4.7))可知, 存在 $\delta > 0$, 使得

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*

设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.

(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,

即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.

在这样的条件下才能有结论: T^{-1} 有界.

证明 (1) 由条件知 T^{-1} 存在.

(2) 由开映像定理的证明 (式 (4.4.7))可知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta).$$

三、逆算子定理

下面我们用开映像定理, 结合 T 是一个线性算子来证明逆算子定理.

定理 4.4.5 *(Banach 逆算子定理)*

设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1}是有界的.

说明: (1) T 是一对一的, 保证了 T^{-1} 的存在.

(2) X 是Banach空间,$\mathscr{D}(T) = X$, X_1 是 Banach 空间, $\mathscr{R}(T) = X_1$,

即 T 的定义域和值域都是 Banach 空间.

在这样的条件下才能有结论: T^{-1} 有界.

证明 (1) 由条件知 T^{-1} 存在.

(2) 由开映像定理的证明 (式 (4.4.7))可知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta).$$

因此 $\forall y \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 我们有 $T^{-1}y \in \overline{B}(0,1)$.

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0, 1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如: $X = X_1 = C[0,1]$,

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad x(s) \in C[a,b], \tag{4.4.11}$$

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \le 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \le \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \le \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如: $X = X_1 = C[0,1]$,

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad x(s) \in C[a,b], \tag{4.4.11}$$

我们看到 $TX \ne X_1$, 事实上:

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如: $X = X_1 = C[0,1]$,

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \qquad x(s) \in C[a,b], \tag{4.4.11}$$

我们看到 $TX \neq X_1$, 事实上:

$$TX = M = \{y \in C^1[0,1] |\ y(0) = 0\}.$$

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如: $X = X_1 = C[0,1]$,

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad x(s) \in C[a,b], \tag{4.4.11}$$

我们看到 $TX \neq X_1$, 事实上:

$$TX = M = \{y \in C^1[0,1] |\ y(0) = 0\}.$$

M 是 $C[a,b]$ 中无处稠密集, 不是第二纲集.

(3) 于是对于 $\forall z \in X_1$, $\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$, 从而

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$. 于是 $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注1 逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用, 包括在算子谱理论的研究中.

注2 $TX = X_1$ 是 **Banach** 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如: $X = X_1 = C[0,1]$,

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, \quad x(s) \in C[a,b], \tag{4.4.11}$$

我们看到 $TX \neq X_1$, 事实上:

$$TX = M = \{y \in C^1[0,1] |\ y(0) = 0\}.$$

M 是 $C[a,b]$ 中无处稠密集, 不是第二纲集.

T 的逆算子 $T^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是一个微分算子, 是无界的线性算子.

定理 4.4.6 设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$.

定理 4.4.6 *设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C > 0$, 使得*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

定理 4.4.6 设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

定理 4.4.6 设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 *Banach* 空间, 且存在常数 $C>0$, 使得

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1,\quad \forall x\in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: **由等价范数的定义, 只需证明** $\widetilde{C}>0$, **使得** $\|x\|_1 \le \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I:\ X\to X$.

定理 4.4.6 *设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C > 0$, 使得*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: 由等价范数的定义, 只需证明 $\widetilde{C} > 0$, 使得 $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I: \ X \to X$.

I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子.

定理 4.4.6 *设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C>0$, 使得*

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1, \quad \forall x\in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: 由等价范数的定义, 只需证明 $\widetilde{C}>0$, 使得 $\|x\|_1 \le \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I:\ X\to X$.

I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子.

因此, **由 Banach 逆算子定理,**

$$I^{-1}=I:X_2\to X_1$$

是有界线性算子.

定理 4.4.6 设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: 由等价范数的定义, 只需证明 $\widetilde{C} > 0$, **使得** $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I: \ X \to X$.

I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子.

因此, **由 Banach 逆算子定理,**

$$I^{-1} = I : X_2 \to X_1$$

是有界线性算子.

所以存在 $C_1 > 0$, 使得 $\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2$. 即

定理 4.4.6 *设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C>0$, 使得*

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1,\quad \forall x\in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: 由等价范数的定义, 只需证明 $\widetilde{C}>0$, 使得 $\|x\|_1\le \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I:\ X\to X$.

I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子.

因此, **由 Banach 逆算子定理,**

$$I^{-1}=I:X_2\to X_1$$

是有界线性算子.

所以存在 $C_1>0$, 使得 $\|x\|_1\le C_1\|x\|_2$. 即

$$\frac{1}{C_1}\|x\|_1\le \|x\|_2\le C\|x\|_1,$$

定理 4.4.6 *设 X 是一个线性空间, 其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间, 且存在常数 $C>0$, 使得*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

分析: **由等价范数的定义, 只需证明** $\widetilde{C}>0$, **使得** $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

证明: 考虑恒等映射 $I: \ X \to X$.

I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子.

因此, **由 Banach 逆算子定理,**

$$I^{-1} = I : X_2 \to X_1$$

是有界线性算子.

所以存在 $C_1>0$, 使得 $\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2$. 即

$$\frac{1}{C_1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

所以 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.