第五章　共轭空间和共轭算子

§5.1　Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函, 例如上一章第三节的例4.3.4, 在 $C[a,b]$ 中 $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n+1$项的部分和(在0点的值):

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s,0)x(s)\mathrm{d}s,$$

每一个 f_n 都是 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 即在在 X 上可以定义许多线性泛函. 以下的定理说明在 $(X, \|\cdot\|)$ 上可以定义“足够多”的线性泛函.

5.1.1 Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X, G$ 是 X的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上, 即存在 X 上的有界线性泛函F, 使得

(i)对于 $\forall x \in G, F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路　首先在实的赋范空间中考虑. 设 $G \neq X$，任取 $x_1 \in X \setminus G$，用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

在 G_1 上定义

$$f_1(x + \alpha x_1) = f(x) + \alpha\beta \qquad (x \in G, \alpha \in R), \tag{5.1.1}$$

其中 β 是适当选择的实数, 满足：

$$\sup_{x\in G}\{f(x) - \|f\|_G\|x - x_1\|\} \le \beta \le \inf_{x\in G}\{\|f\|_G\|x + x_1\| - f(x)\}). \tag{5.1.2}$$

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函，以下我们证明这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的，事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

$$f(x'+x'') = f(x')+f(x'') \le \| f \|_G \| x'+x'' \| \le \| f \|_G \| x'-x_1 \| + \| f \|_G \| x_1+x'' \|$$

于是可推出

$$f(x') - \|f\|_G\|x' - x_1\| \le \|f\|_G\|x'' + x_1\| - f(x''),\quad \forall x', x'' \in G,$$

即：$\sup\limits_{x\in G}\{f(x) - \|f\|_G\|x - x_1\|\} \le \inf\limits_{x\in G}\{\|f\|_G\|x + x_1\| - f(x)\}$，这说明满足式（5.1.2）的 β 存在.

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|\ f_1(x + \alpha x_1)\ | = |\ f(x) + \alpha\beta\ | \le \|f\|_G\ \|\ x + \alpha x_1\ \|,\quad (\forall x \in G,\ -\infty < \alpha < \infty) \tag{5.1.3}$$

要证明式（5.1.3）成立，只需证明 $\forall x \in G,\ -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \le \|f\|_G\ \|\ x + \alpha x_1\ \|\,. \tag{5.1.4}$$

这是因为在式（5.1.4）中换 x 为 $-x$， α 为 $-\alpha$，就得

$$f(x) + \alpha\beta \ge -\|f\|_G\ \|\ x + \alpha x_1\ \|\,. \tag{5.1.5}$$

把（5.1.4）和由它推出的（5.1.5）结合起来就是（5.1.3）.

当 $\alpha = 0$ 时（（5.1.4））式显然成立. 当 $\alpha > 0$ 时，令 $x = \alpha u$ 根据 β 满足（5.1.2）式右边的不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\ f_1(x + \alpha x_1)\ | &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta)\\ &\le \alpha(f(u) + \|f\|_G\|u + x_1\| - f(u)) = \alpha(\|f\|_G\|u + x_1\|)\\ &= \|f\|_G\|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G\|x + \alpha x_1\|;\end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时，令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足（5.1.2）式左边的不等式，我们有

$$\begin{aligned}|\ f_1(x + \alpha x_1)\ | &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta)\\ &\le -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G\|u - x_1\|) = -\alpha(\|f\|_G\|u - x_1\|)\\ &= \|f\|_G\| - \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G\|x + \alpha x_1\|;\end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|\ f\ \|_G$ 不变.

令 $\mathcal{F}$ 记 f 的全体保范延拓, 在 $\mathcal{F}$ 上定义半序关系：$f_1 \le f_2$, 如果 $D(f_1) \subset D(f_2)$, 并且 $f_1(x) = f_2(x)$ 对于任意的 $x \in D(f_1)$. 令 $\mathcal{C}$是$\mathcal{F}$ 中的任何一个全序子集, 可以证明 $\mathcal{C}$有上界, 根据 Zorn 引理，在 $\mathcal{F}$中存在极大元. 即 f 可以保范地延拓到全空间上.

在复的Banach 空间,

$$f(x)=\varphi(x)+i\psi(x) \qquad (x\in G),$$

其中 φ,ψ 分别表示 f的实部和虚部, 且$\varphi(ix)=-\psi(x)$. 把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论, φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0，令

$$F(x)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix) \qquad (x\in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

例 5.1.2 在R^2中，令 $\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|, x=(\xi_1,\xi_2)$.设$G=\{(\xi_1,0)\}$是$R^2$中形如$(\xi,0)$ 的元素构成的一个线性子空间. 令

$$f(x)=\xi_1 \qquad x\in G.$$

f 是 G 上的线性泛函，$\|f\|=1$.

对于 $\forall\alpha\in[-1,1]$，定义

$$F_\alpha(x)=\xi_1+\alpha\xi_2 \quad x=(\xi_1,\xi_2),$$

显然，当$x\in G, x=(\xi_1,0), F_\alpha(x)=\xi_1=f(x)$.

$\because\ F_\alpha(x)=f(x) \quad x\in G, \|f\|=1.\ \therefore \|F_\alpha\|\geq 1, \|F_\alpha\|=|\xi_1+\alpha\xi_2|\leq|\xi_1|+|\alpha||\xi_2|\leq\|x\|, \|F_\alpha\|\leq 1. \therefore \|F_\alpha\|=1.$

但是对于不同的 α, F_α 是 f 不同的延拓.

注2 在Hahn-Banach 定理5.1.1的证明中没有用到范数的如下性质:“ $\|x\|=0\Rightarrow x=0$”. 也就是说定理中假设范数的条件可以改为半范数 $p(x)$, 有关半范数和相应的结论可参阅。。。。

注3 Hahn-Banach 定理5.1.1是纯代数的，虽然它假设了线性空间上有范数或半范数，但是定理的表述和证明过程中都没有用到空间的任何拓扑性质（或极限概念）.

5.1.2 Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0\in X, x_0\neq 0$，必存在 X 上的有界线性泛函 f, 使得: $\|f\|=1, f(x_0)=\|x_0\|$.

证明 令 $G=\{\alpha x_0|\alpha\in K\}$，$G$ 是 X 中的线性子空间. 在 G上定义: $f_0(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$(当$\alpha=1$时，$f_0(x_0)=\|x_0\|$).

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上: $f_0((\alpha+\beta)x_0)=(\alpha+\beta)x_0=\alpha\|x_0\|+\beta\|x_0\|=f(\alpha x_0)+f(\beta x_0)=\alpha f(x_0)+\beta f(x_0)$. 当 $x=\alpha x_0$ 时, $x\in G$.

$$|f_0(x)|=|f_0(\alpha x_0)|=|\alpha|\|x_0\|=\|\alpha x_0\|=\|x\|,$$

所以 $\|f_0\|_G=1.f_0$ 是 G 上定义的有界线性泛函. $\therefore$ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f, 使得

$$\|f\|=1, \text{且} f(x_0)=f_0(x_0)=\|x_0\|. \tag{5.1.6}$$

注1 $X\neq\varnothing$，则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函$f(x)\equiv 0$.

注2 $\forall x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，则存在 $f(x)$, 使得

$$f(x_1)\neq f(x_2), \tag{5.1.7}$$

（这说明有足够多的线性泛函）.

证明 另 $x_0=x_1-x_2\neq 0$，由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f，$\|f\|=1$，且

$$f(x_1-x_2)=\|x_1-x_2\|\neq 0.$$

$\therefore f(x_1)\neq f(x_2)$.

注3 如果对于 X的任何线性泛函 f 都有

$$f(x_0)=0 \qquad \forall f\in X^*, \tag{5.1.8}$$

则$x_0=0$ (否则存在f,$\|f\|=1, f(x_0)=\|x_0\|\neq 0$).

这是判断$x=0$的重要手段.

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间，$x_0\in X$，如果 $d=d(x_0,G)=\inf\limits_{x\in G}\|x-x_0\|>0$，则存在 X 上的有界线性泛函 f,

$$\|f\|=\frac{1}{d}; \quad f(x)=0,\forall x\in G. \tag{5.1.9}$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间，即:

$$G_1=\{\alpha x_0+x,\alpha\in K,x\in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0+x)=\alpha \qquad \alpha\in K, \quad x\in G.$$

显然 f_1 是 G 上的线性泛函，且 $f_1(x_0)=1; f_1(x)=0, \forall x\in G.(\because \alpha=0).f_1$ 是有界线性泛函, 事实上,

$$\|\alpha x_0+x\|=|\alpha|\|x_0+\frac{x}{\alpha}\|\geq|\alpha|d.$$

所以 $|f_1(\alpha x_1+x)|=|\alpha|\leq\frac{1}{d}\|\alpha x_0+x\|$，即 $\|f_1\|\leq\frac{1}{d}$.

另外, 取 $x_n\in G, \|x_n-x_0\|\to d \quad (n\to\infty).|f_1(x_n-x_0)|\leq\|f_1\|_G\|x_n-x_0\|$,于是$\|f_1\|_G\geq\frac{1}{\|x_n-x_0\|}\to\frac{1}{d}(n\to\infty)$. 即 $\|f_1\|_G=\frac{1}{d}$.

由定理5.1.1，f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f，且

$$\|f\|=\frac{1}{d}; f(x_0)=1; f(x)=0(x\in G). \tag{5.1.10}$$

注 (1) 这是一种分离的性质，$x_0\overline{\in}G, d=\inf\limits_{x\in G}\|x-x_0\|$，则可以用线性泛函 f 把 x_0 和 G 分开，$f(x)=0, x\in G; f(x_0)=1, x_0\overline{\in}G$.

(2) 如果 G 是闭子空间，,$x\overline{\in}G$，则 $d(x,G)=\inf\limits_{x\in G}\|x-x_0\|>0$. 于是存在线性泛函 f，$\|f\|=\frac{1}{d}$,且$f(x)=0, x\in G; f(x)=1$. 即线性泛函 f 把两个闭集分离开来.

§5.2 共轭空间

赋范空间 X 上的全体线性泛函，反映了赋范空间的许多本质性质. 下面我们给出共轭空间的概念.

5.2.1 共轭空间的概念

定义 5.2.1 设 X 是赋范空间, 记

$$X^*=\mathcal{B}(X,K). \tag{5.2.1}$$

称 X^* 为 X 的共轭空间. X 的共轭空间是 X 上全体有界线性泛函构成的赋范空间.

注 由于K是完备的, X^*是$Banach$空间(定理4.2.4).

X是$Banach$空间,X^*是X上全体有界线性泛函,下面我们给出一些有界线性泛函的具体表示形式.

5.2.2 $L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1<p<\infty)$

定理 5.2.2 f是$L^p[a,b]$上的有界线性泛函,则存在唯一的$y(t)\in L^q[a,b], (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$,使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之,对于$\forall y \in L^q[a,b]$, (5.2.1)式定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函.

证明 1.对于$y \in L^q[a,b]$定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

$f(x)$是一个线性泛函,且

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t| \\ &\leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|y\|\|x\|, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

f有界,且$\|f\| \leq \|g\|$.

2.已知$f(x)$是$L^p[a,b]$上的一个线性泛函,我们要找出$y(t)$.

(1)$\forall s \in [a,b]$,设

$$x_s(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq s, \\ 0, & s < t \leq b, \end{cases} \tag{5.2.4}$$

$f(x_s)$是s的函数.令$g(s) = f(x_s)$.

(i)$g(s)$是绝对连续的.设$[s_k, t_k] (k = 1, 2, \cdots, n)$是一些包含在$[a,b]$中且没有公共内点的区间,记$\varepsilon_k = \mathrm{sgn}(g(t_k) - g(s_k))$,则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(s_k)| = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (g(t_k) - g(s_k)) &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (f(x_{t_k}) - f(x_{s_k})) \\ f(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_{t_k} - x_{s_k}) &\leq \|f\| \|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_{t_k} - x_{s_k})\|_{L_p} \\ &= \|f\| (\sum_{k=1}^n \int_{\delta_k} \mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\| (\sum_{k=1}^n m\delta_k)^{1/p}. \end{aligned}$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^n m\delta_k \to 0$时,

$$\sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(s_k)| \to 0.$$

$g(s)$在$[a,b]$上绝对连续.$g(s)$几乎处处可以求导,$g'(s)$可积,令$y(s) = g'(s)$. 由于

$$x_a(t) = \begin{cases} 1, & t = a, \\ 0, & a < t \leq b. \end{cases}$$

$x_a(t)=0(a,e),\therefore f(x_a(t))=g(a)=0.\therefore g(s)=g(a)+\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t.$ 即

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.5}$$

(2)由$f(x)$的线性性质,可以推出,对所有的阶梯函数

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

成立.

(3) 以下证明当$x(t)$是有界可测函数时,

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

成立.事实上我们可以选取一致有界的阶梯函数列$\{x_n(t)\},\{x_n(t)\}$几乎处处收敛到$x(t)$.因为

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.6}$$

由$Lebesgn$控制收敛定理,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|&=\lim_{n\to\infty}(\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\\&=\int_a^b\lim_{n\to\infty}|x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t=0,\\&\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t\to\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

在(5.2.5)式中令$n\to\infty$,我们有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(4)证明$y(t)\in L^q[a,b]$.对于任意的自然数N,令

$$y_N(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}y(t), & |y(t)|\le N,\\ 0, & |y(t)|>N.\end{cases}$$

$y_N(t)\in L^p$,且$y_N(t)$是有界可测函数,由(3)知

$$f(y_N)=\int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N}y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N}|y_N(t)|^q\mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中$E_N = \{t||y_N(t)| \le N\}$.注意到

$$|f(y_N)| \le \|f\|\|y_N\|_p = \|f\|(\int_{E_N} |y_N(t)|^p)^{1/p}\mathrm{d}t$$

$$= \|f\|((\int_{E_N} |y(t)|^{q-1})^p\mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\|(\int_{E_N} |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/p} \tag{5.2.8}$$

比较(5.2.6),(5.2.7)两式得到

$$(\int_{E_N} |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q} \le \|f\| \tag{5.2.9}$$

令$N \to \infty$,我们得到

$$(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q} \le \|f\|, \tag{5.2.10}$$

即$y(t) \in L^p$.

(5)证明公式$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$对任意的$x \in L^p$成立.

对于$\forall x \in L^p$,存在有界可测函数列$x_n(t)$使得

$$(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \to 0(n \to \infty).$$

$\because x_n(t)$有界,$\therefore f(x_n) = \int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t$.令$n \to \infty$,我们得到

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.11}$$

对于$\forall x \in L^p[a,b]$,由(5.2.10)式已经$H\ddot{o}lder$不等式,

$$|f(x)| \le (\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.12}$$

$\therefore \|f\| \le \|y\|$,结合(5.2.9),我们有

$$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{5.2.13}$$

3.唯一性.如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

$\therefore \int_a^b x(t)(y_1(t) - y_2(t))\mathrm{d}t = 0, \forall x \in L^p$.即$y(t) - y_1(t)$是一个零泛函，于是$\|f\| = \|y - y_1\| = 0$. $\therefore y_1 = y_2$.

注1 $X = L^p[a,b]$,则$X^* = L^q[a,b]$,其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$.即$f \in X^*, \exists y \in L^q$,使得$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$, f和q一一对应.在等距同构的意义下,$L^p[a,b]$和$L^q[a,b]$一样.

注2 当$p = 2$时,$X = L^2, X^* = L^2$.X是它的共轭空间X^*一样.

注3 当$p = 1$时，$X = L[a,b]$可以类似的证明.$X^* = L^\infty[a,b](p = 1, q = \infty)$.

注4 对于离散的情况,类似的我们有$(l^p)^* = l^q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

5.2.3 空间 c 的共轭空间

对于$c=${全体收敛数列},我们给出它的共轭空间c^*.

定理 5.2.3 对于每一个$f\in c^*$,存在数α及$\{\alpha_n\}\in l^1$,使得对于每一个$x\in c, x=\{\xi_n\}$,

$$f(x)=\alpha\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n, \tag{5.2.14}$$

且

$$\|f\|=|\alpha|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|. \tag{5.2.15}$$

反之,如果给定α及$\{\alpha_n\}\in l^1$,则(5.2.13)式决定了c上一个有界线性泛函.

证明 取$e=(1,1,\cdots), e_1=(1,0,0,\cdots), e_2=(0,1,0,\cdots),\cdots, e_n=(0,0,\cdots,1,0,\cdots),\cdots$,则 $\cdot\}$是c的一个基.因为对于任意的$x\in c, x=\{\xi_n\}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=l$,则

$$\|x-le-\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-l)e_k\|=\sup_{k>n}|\xi_k-l|\to 0(n\to\infty).$$

因此$x=le+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\xi_k-l)e_k$.可以证明这个表示式是唯一的.

设$f\in c^*$,则对于每一个$x=\{\xi_n\}\in c, l=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$,有

$$x=le+\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-l)e_k, \tag{5.2.16}$$

$$f(x)=lf(e)+\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-l)f(e_k). \tag{5.2.17}$$

任取$r\geq 1$,且对于$1\leq n\leq r$,令$\xi_n=\mathrm{sgn}f(e_n)$;对于$n>r$,令$\xi_n=0$.则$x=\{\xi_n\}\in c_0, \|x\|=1$,且由于在$c$上$|f(x)|\leq\|f\|\|x\|$,所以

$$|f(x)|=\sum_{n=1}^{r}|f(e_n)|\leq\|f\|.$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(e_n)|=\sup\limits_{r}\sum\limits_{n=1}^{r}|f(e_n)|\leq\|f\|<\infty$.于是我们可以把(5.2.16)式改写成

$$f(x)=\alpha l+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n, \tag{5.2.18}$$

其中$\alpha=f(e)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha f(e_n), \alpha_n=f(e_n)$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(e_n)$绝对收敛.由于$|\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n|\leq\|x\|$,由(5.2.17)式

$$|f(x)|\leq(|\alpha|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|)\|x\|. \tag{5.2.19}$$

即$\|f\| \leq |\alpha| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$.另一方面,对于$\|x\| = 1$,我们有$|f(x)| \leq \|f\|$, 对于任意的$r \geq 1$定义

$$\xi_n = \begin{cases} \mathrm{sgn} a_n & (1 \leq n \leq r), \\ \mathrm{sgn} a & (n > r). \end{cases}$$

则$x \in c, \|x\| = 1, \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \alpha$,所以

$$|f(x)| = |\ |\alpha| + \sum_{n=1}^{r} |\alpha_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} \alpha_n \mathrm{sgn}\alpha\ | \leq \|f\|. \tag{5.2.20}$$

由于$\{\alpha_n\} \in l^1$，我们有$\sum\limits_{n=r+1}^{\infty} \alpha_n \to 0 (r \to \infty)$.因此在上面的不等式中令$r \to \infty$,有

$$|\alpha| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|_n \leq \|f\|. \tag{5.2.21}$$

所以$\|f\| = |\alpha| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha|_n$.

反之(4)式决定了空间c上的一个有界线性泛函.

注 定理说明$c^* = l^1$.

5.2.4 C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.4 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$,使得

$$f(x) = \int_a^b x(t) dv(t) \quad x \in C[a,b], \tag{5.2.22}$$

并且$\|f\| = \bigvee\limits_a^b(v)$，其中$\bigvee\limits_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之,$[a,b]$上的任一有界变差函数$v(t)$,(8)式定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

证明 对于每一个$s \in [a,b]$,χ_s表示子区间$[a,s]$上的特征函数,即:

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq s, \\ 0, & s < t \leq b. \end{cases}$$

$\chi_s \in L^\infty[a,b]$,因为$C[a,b]$是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理,可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上,设F是这样的延拓,记

$$v(s) = F(\chi_s) \quad (s \in [a,b]). \tag{5.2.23}$$

我们证明$v(s)$是$[a,b]$上的有界变差函数,对$[a,b]$做分划

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

令

$$\varepsilon_k=\mathrm{sgn}(v(t_k)-v(t_{k-1}))\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}|v(t_k)-v(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(v(t_k)-v(t_{k-1}))$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(F(\chi_{t_k})-F(\chi_{t_{k-1}}))=F(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\chi_{t_k}-\chi_{t_{k-1}}))$$
$$\le\|F\|\;\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\chi_{t_k}-\chi_{t_{k-1}})\|.$$

由于$\|F\|=\|f\|$,$\|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\chi_{t_k}-\chi_{t_{k-1}})\|=1$,我们有

$$\sum_{k=1}^{n}|v(t_k)-v(t_{k-1})|\le\|f\|,\tag{5.2.24}$$

即$v(s)$是有界变差函数,并且$\bigvee\limits_{a}^{b}\le\|f\|$.

对于任给的$x\in C[a,b]$,令

$$y(s)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)(\chi_{t_k}(s)-\chi_{t_{k-1}}(s))\quad(s\in[a,b]),$$

由(5.2.22)式,结合F是线性的,我们有

$$F(y)=\sum_{k=1}^{n}\chi(t_k)(v(t_k)-v(t_{k-1})).$$

显然$x(s)=\sum\limits_{k=1}^{n}x(s)(\chi_{t_k}(s)-\chi_{t_{k-1}}(s))$.记$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}|t_k-t_{k-1}|$,当$\delta\to 0$时,$\|y-x\|\to 0$,且由$F$ 的连续性,$F(y)\to F(x)$,于是根据$Riemann-Steiltjes$积分的定义

$$F(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

因为$x\in C[a,b]$,$F(x)=f(x)$,故(8)式成立.另一方面,由$Riemann-Steiltjes$积分的性质, 对于每一个$x\in C[a,b]$,

$$|f(x)|=|\int_a^b x(t)dv(t)|\le\|x\|\bigvee_a^b(v).$$

因此$\|f\| \le \bigvee\limits_a^b(v)$.从而$\|f\| = \bigvee\limits_a^b(v)$.

反之,如果$v(t)$是$[a,b]$上的有界变差函数,由$Riemann-Steiltjes$积分的性质,(5.2.21)式定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

注 如果我们规定$v(a) = 0$,且$v(t+0) = v(t)$ $(a < t < b)$,则由线性泛函f确定的$v(t)$是唯一确定的. 即$C[a,b]$上的线性泛函f与$V[a,b]$中的元素$v(t)$一一对应,$(C[a,b])^* = V[a,b]$.

§5.3 Riesz 定理和Hilbert 空间上的共轭算子

我们注意到：L^2 空间的共轭空间是L^2，且L^2 是一个Hilbert 空间，我们应该会考虑：对于一般的Hilbert 空间，相似的结论是否成立？

在这一节中将通过Riesz 表示定理证明:Hilbert 空间H 的共轭空间和H 在等距同构的意义下相等.

5.3.1 Riesz表示定理

定理 5.3.1 (**Riesz表示定理**)设H 是一个Hilbert 空间, f 是H 上定义的有界线性泛函, 则存在唯一的$y_f \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y_f), \ \forall x \in H, \tag{5.3.1}$$

并且

$$\|f\| = \|y_f\|. \tag{5.3.2}$$

证明 如果$f = 0$, 取$y_f = 0$ 即可. 假定$f \ne 0$, f 连续, f 的零空间$M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H \big| f(x) = 0\}$ 是H 的真闭子空间, 根据投影定理, $H = M \oplus M^\perp$. 由于$M^\perp \ne \emptyset$, 存在$x_0 \in M^\perp$ 且$\|x_0\| = 1$. 对于$\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然$f(z) = 0$, $z \in M$, $(z, x_0) = 0$, 于是我们有分解

$$x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, \tag{5.3.3}$$

其中$z \in M$, $x_0 \in M^\perp$. 在上式两边同时与x_0 作内积, 有

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{f(x)}{f(x_0)} = \frac{f(x)}{f(x_0)},$$

即

$$f(x)=f(x_0)(x,x_0)=(x,\ \overline{f(x_0)}x_0).$$

令$y_f=\overline{f(x_0)}x_0$, 我们有

$$f(x)=(x,y_f).$$

唯一性. 如果存在g_f, 使得对于任何$x\in H$, $f(x)=(x,g_f)$ 则有

$$(x,y_f)=(x,g_f),\ \forall x\in H,$$

所以$g_f=y_f$. 由于

$$\|f\|=\sup_{|x|\leqslant 1}|f(x)|=\sup_{|x|\leqslant 1}|(x,y_f)|\leqslant\|y_f\|,$$

且

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\geqslant\left|f(\frac{y_f}{\|y_f\|})\right|=(\frac{y_f}{\|y_f\|},y_f)=\|y_f\|.$$

所以$\|f\|=\|y_f\|$. □

注1 Riesz 定理显示, Hilbert空间中的连续线性泛函有一个十分简单的表示. 事实上, 当$H=\mathbb{R}^3$,

$$f(x)=ax_1+bx_2+cx_3=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{x}\ \ (\forall x\in\mathbb{R}^3),\tag{5.3.4}$$

其中$\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$, 即相应的$y_f=\overrightarrow{n}$, 它是平面$f(x)=0$ 的法向量.

注2 从证明中可知, 线性泛函f 的零空间$\mathcal{N}(f)$ 的正交补集$\mathcal{N}(f)^\perp$ 是一维的.

注3 由Riesz 表示定理, 任意的$f\in H^*$, 对应唯一的$y_f\in H$, 使$f(x)=(x,y_f)$. 另一方面, 对于任意的$y\in H$, 令

$$f_y(x)=(x,y),\quad \forall x\in H.\tag{5.3.5}$$

显然f_y 是H 上的连续线性泛函, 即$f_y\in H^*$. 于是, 我们定义了一个映射$\tau:H^*\to H$,

$$\tau(f)=y_f,\quad \forall f\in H^*,\tag{5.3.6}$$

τ 是H^* 到H 的一一对应的保范映射. τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

$$\tau(\alpha\ f_1+\beta\ f_2)=\bar{\alpha}\tau(f_1)+\bar{\beta}\tau(f_2).\tag{5.3.7}$$

在H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{5.3.8}$$

则H^* 是一个Hilbert空间, τ 是$H^* \to H$ 两个Hilbert空间之间的共轭同构映射. 如果我们对共轭同构的Hilbert空间不加区别, 于是$H^* = H$, 即H^* 在共轭同构的意义下看成与H 等同, 因此可以说Hilbert 空间是自共轭的.

5.3.2 Hilbert 空间上的共轭算子

当X 是Hilbert 空间时, 空间是自共轭的. 特别的$\mathbb{R}^n$ 空间是自共轭的，我们从注1看到，$\mathbb{R}^3$ 空间上的线性泛函和一个$\mathbb{R}^3$ 中的向量一一对应，也就是$(\mathbb{R}^3)^*$和$\mathbb{R}^3$可以看作是一个空间. 在有限维空间，我可以定义一个算子A的共轭算子A^*，即A^* 应满足

$$A^*: \qquad (Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

类似于有限维空间，我们也可以定义Hilbert 空间中有界线性算子A 的共轭算子，（用上面的Riesz表示定理，）使得共轭算子的定义与有限维空间线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义十分相似.

下面我们在Hilbert 空间H 上定义共轭算子, 设$A \in \mathcal{B}(H)$, 对于任意的$y \in H$, 易见(Ax, y) 是H 上的一个有界线性泛函 $f_{A,y}$ 且 $\| f_{A,y} \| \le \| A \| \| y \|$, 由Riesz 表示定理，存在唯一的$z \in H$，使得

$$(Ax, y) = (x, z), \quad \forall x \in H. \tag{5.3.9}$$

定义 $By = z$, 它满足：

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10a}$$

这样定义的算子 B 是线性的，事实上对于任意的 $y_1, y_2 \in H$，及 $\alpha, \beta \in K$,

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) = \overline{\alpha}(x, By_1) + \overline{\beta}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha By_1) + (x, \beta By_2) = (x, \alpha By_1 + \beta By_2).\end{aligned}$$

因此 $B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha By_1 + \beta By_2$，即 B 是线性算子. 且由Riesz 表示定理

$$\| By \| = \| z \| = \| f_{A,y} \| \le \| A \| \| y \|,$$

即由（5.3.10a）式唯一的确定了一个有界线性算子 B.

定义 5.3.2　设H 是Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H)$, 我们把由(5.3.10a)确定的有界线性算子B 称为A 的共轭算子, 记为A^*, 即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.10b}$$

如果我们把Hilbert 空间H 做为赋范空间来考虑, 根据Banach 上的共轭算子定义, 可以定义A 的Banach 共轭算子A'. 下面我们考虑这两种共轭算子定义之间的关系. 由Riesz 定理的注3, H^* 和H 在共轭同构的意义下看成是等同的, τ 是从H^* 到H 映射, $\tau(f) = y_f, f(x) = (x, y_f)$. 反之, 对于任意的$y \in H, f_y(x) = (x, y)$, 即$\tau^{-1}(y) = f_y$ 是H 上的有界线性泛函. 由(1.3.1), $A'(f_y)$ 是H 上的有界线性泛函, 由Riesz 表示定理, 存在$z \in H$, 使得$(A'(f_y))(x) = (x, z)$, 即$A'(f_y) = f_z$. 根据定义1.3.1, $f_z(x) = (A'(f_y))(x) = f_y(Ax)$, 即

$$(x, z) = (Ax, y) = (x, \tau\ A'\tau^{-1}y). \tag{5.3.11}$$

因此, 对于Hilbert空间由(5.3.10)定义的共轭算子$A^* = \tau\ A'\tau^{-1}$.

以后对于Hilbert 空间中的有界线性算子A 的共轭算子均指由(5.3.10)定义的算子A^*, 即在Hilbert 空间H 中, A 是一个有界线性算子, A 的共轭算子A^* 定义如下:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.3.12}$$

容易验证, Hilbert空间上的共轭算子满足$I^* = I$, $0^* = 0$. 由共轭算子的定义(5.5.4)我们可以证明

定理 5.3.3 设A、B 是Hilbert 空间H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子A^* 是有界线性算子, 并且$\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有$(A^*)^* = A$;

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

(3) $(AB)^* = B^*A^*$;

(4) 对于常数$\alpha \in K$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$;

(5) 若A^{-1} 存在且有界, 则$(A^*)^{-1}$ 也存在且有界, 且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1(Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2(Ax, y_2)\\ &= \overline{\alpha}_1(x, A^*y_1) + \overline{\alpha}_2(x, A^*y_2) = (x, \alpha_1 A^*y_1 + \alpha_2 A^*y_2),\end{aligned}$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y, A^*y) = (AA^*y, y) \leqslant \|AA^*y\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|A^*y\|\,\|y\|,$$

于是有$\|A^*y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$, 即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{5.3.13}$$

在(5.5.4)中用A^* 代替A, 我们可以定义$(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^*x, y) = (x, A^{**}y).$$

因此, 对于任何的$x, y \in H$, 有

$$\overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, A^*x) = \overline{(A^*x, y)}.$$

于是我们有

$$(x, Ay) = (x, A^{**}y), \quad \forall x, y \in H,$$

即$(A^*)^* = A$. 在(5.3.13)中用A^* 替换A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|.$$

因此$\|A\| = \|A^*\|$.

(2)—(4) 容易验证.

(5) 由于$A^{-1}A = AA^{-1} = I$, 根据(3)

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

即$(A^*)^{-1}$ 存在, 且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

注　十分重要的是, Hilbert 空间H 上的有界线算子A 和它的共轭算子A^* 是定义在同一个空间上的, 即A, $A^* \in \mathcal{B}(H)$. 以这样方式定义的A^* 和定义1.3.1 定义的A' 性质, 略有不同, 对于$\alpha \in K$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. 而在定义1.3.1 中, $(\alpha A)' = \alpha A'$.

推论 5.3.4　$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$.

证明　由于$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$, 同时

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*Ax\| \|x\| \leqslant \|A^*A\| \|x\|^2,$$

即$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\|$. □

§5.4　自共轭的有界线性算子

以下我们的讨论限制在Hilbert空间中. 由于在Hilbert 空间H 中, A 是从H 到H 的有界线性算子, 由(5.3.10)定义的A的共轭算子A^* 也是从H 到H 的有界线性算子, 于是可以研究和比较A 和A^* 它们是否相等, 即它是否是自共轭. 自共轭是对称的一个直接推广，对称具有许多非常好的美学性质。下面我们将看到，自共轭算子具有与对称矩阵相类似的许多性质，自共轭算子的谱分解是相对简单的.

5.4.1 有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间H 到H 的有界线性算子. 如果$A = A^*$, 则称A 是自共轭的.

注 由(5.5.4), 我们亦可以定义, 有界线性算子A 是自共轭的, 当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.4.1}$$

例 5.4.2 令$H = \mathbb{C}^n$, A 是$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的有界线性算子, 由例**??** 知

$$A = (a_{ij}),\ \ A^* = (\bar{a}_{ji}).$$

因此, A 是自共轭的充分必要条件是矩阵(a_{ij}) 和它的共轭转置矩阵$(\bar{a}_{ji})$ 相等.

注 如果在$\mathbb{R}^n$中，A 是自共轭的充分必要条件是矩阵(a_{ij})是对称的.

例 5.4.3 令$H = L^2(I)$, K 是在例**??**中定义的积分算子, $z = Kx$

$$z(s) = \int_I k(s,t)\, x(t)\ \mathrm{d}t,$$

它的共轭算子K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)} y(t)\, \mathrm{d}t,$$

即K 是自共轭的充分必要条件是$k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, $t, s \in I$.

例 5.4.4 令$H = L^2(-\infty, \infty)$, F 是在例**??**中定义的乘法算子

$$F\ :\quad x(t) \to f(t)\, x(t)\,.$$

它的共轭算子F^*

$$F^* : y(t) \to \overline{f(t)} y(t)\,,$$

当且仅当$f(t)$ 是实函数时, F 是自共轭的.

5.4.2 自共轭算子的性质

显然如果A 和B 是自共轭的, 那么$A + B$ 也是自共轭的, 并且对于任何的实数α, αA 也是自共轭的, 并且我们有

定理 5.4.5 Hilbert空间H 上的全体自共轭算子组成的集合是$\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.

证明 考虑$\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子A_n 组成的点列$A_n \to A\,(n \to \infty)$, $A \in \mathcal{B}(H)$. 由于A_n 是自共轭的, 我们有

$$\begin{aligned}
|(Ax, y) - (x, Ay)| &= |(Ax, y) - (A_n x, y) + (x, A_n y) - (x, Ay)| \\
&\leqslant |((A - A_n)x, y)| + |(x, (A_n - A)y)| \\
&\leqslant 2\,\|A_n - A\|\,\|x\|\,\|y\| \to 0 (n \to \infty),
\end{aligned}$$

即$(Ax,y)=(x,Ay)$, A 是一个自共轭算子. □

注 全体自共轭算子组成一个实的赋范线性空间, 但是在复的有界线性算子空间$\mathcal{B}(H)$ 中, 它不是$\mathcal{B}(H)$ 中的一个子空间.

定理 5.4.6 设A 、B 是Hilbert 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB=BA$.

定理 5.4.7 设A 是Hilbert空间H 上的有界线性算子, 则A 是自共轭的当且仅当对于$\forall x\in H,(x,Ax)$ 是实的.

证明 ($\Rightarrow$) 因为A 是自共轭的, 所以$(x,Ax)=(Ax,x)=\overline{(x,Ax)}$.

($\Leftarrow$) 如果$(x,Ax)=\overline{(x,Ax)}=(Ax,x)$, 对于任何的$x,y\in H$, 由直接计算我们有

$$\begin{aligned}4(x,Ay)=&(x+y,A(x+y))-(x-y,A(x-y))\\&+i(x+iy,A(x+iy))-i(x-iy,A(x-iy))\\=&(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\\&+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)\\=&4(Ax,y),\end{aligned}$$

即$A=A^*$. □

定理 5.4.8 设A 是Hilbert 空间H 中的有界自共轭算子, 则

$$\|A\|=\sup_{x\in H}\left\{|(Ax,x)|\,\middle|\,\|x\|=1\right\}=\sup_{x\in H,\ y\in H}\left\{|(Ax,y)|\,\middle|\,\|x\|=\|y\|=1\right\}.$$

证明 令$\alpha=\sup\left\{|(Ax,x)|\,\middle|\,\|x\|=1\right\}$, 因为

$$|(Ax,x)|\leqslant\|A\|\,\|x\|^2,$$

所以$\alpha\leqslant\|A\|$.

反之, 对于任何的$\beta>0$, 由于$(Ax,Ax)=\left(A^2x,x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}4\|A\|^2&=\left(A\left(\beta x+\beta^{-1}Ax\right),\beta x+\beta^{-1}Ax\right)-\left(A\left(\beta x-\beta^{-1}Ax\right),\beta x-\beta^{-1}Ax\right)\\&\leqslant\alpha\left\|\beta x+\beta^{-1}Ax\right\|^2+\alpha\left\|\beta x-\beta^{-1}Ax\right\|^2\\&=2\alpha(\beta^2\|x\|^2+\beta^{-2}\|Ax\|^2).\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

不妨设$\|Ax\|\neq0$, 令$\beta^{-2}=\dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由(5.4.2)有

$$\|A\|\leqslant\alpha.\tag{5.4.3}$$

同样令

$$\beta = \sup_{\chi \in \mathrm{H}, y \in H} \left\{ |(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1 \right\},$$

因为$|(Ax, y)| \leqslant \|A\| \|x\| \|y\|$, 所以$\beta \leqslant \|A\|$, 注意到$\alpha \leqslant \beta$, 结合(5.4.3)有$\|A\| = \alpha = \beta$. □

定理 5.4.9 Hilbert 空间H 上的投影算子P 是正交投影算子 当且仅当P 是自共轭的.

证明 ($\Rightarrow$) 当P 是正交投影算子, 则对于$\forall x \in H$, 存在唯一的$r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得$x = r + n$ 且$r \perp n$, $(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ 是实的, 由定理5.4.7知P 是自共轭的.

($\Leftarrow$) 若P 是自共轭的投影算子, 对于$\forall x \in H$, 存在唯一的$r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得$x = n + r$. $(r, n) = (Pr, n) = (r, P^* n) = (r, Pn) = (r, 0) = 0$, 即$\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$, P 是一个正交的投影算子. □

例 5.4.10 令M 是Hilbert 空间H 中的闭线性子空间, P_1, P_2 是在M 和$M^\perp$ 上的正交投影算子. 令

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2,$$

其中λ_1, λ_2 是数值, 则由定理5.4.9

$$T^* = \bar{\lambda}_1 P_1^* + \lambda_2 P_2^* = \bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2. \tag{5.4.4}$$

于是

$$T^* T = (\bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 = T T^* \tag{5.4.5}$$

从(5.4.4)知T 是自共轭的当且仅当λ_1 和λ_2 都是实的.

例 5.4.11 $H = L^2(-\infty, \infty)$, 考虑延迟算子$S_\tau : H \to H$, $(S_\tau x)(t) = x(t - \tau)$.

显然S_τ 是一个有界线性算子, 它有有界的逆算子$S_\tau^{-1} = S_{-\tau}$, 并且S_τ 是一个酉算子, 事实上

$$(S_\tau x, S_\tau y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \overline{y(t - \tau)} \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} \, \mathrm{d}t = (x, y),$$

根据酉算子的定义(见定义**??**), S_τ 是一个酉算子. 并且对于$\forall x, y \in L^2(-\infty, \infty)$,

$$(S_\tau x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \overline{y(t)} \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t + \tau)} \, \mathrm{d}t,$$

因此$(S_\tau^* y)(t) = y(t + \tau)$, 即$S_\tau^* = S_{-\tau} = S_\tau^{-1}$.

5.4.3 Cartesian 分解

定理 5.4.12 设H 是一个Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.6}$$

其中A 、B 是Hilbert空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{5.4.7}$$

显然$A = A^*$, $B = B^*$, 即A、B 是有界的自共轭算子, 且

$$T = A + iB, \quad T^* = A - iB. \tag{5.4.8}$$

可以证明这样的分解是唯一的. 事实上, 若$T = A_1 + iB_1$, 其中A_1、B_1 是自共轭的, 于是有

$$A - A_1 = i(B_1 - B),$$

这样对于$\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x)\,.$$

由于$A - A_1$ 和$B - B_1$ 是自共轭的, 上式右边是实的, 左边是纯虚数, 于是

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

即$A - A_1 = B - B_1 = 0$. □

注 (5.4.6)给出的分解$T = A + iB$, 其中A、B 是Hilbert 空间中的自共轭算子, 称为T 的Cartesian 分解.

§5.5 * Banch空间上的共轭算子，弱收敛

5.5.1 Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

在Hilbert 空间H 中, 设A 是一个从H 到H 的有界线性算子, A 的共轭算子$A^*: \ y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.1}$$

我们希望把Hilbert 空间中共轭算子这一概念推广到一般的Banach 空间上.考虑A 是从Banach 空间X_1 到X_2的线性算子, 如果X_1 和X_2 都是Hilbert 空间，$Ax \in X_2$, 对于固定的y, 由Riesz 表示定理, (Ax, y) 是X_2 上的有界线性泛函，而A^*y 通过(x, A^*y) 表示了X_1 的一个有界线性泛函. 也就是说，A 是从空间X_1 到X_2的线性算子$A:\ x \in X_1 \mapsto X_2$, 而共轭算子把$X_2$ 上的一个有界线性泛函映射成X_1 的一个有界线性泛函，即：A^* 是从${X_2}^*$ 到${X_1}^*$ 的一个映射, $A^*:\ y \in {X_2}^* \mapsto {X_1}^*$.于是我们可以给出Banach 空间上共轭算子的定义：

定义 5.5.1 设X, X_1是$Banach$空间，$T \in \mathcal{B}(X, X_1)$,对于$f \in X_1^*$,令

$$(T'f)(x) = f(Tx), \forall x \in X, \tag{5.5.2}$$

称T'是T的$Banach$共轭算子.

显然T'是从X_1^*到X的线性算子。

定理 5.5.2 T'是有界线性算子T的$Banach$共轭算子,则

(1)T'是有界线性算子,并且$||T'|| = ||T||$;

(2)对于$\alpha \in K, (\alpha T)' = \alpha T'$;

(3)$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2'$;

(4)$(T_1T_2)' = T_2'T_1'$;

(5)若T有有界的逆算子,则T'也有有界的逆算子且

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

证明 显然T'是线性算子,由于

$$\begin{aligned}|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|\|Tx\|\\ \le \|f\|\|T\|\|x\| \quad (\forall f \in X_1^*, x \in X),\end{aligned}$$

因此

$$\|T'f\| \le \|T\|\|f\| \quad (f \in X_1^*),$$

即T是有界线性算子并且$\|T'\| \le \|T\|$.

另外,如果$T \ne 0$,根据$Hahn-Banach$定理,对于$\forall Tx \ne 0$,存在$f_0 \in X_1^*$,使得

$$\|f_0\| = 1, f_0(Tx) = \|Tx\|.$$

所以

$$\|Tx\| = \|f_0(Tx)\| = |(T'f_0)(x)| \leq \|T'f_0\|\|x\| \leq \|T'\|\|f_0\|\|x\| = \|T'\|\|x\|.$$

故$\|T\| = \|T'\|$.

(2)—(4)是显然的.

(5)由于$T^{-1} \in \mathcal{B}(X_1, X)$, 因此$(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X^*, X_1^*)$.对于$x \in X$, $f \in X^*$,由定义

$$(T'(T^{-1})'f)(x) = ((T^{-1})'f)(Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

所以$T'(T^{-1})'f' = f$,即$T'(T^{-1})' = I_X$.

同样可证$(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$,即$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

注 Banach 空间上共轭算子的性质(4)和Hilbert 空间上共轭算子的性质(定理5.3.3 (4))有差别，这里是$(\alpha T)' = \alpha T'$, 在Hilbert 空间上共轭算子满足的是$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (共轭齐次).

下面我们考虑$Banach$共轭算子和Hilbert 空间上共轭算子这两种共轭算子之间的关系.

由Riesz 定理的注3, H^* 和H 在共轭同构的意义下看成是等同的, τ 是从H^* 到H 映射, $\tau(f) = y_f, f(x) = (x, y_f)$.

反之, 对于任意的

$$y \in H, f_y(x) = (x, y),$$

即$\tau^{-1}(y) = f_y$ 是H 上的有界线性泛函.在(**??**)中, $A'(f_y)$ 是H 上的有界线性泛函, 由Riesz 表示定理, 存在$z \in H$, 使得

$$(A'(f_y))(x) = (x, z),$$

即

$$A'(f_y) = f_z.$$

根据定义**??**,

$$f_z(x) = (A'(f_y))(x) = f_y(Ax),$$

即

$$(x, z) = (Ax, y) = (x, \tau\ A'\tau^{-1}y). \tag{5.5.3}$$

因此, 对于Hilbert空间由(**??**)定义的共轭算子$A^* = \tau\ A'\tau^{-1}$.

以后对于Hilbert 空间中的有界线性算子A 的共轭算子, 均指由定义5.3.2 定义的算子A^*, 即在Hilbert 空间H 中, A 是一个有界线性算子, A 的共轭算子A^* : $y \in H \mapsto A^*y$ 由下式定义:

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.5.4}$$

5.5.2 自反性

设X是一个赋范空间,K是数域,$X^* = \mathcal{B}(X, K)$是它的共轭空间,X^*是一个$Banach$空间,因此它也有共轭空间,记$X^{**} = (X^*)^*$,称X^{**}为X的二次共轭空间.

我们知道$(L^p)^* = L^q(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$,且$(L^q)^* = L^p$, 即$(L^p)^{**} = L^p$.下面对于一般的$Banach$空间,研究$X$与$X^{**}$的关系.

设$x \in X$,$f \in X^*$,如果把x固定,f取遍X^*,这的$f(x)$定义了X^*上的一个有界线性泛函. 即对于每一个$x \in X$,对应于X^{**}中的一个元素F_x,$F_x(f) = f(x) \quad (f \in X^*)$.称映射$F_x : X \to X^{**}$是典型映射.可以验证,对任意的$x_1, x_2 \in X, a \in K$

$$F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}; F_{\alpha x} = \alpha F_x,$$

并且对于每一个$f \in X^*$有

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|,$$

即$\|F_x\| \leq \|x\|$.另一方面,由$Hahn-Banach$定理,对于$x \in X$, 存在$f_0 \in X^*$,使得$\|f_0\| = 1$,$f(x_0) = \|x\|$.于是$\|F_x\| \geq |F_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|$,即$\|F_x\| \geq \|x\|$,所以$\|F_x\| = \|x\|$. 这样在典型映射下空间$X$与$X^{**}$的一个子空间等距同构,如果$X$是$Banach$空间.则可以把$X$看成是$X^{**}$的一个闭子间.

一般地,在典型映射下,$X \neq X^{**}$,如果$X = X^{**}$,则称空间X是自反的, 在典型映射下X与X^{**}等距同构.但在X与X^{**}之间存在等距同构映射, X不一定是自反的.

可以证明$L^p(1 < p < \infty)$是自反的；$l^p(1 < p < \infty)$是自反的,R^n是自反的. 但是L^1不是自反的.事实上$L^1[0, 1]$不是任何$Banach$空间的共轭空间,即不存在$Banach$空间X,使得$L^1[0, 1]$与X^*等距同构.

定理 5.5.3 $C[a, b]$不是自反的.

证明 假设$C[a, b]$自反,则对于有界变差函数空间$V[a, b]$上的任一个有界线性泛函, 必存在$x \in C[a, b]$,使得它具有的$F_x(f) = f(x)$形式,由定理5.2.3

$$F_x(f) = f(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

对于每一个$f \in (C[a,b])^*$,我们用$f(t)$表示相应的有界变差函数,考虑泛函

$$F_{x_0}(f) = f(t_0+0) - f(t_0-0), \tag{5.5.5}$$

显然它是线性的,并且

$$|F_{x_0}(f)| = |f(t_0+0) - f(t_0-0)| \leq \bigvee_a^b (f) = \|f\|,$$

即$F_{x_0}(f)$有界且$\|F_{x_0}\| \leq 1$.此外由于$\|F_{x_0}\| \neq 0$, 于是存在$x_0 \in C[a,b]$,使得

$$F_{x_0}(f) = \int_a^b x_0(t)df(t). \tag{5.5.6}$$

考虑函数

$$f_0(t) = \int_a^t x_0(\tau)d\tau,$$

$f_0(t)$在$[a,b]$上连续,根据(5.3.2)式,$F_{x_0}(f_0) = 0$,但是另一方面, $\|F_{x_0}\| \neq 0$,所以$x_0 \neq 0$,且由(5.3.3)式

$$F_{x_0}(f_0) = \int_a^b x_0(t)df_0(t) = \int_a^b x_0^2(t)dt > 0,$$

矛盾.因此$C[a,b]$不是自反的.

5.5.3 弱收敛

我们可以通过共轭空间来刻画空间本身的性质.在这里,我们通过共轭空间给出空间中的另一种收敛方式.

定义 5.5.4 设X是赋范空间,$x_0, x_n \in X (n = 1, 2, \cdots)$.如果对于任意的$f \in X^*$, 有$f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$, 则称$\{x_n\}$弱收敛到x_0.记为$x_n \xrightarrow{w} x_0 (n \to \infty)$, 称$x_0$为$\{x_n\}$的弱极限.

注1 弱极限的极限是唯一的.

事实上,如果$x_n \xrightarrow{w} x_0$,且$x_n \xrightarrow{w} y_0$,则对于任意的$f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$及$f(x_n) \to f(y_0)$, 因此$f(x_0 - y_0) = 0$.由$Hahn - Banach$定理,$x_0 = y_0$.

注2 如果$\{x_n\}$弱收敛,则$\{\|x_n\|\}$有界.

由于$\{x_n\}$弱收敛,则对于任意的$f \in X^*$,$\{f(x_n)\}$收敛, 在典型映射下我们把$x_n (n = 1, 2, \cdots)$看成X^{**}中的元素, 于是由一致有界原则得$\{\|x_n\|\}$有界.

注3 如果$\{x_n\}$强收敛到x_0,则$\{x_n\}$必弱收敛到x_0,反之则不然.

因为对于任意的$f \in X^*$

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| &= |f(x_n - x_0)| \\ &\leq \|f\|\|x_n - x_0\| (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

如果$\|x_n - x_0\| \to 0(n \to \infty)$,则对每一个$f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$, 即$x_n \xrightarrow{w} x_0$.

反之,我们在l^2中考虑:取$x_n = \{0, \cdots, 1, 0, \cdots\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$, 则对每一个$f \in (l^2)^*$,存在$\{\xi_k\} \in l^2$,使得

$$f(x_n) = \xi_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即$\{x_n\}$弱收敛到0。但是当$m \neq n$时，$\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$，$\{x_n\}$不强收敛到0。

下面我们考虑一些具体空间中的弱收敛性。

定理 5.5.5 在空间R^n中强收敛与弱收敛等价.

证明留给读者.

定理 5.5.6 空间$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$弱收敛到$x_0 \in C[a,b]$，当且仅当

(1)$\{\|x_n\|\}$有界;

(2)$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上逐点收敛于$x_0(t)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0$.由弱收敛定义的注2，知(1)成立，其次，对每一个$t_0 \in [a,b]$，定义泛函f_0:

$$f_0(x) = x(t_0), (x \in C[a,b]),$$

显然f_0是$C[a,b]$上的有界线性泛函，于是对于每一个$t_0 \in [a,b]$，

$$x_n(t_0) = f_0(x_n) \to f_0(x_0) = x_0(t_0) \quad (n \to \infty)$$

即条件(2)成立.

反之，设f是$C[a,b]$上的仅一有界线性泛函，由定理5.2.3存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x \in C[a,b]).$$

如果$\{x_n\}$满足条件(1)和(2)，应用控制收敛定理有

$$\int_a^b x_n(t)dv(t) \to \int_a^b x(t)dv(t) \qquad (n \to \infty)$$

从而$f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$，即$x_n \xrightarrow{w} x_0$ $(n \to \infty)$.

定理 5.5.7 空间$L^p[a,b](p > 1)$中点列$\{x_n\}$弱收敛到x_0，当且仅当

(1)$\{\|x_n\|\}$有界;

(2)对于每一个$t \in [a,b]$，$\int_b^t x_n(\tau)d\tau \to \int_a^\tau x_0(\tau)d\tau$ $(n \to \infty)$.

证明 设$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则(1)成立. 为了证明(2)成立，对每一个$t\in[a,b]$，做函数

$$y_t(\tau)=\begin{cases}1 & a\le\tau\le t,\\ 0 & t<\tau\le b.\end{cases}$$

$y_t(\tau)$做为τ的函数属于$L^q[a,b]$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.于是由定理5.3.1

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)y_t(\tau)d\tau=\int_a^t x(\tau)d\tau \quad (x\in C[a,b]), \tag{5.5.8}$$

定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函f.因此

$$\int_a^t x_n(\tau)d\tau\to\int_a^t x_0(\tau)d\tau \quad (n\to\infty)$$

即条件(2)成立.

反之,设$\{x_n\}$满足条件(1)和(2),条件(2)等价于

$$\int_a^b x_n(\tau)y_t(\tau)d\tau\to\int_a^b x_0(\tau)y_t(\tau)d\tau\ (n\to\infty). \tag{5.5.9}$$

于是对于任一阶梯函数

$$y(\tau)=\sum_{i=1}^k a_i y_{t_i}(\tau),$$

其中k为任一自然数,$t_1<t_2<\cdots<t_k$,为$[a,b]$中任意k个点,$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为任意k个数,有

$$\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)d\tau\to\int_a^b x_0(\tau)y(\tau)d\tau\ (n\to\infty).$$

而形如$y(\tau)$的阶梯函数全体在$L^q[a,b]$中稠密,由定理4.3.2,对于任意的$y\in L^q[a,b]$,上式成立,即$\{x_n\}$弱收敛到x_0.

习题 5

1. 设X为线性赋范空间, $x,y\in X$, 若对$\forall\ f\in X^*$, 有$f(x)=f(y)$.证明$x=y$.
2. 设$\{x_k\}$是$(X,\|\cdot\|)$中线性无关元, $\{\alpha_k\}\subset K$, 这里K代表数域. 证明存在$f\in X^*$, 满足

   (1) $f(x_k)=\alpha_k,\ k=1,\cdots,n$;

   (2) $\|f\|\le M$的充要条件是：对$\forall\ \{\beta\}\subset K$, 有

$$|\sum_{k=1}^n\alpha_k\beta_k|\le\ M\|\sum_{k=1}^n\beta_k x_k\|$$

3. 设X为线性赋范空间, 证明：当X为无限维空间时, X^*也是无限维空间.

4. 证明当$1 < p < +\infty$时, $(l^p)^* = l^q$, 其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 即$f \in (l^p)^*$. 当且仅当存在$a = a\{a_i\} \in l^q$, 使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,\ \forall\ x = \{x_i\} \in l^p.$$

且$\|f\| = \|a\|$.

5. 类似于第4题, 证明$(l^1)^* = l^\infty$, $(C_0)^* = l^1$, 其中C_0是l^∞中收敛于零的数列全体组成的子空间.

6. 设X为线性赋范空间, 线性算子$A : X \to X, D(A) = X$, 线性算子$B : X^* \to X^*, D(B) = X^*$.如果

$$(Bf)(x) = f(Ax),\ \forall\ x \in X,\ f \in X^*,$$

证明A, B都是有界线性算子.

7. 设X为Banach空间, $\{f_i\} \subset X^*$. 证明对任何$x \in X$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mid f_i(x) \mid < +\infty$ 的充要条件事对任何$F \in X^{**}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mid F(f_i) \mid < +\infty$.

8. 证明$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$弱收敛于x的充要条件是存在常数M, 使得$\|x_n\| \leq M$ $(\forall\ n)$, 并且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, $\forall\ t \in [a,b]$.

9. 设X是Hilbert空间, 令$f_k(x) = (x, y_k)$, $k = 1, 2$, $x, y_k \in X$, 在X^*中定义

$$(f_1, f_2) = \overline{(y_1, y_2)}.$$

证明X^*也是Hilbert空间.

10. 证明自反的Banach空间X是可分的充要条件是X^*是可分的.

11. 证明l^1中任何弱收敛的点列必是强收敛的.

12. 设X是赋范线性空间, M为X的闭线性子空间.证明：如果$\{x_n\} \subset M$, 并且当$n \to \infty$时$x_0 =$ (弱) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则$x_0 \in M$.

13. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的.

14. 证明Banach空间X是自反的充要条件是X^*是自反的.

15. 自反空间X中的任何有界集必弱列紧.

16. 设$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ 是$\mathbb{R}^n$的基.对于$x \in \mathbb{R}^n$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 如果在$\mathbb{R}^n$上定义的范数为

(1) $\|x\| = \sup_{1\leq k\leq n} \mid \xi_k \mid$; (2) $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} \mid \xi_k \mid$. 试分别求出$(\mathbb{R}^n)^*$的范数.

17. 证明空间$L^1[a,b]$及l^1不是自反的.

18. 设$\{x_n\} \subset L^p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$. 证明对于每一个$y \in L^q[a,b]$$(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $\int_a^b x_n(t)y(t)dt \to 0 (n \to \infty)$. 当且仅当$\sup_n \|x_n\| < \infty$并且对于每一个可测子集$E \subset [a,b]$, $\int_E x_n(t)dt \to 0 (n \to \infty)$.

19. 设$\{x_k\}$是Banach空间X中的点列.证明如果对于每一个$f \in X^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mid f(x_k) \mid < \infty$, 则存在常数$M$, 使得对于每一个$f \in X^*$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid f(x_k) \mid \leq M\|f\|.$$

20. 设X是Banach空间, $p(x)$是X上的线性泛函, 满足

(1) $p(x) \geq 0$; (2) 当$\alpha \geq 0$时, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, 并且当$x, x_n \in X, x_n \to x(n \to \infty)$时, $\underline{\lim}_n p(x_n) \geq p(x)$. 证明存在常数$M$, 使得$p(x) \leq M\|x\|$ $(x \in X)$.

21. 设$(X, \|\cdot\|)$是可分的赋范空间. 证明存在可数子集$M \in X^*$, 使得对于每一个$x \in X$, $\|x\| = \sup_{f \in M} \mid f(x) \mid$

22. 设$\varphi(x, y)$是Hilbert空间H上的一个共轭双线性形, 满足

(1) $\exists\ M > 0$, 使得$\mid \varphi(x, y) \mid \leq M\|x\|\ \|y\|$;

(2) $\exists\ \delta > 0$, 使得$\mid \varphi(x, y) \mid \geq \delta\|x\|^2$.

证明对$\forall f \in H^*$, 存在唯一的元素$y_f \in H$, 使得

$$\varphi(x, y_f) = f(x), \forall x \in H,$$

并且y_f依赖于f.

23. 设T_n是$L^p(\mathbb{R})(1 < p < \infty)$到自身的平移算子:

$$(T_n f)(x) = f(x+n),\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}), n = 1, 2, \cdots.$$

证明$T_n \xrightarrow{w} 0$, 但是$\|T_n f\|_p = \|f\|_p, \forall f \in L^p(\mathbb{R})$.

24. 设H为Hlibert空间, $x_0, x_n \in H(n = 1, 2, \cdots)$, 当$n \to \infty$时, $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 且$\|x_n\| \to \|x_0\|$.证明$x_n \to x_0(n \to \infty)$.

25. 设X是自反的Banach空间, M是X中的有界闭凸集.对于$\forall f \in X^*$, 证明f在M上达到最大值和最小值.

26. 设H是Hilbert空间, 并设在H中$x_n \to x_0, y_n \xrightarrow{w} y_0$, 证明$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

27. 证明Banach空间中闭凸集是弱闭的.即若M是闭凸集, $\{x_n\} \subset M$, 且$x_n \xrightarrow{w} x_0$, 则有$x_0 \in M$.

28. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$, 并设T^{-1}存在且$T^{-1} \in \mathfrak{B}(Y, X)$. 证明(1) $(T^*)^{-1}$存在, 且$(T^*)^{-1} \in \mathfrak{B}(X^*, Y^*)$; (2) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

29. 设X, Y是Banach空间, T是X到Y的线性算子; 又设$\forall f \in Y^*$, $x \to f(Tx)$是X上的有界线性泛函.证明T是连续的.

30. 试求下列定义在l^p 上的线性算子的共轭算子:

(1) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{0, x_1, x_2, \cdots\}$;

(2) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots\}$, 其中$\{\alpha_k\}$ 是有界数列;

(3) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots\}$, 其中$n$ 是给定的;

(4) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \cdots\}$, 其中$\{\alpha_k\}$ 是有界数列. n 是给定的.

31. 试求下列在$L^2(-\infty,\infty)$ 上定义的线性算子的共轭算子:

(1) $(Tx)(t)=x(t+h)$(h 是给定的实数);

(2) $(Tx)(t)=a(t)x(t+h)$ ($a(t)$ 是有界可测函数, h 是给定的实数);

(3) $(Tx)(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

32. 设L 是从l_2 到l_2 的线性算子, 即$(y_1,y_2,\cdots)=L(x_1,x_2,\cdots)$, 其中

$$y_n=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n^2}.$$

证明L 是有界线性算子且$\|L\|\leqslant(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$, 并求出$L^*$.

33. 设$T:l_2\to l_2$,

$$T(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots).$$

求T^*.

34. 设L 是Hilbert 空间H 到H 上的有界线性算子, 证明L 是等距的当且仅当L^* 是等距的.

35. 设$(H_1,(\cdot,\cdot)),(H_2,(\cdot,\cdot)_2)$ 是Hilbert 空间, $L:H_1\to H_2$ 是有界线性算子. 定义$L^*:H_2\to H_1$, $(y,Lx)_2=(L^*y,x)_1$, $\forall x\in H_1,y\in H_2$. 证明

(1) L^* 是有界线性算子;

(2) $L=L^{**}$;

(3) $\|L\|=\|L^*\|$;

36. 设L 是Hilbert 空间H 上的有界线性算子. 证明下列关系式

$$\mathcal{N}(L^*)=\mathcal{N}(LL^*);\ \overline{\mathcal{R}(L)}=\overline{\mathcal{R}(LL^*)}.$$

37. 设$\{\eta_n\}$ 为一数列, 若对一切$x=\{\xi_n\}\in l^q$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$ 收敛, 则$\{\eta_n\}\in l^p$. (当$1<q<\infty$ 时, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; 当$q=1$ 时, $p=+\infty$; 当$q=+\infty$ 时, $p=1$.)

38. 设$f(t)$ 是$[a,b]$ 上的可测函数, 如果对于任意$g(t)\in L^q[a,b]$ $(1\leqslant q\leqslant+\infty)$, 有$f(t)g(t)\in L[a,b]$, 则$f(t)\in L^p[a,b]$ (这里的p,q 与上题相同).

39. 设X 为线性赋范空间, X^* 是X 的共轭空间, $x_n,x\in X$, $f_n,f\in X^*$. 若$x_n\xrightarrow{w}x$, $f_n\xrightarrow{w}f$, 则$f_n(x_n)\to f(x)\,(n\to\infty)$.

40. 若$T_n,T\in\mathcal{B}(X,Y)\,(n=1,2,\cdots)$, 当$\|T_n-T\|\to 0$ 时, $\|T_n^*-T^*\|\to 0$ $(n\to\infty)$.

41. 设X、Y 都是赋范线性空间, $T\in\mathcal{B}(X,Y)$. 证明T 是由X 到Y 上的等距同构映射的充要条件是T' 为由Y^* 到X^* 上的等距同构映射, 这里T' 是T 的Banach 共轭算子.