

 内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主讲 孙炯教授

电话: 0471-4992491 (H) , 13947103671
Emai: masun@imu.edu.cn

§ 3 紧线性算子

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，
紧算子有着十分广泛的应用背景.

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，
紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。

它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

一、紧线性算子的定义和例

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。

它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

一、紧线性算子的定义和例

定义 6.3.1 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 如果对于 X 中的任何有界子集 A , T 关于 A 的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称 T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子。

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。

它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

一、紧线性算子的定义和例

定义 6.3.1 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 如果对于 X 中的任何有界子集 A , T 关于 A 的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称 T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子。

注1 T 是紧的, 当且仅当对于任何的有界点列 $\{x_n\} \subset X$, 点列 $\{Tx_n\}$ 一定包含一个收敛的子列。

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

一、紧线性算子的定义和例

定义 6.3.1 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 如果对于 X 中的任何有界子集 A , T 关于 A 的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称 T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子。

注1 T 是紧的, 当且仅当对于任何的有界点列 $\{x_n\} \subset X$, 点列 $\{Tx_n\}$ 一定包含一个收敛的子列。

注2 T 是紧的, 则 T 一定是有界的,

§ 3 紧线性算子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子，很多积分算子都是紧算子，紧算子有着十分广泛的应用背景。

紧算子在某种意义上，性质十分相近于有限维空间的线性算子。

它的结构，特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构非常相似，可以把紧算子看成是有限维空间线性算子的一种直接推广。

一、紧线性算子的定义和例

定义 6.3.1 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 如果对于 X 中的任何有界子集 A , T 关于 A 的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称 T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子。

注1 T 是紧的, 当且仅当对于任何的有界点列 $\{x_n\} \subset X$, 点列 $\{Tx_n\}$ 一定包含一个收敛的子列。

注2 T 是紧的, 则 T 一定是有界的,

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

特别的, \mathbb{R}^n 上定义的线性算子都是紧算子.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

特别的, \mathbb{R}^n 上定义的线性算子都是紧算子.

如果 T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 6.3.3 设 $X = Y = l^2$, I 是从 l^2 到 l^2 的恒等算子,

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

特别的, \mathbb{R}^n 上定义的线性算子都是紧算子.

如果 T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 6.3.3 设 $X = Y = l^2$, I 是从 l^2 到 l^2 的恒等算子,

I 是连续线性算子, 但是 I 不是紧的.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

特别的, \mathbb{R}^n 上定义的线性算子都是紧算子.

如果 T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 6.3.3 设 $X = Y = l^2$, I 是从 l^2 到 l^2 的恒等算子,

I 是连续线性算子, 但是 I 不是紧的.

因为 $\{e_n\}$ 是有界的, 但其中没有收敛的子列, 其中 $e_n = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)_n$.

否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 6.3.2 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的.

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的.

特别的, \mathbb{R}^n 上定义的线性算子都是紧算子.

如果 T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 6.3.3 设 $X = Y = l^2$, I 是从 l^2 到 l^2 的恒等算子,

I 是连续线性算子, 但是 I 不是紧的.

因为 $\{e_n\}$ 是有界的, 但其中没有收敛的子列, 其中 $e_n = (0, 0, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0)$.

从紧算子、紧集、完全有界集的定义我们有

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

(1) T 是紧的线性算子;

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

(1) T 是紧的线性算子;

(2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;
- (4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;
- (4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;
- (5) 对于 X 中的任何有界集 A , $T(A)$ 是 Y 中的完全有界集.

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;
- (4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;
- (5) 对于 X 中的任何有界集 A , $T(A)$ 是 Y 中的完全有界集.

例 6.3.5 在 $C[a, b]$ 中 考虑积分算子 K :

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad (6.3.1)$$

其中 $k(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$, 那么 K 是紧算子.

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;
- (4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;
- (5) 对于 X 中的任何有界集 A , $T(A)$ 是 Y 中的完全有界集.

例 6.3.5 在 $C[a, b]$ 中 考虑积分算子 K :

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad (6.3.1)$$

其中 $k(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$, 那么 K 是紧算子.

证明 事实上, 令 $M = \max \{|k(t, s)| \mid (t, s) \in [a, b] \times [a, b]\}$,

定理 6.3.4 设 X 、 Y 是 *Banach 空间*, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列的叙述是等价的:

- (1) T 是紧的线性算子;
- (2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;
- (3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;
- (4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;
- (5) 对于 X 中的任何有界集 A , $T(A)$ 是 Y 中的完全有界集.

例 6.3.5 在 $C[a, b]$ 中 考虑积分算子 K :

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad (6.3.1)$$

其中 $k(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$, 那么 K 是紧算子.

证明 事实上, 令 $M = \max \{ |k(t, s)| \mid (t, s) \in [a, b] \times [a, b] \}$,
那么对于所有的 $x \in C[a, b]$, $\|Kx\| \leq M(b-a)\|x\|$.

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

因此 $\{Kx | x \in C[a, b], x \in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的,

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

因此 $\{Kx | x \in C[a, b], x \in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的,

由 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是 $C[a, b]$ 中的紧集. 于是 K 是一个紧算子. □

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

因此 $\{Kx | x \in C[a, b], x \in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的,

由 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是 $C[a, b]$ 中的紧集. 于是 K 是一个紧算子. □

例 6.3.6 设 $H = l^2$, 令 K 为从 H 到 H 的线性变换, 定义为 $y = Kx$,

$$y_n = \alpha_n x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{6.3.2}$$

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

因此 $\{Kx | x \in C[a, b], x \in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的,

由 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是 $C[a, b]$ 中的紧集. 于是 K 是一个紧算子. □

例 6.3.6 设 $H = l^2$, 令 K 为从 H 到 H 的线性变换, 定义为 $y = Kx$,

$$y_n = \alpha_n x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{6.3.2}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, α_n 是数值.

于是如果 $B \subset C[a, b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$ 是有界集.

同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ 和 $\forall x \in C[a, b]$ 有

$$\begin{aligned} |(Kx)(t_1) - (Kx)(t_2)|^2 &= \left| \int_a^b [k(t_1, s) - k(t_2, s)]x(s) \, ds \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |k(t_1, s) - k(t_2, s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

注意到 $k(t, s)$ 是连续的,

因此 $\{Kx | x \in C[a, b], x \in B\}$ 是等度连续的, 并且是一致有界的,

由 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是 $C[a, b]$ 中的紧集. 于是 K 是一个紧算子. □

例 6.3.6 设 $H = l^2$, 令 K 为从 H 到 H 的线性变换, 定义为 $y = Kx$,

$$y_n = \alpha_n x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{6.3.2}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, α_n 是数值.

则 K 是一个紧算子当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \tag{6.3.3}$$

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

于是对于 $m \neq k$

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_m}|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

于是对于 $m \neq k$

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_m}|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

这与 $\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

于是对于 $m \neq k$

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_m}|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

这与 $\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

另一方面, 假如 (6.3.3) 式 成立, 对于 $D = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$, 我们证明
 $A = K(D)$ 是紧的.

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

于是对于 $m \neq k$

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_m}|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

这与 $\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

另一方面, 假如 (6.3.3) 式 成立, 对于 $D = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$, 我们证明

$A = K(D)$ 是紧的.

因为 $\{\alpha_n\}$ 收敛到零, 于是 $\|Kx\| \leq \{\max |\alpha_n|\} \|x\|$,

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \neq 0$,

那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$,
使得对于任何的 k , 有 $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \dots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1 \delta_{1n_k}, \alpha_2 \delta_{2n_k}, \dots) = (0, 0, \dots, \alpha_{n_k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$

于是对于 $m \neq k$

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_m}|^2 \geq 2\varepsilon^2,$$

这与 $\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

另一方面, 假如 (6.3.3) 式 成立, 对于 $D = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$, 我们证明
 $A = K(D)$ 是紧的.

因为 $\{\alpha_n\}$ 收敛到零, 于是 $\|Kx\| \leq \{\max |\alpha_n|\} \|x\|$,
即 A 是有界的. 且对于 $\forall y \in A$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 **Hilbert 空间** $H = L^2[a, b]$ 中的两组正交集,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 **Hilbert 空间** $H = L^2[a, b]$ 中的两组正交集, 线性算子 K :

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \phi_n(t) \int_a^b x(\tau) \bar{\varphi}_n(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau) \right) x(\tau) d\tau = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 **Hilbert 空间** $H = L^2[a, b]$ 中的两组正交集, 线性算子 K :

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \phi_n(t) \int_a^b x(\tau) \bar{\varphi}_n(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau) \right) x(\tau) d\tau = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中 $k(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau)$, 则 K 是紧的当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 **Hilbert 空间** $H = L^2[a, b]$ 中的两组正交集, 线性算子 K :

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \phi_n(t) \int_a^b x(\tau) \bar{\varphi}_n(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau) \right) x(\tau) d\tau = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中 $k(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau)$, 则 K 是紧的当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

例 6.3.8 考虑 $L^2[a, b]$ 上的乘法算子

$$F : x(t) \rightarrow f(t)x(t),$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 \leq \max_{N \leq n} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (6.3.4)$$

因此, $\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. \square

用相似的方法, 可以证明:

例 6.3.7 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 **Hilbert 空间** $H = L^2[a, b]$ 中的两组正交集, 线性算子 K :

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \phi_n(t) \int_a^b x(\tau) \bar{\varphi}_n(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau) \right) x(\tau) d\tau = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中 $k(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(t) \bar{\varphi}_n(\tau)$, 则 K 是紧的当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

例 6.3.8 考虑 $L^2[a, b]$ 上的乘法算子

$$F : x(t) \rightarrow f(t)x(t),$$

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$,
可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$,
可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$,
可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$,
特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

若 $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.5)$$

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

若 $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.5)$$

设 $B \subset X$ 是一个有界集, 因为 T_{n_0} 紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 是 Y 中的紧子集,

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

若 $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.5)$$

设 $B \subset X$ 是一个有界集, 因为 T_{n_0} 紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 是 Y 中的紧子集, 对 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 取 $\frac{\varepsilon}{2}$ — 网, 记为 $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$,

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

若 $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.5)$$

设 $B \subset X$ 是一个有界集, 因为 T_{n_0} 紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 是 Y 中的紧子集, 对 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 取 $\frac{\varepsilon}{2}$ — 网, 记为 $\{y_1, y_2 \dots, y_m\}$,

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leq \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

二、紧线性算子的性质

定义 6.3.9 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X, Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 6.3.10 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是 $\mathcal{B}(X, Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, 即 $\mathcal{K}(X, Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间.

若 $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$ 且 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.5)$$

设 $B \subset X$ 是一个有界集, 因为 T_{n_0} 紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 是 Y 中的紧子集, 对 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 取 $\frac{\varepsilon}{2}$ — 网, 记为 $\{y_1, y_2 \dots, y_m\}$,

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

由于 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \varepsilon),$$

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

由于 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \varepsilon),$$

即 $\overline{T_{(B_1)}}$ 紧, T 是一个紧算子.

□

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

由于 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \varepsilon),$$

即 $\overline{T_{(B_1)}}$ 紧, T 是一个紧算子.

□

例 6.3.11 设 $k(t, s) \in L^2(I)$, 其中 $I = \{(t, s) \mid a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\}$, 则积分算子

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds, \quad x \in L^2[a, b] \tag{6.3.6}$$

是从 $L^2[a, b]$ 到自身的紧算子.

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

由于 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \varepsilon),$$

即 $\overline{T_{(B_1)}}$ 紧, T 是一个紧算子.

□

例 6.3.11 设 $k(t, s) \in L^2(I)$, 其中 $I = \{(t, s) \mid a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\}$, 则积分算子

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds, \quad x \in L^2[a, b] \quad (6.3.6)$$

是从 $L^2[a, b]$ 到自身的紧算子.

证明 由于

$$\phi_n(t) = (b-a)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(2\pi i n \frac{t-a}{b-a}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

是 $L^2[a, b]$ 的一组正交基,

我们有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$, 其中 $S(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = \{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$.

由于 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ -网, 结合 (6.3.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^m S(y_i, \varepsilon),$$

即 $\overline{T_{(B_1)}}$ 紧, T 是一个紧算子.

□

例 6.3.11 设 $k(t, s) \in L^2(I)$, 其中 $I = \{(t, s) \mid a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\}$, 则积分算子

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds, \quad x \in L^2[a, b] \tag{6.3.6}$$

是从 $L^2[a, b]$ 到自身的紧算子.

证明 由于

$$\phi_n(t) = (b-a)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(2\pi i n \frac{t-a}{b-a}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

是 $L^2[a, b]$ 的一组正交基,

$$\phi_{n,m}(t, s) = \phi_n(t)\overline{\phi_m(s)}$$

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 $T_1 T_2$ 是紧的.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 $T_1 T_2$ 是紧的.

(2) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 $T_1 T_2$ 是紧的.

(2) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的.

(3) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^* 是紧的.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 $T_1 T_2$ 是紧的.

(2) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的.

(3) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^* 是紧的.

证明 (1) 只须注意有界线性算子把有界集变为有界集, 把收敛的序列变为收敛的序列.

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N - K\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

其中

$$K_N = \sum_{|n|, |m| \leq N} (k, \phi_{n,m}) \phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2n+1$ 维的, 根据定理6.3.2 和定理6.3.10 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert–Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定理 6.3.12 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ $T_2 \in \mathcal{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 $T_1 T_2$ 是紧的.

(2) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的.

(3) $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^* 是紧的.

证明 (1) 只须注意有界线性算子把有界集变为有界集, 把收敛的序列变为收敛的序列.

(2) 如果 T 是紧的, 由 (1) 有 T^*T 紧的.

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

即 T 是紧的.

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

即 T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由 (2) 知 T^* 是紧的. □

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

即 T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由 (2) 知 T^* 是紧的. □

注 事实上, 定理6.3.2、 6.3.10、 6.3.12 意味着全体紧算子是 Banach 代数 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个非零的闭的双边理想.

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

即 T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由 (2) 知 T^* 是紧的. □

注 事实上, 定理6.3.2、 6.3.10、 6.3.12 意味着全体紧算子是 Banach 代数 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个非零的闭的双边理想.

对于紧的线性算子, 我们有以下性质

定理 6.3.13 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的充要条件是: 如果 x_n 弱收敛零 ($x_n \xrightarrow{w} 0$), 则 $\{Tx_n\}$ 按范数收敛到零, 即 $Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 6.3.13 有 $T^*Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
注意 $\{x_n\}$ 有界, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \rightarrow 0, \quad (6.3.7)$$

即 T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由 (2) 知 T^* 是紧的. □

注 事实上, 定理6.3.2、 6.3.10、 6.3.12 意味着全体紧算子是 Banach 代数 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个非零的闭的双边理想.

对于紧的线性算子, 我们有以下性质

定理 6.3.13 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, T 是紧的充要条件是: 如果 x_n 弱收敛零 ($x_n \xrightarrow{w} 0$), 则 $\{Tx_n\}$ 按范数收敛到零, 即 $Tx_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots . \quad (6.3.8)$$

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (6.3.8)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列,

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (6.3.8)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列,
不妨设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (6.3.8)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列,

不妨设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛到零, 所以对于 $\forall y \in H$,

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^*y) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (6.3.8)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列,

不妨设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛到零, 所以对于 $\forall y \in H$,

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^*y) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

即 $\{Tx_{n_k}\}$ 弱收敛到零. 于是

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = w - \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = 0, \quad (6.3.9)$$

与 (6.3.8) 矛盾.

证明 设 T 是紧的, 如果 Tx_n 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (6.3.8)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列,

不妨设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛到零, 所以对于 $\forall y \in H$,

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^*y) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

即 $\{Tx_{n_k}\}$ 弱收敛到零. 于是

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = w - \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = 0, \quad (6.3.9)$$

与 (6.3.8) 矛盾.

反之, 如果 $w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 成立.

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 6.3.2 和定理 6.3.10, 及
 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 可知 T 是紧算子.

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 6.3.2 和定理 6.3.10, 及
 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 可知 T 是紧算子.

反之, 如果 T 是紧的, 我们首先证明 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 6.3.2 和定理 6.3.10, 及
 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 可知 T 是紧算子.

反之, 如果 T 是紧的, 我们首先证明 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

令 $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ (A 是一个指标集) 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的一个正交基,

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 6.3.2 和定理 6.3.10, 及
 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 可知 T 是紧算子.

反之, 如果 T 是紧的, 我们首先证明 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

令 $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ (A 是一个指标集) 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的一个正交基,
因为 T 是紧的, 根据 定理 6.3.13, 对于 A 中的每一个序列
 $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n \neq \alpha_m, n \neq m$), $Te_{\alpha_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

我们考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 可知存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n_k} - x) = 0$, 即 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

三、紧算子的有穷秩逼近

定理 6.3.14 线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathcal{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 T_n , 使得 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 6.3.2 和定理 6.3.10, 及
 $\|T - T_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 可知 T 是紧算子.

反之, 如果 T 是紧的, 我们首先证明 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

令 $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ (A 是一个指标集) 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的一个正交基,
因为 T 是紧的, 根据 定理 6.3.13, 对于 A 中的每一个序列
 $\{\alpha_n\} (\alpha_n \neq \alpha_m, n \neq m), Te_{\alpha_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,
由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^m (x, e_n) T e_n. \quad (6.3.10)$$

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^m (x, e_n) T e_n. \quad (6.3.10)$$

由于 T_m 的值域至多是 m 维的, 所以 T_m 是紧算子.

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^m (x, e_n) T e_n. \quad (6.3.10)$$

由于 T_m 的值域至多是 m 维的, 所以 T_m 是紧算子.

由范数的定义对于每一个 m , 存在一个 $x_m \in H$, $\|x_m\| = 1$, 使得

$$\|(T - T_m)x_m\| \geq \frac{1}{2} \|T - T_m\|. \quad (6.3.11)$$

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^m (x, e_n) T e_n. \quad (6.3.10)$$

由于 T_m 的值域至多是 m 维的, 所以 T_m 是紧算子.

由范数的定义对于每一个 m , 存在一个 $x_m \in H$, $\|x_m\| = 1$, 使得

$$\|(T - T_m)x_m\| \geq \frac{1}{2} \|T - T_m\|. \quad (6.3.11)$$

对于 $\forall g \in H$, 由于 P_m 强收敛到 P ,

$$((P - P_m)x_m, g) = (x_m, (P - P_m)g) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

即 $(P - P_m)x_m \xrightarrow{w} 0$.

因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$,

由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 P_m 强收敛到 P .

令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^m (x, e_n) Te_n. \quad (6.3.10)$$

由于 T_m 的值域至多是 m 维的, 所以 T_m 是紧算子.

由范数的定义对于每一个 m , 存在一个 $x_m \in H$, $\|x_m\| = 1$, 使得

$$\|(T - T_m)x_m\| \geq \frac{1}{2} \|T - T_m\|. \quad (6.3.11)$$

对于 $\forall g \in H$, 由于 P_m 强收敛到 P ,

$$((P - P_m)x_m, g) = (x_m, (P - P_m)g) \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty),$$

即 $(P - P_m)x_m \xrightarrow{w} 0$.

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,

从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in N\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,
从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in N\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

定理 6.3.15 令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个**有限维的子空间** M , 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \|Tx - m\| \mid m \in M \right\} \leq \varepsilon \|x\|. \quad (6.3.13)$$

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,
从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in N\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

定理 6.3.15 令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个**有限维的子空间** M , 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \|Tx - m\| \mid m \in M \right\} \leq \varepsilon \|x\|. \quad (6.3.13)$$

证明 任给 $\varepsilon < 0$, D 是 X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在 $\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个 ε —网.

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,
从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in N\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

定理 6.3.15 令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个**有限维的子空间** M , 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \|Tx - m\| \mid m \in M \right\} \leq \varepsilon \|x\|. \quad (6.3.13)$$

证明 任给 $\varepsilon < 0$, D 是 X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在 $\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个 ε —网.

令 M 是这个 ε -网张成的子空间, M 是有限维的, 并且对于 $\forall y \in D$, $\text{dist}(Ty, M) < \varepsilon$.

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \| (T - T_m)x_m \| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,

从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

定理 6.3.15 令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个**有限维的子空间** M , 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \|Tx - m\| \mid m \in M \right\} \leq \varepsilon \|x\|. \quad (6.3.13)$$

证明 任给 $\varepsilon < 0$, D 是 X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在 $\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个 ε — 网.

令 M 是这个 ε - 网张成的子空间, M 是有限维的, 并且对于 $\forall y \in D$, $\text{dist}(Ty, M) < \varepsilon$.

于是对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - m' \right\| \mid m' \in M \right\} \leq \varepsilon,$$

根据定理 6.3.13 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m) \rightarrow 0$, 因此

$$\|T - T_m\| < 2 \|(T - T_m)x_m\| \rightarrow 0, \quad (6.3.12)$$

即 $T_m \rightarrow T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集,
从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. \square

定理 6.3.15 令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个**有限维的子空间** M , 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \|Tx - m\| \mid m \in M \right\} \leq \varepsilon \|x\|. \quad (6.3.13)$$

证明 任给 $\varepsilon < 0$, D 是 X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在 $\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个 ε — 网.

令 M 是这个 ε - 网张成的子空间, M 是有限维的, 并且对于 $\forall y \in D$, $\text{dist}(Ty, M) < \varepsilon$.

于是对于 $\forall x \in X$,

$$\inf \left\{ \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - m' \right\| \mid m' \in M \right\} \leq \varepsilon,$$

所以

$$\inf\{\|Tx - m\| \mid m \in M\} \leq \varepsilon \|x\|,$$

其中 $m = \|x\| m'$.

□

所以

$$\inf\{\|Tx - m\| \mid m \in M\} \leq \varepsilon \|x\|,$$

其中 $m = \|x\| m'$.

□

注 换句话说, 可以找到一个有限维的子空间和 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 在上述意义下相距不超过 ε , 粗略地说 ε 越小, M 的维数 越大.

所以

$$\inf\{\|Tx - m\| \mid m \in M\} \leq \varepsilon \|x\|,$$

其中 $m = \|x\| m'$. □

注 换句话说, 可以找到一个有限维的子空间和 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 在上述意义下相距不超过 ε , 粗略地说 ε 越小, M 的维数 越大.