内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的,
在实数空间中, Cauchy准则, 区间套定理等重要定理都成立.
我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

§5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的,

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的可分性、完备性.

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的可分性、完备性.

在完备的距离空间中，类似于数学分析中的区间套定理，我们有以下定理

§ 5　完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的,
在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.
我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的可分性、完备性.

在完备的距离空间中，类似于数学分析中的区间套定理，我们有以下定理

定理 1.5.1 X *是完备的距离空间*, $\overline{S}_n = \overline{S}(x, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$*是* X *中的一系列闭球套*:

§ 5 完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的可分性、完备性.

在完备的距离空间中，类似于数学分析中的区间套定理，我们有以下定理

定理 1.5.1 *X 是完备的距离空间，$\overline{S}_n = \overline{S}(x, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$是 X 中的一系列闭球套：*

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots , \tag{1.5.1}$$

§ 5 完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，
在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.
我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后，我们研究了空间中序列的收敛性，Cauchy 列，讨论了空间的可分性、完备性.

在完备的距离空间中，类似于数学分析中的区间套定理，我们有以下定理

定理 1.5.1 *X 是完备的距离空间，$\overline{S}_n = \overline{S}(x, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$是 X 中的一系列闭球套：*

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots , \tag{1.5.1}$$

且 $r_n \to 0(n \to \infty)$,

§ 5 完备距离空间的性质和一些应用

实数空间是完备的，

在实数空间中，Cauchy准则，区间套定理等重要定理都成立.

我们在这里把这些性质推广到一般的完备的距离空间.

一、闭球套定理

在距离空间中引入了开集、闭集等概念后, 我们研究了空间中序列的收敛性, Cauchy 列, 讨论了空间的可分性、完备性.

在完备的距离空间中, 类似于数学分析中的区间套定理, 我们有以下定理

定理 1.5.1 *X 是完备的距离空间, $\overline{S}_n = \overline{S}(x, r_n)(n = 1, 2, \cdots)$是 X 中的一系列闭球套:*

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots , \tag{1.5.1}$$

且 $r_n \to 0(n \to \infty)$,

则存在 X 中唯一的一点 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$.

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列,** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列,** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

证明分三步： 1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列, 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ **是 Cauchy 列**.

$\because X$ **完备，因此存在** x, 使得

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty), \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备, 因此存在 x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备, 因此存在 x, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列, 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备, 因此存在 x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \leq r_n \quad (n > N).$$

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列, 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备, 因此存在 x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \leq r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \geq N)$,

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备, 因此存在 x, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \le r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \ge N)$,

由于是闭球套，于是我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设** $\{x_n\}$ **是球心组成的点列,** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty), \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N,$ **当** $n, m > N$ **时**

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ **是 Cauchy 列**.

$\because X$ **完备, 因此存在** x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \leq r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \geq N)$,

由于是闭球套，于是我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

(3) 如果存在 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, 则对于任意的 n, 有

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) **设** $\{x_n\}$ **是球心组成的点列，** 所以

$$d(x_n, x_m) < r_n(m > n).$$

$\because r_n \to 0(n \to \infty), \therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ **是 Cauchy 列.**

$\because X$ **完备, 因此存在** x, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性, 令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \le r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \ge N)$,

由于是闭球套，于是我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

(3) 如果存在 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, 则对于任意的 n, 有

$$d(x_n, y) \le r_n,$$

证明分三步：1.找到这样的 x; 2.证明 $x_n \to x$, 3. 证唯一.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，所以

$$d(x_n, x_m) < r_n (m > n).$$

$\because r_n \to 0 (n \to \infty)$, $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 时

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \quad (m > n).$$

$\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$\because X$ 完备，因此存在 x, 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n$, 据距离的连续性，令 $m \to \infty$, 有

$$d(x_n, x) \le r_n \quad (n > N).$$

所以 $x \in \overline{S}(x_n, r_n)(n \ge N)$,

由于是闭球套，于是我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}(x_n, r_n)$.

(3) 如果存在 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, 则对于任意的 n, 有

$$d(x_n, y) \le r_n,$$

令 $n \to \infty$, 则 $d(x, y) = 0$, 即 $x = y$. □

注 类似的可以证明“闭集套”定理，即：如果闭集一个套着一个，并且闭集的直径趋近于0，则有唯一的点被套在其中（这个点属于所有的闭集.）

注 类似的可以证明“闭集套”定理，即：如果闭集一个套着一个，并且闭集的直径趋近于0，则有唯一的点被套在其中（这个点属于所有的闭集.）
利用闭集套定理证明下面大家熟知的命题.

例 1.5.2 *证明三角形的中线交一点.*

注 类似的可以证明“闭集套”定理，即：如果闭集一个套着一个，并且闭集的直径趋近于0，则有唯一的点被套在其中（这个点属于所有的闭集.）

利用闭集套定理证明下面大家熟知的命题.

例 1.5.2 *证明三角形的中线交一点.*

分析 三角形(三顶点加边界)是一闭集，中线的两两交点都位于其内.

注意到三条中线上各有一段

成为以(原来的)三角形三中点为顶点的新的三角形的中线，

如此下去，可形成闭集套.

利用闭集套定理来证明中线交于一点.

注 类似的可以证明“闭集套”定理，即：如果闭集一个套着一个， 并且闭集的直径趋近于0， 则有唯一的点被套在其中（这个点属于所有的闭集.）

利用闭集套定理证明下面大家熟知的命题.

例 1.5.2 *证明三角形的中线交一点.*

分析 三角形(三顶点加边界)是一闭集，中线的两两交点都位于其内.

注意到三条中线上各有一段成为以(原来的)三角形三中点为顶点的新的三角形的中线,

如此下去, 可形成闭集套.

利用闭集套定理来证明中线交于一点.

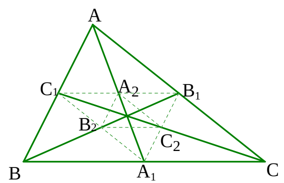
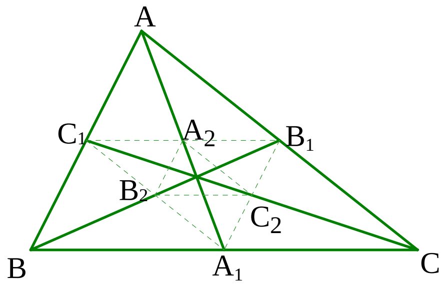


Figure 1.5.1: 三角形中线交于一点

证明

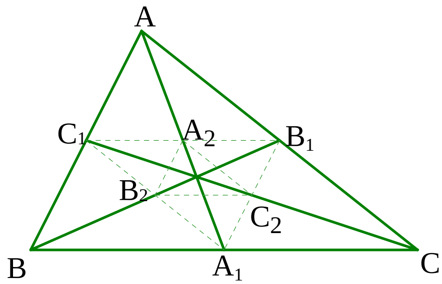
证明

(1) 把以 A, B 和 C 为顶点, 加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$ (如图), 它是闭集.



证明

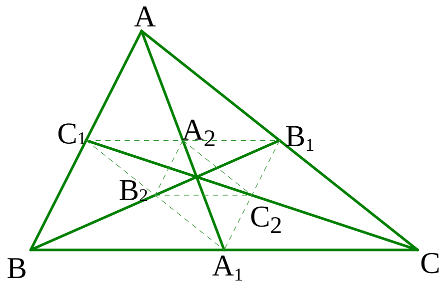
(1) 把以 A, B 和 C 为顶点, 加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$ (如图), 它是闭集.



(2) 显然 $\triangle ABC$ 的三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 包含在 $\triangle ABC$ 中,

证明

(1) 把以 A, B 和 C 为顶点, 加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$ (如图), 它是闭集.



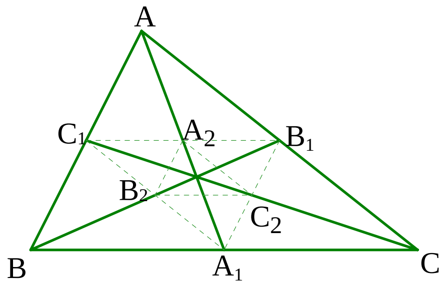
(2) 显然 $\triangle ABC$ 的三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 包含在 $\triangle ABC$ 中,

因此它们的两两交点也包含在 $\triangle ABC$ 中, 且

$$\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle ABC.$$

证明

(1) 把以 A, B 和 C 为顶点, 加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$ (如图), 它是闭集.



(2) 显然 $\triangle ABC$ 的三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 包含在 $\triangle ABC$ 中,

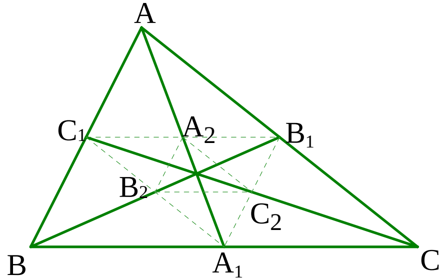
因此它们的两两交点也包含在 $\triangle ABC$ 中, 且

$$\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle ABC.$$

(3) 注意到三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 上各有一段 A_1A_2, B_1B_2 和 C_1C_2 成为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线.

证明

(1) 把以 A, B 和 C 为顶点, 加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$ (如图), 它是闭集.



(2) 显然 $\triangle ABC$ 的三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 包含在 $\triangle ABC$ 中,

因此它们的两两交点也包含在 $\triangle ABC$ 中, 且

$$\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle ABC.$$

(3) 注意到三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 上各有一段 A_1A_2, B_1B_2 和 C_1C_2 成为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线.

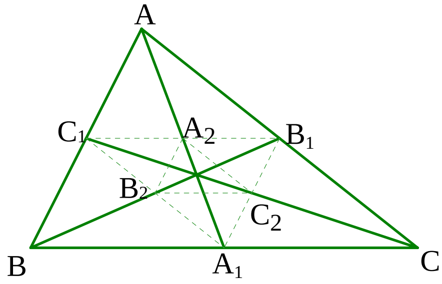
所以 $\triangle ABC$ 的三条中线的两两交点也就是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线的两两交点, 且交点包含在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$

同时又有

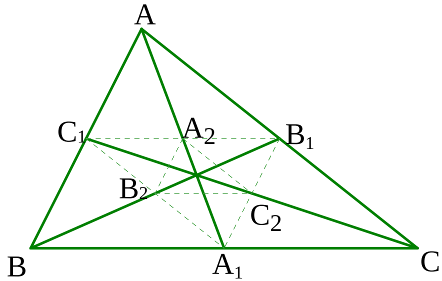
$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$



(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$

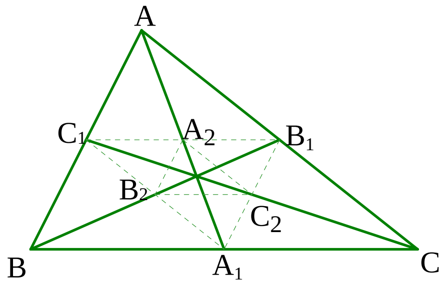


(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$



(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

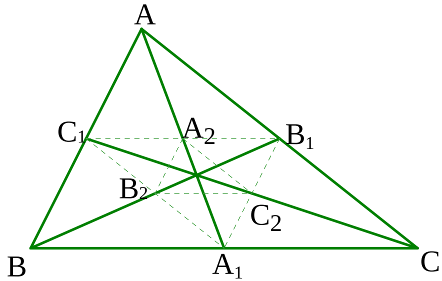
$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

(5) 显然它们满足

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \triangle A_kB_kC_k = 0,$$

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$



(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

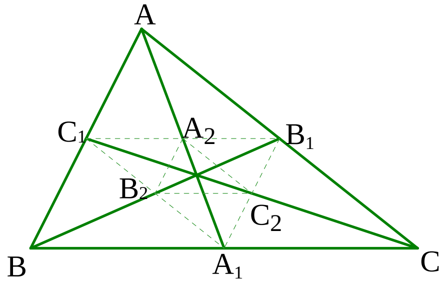
(5) 显然它们满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\triangle A_kB_kC_k = 0,$$

(6) 因此存在惟一的公共点 O 属于所有这些三角形.

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$



(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

(5) 显然它们满足

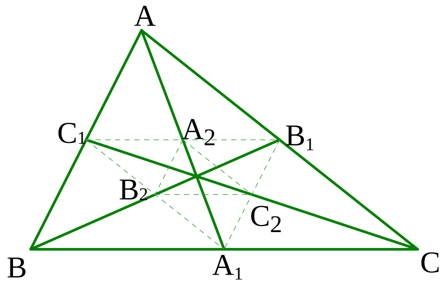
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\triangle A_kB_kC_k = 0,$$

(6) 因此存在惟一的公共点 O 属于所有这些三角形.

因为 $\triangle ABC$ 的三条中线的两两交点始终包含在每一个三角形内,

同时又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle\ A_1B_1C_1.$$



(4) 如此做下去的话, 就得到三角形组成的闭集序列

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

(5) 显然它们满足

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\triangle A_kB_kC_k = 0,$$

(6) 因此存在惟一的公共点 O 属于所有这些三角形.

因为 $\triangle ABC$ 的三条中线的两两交点始终包含在每一个三角形内,

所以三条中线必定交于一点, 而 O 点就是它们的交点.

二、Baire纲定理

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X, d) *是距离空间*, $E \subset X$.

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) *是距离空间*, $E \subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是* ***疏集***.

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X, d) 是距离空间, $E \subset X$.
如果 E 不在 X 的任何开集中稠密, 则称 E 是**疏集**.

注1 **疏集 E 中没有内点**

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X, d) *是距离空间*, $E \subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 **疏集 E 中没有内点**

(因为 $x \in E$, 如果 x 是内点,

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) *是距离空间*, $E \subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是****疏集***.

注1 疏集 E 中没有内点

(因为 $x \in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r) \subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) *是距离空间*, $E\subset X$.
如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 **疏集 E 中没有内点**
(因为 $x\in E$, 如果 x 是内点,
存在 $S(x,r)\subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 **Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点)**.

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) *是距离空间*, $E\subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 疏集 E 中没有内点

(因为 $x\in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r)\subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点).

定义 1.5.4 *若集合* E *可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) *是距离空间*, $E \subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 **疏集 E 中没有内点**

(因为 $x \in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r) \subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 **Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点)**.

定义 1.5.4 *若集合* E *可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 设(X,d) 是距离空间, $E \subset X$.

*如果 E 不在 X 的任何开集中稠密, 则称 E 是**疏集**.*

注1 **疏集 E 中没有内点**

(因为 $x \in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r) \subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 **Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点)**.

定义 1.5.4 *若集合 E 可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 E_n 是疏集 $(n = 1, 2, \cdots)$,

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 *设*(X,d) *是距离空间*, $E\subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 **疏集 E 中没有内点**

(因为 $x\in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r)\subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 **Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点)**.

定义 1.5.4 *若集合* E *可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 E_n *是疏集* $(n=1,2,\cdots)$,

则称 E *是**第一纲集***.

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 *设* (X,d) *是距离空间,* $E\subset X$.

如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集**.*

注1 疏集 E 中没有内点

(因为 $x\in E$, 如果 x 是内点,

存在 $S(x,r)\subset E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠).

注2 Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点).

定义 1.5.4 *若集合* E *可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 E_n *是疏集* $(n=1,2,\cdots)$,

则称 E *是**第一纲集**.*

*不是第一纲集的集合称为**第二纲集**.*

二、Baire纲定理

定义 1.5.3 *设*(X, d) *是距离空间*, $E \subset X$.
如果 E *不在* X *的任何开集中稠密, 则称* E *是**疏集***.

注1 疏集 E 中没有内点
(因为 $x \in E$, 如果 x 是内点,
存在 $S(x, r) \subset E$, 则 E 在 $S(x, r)$ 中稠).
注2 Cantor 集是疏集 (Cantor 集没有内点).

定义 1.5.4 *若集合* E *可以表示成为可数多个疏集的并, 即*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 E_n *是疏集* $(n = 1, 2, \cdots)$,
则称 E *是**第一纲集***.
*不是第一纲集的集合称为**第二纲集***.

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

定理 1.5.5 ***(Baire 纲定理)*** *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

定理 1.5.5 ***(Baire 纲定理)*** *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1\bigcap E_1=\emptyset \quad 且\overline{S}_1 \text{ 的半径小于}1.$$

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad \text{且} \overline{S}_1 \text{ 的半径小于} 1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1\bigcap E_1=\emptyset\quad 且\overline{S}_1\ 的半径小于1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2\bigcap E_2=\emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad \text{且}\overline{S}_1 \text{ 的半径小于}1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \quad \text{且} r_n < \frac{1}{2^n}.$$

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad \text{且} \overline{S}_1 \text{ 的半径小于} 1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \quad \text{且} r_n < \frac{1}{2^n}.$$

(4) $\because X$ 完备, $r_n \to 0$, **由闭球套定理**知存在唯一的点

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad 且 \overline{S}_1 \text{ 的半径小于} 1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \quad 且 r_n < \frac{1}{2^n}.$$

(4) $\because X$ 完备, $r_n \to 0$, **由闭球套定理**知存在唯一的点

$$x_0 \in X, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n.$$

定理 1.5.5 ***(Baire 纲定理)*** *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad \text{且} \overline{S}_1 \text{ 的半径小于} 1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \quad \text{且} r_n < \frac{1}{2^n}.$$

(4) $\because X$ 完备, $r_n \to 0$, **由闭球套定理**知存在唯一的点

$$x_0 \in X, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n.$$

但 $\overline{S}_n \bigcap E_n = \emptyset$, $\therefore$ 对于$\forall n, x_0 \in \overline{S}_n$, $x_0 \overline{\in} E_n$,

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1\bigcap E_1=\emptyset \quad \text{且}\overline{S}_1 \text{ 的半径小于}1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2\bigcap E_2=\emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到闭球套

$$\overline{S}_1\supset\overline{S}_2\cdots\supset\overline{S}_n\supset\cdots, \quad \text{且}r_n<\frac{1}{2^n}.$$

(4) $\because X$ 完备, $r_n\to 0$, 由闭球套定理知存在唯一的点

$$x_0\in X, x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n.$$

但 $\overline{S}_n\bigcap E_n=\emptyset$, $\therefore$ 对于$\forall n, x_0\in\overline{S}_n$, $x_0\overline{\in}E_n$,

与$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n$ 矛盾. $\therefore X$ 不是第一纲集, 即：X 是第二纲集. □

定理 1.5.5 *(Baire 纲定理)* *完备的距离空间是第二纲集.*

证明 **反证法.** 假如不然, 则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 $E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S, E_1 在 S 中不稠.

$\therefore$ 存在一个闭球 $\overline{S}_1$, 使得

$$\overline{S}_1 \bigcap E_1 = \emptyset \quad \text{且}\overline{S}_1 \text{ 的半径小于}1.$$

(2) 同样在 S_1 中, 存在 $\overline{S}_2$, $\overline{S}_2 \bigcap E_2 = \emptyset$ 且半径小于 $\frac{1}{2}$.

(3) 一直做下去, 我们得到**闭球套**

$$\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \cdots \supset \overline{S}_n \supset \cdots, \quad \text{且} r_n < \frac{1}{2^n}.$$

(4) $\because X$ 完备, $r_n \to 0$, **由闭球套定理**知存在唯一的点

$$x_0 \in X, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n.$$

但 $\overline{S}_n \bigcap E_n = \emptyset$, $\therefore$ 对于$\forall n, x_0 \in \overline{S}_n$, $x_0 \overline{\in} E_n$,

与$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n$ 矛盾. $\therefore X$ 不是第一纲集, 即: X 是第二纲集. $\square$

例 1.5.6 设 E 是 $[0,1]$ *全体处处不可微的连续函数组成的集合*,

例 1.5.6 设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合，则 E 是非空的，且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中，也就是说“相对比较少”，这与我们的直观感觉并不相同.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中, 也就是说“相对比较少”, 这与我们的直观感觉并不相同.

说明： **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的.**

例 1.5.6 设 E 是 $[0,1]$ *全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则* E *是非空的, 且* E *的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中**仅仅包含是在第一纲集中,** 也就是说“相对比较少”，这与我们的直观感觉并不相同.

说明： **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的.**

第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中, 也就是说“相对比较少”, 这与我们的直观感觉并不相同.

说明: **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的. 第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的.**

下面由级数定义的函数给出了一个这样的例子

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合,*
则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中,
也就是说“相对比较少”，这与我们的直观感觉并不相同.

说明: **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的.**
第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的.

下面由级数定义的函数给出了一个这样的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b_n \pi x), \tag{1.5.2}$$

其中 $0<a<1$, 而 b 是奇的整数, 且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合，则 E 是非空的，且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中，也就是说“相对比较少”，这与我们的直观感觉并不相同.

说明： **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的.**

第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的.

下面由级数定义的函数给出了一个这样的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b_n\pi x), \tag{1.5.2}$$

其中 $0<a<1$, 而 b 是奇的整数, 且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

由于这个函数项级数各项连续，且一致收敛, 所以和函数连续.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合,则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中, 也就是说“相对比较少”，这与我们的直观感觉并不相同.

说明: **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的.**
第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的.
下面由级数定义的函数给出了一个这样的例子

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b_n \pi x), \tag{1.5.2}$$

其中 $0 < a < 1$, 而 b 是奇的整数, 且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.
由于这个函数项级数各项连续, 且一致收敛, 所以和函数连续.
进一步可证明 $f(x)$ 在每一点均不可微.

例 1.5.6 *设 E 是 $[0,1]$ 全体处处不可微的连续函数组成的集合, 则 E 是非空的, 且 E 的补集是第一纲集.*

证明参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p92.

注 定理显示; 点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅包含是在第一纲集中, 也就是说“相对比较少”, 这与我们的直观感觉并不相同.

说明: **举出点点连续、点点不可微函数的例子并不是容易的. 第一个这样的例子是由 Weierstrass 建立的**.

下面由级数定义的函数给出了一个这样的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b_n \pi x), \tag{1.5.2}$$

其中 $0<a<1$, 而 b 是奇的整数, 且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

由于这个函数项级数各项连续, 且一致收敛, 所以和函数连续.

进一步可证明 $f(x)$ 在每一点均不可微.

三、不动点，压缩映射原理

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一，

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一，

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身，即 $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题，

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$，令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

,

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一，

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身，**即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题，

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

在代数方程、微分方程、 积分方程及其它各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题,

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一，

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身，**即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题，

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$，令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

在代数方程、微分方程、积分方程及其它各类方程理论中解的存在性，唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题，

在许多关于存在唯一性的定理的证明中，”不动点“是一个有力的工具，

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, **即** $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

在代数方程、微分方程、 积分方程及其它各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题,

在许多关于存在唯一性的定理的证明中，”不动点“是一个有力的工具,

不动点定理是泛函分析中最基本的一个存在性定理,

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, 即 $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x, \text{ 或者写为 } F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

在代数方程、微分方程、 积分方程及其它各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题,

在许多关于存在唯一性的定理的证明中，”不动点“是一个有力的工具,

不动点定理是泛函分析中最基本的一个存在性定理,

数学分析中的许多存在性定理都是它的特例.

三、不动点，压缩映射原理

不动点问题是数学研究中的重要问题之一,

所谓一个映射 T 的不动点是指 T 把这个点映射为自身, 即 $Tx = x$.

任何解方程问题都可以转化为求不动点的问题,

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) + x = x,\ \text{或者写为}\ F_1(x) = x,$$

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论意义及应用价值.

例如在实数范围内求解方程 $y = x^2 - 2x + 1 = 0$, 令

$$Tx = x^2 - x + 1$$

则求解一元二次方程的问题转化为：什么时候 $Tx = x, x \in \mathbb{R}$,

也就是说，映射 T 有没有不动点.

在代数方程、微分方程、 积分方程及其它各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性都是很重要的课题,

在许多关于存在唯一性的定理的证明中，”不动点“是一个有力的工具,

不动点定理是泛函分析中最基本的一个存在性定理,

数学分析中的许多存在性定理都是它的特例.

不动点理论已发展成为非线性泛函分析的重要内容之一.

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法，这个方法起源很早，

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville，他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,
到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,
到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.
考虑微分方程的初值问题：

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,

到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.

考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x \,\big|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

两边积分,问题转化为积分方程：

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,
到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.

考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x \,\big|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

两边积分,问题转化为积分方程：

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.4}$$

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早, 首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,

到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.

考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x \mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

两边积分,问题转化为积分方程：

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.4}$$

令

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.5}$$

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville， 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,
到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.
考虑微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

两边积分,问题转化为积分方程：

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.4}$$

令

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.5}$$

则 T 是一个从 $x(t)$ 到 Tx 的映射. 问题转化为这个积分算子 Tx 是否有不动点,

多项式根的近似计算最显著的技巧或许就是逐次迭代法, 这个方法起源很早,
首先将这个技巧应用于无穷维情形的是 Liouville, 他成功地利用这个技巧求解常微分方程初值问题,
到1922年, Banach 把这个结果抽象化, 用距离空间及压缩映射(压缩映射是一种特殊的非线性映射)等概念更一般地描述这个方法, 这就是著名的 **Banach 不动点定理, 或压缩映像原理**.

考虑微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\ |_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

两边积分,问题转化为积分方程:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.4}$$

令

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.5.5}$$

则 T 是一个从 $x(t)$ 到 Tx 的映射. 问题转化为这个积分算子 Tx 是否有不动点, 即在空间 X 是否存在元素 x, 满足 $Tx = x$.

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X, d) 是完备的距离空间, $T : X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$,

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T:X\to X$. 如果对于任意的 $x,y\in X$, 不等式

$$d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0<\theta<1$,

则存在唯一的 $\overline{x}\in X$, 使得

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$,
则存在唯一的 $\overline{x} \in X$, 使得

$$T\overline{x} = \overline{x}.$$

分析: 首先找到 T 的不动点, 再证明唯一性.

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T:X\to X$. 如果对于任意的 $x,y\in X$, 不等式

$$d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0<\theta<1$,

则存在唯一的 $\overline{x}\in X$, 使得

$$T\overline{x}=\overline{x}.$$

分析: 首先找到 T 的不动点, 再证明唯一性.

由 (1.5.6)式, 我们看到 T 作用后两点间的距离成倍压缩, 是一压缩映射. 希望用迭代法找到不动点.

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$,
则存在唯一的 $\overline{x} \in X$, 使得

$$T\overline{x} = \overline{x}.$$

分析: 首先找到 T 的不动点, 再证明唯一性.

由 (1.5.6)式, 我们看到 T 作用后两点间的距离成倍压缩, 是一压缩映射. 希望用迭代法找到不动点.

任取 $x_0 \in X$, 令

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots.$$

定理 1.5.7 (*压缩映射原理–Banach不动点定理*) 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$,
则存在唯一的 $\overline{x} \in X$, 使得

$$T\overline{x} = \overline{x}.$$

分析: 首先找到 T 的不动点, 再证明唯一性.

由 (1.5.6)式, 我们看到 T 作用后两点间的距离成倍压缩, 是一压缩映射. 希望用迭代法找到不动点.

任取 $x_0 \in X$, 令

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots.$$

若能证明 (i) $x_n \to \bar{x}$, (ii) T 连续, 则可推出 $\overline{x} = T\overline{x}$.

定理 1.5.7 *(压缩映射原理–Banach不动点定理)* 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y) \tag{1.5.6}$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$,
则存在唯一的 $\overline{x} \in X$, 使得

$$T\overline{x} = \overline{x}.$$

分析: 首先找到 T 的不动点, 再证明唯一性.

由 (1.5.6)式, 我们 看到 T 作用后两点间的距离成倍压缩, 是 一压缩映射. 希望用迭代法找到不动点.

任取 $x_0 \in X$, 令

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots.$$

若能证明 (i) $x_n \to \bar{x}$, (ii) T 连续, 则可推出 $\overline{x} = T\overline{x}$.

为了证明(i), 由于空间完备, 要证收敛只要能证明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列即可;

对于(ii), 因为 T是压缩映射, 由连续映射的定义可知.

证明： (1) T **是连续的.**

证明： (1) **T 是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

证明： (1) **T 是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

证明： (1) **T 是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求 $\overline{x}$.**

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \le \theta d(x_0, x_1) = \theta d(x_0, Tx_0)$$

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leq \theta d(x_0, x_1) = \theta d(x_0, Tx_0)$$

$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \theta d(x_1, x_2) = \theta^2 d(x_0, Tx_0) \quad \cdots$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n d(x_0, Tx_0), \quad \cdots$$

证明： (1) **T 是连续的.**

事实上, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 当 $d(x,y)<\delta$ 时,

$$d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)<\delta=\varepsilon.$$

(2) **用迭代法求 $\overline{x}$.**

任取 $x_0\in X$, 令 $x_1=Tx_0, x_2=Tx_1,\cdots,x_{n+1}=Tx_n,\cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ 为Cauchy列. 由于

$$d(x_1,x_2)=d(Tx_0,Tx_1)\le\theta d(x_0,x_1)=\theta d(x_0,Tx_0)$$

$$d(x_2,x_3)=d(Tx_1,Tx_2)\le\theta d(x_1,x_2)=\theta^2 d(x_0,Tx_0)\quad\cdots$$

$$d(x_n,x_{n+1})\le\theta^n d(x_0,Tx_0),\quad\cdots$$

于是对于任意的自然数 p,

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+p})&\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\\&\le\theta^n d(x_0,Tx_0)+\theta^{n+1}d(x_0,Tx_0)+\cdots+\theta^{n+p-1}d(x_0,Tx_0)\\&<\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0).\end{aligned}$$

、

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leq \theta d(x_0, x_1) = \theta d(x_0, Tx_0)$$

$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \theta d(x_1, x_2) = \theta^2 d(x_0, Tx_0) \quad \cdots$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n d(x_0, Tx_0), \quad \cdots$$

于是对于任意的自然数 p,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \theta^n d(x_0, Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0, Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0, Tx_0) \\ &< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$

$\because 0 < \theta < 1$, $\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x,y) < \delta$ 时,

$$d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_0,Tx_1) \le \theta d(x_0,x_1) = \theta d(x_0,Tx_0)$$

$$d(x_2,x_3) = d(Tx_1,Tx_2) \le \theta d(x_1,x_2) = \theta^2 d(x_0,Tx_0) \quad \cdots$$

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \theta^n d(x_0,Tx_0), \quad \cdots$$

于是对于任意的自然数 p,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\le \theta^n d(x_0,Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0,Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0,Tx_0) \\ &< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0,Tx_0). \end{aligned}$$

$\because 0 < \theta < 1$, $\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

由于 (X,d) 完备, $\therefore$ **存在** $\overline{x}$, 使得 $x_n \to \overline{x} (n \to \infty)$.

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,
$$d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于
$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \le \theta d(x_0, x_1) = \theta d(x_0, Tx_0)$$
$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \le \theta d(x_1, x_2) = \theta^2 d(x_0, Tx_0) \quad \cdots$$
$$d(x_n, x_{n+1}) \le \theta^n d(x_0, Tx_0), \quad \cdots$$
于是对于任意的自然数 p,
$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\le \theta^n d(x_0, Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0, Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0, Tx_0) \\ &< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$
$\because 0 < \theta < 1$, $\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

由于 (X, d) 完备, $\therefore$ **存在** $\overline{x}$, 使得 $x_n \to \overline{x} (n \to \infty)$.

由于 T **是连续的，** 有 $T\overline{x} = \overline{x}$.

证明： (1) T **是连续的.**

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x,y) < \delta$ 时,

$$d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y) < \delta = \varepsilon.$$

(2) **用迭代法求** $\overline{x}$.

任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$.

下面证明 $\{x_n\}$ **为Cauchy列**. 由于

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_0,Tx_1) \le \theta d(x_0,x_1) = \theta d(x_0,Tx_0)$$

$$d(x_2,x_3) = d(Tx_1,Tx_2) \le \theta d(x_1,x_2) = \theta^2 d(x_0,Tx_0) \quad \cdots$$

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \theta^n d(x_0,Tx_0), \quad \cdots$$

于是对于任意的自然数 p,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\ &\le \theta^n d(x_0,Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0,Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0,Tx_0) \\ &< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0,Tx_0). \end{aligned}$$

$\because 0 < \theta < 1$, $\therefore \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

由于 (X,d) 完备, $\therefore$ **存在** $\overline{x}$, 使得 $x_n \to \overline{x} (n \to \infty)$.

由于 T **是连续的，** 有 $T\overline{x} = \overline{x}$.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X, d) 完备是必须的**.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X, d) 完备是必须的**.

2. **条件** $0 < \theta < 1, d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$, **不能改为** $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X, d) 完备是必须的**.

2. **条件** $0 < \theta < 1, d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$, **不能改为** $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

3. 由于 $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0)$,

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \le \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X, d) 完备是必须的**.

2. **条件** $0 < \theta < 1, d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y)$, **不能改为** $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

3. 由于 $d(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0)$,

令 $p \to \infty$, 其误差为：

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y} = \overline{y}$. 则

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$,

故 $\overline{x} = \overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X, d) 完备是必须的**.

2. **条件** $0 < \theta < 1, d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$, **不能改为** $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

3. 由于 $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0)$,

令 $p \to \infty$, 其误差为：

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0),$$

收敛的速度很快.

(3) 唯一性：若存在 $\overline{y}$ 使得

$T\overline{y}=\overline{y}$. 则

$$d(\overline{x},\overline{y})=d(T\overline{x},T\overline{y})\leq\theta d(\overline{x},\overline{y}).$$

由于 $0<\theta<1$, 于是 $d(\overline{x},\overline{y})=0$,

故 $\overline{x}=\overline{y}$.

注 1. **距离空间 (X,d) 完备是必须的**.

2. **条件** $0<\theta<1, d(Tx,Ty)\leq\theta d(x,y)$, **不能改为** $d(Tx,Ty)<d(x,y)$.

3. 由于 $d(x_n,x_{n+p})\leq\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0)$,

令 $p\to\infty$, 其误差为：

$$d(x_n,\overline{x})\leq\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0),$$

收敛的速度很快.

4. 定理中并**不要求 T 是线性算子**.

定理 1.5.8 设 (X,d) *是完备的距离空间,*

定理 1.5.8 设 (X, d) 是完备的距离空间,

T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数 n_0,** 使得对所有的 $x, y \in X$,

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间,
T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\leq\theta d(x,y),\tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间,

T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0, 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y)\le \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta d(x,y),\tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$. 要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,

定理 1.5.8 设 (X,d) *是完备的距离空间,*

T *是从* X *到* X *的映射, 如果**存在自然数*** n_0***,*** *使得对所有的* $x, y \in X$,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leq \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0 < \theta < 1$, ***则*** T ***有唯一的不动点***.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x} = \overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,

$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$**, 使得** $T^{n_0}\overline{x} = \overline{x}$.

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,

$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$**, 使得** $T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$.

因 $T^{n_0}(T\overline{x})=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x}$, 故

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间,
T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0, 使得对所有的 $x,y \in X$,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \le \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则 T 有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.
要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?
进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,
$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$, **使得** $T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$.

因 $T^{n_0}(T\overline{x}) = T(T^{n_0}\overline{x}) = T\overline{x}$, 故
$T\overline{x}$ **也是** T^{n_0}**的不动点**.

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果***存在自然数*** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, ***则*** T ***有唯一的不动点***.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.
要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?
进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,
$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$**, 使得** $T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$.

因 $T^{n_0}(T\overline{x})=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x}$, 故
$T\overline{x}$ **也是** T^{n_0}**的不动点**.
$\because T^{n_0}$ 不动点是唯一的, 所以

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间,

T 是从 X 到 X 的映射, 如果**存在自然数** n_0**,** 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y)\le \theta d(x,y), \tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, **则** T **有唯一的不动点**.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,

$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$**, 使得** $T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$.

因 $T^{n_0}(T\overline{x})=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x}$, 故

$T\overline{x}$ **也是** T^{n_0}**的不动点**.

$\because T^{n_0}$ 不动点是唯一的, 所以

$$T\overline{x}=\overline{x}.$$

定理 1.5.8 设 (X,d) 是完备的距离空间,

T 是从 X 到 X 的映射, 如果***存在自然数*** n_0, 使得对所有的 $x,y\in X$,

$$d(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta d(x,y),\tag{1.5.7}$$

其中 $0<\theta<1$, ***则*** T ***有唯一的不动点***.

分析: 由 (1.5.7) 式, 我们看到 T^{n_0} 满足不动点定理的条件, 存在唯一不动点 $\overline{x}$.

要证 T 有唯一不动点. 考虑 T^{n_0} 的不动点是否就是 T 的?

进一步验证 $T\overline{x}=\overline{x}$.

证明 因 T^{n_0} 满足不动点定理,

$\therefore$ **存在唯一** $\overline{x}$, **使得** $T^{n_0}\overline{x}=\overline{x}$.

因 $T^{n_0}(T\overline{x})=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x}$, 故

$T\overline{x}$ **也是** T^{n_0}**的不动点**.

$\because T^{n_0}$ 不动点是唯一的, 所以

$$T\overline{x}=\overline{x}.$$

即 $\overline{x}$ **是** T **的不动点**.

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,

由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,

由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*
设 $T : B \to B$ 是一个连续映射,

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore\ \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,

由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*

设 $T : B \to B$ 是一个连续映射,

则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*
设 $T : B \to B$ 是一个连续映射,
则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*
设 $T: B \to B$ 是一个连续映射,
则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

定理 1.5.10 ***(Schauder)*** *设 C 是完备距离空间 X 中的一个闭凸子集,*

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*
设 $T : B \to B$ 是一个连续映射,
则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

定理 1.5.10 ***(Schauder)*** *设 C 是完备距离空间 X 中的一个闭凸子集,*
$T : C \to C$, 连续 且 $T(C)$ 列紧,

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,
由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*
设 $T : B \to B$ 是一个连续映射,
则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

定理 1.5.10 ***(Schauder)*** *设 C 是完备距离空间 X 中的一个闭凸子集,*
$T : C \to C$, 连续 且 $T(C)$ 列紧,
则 T 在 C 上必有一个不动点.

唯一性:(反证法) 设 $\overline{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\overline{x}_1 = T^{n_0-1}(T\overline{x}_1) = T^{n_0-1}(\overline{x}_1) = \cdots = T\overline{x}_1 = \overline{x}_1,$$

$\therefore \overline{x}_1$也是$T^{n_0}$的不动点,

由 T^{n_0}不 动点的唯一性, 我们有 $\overline{x} = \overline{x}_1$.

进一步, 有以下不动点定理.

定理 1.5.9 ***(Brouwer)*** *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球,*

设 $T: B \to B$ 是一个连续映射,

则 T 必有一个不动点 $x \in B$.

在无穷维空间, 有

定理 1.5.10 ***(Schauder)*** *设 C 是完备距离空间 X 中的一个闭凸子集,*

$T: C \to C$, 连续 且 $T(C)$ 列紧,

则 T 在 C 上必有一个不动点.

这些定理的证明可参阅张恭庆等”泛函分析讲义“（上册）p49.

四、压缩映射原理的应用

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\ \big|_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续, 且对于变量 x 满足$Lipschitz$条件:

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续, 且对于变量 x 满足$Lipschitz$条件:

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \leq K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续, 且对于变量 x 满足$Lipschitz$条件:

$$| f(x_1,t) - f(x_2,t) | \leq K | x_1 - x_2 |,$$

则方程 (1.5.8) 在 $t=0$ 的某个邻域中有唯一解.

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x \mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$*在平面上连续, 且对于变量* x *满足*$Lipschitz$*条件:*

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \leq K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

则方程 (1.5.8) *在* $t=0$ *的某个邻域中有唯一解.*

分析:方程 (1.5.8) 即为前面的方程(1.5.3),

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续, 且对于变量 x 满足Lipschitz条件:

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \leq K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

则方程 (1.5.8) 在 $t=0$ 的某个邻域中有唯一解.

分析:方程 (1.5.8) 即为前面的方程(1.5.3),

此初值问题可转化为一个与其等价的 积分映射的不动点问题(见(1.5.5)式).

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau.$$

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$*在平面上连续, 且对于变量* x *满足*$Lipschitz$*条件:*

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \leq K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

则方程 (1.5.8) *在* $t=0$ *的某个邻域中有唯一解.*

分析:方程 (1.5.8) 即为前面的方程(1.5.3),

此初值问题可转化为一个与其等价的 积分映射的不动点问题(见(1.5.5)式).

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau.$$

我们先证明这个积分映射是压缩映射,

四、压缩映射原理的应用

例 1.5.11 *(微分方程)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\mid_{t=0} = x_0. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

其中$f(x,t)$在平面上连续, 且对于变量 x 满足Lipschitz条件:

$$\mid f(x_1,t) - f(x_2,t) \mid \le K \mid x_1 - x_2 \mid,$$

则方程 (1.5.8) 在 $t=0$ 的某个邻域中有唯一解.

分析:方程 (1.5.8) 即为前面的方程(1.5.3),

此初值问题可转化为一个与其等价的 积分映射的不动点问题(见(1.5.5)式).

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau.$$

我们先证明这个积分映射是压缩映射,

然后利用压缩映像原理证明方程有唯一解.

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

在**空间** $C[-\delta, \delta]$ **上**考虑如下**映射(积分算子)**:

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau,$$

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

在**空间** $C[-\delta,\delta]$ **上**考虑如下**映射(积分算子)**:

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau,$$

则 T 是从 $C[-\delta,\delta]$ 到 $C[-\delta,\delta]$ 自身的映射.

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

在**空间** $C[-\delta, \delta]$ **上**考虑如下**映射(积分算子)**:

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau,$$

则 T 是从 $C[-\delta, \delta]$ 到 $C[-\delta, \delta]$ 自身的映射.

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

在**空间** $C[-\delta, \delta]$ **上**考虑如下**映射(积分算子)**:

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau,$$

则 T 是从 $C[-\delta, \delta]$ 到 $C[-\delta, \delta]$ 自身的映射.

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{-\delta \le t \le \delta} \left| \int_0^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| \\ &\le K \max_{-\delta \le t \le \delta} \int_0^t |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\ &\le K\delta \max_{-\delta \le t \le \delta} |x(t) - y(t)| = K\delta \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

由于 $0 < K\delta < 1$，且 $C[-\delta, \delta]$ 是**完备**的,

证明 (1) 确立距离空间, 建立映射.

取$\delta > 0$, 使得 $\delta K < 1$.

在**空间** $C[-\delta, \delta]$ **上**考虑如下**映射(积分算子)**:

$$Tx = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau,$$

则 T 是从 $C[-\delta, \delta]$ 到 $C[-\delta, \delta]$ 自身的映射.

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{-\delta \le t \le \delta} \left| \int_0^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| \\ &\le K \max_{-\delta \le t \le \delta} \int_0^t | x(\tau) - y(\tau) | d\tau \\ &\le K\delta \quad \max_{-\delta \le t \le \delta} | x(t) - y(t) | = K\delta \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

由于 $0 < K\delta < 1$，且 $C[-\delta, \delta]$ 是**完备**的,

由压缩映射原理, 方程 (1.5.8) 在 $[-\delta, \delta]$ 上有唯一解.

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx, 使得其第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx, 使得其第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ 空间上 $Tx = x$ 的不动点问题.

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx, 使得其第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ 空间上 $Tx = x$ 的不动点问题.

证明 **(1)建立映射:** 设

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx, 使得其第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ 空间上 $Tx = x$ 的不动点问题.

证明 **(1)建立映射:** 设

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.5.11}$$

$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx**, 使得其第** $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ **个分量的作用形式为** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ **空间上** $Tx = x$ **的不动点问题.**

证明 **(1)建立映射:** 设

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.5.11}$$

$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

则 T 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个映射.

例 1.5.12 *考虑线性方程组*

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.5.9}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1, \tag{1.5.10}$$

则方程组有唯一解.

考虑将方程组化为映射的不动点问题.

假定 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

定义 Tx, 使得其第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 个分量的作用形式为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i$

则方程组可转化为 $\mathbb{R}^n$ 空间上 $Tx = x$ 的不动点问题.

证明 **(1)建立映射:** 设

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.5.11}$$

$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$,

则 T 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个映射.

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

由于

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i)]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \theta d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

其中

$$
\theta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2 < 1,
$$

(2) 验证映射满足不动点定理条件.

由于

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1,Tx_2) &= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(1)}+b_i)-(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(2)}+b_i)]^2\}^{\frac{1}{2}}\\
&= \{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})]^2\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le \{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\sum_{j=1}^{n}\mid \xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\mid^2\}^{\frac{1}{2}}\\
&= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}\mid \xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}\mid^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= \theta d(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

其中

$$
\theta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid^2<1,
$$

根据压缩映射原理, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

例 1.5.13 *在上例中，若将条件* (1.5.10) *改为*

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.12}$$

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

例 1.5.13 *在上例中，若将***条件** (1.5.10) **改为**

$$\alpha = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组 1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

例 1.5.13 *在上例中，若将**条件** (1.5.10) **改为***

$$\alpha = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:**解决问题的思路和方法同上**.

事实上, 如果 n 维向量空间的**距离定义为**

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

事实上, 如果 n 维向量空间的**距离定义为**

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} | \xi_i - \eta_i |, \tag{1.5.13}$$

例 1.5.13 *在上例中，若将条件* (1.5.10) *改为*

$$\alpha = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |< 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

事实上, 如果 n 维向量空间的距离定义为

$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} | \xi_i - \eta_i |, \tag{1.5.13}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$.

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |\ a_{ij}\ | < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

事实上, 如果 n 维向量空间的距离定义为

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |\ \xi_i - \eta_i\ |, \tag{1.5.13}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$.

(1) 令

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

事实上, 如果 n 维向量空间的**距离定义为**

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} | \xi_i - \eta_i |, \tag{1.5.13}$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$.

(1) 令

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

例 1.5.13 *在上例中，若将条件 (1.5.10) 改为*

$$\alpha=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid<1 \tag{1.5.12}$$

则方程组1.5.9 也有唯一解.

分析:解决问题的思路和方法同上.

事实上, 如果 n 维向量空间的距离定义为

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}\mid\xi_i-\eta_i\mid, \tag{1.5.13}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

(1) 令

$$(Tx)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j+b_i,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(2)

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} \mid (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i) \mid \\
&= \max_{1\le i\le n} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \mid \\
&= \max_{1\le j\le n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \\
&= \alpha d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} \mid (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i) \mid \\
&= \max_{1\le i\le n} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \mid \\
&= \max_{1\le j\le n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \\
&= \alpha d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

因为$\alpha < 1$, 所以T 是一个压缩映射,

(2)

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} \mid (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i) \mid \\
&= \max_{1\le i\le n} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \mid \\
&= \max_{1\le j\le n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \\
&= \alpha d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

因为$\alpha < 1$, **所以**T **是一个压缩映射,**

根据压缩映射原理, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

注 **上述两个不同的条件** (1.5.10) **和** (1.5.12), **都可确定方程组** (1.5.9) **有唯一解,**

(2)

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} \mid (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i) \mid \\
&= \max_{1\le i\le n} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \mid \\
&= \max_{1\le j\le n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \\
&= \alpha d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

因为$\alpha < 1$, 所以T 是一个压缩映射,

根据**压缩映射原理**, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

注 **上述两个不同的条件 (1.5.10) 和 (1.5.12), 都可确定方程组 (1.5.9) 有唯一解, 要注意的是：研究不同问题时选取的距离不同.**

(2)

$$
\begin{aligned}
d(Tx_1, Tx_2) &= \max_{1\le i\le n} \mid (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i) - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(2)} + b_i) \mid \\
&= \max_{1\le i\le n} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \mid \\
&= \max_{1\le j\le n} \mid \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \mid \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid \\
&= \alpha d(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

因为$\alpha < 1$, 所以T 是一个压缩映射,

根据**压缩映射原理**, 方程组 (1.5.9) 有唯一解.

注 上述两个不同的条件 (1.5.10) 和 (1.5.12), 都可确定方程组 (1.5.9) 有唯一解, 要注意的是: 研究不同问题时选取的距离不同.

例 1.5.14 *Fredhom* **积分方程**

$$x(t) = \varphi(l) + \mu \int_a^b k(l, s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

例 1.5.14 *Fredhom* *积分方程*

$$x(t) = \varphi(l) + \mu \int_a^b k(l,s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

其中 $k(s,t), \varphi(t)$ *是* $a \le t \le b, a \le s \le b$ *上的连续函数, 则方程存在唯一解.*

证明 (1) 令

例 1.5.14 *Fredhom* 积分方程

$$x(t)=\varphi(l)+\mu\int_a^b k(l,s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

其中 $k(s,t),\varphi(t)$ 是 $a\leq t\leq b, a\leq s\leq b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

证明 (1) 令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{1.5.15}$$

例 1.5.14 *Fredhom 积分方程*

$$x(t) = \varphi(l) + \mu \int_a^b k(l, s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

其中 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

证明 (1) 令

$$Tx = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds \tag{1.5.15}$$

T 是从 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$的 映射.

(2) 对任意 $x, y \in C[a, b]$, 有

例 1.5.14 *Fredhom* *积分方程*

$$x(t) = \varphi(l) + \mu \int_a^b k(l,s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

其中 $k(s,t), \varphi(t)$ *是* $a \le t \le b, a \le s \le b$ *上的连续函数, 则方程存在唯一解.*

证明 (1) 令

$$Tx = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{1.5.15}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$的 映射.

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$, 有

$$d(Tx_1, Tx_2) = \max_{a\le t\le b} \mid \mu \mid\mid \int_a^b [k(t,s)(x_1(s) - x_2(s))]ds \mid$$

$$\le \mu \mid b-a \mid M \max_{a\le t\le b} \mid x_1(t) - x_2(t) \mid = \mu \mid b-a \mid Md(x_1, x_2)$$

其中

$$M = \max_{\substack{a\le s\le b\\ a\le t\le b}} \mid k(s,t) \mid .$$

例 1.5.14 *Fredhom 积分方程*

$$x(t) = \varphi(l) + \mu \int_a^b k(l,s)x(s)ds, \tag{1.5.14}$$

其中 $k(s,t),\varphi(t)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

证明 (1) 令

$$Tx = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)ds \tag{1.5.15}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$的 映射.

(2) 对任意 $x,y \in C[a,b]$, 有

$$d(Tx_1,Tx_2) = \max_{a\leq t\leq b} |\mu|| \int_a^b [k(t,s)(x_1(s)-x_2(s))]ds |$$

$$\leq \mu |b-a| M \max_{a\leq t\leq b} |x_1(t)-x_2(t)| = \mu |b-a| Md(x_1,x_2)$$

其中

$$M = \max_{\substack{a\leq s\leq b\\ a\leq t\leq b}} |k(s,t)|.$$

当 $\mu |b-a| M < 1$ 时, 由**压缩映射原理**, 方程 (1.5.14) 有唯一解.

例 1.5.15 *Volterra* 积分方程

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a \le t \le b, a \le s \le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

例 1.5.15 *Volterra* 积分方程

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a \le t \le b, a \le s \le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析: 证明用到了定理 (1.5.8), 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.

例 1.5.15 *Volterra* 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a\le t\le b, a\le s\le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析: 证明用到了定理 (1.5.8), 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.

证明 (1) 令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.17}$$

例 1.5.15 *Volterra* 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a\le t\le b, a\le s\le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析: 证明用到了定理 (1.5.8), 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.

证明 (1) 令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.17}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

(2) 对任意 $x,y\in C[a,b]$, 有

例 1.5.15 *Volterra 积分方程*

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a \le t \le b, a \le s \le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析: **证明用到了定理 (1.5.8), 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.**

证明 (1) 令

$$Tx = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.17}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned} \mid Tx_1 - Tx_2 \mid &= \mid \mu \mid \left| \int_a^t k(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds \right| \\ &\le \mid \mu \mid \; M(t-a) \max_{a \le t \le b} \mid x_1(t) - x_2(t) \mid, \end{aligned}$$

例 1.5.15 *Volterra* 积分方程

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a\le t\le b, a\le s\le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析: 证明用到了定理 (1.5.8), 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.

证明 (1) 令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.17}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

(2) 对任意 $x,y\in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|Tx_1-Tx_2| &= |\mu|\left|\int_a^t k(t,s)[x_1(s)-x_2(s)]ds\right| \\ &\le |\mu|\ M(t-a)\max_{a\le t\le b}|x_1(t)-x_2(t)|,\end{aligned}$$

其中 $M=\max_{\substack{a\le s\le b\\ a\le t\le b}}|k(s,t)|$,

例 1.5.15 *Volterra 积分方程*

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.16}$$

其中 $k(t,s)$是$a\le t\le b, a\le s\le b$ 上的连续函数, 则方程存在唯一解.

分析： 证明用到了定理 (1.5.8)， 若对于映射 T 存在自然数 n_0, 使得 T^{n_0} 满足压缩映像原理的条件, 则 T 有唯一不动点.

证明 (1) 令

$$Tx=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \tag{1.5.17}$$

T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

(2) 对任意 $x,y\in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}\mid Tx_1-Tx_2\mid &=\mid\mu\mid\,\left|\int_a^t k(t,s)[x_1(s)-x_2(s)]ds\right|\\ &\le\mid\mu\mid\ M(t-a)\max_{a\le t\le b}\mid x_1(t)-x_2(t)\mid,\end{aligned}$$

其中 $M=\max_{\substack{a\le s\le b\\ a\le t\le b}}\mid k(s,t)\mid$,

(3) 进一步, 有

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
|T^2x_1 - T^2x_2| &= |T(Tx_1) - T(Tx_2)| \\
&\le |\mu|^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\le t\le b} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|\, d\tau \\
&= |\mu|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\le t\le b} |x_1(t) - x_2(t)|\,.
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
|T^n x_1 - T^n x_2| \le |\mu|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\le t\le b} |x_1(t) - x_2(t)|, \tag{1.5.18}
$$

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
| T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\
&\leq | \mu |^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\leq t\leq b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | d\tau \\
&= | \mu |^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} | x_1(t) - x_2(t) | .
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
| T^n x_1 - T^n x_2 | \leq | \mu |^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\leq t\leq b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.18}
$$

(5)所以

$$
d(T^n x_1, T^n x_2) \leq \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),
$$

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
| T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\
&\leq | \mu |^2 \ M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\leq t\leq b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | \ d\tau \\
&= | \mu |^2 \ M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} | x_1(t) - x_2(t) | \ .
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
| T^nx_1 - T^nx_2 | \leq | \mu |^n \ M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\leq t\leq b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.18}
$$

(5)所以

$$
d(T^nx_1, T^nx_2) \leq \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),
$$

由于

$$
\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty),
$$

(3) 进一步, 有

$$\begin{aligned}
| T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\
&\le | \mu |^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\le t\le b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | d\tau \\
&= | \mu |^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) | .
\end{aligned}$$

(4) 一般地, 有

$$| T^n x_1 - T^n x_2 | \le | \mu |^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.18}$$

(5)所以

$$d(T^n x_1, T^n x_2) \le \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),$$

由于

$$\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty),$$

因此, 对充分大的 n, 有

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
| T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\
&\le | \mu |^2 \, M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\le t\le b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | \, d\tau \\
&= | \mu |^2 \, M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) | \, .
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
| T^nx_1 - T^nx_2 | \le | \mu |^n \, M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.18}
$$

(5)所以

$$
d(T^nx_1, T^nx_2) \le \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),
$$

由于

$$
\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty),
$$

因此, 对充分大的 n, 有

$$
0 < \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1.
$$

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
| T^2x_1 - T^2x_2 | &= | T(Tx_1) - T(Tx_2) | \\
&\le | \mu |^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\le t\le b} | x_1(\tau) - x_2(\tau) | d\tau \\
&= | \mu |^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) | .
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
| T^n x_1 - T^n x_2 | \le | \mu |^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\le t\le b} | x_1(t) - x_2(t) |, \tag{1.5.18}
$$

(5)所以

$$
d(T^n x_1, T^n x_2) \le \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),
$$

由于

$$
\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty),
$$

因此, 对充分大的 n, 有

$$
0 < \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1.
$$

由定理 1.5.8, 方程 (1.5.16) 存在唯一解.

(3) 进一步, 有

$$
\begin{aligned}
|T^2x_1 - T^2x_2| &= |T(Tx_1) - T(Tx_2)| \\
&\le |\mu|^2 M^2 \int_a^t (\tau - a) \max_{a\le t\le b} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \\
&= |\mu|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \max_{a\le t\le b} |x_1(t) - x_2(t)| \, .
\end{aligned}
$$

(4) 一般地, 有

$$
|T^nx_1 - T^nx_2| \le |\mu|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\le t\le b} |x_1(t) - x_2(t)|, \tag{1.5.18}
$$

(5)所以

$$
d(T^nx_1, T^nx_2) \le \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d(x_1, x_2),
$$

由于

$$
\mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty),
$$

因此, 对充分大的 n, 有

$$
0 < \mu^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1.
$$

由定理 1.5.8, 方程 (1.5.16) 存在唯一解.

说明: 上述这些关于方程解的例子, 都是通过把原来的转化为不动点问题解决的.

说明: 上述这些关于方程解的例子, 都是通过把原来的转化为不动点问题解决的.

我们前面也提到： **很多解方程问题都可以转化为求不动点的问题.**

说明: 上述这些关于方程解的例子, 都是通过把原来的转化为不动点问题解决的.

我们前面也提到： **很多解方程问题都可以转化为求不动点的问题.**

不动点理论对于研究各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性等方面是一个有力的工具,

说明: 上述这些关于方程解的例子, 都是通过把原来的转化为不动点问题解决的.

我们前面也提到: **很多解方程问题都可以转化为求不动点的问题.**

不动点理论对于研究各类方程理论中解的存在性, 唯一性以及近似解的收敛性等方面是一个有力的工具,

因而研究不动点理论及其应用具有重要的理论和应用价值.