泛函分析习题解答

王宇

2016 年 8 月 14 日

谨以此书献给跳跳，感谢与你相伴的岁月。

目录

第一章 距离线性空间 **1**

第二章 **Hilbert** 空间 **19**

第三章 **Banach** 空间上的有界线性算子 **29**

第四章 有界线性算子谱论 **45**

第一章　距离线性空间

习题 1. 试证明: 在距离线性空间中, 对任意向量 x, 及数 a 都有

$$\begin{aligned} 0x &= \theta, \\ (-1)x &= -x, \\ \alpha\theta &= \theta. \end{aligned}$$

证明. 证 $0x = \theta, \forall\alpha$

$$\begin{aligned} (\alpha+0)x &= \alpha x + 0x \\ -\alpha x + \alpha x &= -\alpha x + \alpha x + 0x \\ \theta &= \theta + 0x \\ \theta &= 0x \end{aligned}$$

证 $(-1)x = -x, \forall x$

$$\begin{aligned} x + (-1)x &= 1x + (-1)x \\ &= 0x \\ &= \theta \end{aligned}$$

于是有 $(-1)x = -x$

证 $\alpha\theta = \theta$,

$$\begin{aligned} \alpha\theta &= \alpha(0\theta) \\ &= 0\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

□

习题 2. 试证明下述消去律在线性空间中成立:

$$x+y=x+z \Rightarrow y=z,$$
$$\alpha x=\alpha y \text{且} \alpha \neq 0 \Rightarrow x=y,$$
$$\alpha x=\beta x \text{且} x \neq \theta \Rightarrow \alpha=\beta$$

证明.

$$\begin{aligned} x+y=x+z &\Rightarrow -x+x+y=-x+x+z \\ &\Rightarrow y=z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha x=\alpha y(\alpha \neq 0) &\Rightarrow \alpha x+(-\alpha y)=\theta \\ &\Rightarrow \alpha x+(-1)\alpha y=\theta \\ &\Rightarrow \alpha x+(-\alpha)y=\theta \\ &\Rightarrow \alpha(x+(-y))=\theta \\ &\Rightarrow x=y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha x=\beta x(x \neq 0) &\Rightarrow (\alpha-\beta)x=\theta \\ &\Rightarrow \alpha=\beta \end{aligned}$$

□

习题 3. 试证明: 在空间 (s) 中, 如果 $\{x_n\}_{x=1}^{\infty}$ 按坐标收敛于 x_0 , 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按距离收敛于 x_0.

证明. 设 $x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots\}$, $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$. x_k 按坐标收敛于 x_0, 即 $\forall \varepsilon$

$$\forall j, \exists N=N(j,\varepsilon), \text{s.t.} \forall k>N, \left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|<\varepsilon$$

于是取 M_ε, 使

$$\sum_{j=M_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}{1+\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|} \leqslant \sum_{j=M_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}<\frac{\varepsilon}{2}$$

事实上, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ 是收敛数列, 故这样的 M_ε 是可以取到的.

$\forall j \leqslant M_\varepsilon, \exists N_{j\varepsilon}$, 使 $\forall k>N_{j\varepsilon}$, 有

$$\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N_\varepsilon = \max\limits_{j\leqslant M_\varepsilon}\{N_{j\varepsilon}\}$, 则 $\forall k > N_\varepsilon$, 有

$$\sum_{j=1}^{M_\varepsilon}\frac{1}{2^j}\frac{\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}{1+\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{M_\varepsilon}\frac{1}{2^j}<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是 $\forall k > N_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}d(x_k,x)&=\sum_{j=1}^{M_\varepsilon}\frac{1}{2^j}\frac{\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}{1+\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}+\sum_{j=M_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}{1+\left|\xi_i^{(k)}-\xi_j\right|}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按距离收敛于 x_0. □

习题 4. 证明: 空间 (c) 是可分的.

证明. 记 S_0 为形如为 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,r,r,\cdots\}$ 的集合. 其中 r_j,r 为有理数, n 为正整数, 于是 S_0 可数.$\forall x\in(m)$, 记 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\},\xi_j\to\xi(j\to+\infty)$ $\forall\varepsilon>0$, 下面找出 $x_0\in S_0$, 使得 $d(x_0,x)<\varepsilon$, 即可证明 S_0 在 (c) 中稠密, 于是 (c) 可分.

由于 $\xi_j\to\xi(j\to\infty)$, 故 $\exists N_\varepsilon>0$, 使 $\forall j>N_\varepsilon$, 有 $|\xi_j-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $|r-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $\forall j>N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}|r-\xi_j|&\leqslant|r-\xi|+|\xi-\xi_j|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

$\forall j\leqslant N_\varepsilon$, 取 r_j 使

$$|r_j-\xi_j|<\varepsilon$$

于是对

$$x_0=\{r_1,\cdots,r_{N_\varepsilon},r,r,\cdots\}$$

成立 $d(x_0,x)<\varepsilon$, 显然 $x\in S_0$. 于是 (c) 可分. □

习题 5. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是距离线性空间 $\langle X,d\rangle$ 中的两个 Cauchy 序列, 试证明 $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列.

证明. 易证两个不等式

$$\left|d(x_n,y_n)-d(x_n,y_m)\right| \leqslant d(y_n,y_m)$$
$$\left|d(x_n,y_m)-d(x_m,y_m)\right| \leqslant d(x_n,x_m)$$

于是有

$$\begin{aligned}\left|d(x_n,y_n)-d(x_m,x_m)\right| &\leqslant \left|d(x_n,y_n)-d(x_n,y_m)\right|+\left|d(x_n,y_m)-d(x_m,y_m)\right| \\ &\leqslant d(y_n,y_m)+d(x_n,x_m)\end{aligned}$$

由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 故 $\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n,m>N$, 有

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}, d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\left|d(x_n,x_n)-d(x_m,y_m)\right|<\varepsilon$$

此即说明 $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列. □

习题 6. 距离空间 X 中的点集 S 称为有界的, 如果存在 X 中某个球 $B(x_0,r)$, 使 $B(x_0,r)\supset S$.

试证明: 距离空间中任何 Cauchy 序列都是有界的.

证明. 设 $S=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为距离空间 $\langle X,d\rangle$ 中的 Canchy 列. 则对于数 1, $\exists N, \forall n>N$, 有

$$d(x_N,x_n)<1$$

取 $r=\max\limits_{1<j\leqslant N}\{d(x,x_j)+1\}+1$, 下证 $S\subset B(x,r)$, 于是 S 有界.

$\forall x_m\in S$, 若 $m\leqslant N$, 有 $d(x_m,x_1)<r$, 故 $x_m\in B(x_1,r)$. 若 $m>N$, 则

$$d(x_1,x_m)\leqslant d(x_1,x_N)+d(x_N,x_m)<r$$

故 $x_m\in B(x_1,r)$. 于是证得 $S\subset B(x_1,r)$. □

习题 7. 设 $\langle X,d\rangle$ 是距离空间, A 是 X 中的一个给定的子集. 定义

$$\operatorname{dist}(x,A)\overset{d}{=}\inf\{d(x,y):y\in A\}, \text{当} x\in X.$$

称之为 x 与 A 的距离.

证明: $\operatorname{dist}(x,A)$ 是 x 的连续函数.

证明. 记 $f(x)=\text{dist}(x,A)$. 任给 $x\in X$, 对于 $f(x)$ 的任意领域 $V,\exists\varepsilon>0$, 使

$$B(f(x),\varepsilon)\subset V.$$

由 dist 的定义,$\exists y\in A$, 使 $\left|f(x)-d(x,y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是令 $U=B(x,\frac{\varepsilon}{2})$. 则 $\forall x'\in B(x,\frac{\varepsilon}{2})$

$$\left|d(x',y)-f(x)\right|\leqslant d(x',x)+\left|d(x,y)-f(x)\right|<\varepsilon$$

于是 $\left|f(x')-f(x)\right|<\varepsilon$. 即 $f(U)\subset B(f(x),\varepsilon)\subset V$. 这就说明 dist$(x,A)$ 连续. □

习题 8. 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集,$C(S)$ 表示 S 上有界连续函数全体按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间. 对 $f,g\in C(S)$, 定义距离为

$$d(f,g)=\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|.$$

试证明: $C(S)$ 是完备的距离线性空间.

证明. 先证 $C(S)$ 为距离线性空间, 这由以下两个不等式可知

$$\begin{aligned}d(f_n+g_n,f+g)&=\sup_{x\in S}\left|f_{n(x)}+g_n(x)-|f(x)+g(x)|\right|\\&\leqslant\sup_{x\in S}\left|f_n(x)-f(x)\right|+\sup_{x\in S}|g_n(x)-g(x)|\\&=d(f_n,f)+d(g_n,g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(\alpha f_n,\alpha f)&=\sup_{x\in S}\left|\alpha f_n(x)-\alpha f(x)\right|\\&\leqslant|\alpha|\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)|\\&=|\alpha|d(f_n,f)\end{aligned}$$

下证 $C(S)$ 完备.

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $C(S)$ 中的 Cauchy 列, 于是 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in S$, 有 $N>0$, 使 $\forall n,m>N$

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\sup_{x\in S}|f_n(x)-f_m(x)|=d(f_n,f_m)<\varepsilon$$

于是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛. 由数学分析的结论, 若记 $f_n\to f$, 则 f 连续且有界. 故 $f\in C(S)$. 又 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in S,\exists N=N(\varepsilon),\forall n>N$

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

于是 $d(f_n,f)=\sup\limits_{x\in S}|f_n(x)-f(x)|\varepsilon\varepsilon$. 这就证明了 $C(S)$ 完备. □

习题 9. 证明: $l^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 是完备的距离空间.

证明. 先对 $p=+\infty$, 即有界序列空间 (m) 证明完备性.

记 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 (m) 中 Cauchy 列, 记 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_j^{(n)},\cdots\}$. 则 $\forall\varepsilon,\forall j,\exists N=N(\varepsilon),\forall m,n>N$

$$\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|\leqslant\sup_{j\geqslant1}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|=d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

于是 $\forall j,\{\xi_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列, 收敛. 设 $\xi_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty)$, 记 $x=\{\xi_1,\cdots\}$ 由不等式

$$\sup_{j\geqslant1}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|<\varepsilon$$

令 $m\to\infty$, 得到

$$\sup_{j\geqslant1}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|<\varepsilon$$

于是 $x_n-x\in l^{\infty}$,

$$d(x_n,x)=\sup_{j\geqslant1}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|\to0$$

这说明 l^{∞} 是完备的.

对 $1\leqslant p<\infty$, 证明 l^p 完备.

记 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 l^p 中的 Cauchy 列. 记 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\cdots\}$, 则 $\forall\varepsilon,\forall j,\exists N=N(\varepsilon),\forall n,m>N$

$$\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}=d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

于是 $\xi_j^{(n)}$ 收敛, 记 $\xi_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty)$. 记 $x=\{\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots\}$. 下证 $x\in l^p$.

对于已经给出的 ε, 和上述的 N, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(N)}-\xi_j\right|^p&=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\left|\xi_j^{(N)}-\xi_j^{(m)}\right|^p\\&\leqslant\liminf_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(N)}-\xi_j^{(m)}\right|^p\\&=\liminf_{m\to\infty}\left[d(x_N,x_m)\right]^p\\&\leqslant\varepsilon^p\end{aligned}$$

于是 $x_N-x\in l^p$, 由 l^p 线性, 故 $x\in l^p$. 同时由上式, 有 $d(x_n,x)\to0$. 这说明了 l^p 的完备性. □

习题 10. 设 X 是赋范线性空间,A 是 X 中有界的集合. 试证明: A 是完全有界集当且仅当对任何 $\varepsilon>0$, 存在 X 的有限维子空间 M, 使 A 中每个点与 M 的距离都小于 ε.

证明. 先证必要性. A 完全有界, 故 $\forall\varepsilon>0, \exists\varepsilon-$ 网 $S=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \forall x\in A, \exists i$

$$d(x,x_i)<\varepsilon$$

取 $M=S_p(S)$, 有

$$\rho(x,M)=\inf_{\tilde{x}\in M}\|x-\tilde{x}\|\leqslant d(x,x_i)<\varepsilon.$$

再证充分性. 若 A 不完全有界, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 使 A 没有只包含有限个元素的 ε_0- 网. 于是任取 $x_1\in A$, 有 $x_2\in A$, 使 $d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$. 同样有 $x_3\in A$, 使 $d(x_3,x_j), j=1,2$. 这个步骤一直进行下去, 生成一列点集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0,(m\neq n)$.

又由假设, 对 $\frac{\varepsilon_0}{8}, \exists x$ 的有限维子空间 M, 使得 $\forall x_n\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 有 $\tilde{x}_n\in M$, 使

$$d(x_n,\tilde{x}_n)<\frac{\varepsilon_0}{4}$$

由于 A 有界, 故 $\|\tilde{x}_n\|\leqslant\|x_n\|+\|x_n-\tilde{x}_n\|$ 有界. 于是 $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有聚点 $\tilde{x}$, 则 $\exists m,n>0$

$$d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\leqslant d(\tilde{x}_n,\tilde{x})+d(\tilde{x}_m,\tilde{x})<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,\tilde{x}_n)+d(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)+d(x_m,\tilde{x}_m)<\varepsilon_0$$

与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的取法矛盾. 于是 A 完全有界. □

习题 11. 设 $\langle X,\|\cdot\|\rangle$ 是赋范线性空间,$r>0$. 如果球 $B=\{x\in X;\|x\|<r\}$ 是列紧的, 则 X 必是有限维的. 试利用 Riesz 引理证明之.

证明. 设 X 不是有限维的, 不妨令 $r>1$. 若已有 n 个向量 $\{x_j\}_{j=1}^{n}\subset B$, 使 $\|x_j-x_k\|>\frac{1}{2}$, 当 $j\neq k$. 令 $M=S_p\{x_1,\cdots,x_n\}$, 则 M 是有限维子空间. $M\neq X$. 于是由 Riesz 引理, 存在 $x_{n+1}\in X, \|x_{n+1}\|=1$ 且 $\|x_{n+1}-x_j\|>\frac{1}{2}, j=1,\cdots n$. 对 n 施归纳, 有 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}\subset B$, 使 $\|x_j-x_k\|\geqslant\frac{1}{2},(j\neq k.)$ 这与 B 列紧矛盾. □

习题 12. 证明: n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 是 Banach 空间. 这里 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 个实数组成的有序数组 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的全体按如下定义的加法、数乘和范数形成的赋范线性空间

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n)$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n)$$
$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n), y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{R}$.

证明. 只需证 $\mathbb{R}^n$ 完备.

记 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意 Cauchy 列, $x_i=\{\xi_1^{(i)},\cdots,\xi_n^{(i)}\}$. 有
$\forall\varepsilon>0,\exists\tilde{N},\forall m,n>\tilde{N}$, 有

$$\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\|X_m-x_n\|<\varepsilon$$

$\forall 1\leqslant j\leqslant n$ 成立. 所以 $\{\xi_j^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列, 设 $\xi_j^{(i)}\to\xi_j(i\to\infty)$. 记 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N_j=N(j),\forall n>N_j$

$$|\xi_j^{(n)}\xi_j|<\varepsilon$$

取 $N=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{N_j\},\forall n>N$

$$\|x_n-x\|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\varepsilon$$

这就证明了完备性. □

习题 13. 如果在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\rho(x,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j-\eta_j\right|,$$

当 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}n$.

证明. 先证距离良定.

i) , ii）显然.

iii) 由 $\max\limits_j|\xi_j-\gamma_j|\leqslant\max\limits_j|\xi_j-\eta_j|+\max\limits_j|\eta_j-\gamma_j|$ 可知.

再证其为距离线性空间. 这由

$$\begin{aligned}d(x_n+y_n,x+y)&=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j^{(n)}+\eta_j^{(n)}-\xi_j-\eta_j\right|\\&\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\eta_j^{(n)}-\eta_j\right|\\&=d(x_n,x)+d(y_n,y)\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

以及

$$d(\alpha x_n,\alpha x)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\alpha\xi_j^{(n)}-\alpha\xi_j\right|\leqslant|\alpha|\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|=|\alpha|d(x_n,x)$$

可知.

下证其完备. 设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 Cauchy 列. 记 $x_k=(\xi_1^{(k)},\cdots,\xi_n^{k})$. $\forall\varepsilon,\forall j,\exists N,\forall n,m>N$, 有

$$\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}\right|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(m)}|=d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

于是 $\forall j,\{\xi_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列. 设 $\xi_j^{(k)}\to\xi_j(k\to\infty)$. 记
$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n).\forall j,\exists N_j,\forall n>N_j$

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon$$

于是取 $N=\max\{N_j\},\forall n>N$

$$d(x_n,x)=\max_j|\xi_j^{(n)}-\xi_j|<\varepsilon$$

□

习题 14. 设 $\langle X,d\rangle$ 是完备的距离空间, E 是 X 的闭子集, 试证明 $\langle E,d\rangle$ 也是完备的距离空间.

证明. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\langle E,d\rangle$ 中 Cauchy 列, 则其也为 $\langle X,d\rangle$ 中 Cauchy 列. 设 $x_n\to x(n\to\infty)$. 下证 x 为极限点, 故 $x\in E$, 于是 $\langle E,d\rangle$ 完备.

事实上, $\forall r>0,n$ 充分大时, 有 $d(x_n,x)<\frac{r}{2}$, 故 $x_n\in B(x,r)$. 若 $x_n=x,x\in E$. 若 $x_n\neq x$, 则 x 为极限点. □

习题 15. 证明: $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中子集 S 是列紧的充要条件是

(i) 存在常数 $M>0$, 使对一切 $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in S$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\leqslant M$.

(ii) 任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使当 $k\geqslant N$, 对一切 $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in S$ 有 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}|\xi_n|^p\leqslant\varepsilon$.

证明. 充分性. 由 P11, l^p 中序列的收敛条件, 任给 S 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 记

$$x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_j^{(n)},\cdots\}$$

由 $\forall n,j,|\xi_j^{(n)}|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(n)}|^p\leqslant M$. $\forall j,\{\xi_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列. 通过对角线法, 可取得 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty},\forall j$,

$$\xi_j^{(n_i)}\to\xi_j\quad(n_i\to\infty)$$

这便满足第一个条件. 又对序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $\forall\varepsilon>0,\exists N_0,\forall k\geqslant N_0,\forall n_i$

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\xi_j^{(n_i)}|^p\leqslant\varepsilon$$

这满足了第二个条件, 故 $x_{n_i}\to x(n_i\to\infty)$. S 列紧.

必要性. l^p 完备, 故 S 完全有界. $\forall \varepsilon > 0, S$ 中有 $\frac{\varepsilon}{2}-$ 网 $\{x_i\}_i^N$, 使 $\forall x \in S$

$$d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \exists 1 \leqslant i \leqslant N$$

下证 (i). 记 $x_i = \{\eta_1^{(i)}, \cdots\}$, 取 $\tilde{M} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\{ \left[\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\eta_j^{(i)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\}$ 有 $\forall x \in S$, 由 Minkowski 不等式, $\exists 1 \leqslant i \leqslant N$.

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j - \eta_j^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\eta_j^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{M}$$

于是, 取 $M = (\tilde{M} + 1)^p$. 即有 $\forall x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \leqslant M.$$

下证 (ii), 对上述 $\varepsilon, \exists N_i = N_i(\varepsilon)$, 成立

$$\left[\sum_{n=N_i}^{\infty} \left|\eta_n^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\tilde{N} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} N_i, \forall x \in S$

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{n=N}^{\infty} |\xi_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left[\sum_{n=N}^{\infty} \left|\xi_n - \eta_j^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{n=N}^{\infty} \left|\eta_j^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left[\sum_{n=N}^{\infty} \left|\xi_n - \eta_j^{(i)}\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 (ii) 成立. □

习题 16. 试证明: 空间 (s) 中子集 S 是列紧的充要条件是对每个正整数 n, 存在常数 $M_n > 0$, 使当 $x = \{\xi_n\}_n^{\infty} \in S$, 便有 $|\xi_n| \leqslant M_n, n = 1, 2, \cdots$.

证明. 必要性. S 列紧, 故完全有界. 对正整数 n, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, 则有 $\varepsilon-$ 网 $\{x_i\}_{i=1}^N$. 使 $\forall x \in S, \exists i, d(x, x_i) < \varepsilon$. 于是记 $x_i = \{\eta_1^{(i)}, \cdots\}, x = \{\xi_1, \cdots\}$.

$$\left|\xi_n - \eta_n^{(i)}\right| \leqslant \frac{2^n d(x, x_i)}{1 - 2^n d(x, x_i)} = M_{n1}.$$

取 $M_{n2} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \left|\eta_n^{(i)}\right|$. 于是令 $M_n = M_{n1} + M_{n2}$

$$|\xi_n| \leqslant \left|\xi_n - \eta_n^{(i)}\right| + \left|\eta_n^{(i)}\right| < M_{n1} + M_{n2} = M_n$$

这即是结论.

充分性. 对任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset, x_n = \{\xi_1^{(n),\cdots}\}$. 由于 $\forall j, \left|\xi_j^{(n)}\right| \leqslant M_j$. 故 $\{\xi_j^n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列. 用对角线方法, 可得出数列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $\xi_j^{(n_i)} \to \xi_j(n_i \to \infty)$. 又由于 (s) 中的收敛为按序列收敛, 故 $x_{n_i} \to x(n_i \to \infty)$ 其中 $x = \{\xi_1, \cdots\}$. 这就说明了列紧. □

习题 17. 设 $M[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上有界函数全体按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间. 当 $x = x(t) \in M[a,b]$, 定义范数

$$\|x\| = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |x(t)|.$$

证明: 按这个范数 $M[a,b]$ 是 Banach 空间.

证明. 记 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $M[a,b]$ 中的 Cauchy 列, 则 $\forall \varepsilon, \exists N, \forall m,n > N$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \|x_n - x_m\| = \sup_{1\leqslant t\leqslant b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛, 记 $x_n \to x(n \to \infty)$, 则

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{1\leqslant t\leqslant b} |x_n(t) - x_m(t)|$$

令 $m \to \infty$

$$\begin{aligned} &= \sup_{1\leqslant t\leqslant b} |x_n(t) - x(t)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

于是 $x_n - x \in M[a,b]$, 由 M 的线性性, $x \in M[a,b]$, 又由一致收敛

$$\|x_n - x\| = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |x_n(t) - x(t)| \to 0$$

这说明了 $M[a,b]$ 完备, 于是其为 Banach 空间. □

习题 18. 设 $V[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上右连续的有界变差函数全体, 按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间, 定义范数为

$$\|x\| = |x(a)| + \mathrm{V}_a^b(x), \text{ 当} x = x(t) \in V[a,b]$$

这里 $\mathrm{V}_a^b(x)$ 表示函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

证明. 先证范数良定.

全变差 $\mathrm{V}_a^b(x)$ 定义为, 对 $[a,b]$ 的任意划分 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 记

$$\mathrm{V}_a^b(x)=\sup_{\Delta}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|x(t_i)-x(t_{i-1})\right|\right\}$$

证 (i). $\|x\|\geqslant 0$ 显然. 又若 $\|x\|=0$, 则 $x(a)=0, \mathrm{V}_a^b(x)=0$. 对任意 t, 记划分 $a<t<b$, 则

$$0=\mathrm{V}_a^b\geqslant|x(t)-x(a)|+|x(b)-x(t)|$$

得到 $x(t)=0$. 故 $x\equiv 0$.

证 (ii). $\forall x\in V[a,b], \forall k, \forall$划分$\Delta$, 成立

$$\mathrm{V}_a^b(kx)=\sup_{\Delta}\sum\left|kx(t_i)-kx(t_{i-1})\right|=|k|\sup_{\Delta}\sum\left|x(t_i)-x(t_{i-1})\right|=|k|\mathrm{V}_a^b(x).$$

于是

$$\|kx\|=|kx(a)|+\mathrm{V}_a^b(kx)=|k|\|x\|$$

证 (iii). 有三角不等式易得.

下证完备性.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $V[a,b]$ 中的 Cauchy 列, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n,m>N$,

$$\|x_n-x_m\|=|x_n(a)-x_m(a)|+\mathrm{V}_a^b(x_n-x_m)<\varepsilon$$

$\forall t\in[a,b]$

$$\begin{aligned}|x_n(t)-x_m(t)|&\leqslant|x_n(t)-x_m(t)-(x_n(a)-x_m(a))|+|x_n(a)-x_m(a)|\\&\leqslant\mathrm{V}_a^b(x_m-x_n)+|x_n(a)-x_m(a)|\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛, 记 $x_n(t)\to x(t)$

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\mathrm{V}_a^b(x_n-x)+|x_n(a)-x(a)|\\&\leqslant\liminf_{m\to\infty}\mathrm{V}_a^b(x_n-x_m)+|x_n(a)-x(a)|\\&\leqslant\liminf_{m\to\infty}\left\{\mathrm{V}_a^b(x_m-x_n)+|x_n(a)-x_m(a)|\right\}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

于是 $x_n-x\in V[a,b]$, 即 $x\in V[a,b]$. 又由上式,$\|x_n-x\|\to 0$. 于是 $V[a,b]$ 为 Banach 空间. □

习题 19. 举例说明, 在一般的距离空间中, 完全有界集不一定是列紧的.

证明. 取 X 为所有有理数, d 为通常的距离. 即 $d(x,y)=|x-y|$. 则对于 $A=[0,3]\cap\mathbb{Q}$,A 为 X 中完全有界集. 事实上, $\forall\varepsilon>0,\bigcup\limits_{x\in A}B(x,\varepsilon)$ 构成 A 的开覆盖, 于是有有限子覆盖 $\bigcup\limits_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)\supset A.\forall x\in A,\exists i,x\in B(x_i,\varepsilon)$. 即 $d(x,x_i)<\varepsilon$, 于是 $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ 为 A 的 $\varepsilon-$ 网.

A 不是列紧的. 事实上, $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$. 令

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}$$

则有 $x_n\to e-1$. 又有 $\{x_n\}\subset A$, $e-1$ 不是有理数, 所以 $e-1\neq A$, 于是 $\{x_n\}$ 不可能在 A 中收敛, 于是 A 不列紧. □

习题 20. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是距离空间 X 中的 Cauchy 序列, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛于 x.

证明. $\forall\varepsilon>0,\exists K,\forall k>K$, 有

$$d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又 $\exists N,\forall m,n>N$

$$d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $\tilde{k}>K,n_{\tilde{k}}>N$. 于是有 $\forall n>N$,

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

习题 21. 设 f 是从距离空间 X 到距离空间 Y 的函数, 则 f 是连续的当且仅当对 Y 中的任意闭集 $F,f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证明. 先证 F 为闭集 $\iff$ $X\backslash F$ 为开集.

必要性. $x\in X\backslash F$. 则 x 不为 F 极限点, $\exists r,B(x,r)\cap F=\varnothing$. 故 $B(x,r)\subset X\backslash F.X\backslash F$ 为开集.

充分性. 任给 F 的极限点 x, 若 $x\in X\backslash F$, 则 $\exists r,B(x,r)\subset X\backslash F$. 即 $B(x,r)\cap F=\varnothing$. 这与 x 为极限点矛盾, 故 $x\in F$, F 为闭集.

于是 f 连续 $\iff$ U 为开集, 则 $f^{-1}(U)$ 为开集 $\iff$ F 为闭集, 则 $f^{-1}(F)$ 为闭集.

这由 $f^{-1}(F)=x\backslash\left\{f^{-1}(x\backslash F)\right\},f^{-1}(U)=x\backslash\left\{f^{-1}(x\backslash U)\right\}$. 可知. □

习题 22. 设 X 是 n 维复线性空间, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基. 试问, 当 X 看作实线性空间时, 其维数是多少? 请指出它的一个基.

证明. 维数为 $2n, \{e_1, \cdots e_n, ie_1, \cdots ie_n\}$ 是它的一个基.

事实上, 任给 $x \in X$, 记

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{j=1}^{n} (c_j + id_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j + \sum_{j=1}^{n} d_j i e_j$$

又若

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} b_j i e_j = 0$$

□

习题 23. 设 X 是赋范线性空间, $x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$. 如果 $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} x_n \right\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中的收敛序列, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 如果数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛.

试证明: X 中任何绝对收敛的级数收敛当且仅当 X 是 Banach 空间.

证明. 充分性. 对序列 $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} x_n \right\}_{k=1}^{\infty}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall l > m > N$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} x_n - \sum_{n=1}^{l} x_n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{l} x_n \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{l} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$$

这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, 于是序列 $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} x_n \right\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, X 是 Banach 空间, 故其收敛于 $x \in X$.

必要性. 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个 Cauchy 列, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_k, \forall n, m > N_k$

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$$

不妨设 $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x_{N_{k+1}} - x_{N_k} \right\| \leqslant \sum \frac{1}{2^k} < +\infty$$

于是 $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{m} \left(x_{N_{k+1}} - x_{N_k} \right) \right\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛, 设其收敛于 $x \in X$. 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{N_{k+1}} - x_{N_k} \right) = \lim_{k \to \infty} x_{N_{k+1}} = x$$

于是得到 $x_n \to x$, 于是 X 是 Banach 空间. □

习题 24. 设 X, Y 是赋范线性空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子. 试证明: 如果 X 是有限维的, 则 T 是有界的, 且 T 的值域 $R(T)$ 也是有限维的.

证明. 设 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 为 X 的基, 则 $\forall x \in X$

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(e_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \|T(e_i)\|$$

记 $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \|T(e_i)\|$. 于是有

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &\leqslant \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \|T(e_i)\| \\ &\leqslant M \sum_{i=1}^N |\alpha_i|\end{aligned}$$

由引理 7.1

$$\begin{aligned}&\leqslant M\mu \left\|\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right\| \\ &= M\mu \|x\|\end{aligned}$$

这说明了 T 有界.

$\forall y = Tx \in R(T)$, 有 $y = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i T(e_i)$. 故 $R(T)$ 的维数不超过 n. □

习题 25. 设 X, Y 是赋范线性空间, T 是 X 到 Y 的线性算子. 如果 T 是单射的, 则 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 X 中线性无关的当且仅当 $\{Tx_1, \cdots, Tx_n\}$ 是 Y 中线性无关的.

证明. 必要性. 设 $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) = 0$, 则 $T\left(\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = 0$. 又 $T(0) = 0$. T 为单射. 有 $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. 由 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 线性无关, 得到 $\forall i, \alpha_i = 0$. 于是 $\{T(x_i)\}_{i=1}^n$ 线性无关.

充分性. 设 $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, 有 $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) = 0$. 于是 $\forall i, \alpha_i = 0$, 得 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 线性无关. □

习题 26. 设 T 是从赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ 到赋范线性空间 $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$ 的有界线性算子, 证明

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Tx\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leqslant 1} \|Tx\|_2$$

证明. $\forall \|x\|_1 \leqslant 1$, 成立

$$\|Tx\|_2 \leqslant \|T\| \|x\|_1 = \|T\|$$

故 $\|T\| \geqslant \sup\limits_{\|x\|_1 \leqslant 1} \|Tx\|_2$.

$\sup\limits_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 \leqslant \sup\limits_{\|x\|_1 \leqslant 1} \|Tx\|_2$ 显然.

由 $\|T\|$ 的定义, $\forall \varepsilon, \exists x \in X$,

$$[\|T\| - \varepsilon] \|x\|_1 \leqslant \|Tx\|_2$$

于是有

$$\|T\| - \varepsilon \leqslant \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \right\|_2 \leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \|T(x)\|_2$$

又由 ε 任意性

$$\|T\| \leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \|T(x)\|_2$$

于是

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leqslant 1} \|Tx\|_2$$

□

习题 27. 设 T 是 Banach 空间 X 上有界线性算子, 如果存在 X 上有界线性算子 S, 使

$$TS = ST = I,$$

则 T 是有界可逆的, 而且 $T^{-1} = S$.

反之, 如果 T 是有界可逆的, 则

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I.$$

这里 I 是 X 上恒等算子, 即

$$Ix = x, \forall x \in X.$$

证明. $\forall x \in X, T(Sx) = Ix = x$. 所以 T 是满射. 又若 $Tx_1 = Tx_2, x_1 = STx_1 = STx_2 = x_2$, 说明 T 是单射. 又 $\forall y = Tx, Sy = STx = x$. 于是 $S = T^{-1}$.

反之.$\forall y = Tx$, 成立

$$T(T^{-1}(y)) = T(x) = y$$
$$T^{-1}(T(x)) = x.$$

故 $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. □

习题 28. 设 X 是距离空间, $T : X \to X$ 是映射. 如果 T 是压缩的, 求证: 对任意自然数 n, T^n 也是压缩的. 如果对某个自然数 $n > 1, T^n$ 是压缩映射, T 也一定是压缩映射吗?

证明. T 压缩, 故 $\exists q<1, \forall x,y\in X$

$$d(Tx,Ty)\leqslant qd(x,y)$$

于是

$$d(T^n x,T^n y)\leqslant qd(T^{n-1}x,T^{n-1}y)\leqslant\cdots\leqslant q^n d(x,y)$$

其中 $q^n<1$. 故 T^n 压缩.

T^n 压缩, 则 T 不一定压缩.

取 $X=\mathbb{R}^2, d(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}|\xi_i-\eta_i|$. 其中 $x=(\xi_1,\xi_2), y=(\eta_1,\eta_2)$. 取 T 为右移算子, 即 $T(x)=(0,\xi_1)$. 于是 $T^2(x)$ 恒为 0. 令 $q=\frac{1}{2}, \forall x,y\in X$

$$0=d(T^2x,T^2y)\leqslant qd(x,y)$$

但取 $x=(1,0), y=(0,1)$.

$$1=d(Tx,Ty)>qd(x,y)=\frac{1}{2}$$

故 T 不是压缩映射. □

习题 29. 设 F 是 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中非空有界闭集, 映射 $T:F\to F$ 满足

$$d(Tx,Ty)<d(x,y), \forall x,y\in F, x\neq y$$

试证明: T 在 F 中有唯一不动点.

证明. 设 $f(x)=d(Tx,x)$, 则 $\forall x,y\in X$,

$$|f(x)-f(y)|=\Big|d(Tx,x)-d(Ty,y)\Big|\leqslant d(Tx,Ty)+d(x,y)<2d(x,y)$$

于是 $f(x)$ 连续, F 为非空有界闭集, 故必有 $x_0\in F$, 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in F}\{f(x)\}$, 断言 $f(x_0)=0$. 若否, 则 $x_0\neq Tx_0$,

$$f(Tx_0)=d(T^2x_0,Tx_0)<d(Tx_0,x_0)=f(x_0)$$

与 x_0 的取法矛盾, 故 $f(x_0)=0$. 即 $x_0=Tx_0, x_0$ 为不动点.

若 y_0 也是不动点,

$$d(x_0,y_0)=d(Tx_0,Ty_0)<d(x_0,y_0)$$

故 $d(x_0,y_0)=0 . x_0=y_0$. 于是不动点唯一. □

习题 30. 设 $K(t,s)$ 是矩形 $\{(t,s):0\leqslant t,s\leqslant 1\}$ 上可测函数, 且

$$\int_0^1\int_0^1 |K(t,s)|^2 dtds<+\infty$$

考虑积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

其中 $f(t)\in L^2[0,1]$ 是一给定函数, λ 为参数.

试利用压缩映像原理证明: 当 $|\lambda|$ 适当小时, 上述积分方程在 $L^2[0,1]$ 中的解存在且唯一.

证明. 取 $Tx=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, 于是其为 $L^2[0,1]$ 上的线性映射, 有

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\|&=\left\|\lambda\int_0^1 K(t,s)(x-y)(s)ds\right\|\\&\leqslant|\lambda|\left\|\left[\int_0^1 K^2(t,s)ds\right]^{1/2}\left[\int_0^1(x-y)^2(t,s)ds\right]^{1/2}\right\|\\&=|\lambda|\int_0^1\left[\int_0^1 K^2(t,s)ds\right]^{1/2}\left[\int_0^1(x-y)^2(t,s)ds\right]^{1/2}dt\\&\leqslant|\lambda|\left[\int_0^1\int_0^1 K^2(t,s)dsdt\right]^{1/2}\left[\int_0^1\int_0^1(x-y)^2(t,s)dsdt\right]^{1/2}\end{aligned}$$

令 $M=\int_0^1\int_0^1 K^2(t,s)dsdt$

$$\leqslant|\lambda|M^{1/2}\|x-y\|$$

于是取 $0<\lambda<M^{-\frac{1}{2}}$, 即可说明 T 为压缩映射, 故有唯一不动点 x, 满足

$$Tx=x=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

此即为积分方程. □

第二章　Hilbert 空间

习题 1. 设 X 是内积空间, $x, y \in X$ 都是非零元, 试证明:

(i) 如果 x, y 正交, 则 x 与 y 线性无关;

(ii) x 与 y 正交的充要条件是对任意数 α,

$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|;$$

(iii) x 与 y 正交的充要条件是对任意数 α

$$\|x+\alpha y\| \geqslant \|x\|.$$

证明. 证 (i)

若有数 a, b 使 $ax+by=0$, 则

$$(ax+by, ax+by) = |a|^2\|x\|^2 + |b|^2\|y\|^2 = 0$$

又 $\|x\|^2 > 0, \|y\|^2 > 0$, 故 $a=b=0$ 于是 x, y 线性无关.

证 (ii)

必要性.

$$\begin{aligned}\|x+\alpha y\|^2 &= (x+\alpha y, x+\alpha y) = \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2 \\ &= (x-\alpha y, x-\alpha y) = \|x-\alpha y\|^2\end{aligned}$$

于是 $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$

充分性.

$$\begin{aligned}(x+\alpha y, x+\alpha y) &= \|x\|^2 + |\alpha|\|y\|^2 + \bar{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{(x,y)} \\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2 - \left(\bar{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{(x,y)}\right) \\ &= (x-\alpha y, x-\alpha y)\end{aligned}$$

得到 $\forall \alpha$

$$\bar{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{(x,y)} = 0$$

令 $\alpha=1,i$, 得到

$$\begin{cases}(x+y)+\overline{(x,y)}=0\\-(x,y)+\overline{(x,y)}=0\end{cases}$$

于是 $(x,y)=0, x$ 与 y 正交.

证 (iii)

必要性.

$$\|x+\alpha y\|^2=(x+\alpha y,x+\alpha y)=\|x\|^2+|\alpha|\|y\|^2\geqslant\|x\|^2$$

充分性. 取 $\alpha=-\frac{(x,y)}{\|y\|^2}$, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x+\alpha y,x+\alpha y)-\|x\|^2\\&=\bar{\alpha}(x,y)+\alpha\overline{(x,y)}+|\alpha|^2\|y\|^2\\&=-|(x,y)|^2\|y\|^{-2}\\&\leqslant 0\end{aligned}$$

于是 $(x,y)=0$, x,y 正交. □

习题 2. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正规正交集, 则对任意 $x,y\in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

证明. 由 Holder 不等式.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\right]^{1/2}\leqslant\|x\|\|y\|.$$

□

习题 3. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正规正交集,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$$

试证明

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\bar{\beta}_n$$

且右端级数绝对收敛.

证明. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正规正交集, 所以

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n\right) \\
&= \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n, \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\beta n e_n\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n, \sum_{n=1}^{N}\beta n e_n\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\bar{\beta}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\bar{\beta}_n
\end{aligned}
$$

记 $z_n = \sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m e_m$, 于是 $z_n \to x, \|z_n - x\| = 0$.

$$
\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\left|(x,e_n)\right|^2 + \|x - z_N\|
$$

令 $N\to\infty$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left|(x,e_n)\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2
\end{aligned}
$$

同样 $\|y\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2$

于是由 Holder 不等式

$$
\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\bar{\beta}_n| \leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2\right]^{1/2} = \|x\|\|y\|
$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\bar{\beta}_n$ 绝对收敛. □

习题 4. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分的 Hilber 空间 H 的正规正交基. 证明: 任给 $x,y\in H$,

$$
(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)},
$$

且右端级数绝对收敛.

证明. 令 $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n, y=\sum_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n$, 则由上一题，得结论. □

习题 5. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域. 令 $L^2(D)$ 表示所有的 D 上平方可积的复值函数 $f(x)$ 按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间, 设

$$(f,g)=\int_D f(x)\overline{g(x)}d, \text{当} f,g\in L^2(D)$$

试证明: $L^2(D)$ 按如上定义的内积是一个 Hilbert 空间.

证明. 内积良定显然. 记 $\|\cdot\|$ 为内积导出范数, 下证 $L^2(D)$ 在此范数下完备.

记 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2(D)$ 上的 Cauchy 列, 由于

$$mE\left[|f_n-f_m|>\delta\right]\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\int_{E\left[|f_n-f_m|>\delta\right]}|f_n-f_m|^2dx\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{\delta}\|f_n-f_m\|.$$

于是 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛, 故其有子列 $\{f_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, 使 $f_{n_j}\to f, a.e.$ 于 D. 又 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m,n>N$

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$$

令 $n_j>N$,

$$\|f_n-f_{n_j}\|<\varepsilon$$

令 $j\to\infty$

$$\left[\int_D|f_n-f|^2dx\right]^{1/2}\leqslant\liminf_{j\to\infty}\left[\int_D|f_n-f_{n_j}|^2dx\right]^{1/2}<\varepsilon$$

于是 $f_n-f\in L^2(D), f\in L^2(D)$. 又由 $\|f_n-f\|<\varepsilon, f_n\to f$. 这便证得 $L^2(D)$ 完备. 故其为 Hilbert 空间. □

习题 6. 证明: $l^p(p\neq 2)$ 不可能是内积空间.

证明. 取 $x=\{1,0,0,\cdots\}, y=\{0,1,0,0,\cdots\}$, 则

$$\|x+y\|+\|x-y\|=2\sqrt[3]{2}$$
$$2\left(\|x\|+\|y\|\right)=4$$

二者并不相等，所以不满足平行四边形法则. □

习题 7. 设 $\{u_n\}$ 是线性无关的, 验证按 Schmidt 正规正交法 (2.1) 得到的集 $\{v_n\}$ 是正规正交集.

证明. $\forall n$

$$(v_n, v_n) = \frac{1}{\|w_n\|^2}(w_n, w_n) = 1$$

若 $\{v_1, \cdots v_{k-1}\}$ 是正交集, 则考虑 $v_k, \forall j < k$

$$\begin{aligned}(v_k, v_j) &= \frac{1}{\|w_k\|}\left(u_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_k, v_i)v_i, v_j\right) \\ &= \frac{1}{\|w_k\|}\left[(u_k, v_j) - (u_k, v_j)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

于是 $\{v_1, \cdots v_k\}$ 是正交集. 又 $\{v_1\}$ 显然为正交集. 故由归纳法, $\{v_n\}$ 是正规正交集. □

习题 8. 证明射影定理 (定理 3.1) 中的唯一性.

证明. 若 $x = y + z = y' + z'$, 则 $y - y' = z - z' \in M \cap M^\perp = \varnothing$. 故 $y - y' = z - z' = 0$. 于是 $y = y', z = z'$. □

习题 9. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个线性流行. 证明:

(i) $M^\perp$ 是 H 的子空间.

(ii) $(\bar{M})^\perp = M^\perp$.

(iii) 如果 M_1 也是 H 的线性流型, 使 $M \subset M_1$, 则 $M_1^\perp \subset M^\perp$.

证明. 证 (i)

线性性. $\forall x, y \in M^\perp, (x + y, z) = (x, z) + (y, z) = 0, \forall z \in M$. 故 $x + y \in M^\perp$.

$$\forall \alpha, (\alpha x, z) = \alpha(x, z) = 0$$

故 $\alpha x \in M^\perp$.

又设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M^\perp$, 且 $x_n \to x$. 则

$$(x, z) = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = 0$$

故 $x \in M^\perp$

证 (ii)

$x \forall \in M^\perp, \forall z \in \bar{M}$, 有 $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset M$, 使 $z_n \to z$, 故

$$(x, z) = \lim_{n\to\infty}(x, z_n) = 0$$

于是 $x \in (\bar{M})^\perp$, 故 $M^\perp \subset (\bar{M})^\perp$.

又 $\forall x\in(\bar{M})^{\perp},\forall z\in M,z\in\bar{M}$, 故

$$(x,z)=0$$

于是 $x\in M^{\perp},(\bar{M})^{\perp}\subset M^{\perp}$

证 (iii)

$\forall\in M_1^{\perp},\forall y\in M,y\in M_1$, 故

$$(x,y)=0$$

于是 $x\in M^{\perp}$. 故 $M_1^{\perp}\subset M^{\perp}$ □

习题 10. 试证明 H^* 按如下范数:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|,\text{当}f\in H^*,$$

是完备的赋范线性空间.

证明. 对任意 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H^*,\forall\varepsilon>0,\forall x\in H,\exists N,\forall m,n>N$, 有

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|&\leqslant\|x\|\left|f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)-f_m\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\\&\leqslant\|x\|\|f_n-f_m\|\\&<\|x\|\varepsilon\end{aligned}$$

于是 $\forall x,\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列，设其收敛于 $f(x)$. 则如此逐点定义的 f 为线性泛函.

下证 f 连续. $\forall x\in H,\forall n$

$$|f(x)|=\|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant\|x\|\left(\|f_n-f\|+\|f_n\|\right)$$

于是 f 为有界线性泛函, 故连续. 又由 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$

$$\|f_n-f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

故 $f_n\to f,f\in H^*$, 这便证得 H^* 为完备的赋范空间. □

习题 11. 证明: 对任意的 $x\in H$,

$$\|x\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|(x,y)|$$

证明.

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1}|(x,y)|\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1}\|x\|\|y\|\leqslant\|x\|$$

$$\|x\|=\left|\left(x,\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1}|(x,y)|$$

于是

$$\|x\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|(x,y)|$$

□

习题 12. 验证定理 3.3 中的 A 是 H 上的有界线性算子.

证明. (i)

$$\|Ax\|=\|z_f\|=\|f\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|f(y)|$$

$$=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|\overline{\varphi(x,y)}|\leqslant\|\varphi\|\|x\|$$

(ii)

线性性由 $\varphi(x,y)$ 和 τ 的线性性得出. $\forall x,y\in H$

$$A(x+y)=z_{f+g}=z_f+z_g=Ax+Ay$$

其中 $f=\overline{\varphi(x,z)}, g=\overline{\varphi(y,z)}$

$$A(\alpha x)=z_{\alpha f}=\alpha z_f=\alpha Ax.$$

□

习题 13. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中一个正规正交集, 如果对每个 $x\in H$,

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,$$

则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty},\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的两个正规正交集, 适合

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1$$

试证明：$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的当且仅当 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的.

证明. 只需证一边即可.

若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 完备, 若有 $g \in H$, 使 $(g, e_n) = 0, \forall n$, 则

$$\|g\| = \sum_{n=1}^{\infty} |(g, e_n)|^2 = 0$$

故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正规正交基.

下证 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正规正交基, 于是 $\forall x \in H$

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 完备.

事实上, 若有 $f \in H$, 使得 $\forall n, (f, f_n) = 0$, 有

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(f, f_n) + (f, e_n - f_n)|^2\right]^{1/2} \\
&\leqslant \left[\sum_{n=1}^{\infty} |(f, f_n)|^2\right]^{1/2} + \|f\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2\right]^{1/2} \\
&= \|f\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2\right]^{1/2} \\
&< \|f\|
\end{aligned}$$

矛盾. 于是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正规正交基. 命题得证. □

习题 14. 设 T 是从 Hilbert 空间 H_1 到 H_2 的有界线性算子, 证明 T^* 是从 H_2 到 H_1 的有界线性算子.

证明. (i) 线性性.

令 $g(x) = (Tx, y_1 + y_2)$, 则

$$\begin{aligned}
(x, (y_1 \hat{+} y_2)) = g(x) &= (Tx, y_1 + y_2) \\
&= (Tx, y_1) + (Tx, y_2) \\
&= (x, \hat{y}_1) + (x, \hat{y}_2) \\
&= (x, \hat{y}_1 + \hat{y}_2)
\end{aligned}$$

由 x 的任意性,

$$T^*(y_1 + y_2) = (y_1 \hat{+} y_2) = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$$

令 $h(x)=(Tx,\alpha y)$, 则

$$\begin{aligned}(x,(\hat{\alpha y}))=h(x)&=(Tx,\alpha y)\\&=\bar{\alpha}(Tx,y)\\&=\bar{\alpha}(x,\hat{y})\\&=(x,\alpha\hat{y})\end{aligned}$$

由 x 的任意性,

$$T^*(\alpha y)=(\hat{\alpha y})=\alpha\hat{y}$$

这就说明 T^* 是线性算子.

(ii) 有界性.

$$\|T^*y\|=\|\hat{y}\|=\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}(Tx,y)\leqslant\|y\|\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\|T\|\|y\|$$

故 T^* 为有界线性算子. □

习题 15. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 试证明: 对一切 $x\in H,\mathrm{Re}(Tx,x)=0$, 则 $T+T^*=0$.

证明. $\forall x\in H$

$$\begin{aligned}\big((T+T^{*)}x,x\big)&=(Tx,x)+(T^*x,x)\\&=(Tx,x)+\overline{(x,T^*x)}\\&=(Tx,x)+\overline{(Tx,x)}\\&=\mathrm{Re}(Tx,x)\\&=0\end{aligned}$$

故 $T+T*=0$. □

习题 16. 设 T 是 l^2 上的有界线性算子:

$$T:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\mapsto Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots),$$

其中

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k,n=1,2,\cdots,$$

又设 T^* 是 T 的伴随算子:

$$T^*:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\mapsto T^*x=(\eta_1^*,\eta_2^*,\cdots,\eta_n^*,\cdots),$$

而且

$$\eta_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}^* \xi_k, n = 1, 2, \cdots,$$

试证明:

$$\alpha_{nk}^* = \bar{\alpha}_{kn}, n, k = 1, 2, \cdots.$$

证明. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $e_n = (\delta_{jn})_j$ 则有

$$\alpha_{nk}^* = (T^* e_k, e_n) = \overline{(e_n, T^* e_k)} = \overline{(T e_n, e_k)} = \bar{\alpha}_{kn}$$

□

第三章　Banach 空间上的有界线性算子

习题 1.　设无穷矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ 满足

$$\sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) < \infty$$

由它定义的线性算子 $T: y = Tx$ 为

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_i, i = 1, 2, \cdots,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} = \{\xi_n\}, y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\} = \{\eta_n\},$.

试证明 T 是从 (m) 到自身的有界线性算子, 且

$$\|T\| = \sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right).$$

证明. (i) 线性性.

$$T(x+y) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(\xi_j + \eta_j) \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} + \eta_j \right\} = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(\alpha \xi_j) \right\} = \alpha \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right\} = \alpha Tx.$$

(ii) 有界性.

记 $M=\sup\limits_i\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)$, 则 $\forall x\in(m)$

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\sup_i\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\right)\\&\leqslant\sup_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||\xi_j|\right)\\&\leqslant\sup_j|\xi_j|\sup_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\\&=M\|x\|.\end{aligned}$$

故 T 有界.

(iii) $\|T\|=M$.

$\|T\|\leqslant M$ 由上述有界性证明可知. $\forall\varepsilon>0$, 由 $M<+\infty,\exists k$,

$$M-\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|.$$

取 $x=(\xi_j)_j$ 满足

$$\xi_j=\begin{cases}1 & a_{kj}\geqslant 0\\-1 & a_{kj}<0\end{cases}$$

此时 $\|x\|=1$. 于是

$$\|Tx\|=\sup_i\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\right)\geqslant\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}\xi_j\right|=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}|\geqslant(M-\varepsilon)\|x\|.$$

由 ε 任意

$$\|T\|=M=\sup_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\right),$$

□

习题 2. 设数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 在 l^1 中定义线性算子

$$y=Tx:\eta_n=\alpha_n\xi_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\}$.

试证明 T 是从 l^1 到自身的有界线性算子, 且

$$\|T\|=\sup_n|\alpha_n|.$$

证明. (i) 线性性.

$$T(x+y)=\{\alpha_n(\xi_n+\eta_n)\}=\{\alpha_n\xi_n\}+\{\alpha_n\eta_n\}=Tx+Ty$$

$$T(\alpha x)=\{\alpha_n(\alpha\xi_n)\}=\alpha\{\{\alpha_n\xi_n\}\}=\alpha Tx.$$

(ii) 有界性. $\forall x\in l^1$

$$\|Tx\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n|\leqslant\sup_n|\alpha_n|\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|=\sup_n|\alpha_n|\|x\|.$$

故 T 有界.

(iii) $\|T\|=\sup_n\|\alpha_n|$.

令 $M=\sup_n|\alpha_n|$, 则 $\|T\|\leqslant M$ 上已证得.$\forall\varepsilon,\exists k$, 使 $M-\varepsilon<|\alpha_k|$. 令 $x=\{\xi_n\}$, 满足

$$\xi_n=\delta_{nk}$$

于是

$$\|Tx\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n|=|a_k|>(M-\varepsilon)\|x\|.$$

由 ε 任意. $\|T\|\geqslant M$. 故有 $\|T\|=M$. □

习题 3. 证明上题中算子 T 是有界可逆的当且仅当

$$\inf_n|\alpha_n|>0.$$

证明. 必要性. 由命题 1.5, T 有界可逆, 则 $\exists m>0,\forall x$

$$\|Tx\|\geqslant m\|x\|$$

假设 $\sup_n|\alpha_n|=0.\forall\varepsilon,\exists k$, 使 $|\alpha_k|<\varepsilon$. 取 $x=\{\xi_n\},\xi_n=\delta_{nk}$. 则 $\|x\|=1$, 且

$$m\leqslant\|Tx\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n|=|\alpha_k|<\varepsilon.$$

由 ε 任意, $m=0$, 矛盾. 故 $\sup_n|\alpha_n|>0$.

充分性. $\forall x\in l^1$,

$$\|Tx\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n|\geqslant\sup_n|\alpha_n|\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\|=\sup_n|\alpha_n|\|x\|.$$

于是令 $m=\sup_n|\alpha_n|$, 则满足命题 1.5 的条件. T 有界可逆, □

习题 4. 设无穷矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)<\infty$$

由它定义的算子 T 为

$$y=Tx:\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j, i=1,2,\cdots,$$

其中 $x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\}$.

证明 T 是从 l^p 到 l^q 的有界线性算子, 这里 $1<p,q<\infty$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明. (i) 线性性.

$$T(x+y)=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}(\xi_j+\eta_j)\right\}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right\}+\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\eta_j\right\}=Tx+Ty$$

$$T(\alpha x)=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}(\alpha\xi_j)\right\}=\alpha\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right\}=\alpha Tx$$

(ii) 有界性. $\forall x\in l^p$

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|^q\right]^{1/q}\\&\leqslant\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right]^{1/q}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\right)^q\right]^{1/q}\\&=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right)\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{q/p}\right]^{1/q}\\&=\|x\|\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right)\right]^{1/q}\end{aligned}$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)<\infty$, 得结论. □

习题 5. 设 X 是 Banach 空间, $A,B\in L(X)$. 如果 A,B 都是有界可逆的, 则 AB 也是有界可逆的, 且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明. 由命题 1.3, $AB\in L(X), B^{-1}A^{-1}\in L(X)$. 且

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$$

故 AB 有界可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. □

习题 6. 设 X,Y 都是赋范线性空间,T 是从 X 到 Y 之线性算子. 试证明: 如果 T 是有界的, 则 T 之零空间 $N(T)$ 是闭的.

反之, 当 $N(T)$ 是闭的时,T 一定有界吗?

证明. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset N(T), x_n\to x$. 由于 T 有界, 故 T 连续. 有

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}Tx_n=0.$$

于是 $x\in N(T), N(T)$ 为闭集.

反过来不一定. 反例可以考虑 $C[0,1]$ 上的微分算子. □

习题 7. 设 X 是赋范线性空间, $x,y\in X$. 如果对 X 上任何连续线性泛函 f, 都有 $f(x)=f(y)$, 则 $x=y$.

证明. 若 $x\neq y$, 则 $x-y\neq 0$. 由命题 2.1, 有 X 上的连续线性泛函 f,

$$\|f\|=1, f(x-y)=f(x)-f(y)=\|x-y\|\neq 0.$$

这与题设矛盾, 故 $x=y$. □

习题 8. 设 X 是 Banach 空间, 试证明, 对任给的 $x\in X$,

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|: f\in X', \|f\|\leqslant 1\}.$$

证明. $\forall f\in X', \|f\|\leqslant 1, \forall x$,

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|\leqslant\|x\|.$$

故

$$\|x\|\geqslant\sup\left\{|f(x)|: f\in X', \|f\|\leqslant 1\right\}.$$

若 $x=0$, 则 $\forall f\in X', |f(x)|=0$. 于是

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|: f\in X', \|f\|\leqslant 1\}=0.$$

若 $x\neq 0$, 则由命题 2.1 , $\exists f\in X', \|f\|=1, |f(x)|=\|x\|$. 故

$$\|x\|\leqslant\sup\{|f(x)|: f\in X', \|f\|\leqslant 1\}$$

于是

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|: f\in X', \|f\|\leqslant 1\}.$$

□

习题 9. 设 $p(x)$ 是赋范线性空间 X 上次可加, 正齐次实值线性泛函, 即对任意的 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y),$$
$$p(\alpha x)=|\alpha| p(x).$$

如果 $p(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $p(x)$ 在 X 中每点都连续, 试证明之.

证明. $\forall \alpha \in \mathrm{C}$,

$$p(\alpha \cdot 0)=p(0)=|\alpha| p(0).$$

故 $p(0)=0$, 由于 p 在 $x=0$ 处连续, 故 $\exists \delta>0, \forall\|x\|<\delta$,

$$|p(x)| \leqslant 1$$

$\forall x \in X$, 令 $x_1=\frac{\delta}{\|x\|} x$. 有 $\left\|x_1\right\|=\delta$, 有

$$p\left(x_1\right) \leqslant 1$$

又 $x=\frac{\|x\|}{\delta} x_1$, 故

$$|p(x)|=\frac{\|x\|}{\delta}|p(x)| \leqslant \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

故 p 有界. 又从上式看出,p 在 x 点处连续, 故 $p(x)$ 在 X 中每点都连续. □

习题 10. 设 $p(x)$ 是线性空间 X 上的半范数, 则 $\{x: p(x)<r\}(r>0)$ 是个凸集, 而且是平衡的，吸收的.

证明. 证明为凸集.$\forall x, y \in\{x: p(x)<r\}, p(x), p(y)<r$. 于是 $\forall 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 有

$$p(\alpha x+(1-\alpha) y) \leqslant p(\alpha x)+p((1-\alpha) y)=\alpha p(x)+(1-\alpha) p(y)<r$$

于是 $\alpha x+(1-\alpha) y \in\{x: p(x)<r\}$. 这就说明了 $\{x: p(x)<r\}$ 为凸集,

证明平衡性. $\forall x \in\{x: p(x)<r\},|\lambda| \leqslant 1$, 有

$$p(\lambda x)=|\lambda| p(x)<r$$

故 $\lambda x \in\{x: p(x)<r\}$.

证明吸收性. $\forall x \in X$, 取 $\varepsilon=\frac{r}{2|p(x)|}$. 当 $0<|\alpha| \leqslant \varepsilon$,

$$p(\alpha x)=|\alpha| p(x) \mid<r$$

故 $\alpha x \in\{x: p(x)<r\}$. □

习题 11. 试证明凸集的闭包是凸的，平衡集的闭包是平衡的，吸收集的闭包是吸收的.

证明. 设 M 为凸集,$\forall x,y\in\bar{M}$, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $x_n\to x,y_n\to y$.$\forall 0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 有

$$\alpha x+(1-\alpha)y=\lim_{n\to}\alpha x_n+(1-\alpha)y_n\in\bar{M}$$

故 $\bar{M}$ 为凸集.

设 M 为平衡集. $\forall x\in\bar{M}$, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $x_n\to x$. 则 $\forall|\lambda|\leqslant 1$

$$\lambda x=\lim_{n\to\infty}\lambda x_n\in\bar{M}$$

故 $\bar{M}$ 为平衡集.

设 M 吸收, 则 $\forall x\in X,\exists\varepsilon,\forall 0<\alpha\leqslant\varepsilon,\alpha\in M\subset\bar{M}$, 故 $\bar{M}$ 吸收. □

习题 12. 试求出 $L^1[a,b]$ 上有界线性泛函的一般形式.

证明. 任给 $L^1[a,b]$ 上有界线性泛函 $f,\exists y\in L^{\infty}[a,b]$, 使

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt$$

且

$$\|f\|=\|y\|=\inf_{mE=0}\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|y(t)|.$$

反之, 对任何 $y\in L^{\infty}[a,b]$, 都有如上定义了 $L^1[a,b]$ 上的有界线性泛函.

事实上, 参考定理 4.4 的证明过程, 我们只需证明 $y\in L^{\infty}[a,b]$ 即可. 其他部分的证明完全相同.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $A\triangleq\{t\in[a,b]:|y(t)|>\|f\|+\varepsilon\}$.$\forall N$, 令

$$E_N\triangleq\{t\in[a,b]:|y(t)|\leqslant N\}$$

令 $y_N(t)=\chi_{E_N\cap A}(t)\operatorname{sgn}y(t)$. 有

$$\|y_N\|=\int_a^b\left|\chi_{E_N\cap A}(t)\operatorname{sgn}y(t)\right|dt=m(E_N\cap A).$$

于是 $y_N\in L^1[a,b]$, 有

$$m(E_N\cap A)\cdot(\|f\|+\varepsilon)\leqslant\int_{A\cap E_N}|y(t)|dt=\int_a^b y_N(t)y(t)dt\leqslant\|f\|m(E_N\cap A).$$

令 $N\to\infty$, 则

$$m(A)\cdot(\|f\|+\varepsilon)\leqslant\|f\|m(A)$$

得 $mA=0$. 故

$$\|y\|=\inf_{mE=0}\sup_{t\in[a,b]-E}|y(t)|\leqslant\|f\|+\varepsilon.$$

又由 ε 任意

$$\|y\| \leqslant \|f\|$$

故 $y \in L^\infty[a,b]$. □

习题 13. 试利用一致有界原理证明 Hellinger- Toeplitz 定理 (即命题 3.5) .

证明. 任取 $y \in H, \|y\| = 1$, 令

$$f_y(x) = (Ax, y) = (x, Ay).$$

先证 $\|f_y\| = \|Ay\|$. 这由如下两个式子得出.

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\|=1} (x, Ay) \leqslant \|Ay\|$$

$$\|f_y(Ay)\| = (Ay, Ay) = \|Ay\|\|Ay\|.$$

又 $\forall x \in H$

$$\sup_{\|y\|=1} \|f_y(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ax, y)| \leqslant \|Ax\| < +\infty.$$

故由一致有界定理

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|y\|=1} \|f_y\| < +\infty$$

于是 A 为有界线性算子. □

习题 14. 设 A, B 都是 Hilbert 空间 H 上处处有定义的线性算子, 且

$$(Ax, y) = (x, By), \forall x, y \in H.$$

证明: A, B 都是有界的, 且 $B = A^*$

证明. 设 $\lim\limits_{n\to} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to} Ax_n = y_0, \forall y \in H$

$$(Ax_n, y) = (x_n, By)$$

令 $n \to \infty$

$$(y_0, y) = (x_0, By) = (Ax_0, y)$$

故 $Ax_0 = y_0$, 由闭图形定理, A 有界. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0, \lim\limits_{n\to\infty} By_n = x_0, \forall x \in H$

$$(Ax, y_n) = (x, By_n)$$

令 $n \to \infty$

$$(Ax, y_0) = (x, x_0) = (x, By_0)$$

故 $By_0 = x_0, B$ 有界. 又 $\forall x, y$

$$(Ax, y) = (x, By) = (x, A^*y)$$

故 $B = A^*$. □

习题 15. 设 X,Y 都是 Banach 空间, $T\in L(X,Y)$. 如果 T 是单射的, 则 T^{-1} 是闭算子.

证明. T 是单射, 故 T^{-1} 为线性算子. 假设

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R(T),\lim_{n\to\infty}y_n=y_0,\lim_{n\to\infty}T^{-1}y_n=x_0.$$

由 T 连续, 有

$$Tx_0=T\left(\lim_{n\to\infty}T^{-1}y_n\right)=\lim_{n\to\infty}TT^{-1}y_n=\lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

于是 $T^{-1}y_0=x_0,y_0\in R(T)$. 这就说明 T^{-1} 为闭算子. □

习题 16. 试证明: 如果 T 是闭算子, 则 T 的图形 $G(T)$ 是闭的.

证明. T 是闭算子. 任给 $\{\langle x_n,y_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}\subset G(T)$, 使 $\|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle\|\to 0$. 于是有

$$\|x_n-x\|\to 0,\|Tx_n-Ty_n\|\to 0.$$

又 $y=Tx,x\in D(T)$. 故 $\langle x,y\rangle\in G(T)$. 于是 $G(T)$ 为闭集. □

习题 17. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中的点列, 如果对任何的 $f\in X'$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty,$$

则存在正数 μ, 对一切 $f\in X'$ 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant\mu\|f\|.$$

证明. 做映射 $T_n:X'\to l^1$,

$$T_n(f)=\big(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),0,\cdots\big)$$

由 f 的线性性知,T_n 为线性算子. 又 $\forall f$

$$|T_n(f)|=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\leqslant\|f\|\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

于是 T_n 为有界线性算子. $\forall f\in X'$

$$\sup_n\|T_nf\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|T_nf\|=\sum_{n=1}^{\infty}\big|f(x_n)\big|<+\infty$$

由一致有界定理, 有

$$\mu=\sup_n\|T_n\|<+\infty$$

于是 $\forall f\in X'$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(x_n)\right|=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left|f(x_n)\right|=\lim_{m\to\infty}\|T_mf\|\leqslant\mu\|f\|$$

这就是结论. □

习题 18. 试证明: 无穷维赋范线性空间的对偶空间是无穷维的, 有限维赋范线性空间 X 的对偶空间 X' 也是有限维的, 且 $\dim X=\dim X'$.

证明. 若 X 是无穷维赋范空间, $\forall n$, 有 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$, 且线性无关. 由命题 2.2, 存在 $f_i\in X', f_i(x_j)=\delta_{ij}$. 于是作集合 $\{f_1,\cdots,f_n\}\subset X'$. 若有 $\alpha_i\in\mathbb{C}, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_if_i=0$, 则 $\forall j$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x_j)=\alpha_j=0$$

于是 $\alpha_i=0$, 这就说明了 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 线性无关. 又由 n 任意, X' 为无穷维赋范空间.

若 X 是有限维赋范空间, 设其基为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$. 同上, 有线性无关集 $\{f_1,\cdots,f_n\}\subset X'$. 使 $\forall i,j, f_i(x_j)=\delta_{ij}$. 于是 $\forall f\in X', \forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\in X$, 成立

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x_i)f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)f_i(x)$$

于是有 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)f_i$. 这说明了 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是 X' 的基. 于是 $\dim X=\dim X'=n$ □

习题 19. 试证明: Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X' 是自反的.

证明. 证明中, 我们约定 $x,y,z,\cdots$ 表示 X 中元素. $f,g,h\cdots$ 表示 X' 中元素. $F,G,\cdots$ 表示 X'' 中的元素. $\Phi,\Psi,\cdots$ 表示 X''' 中元素.

必要性. $\forall\Phi\in X'''$, 取 $f_\Phi(x)=\Phi(\tau(x))$. 其中 τ 为典型映射. 于是由 τ,Φ 的线性性，得到 f_Φ 的线性性. 又 $\forall x\in X$,

$$\left|f_\Phi(x)\right|=|\Phi(\tau(x))|\leqslant\|\Phi\|\|\tau(x)\|=\|\Phi\|\|x\|.$$

故 f_Φ 有界, 即 $f_\Phi\in X'$, 又 $\forall F\in X''$, 有

$$F(f_\Phi)=f_\Phi\left(\tau^{-1}(F)\right)=\Phi\left(\tau\left(\tau^{-1}(F)\right)\right)=\Phi(F).$$

故若记 τ' 为 X' 到 X''' 的典型映射, 有 $\tau'(f_\Phi)=\Phi$. 所以 τ' 为满射, X' 自反.

充分性. 反证法, 若 X 不自反, 则 τ 不为满射. 由于 τ 为保范线性映射, 故 $\tau(X)$ 为 X'' 的子空间. 取 $F \in X'' - \tau(X)$, 则有 $\Phi \in X'''$, 使 $\|\Phi\| \neq 0$, 且 $\forall G \in \tau(X), \Phi(G) = 0$. 由于 X' 自反, 有 $f_\Phi \in X'$, 使 $\tau'(f_\Phi) = \Phi$. 于是 $\forall x \in X$, 记 $\tau(x) = F_x$, 有

$$0 = \Phi(F_x) = F_x(f_\Phi) = f_\Phi(x)$$

于是 $\|f_\Phi\| = 0$, 由于 τ' 保范, $\|\Phi\| = 0$. 矛盾. 于是 X 自反. □

习题 20. 设 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \to Y$ 是保范同构映射. 证明 T 的 Banach 共轭算子 T' 是从 Y' 到 X' 的保范同构映射. 因此, 如果 $X \cong Y$, 则 $X' \cong Y'$. 这里 "$\cong$" 表示两个 Banach 空间是保范同构的.

证明. $T' \in L(Y', X')$. 由定理 5.1, $\|T'\| = \|T\| = 1$. 故 $\forall y' \in Y', \|T'y'\| \leqslant \|y'\|$. 又 $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in Y$,

$$\|y\| (\|y\| - \varepsilon) \leqslant |y'(y)|$$

T 为同构, 故 $\exists x, Tx = y$, 于是

$$\left|T'y'(x)\right| = |y'(Tx)| = \left|y'(y)\right| \geqslant (\|y\| - \varepsilon)\|x\|$$

由 ε 任意, 有 $\left\|T'y'\right\| \geqslant \left\|y'\right\|$. 于是 $\left\|T'y'\right\| = \left\|y'\right\|$. T' 保范.

余下只需证其满射. 由于 T 保范同构, 故 T 为双射, 且逆映射有界. $\forall x' \in X'$, 定义 $y'(y)$, 使 $\forall y$

$$y'(y) = x'\left(T^{-1}y\right).$$

则有

$$\left\|y'(y)\right\| = \left\|X'\left(T^{-1}y\right)\right\| \leqslant \|x\| \left\|T^{-1}\right\| \|y\|.$$

故 $y' \in Y'. \forall x \in X$

$$T'y'(x) = y'(Tx) = x'\left(T^{-1}Tx\right) = x'(x)$$

故 $T'y' = x'$. 于是 T' 为满射. 这边说明了 T' 是保范同构. □

习题 21. 设 X, Y 都是 Banach 空间, $T \in L(X, Y)$. 试证明: 如果 T 是有限秩的, 即 $R(T)$ 是有限维的, 则 T' 也是有限秩的, 且

$$\dim R(T) = \dim R(T').$$

证明. $R(T)$ 为有限维子空间, 设 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 是 $R(T)$ 的基. 由于 Y 是 Banach 空间, 故有 $\{y_1', \cdots, y_n'\} \subset Y'$ 成立 $y_i'(y_j) = \delta_{ij}$, 且 $\{y_1', \cdots y_n'\}$ 线性无关. 记 $\{x_1', \cdots, x_n'\} \subset$

X', 使 $x'_i = T'y'_i$. 由于 $\forall x' \in R(T')$, 有 $y' \in Y'$, 使 $T'y' = x'$. 于是 $\forall x \in X$.

$$x'(x) = T'y'(x) = y'(Tx) = y'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y'(y_i) = \sum_{i=1}^{n} y'(y_i) y'_i(Tx)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y'(y_i) T' y'_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y'(y_i) x'_i(x)$$

于是 $x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i$. 又若 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x'_i = 0$, 有 $\forall x \in X$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x'_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T' y'_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y'_i(Tx) = 0$$

取 $x_i \in X$ 满足 $Tx_i = y_i$, 就能得到 $\alpha_i = 0$. 故诸 x'_i 线性无关. 于是 T' 有限秩, 且 $\dim R(T) = \dim R(T')$. □

习题 22. 证明引理 6.3 和引理 6.4.

证明. 引理 6.3.

$$^0N(A') = {}^0((\overline{R(A)})^0) = \overline{R(A)}$$

引理 6.4.

$\forall x' \in \overline{R(A')}$, 有 $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y'$. 使 $A'y'_n \to x'$. 则 $\forall x \in N(A)$, 设 $A'y'_n = x'_n$,

$$A'y'_n(x) = x'_n(x) = y'_n(Ax) = 0$$

于是 $x'(x) = 0, x' \in N(A)^0$. 故 $\overline{R(A')} \subset N(A)^0$ □

习题 23. 证明: l^1 中点列的弱收敛于强收敛 (即按范数收敛) 等价.

证明. 若 $x_n \to x$, 则必有 $x_n \xrightarrow{w} x$. 相反, 若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 下证 $x_n \to x_0$. 即证 $\|x_n - x_0\| \to 0$ 由 $x_n \xrightarrow{w} x_0, x_n - x_0 \xrightarrow{w} 0$. 故只需证明弱收敛于 0 的点列必按范数收敛于 0 即可.

设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 但 $\|x_n\| \nrightarrow 0$, 则有一个子列, 不妨设就是 $\{x_n\}$, 使 $\|x_n\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. 于是可设 $\|x_n\| \geqslant 1$. 事实上, $\{\frac{1}{\varepsilon_0} x_n\}$ 仍弱收敛于 0, 而其范数都不小于 1. 为了方便, 设 $\|x_n\| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$

设 $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots\right)$. 由 $\|x_1\| = 1$, 可取 k_1, 使 $\sum_{i=1}^{k} \left|x_1(i)\right| > \frac{2}{3}$. 令 $y_i = \mathrm{sgn}(x_1^{(i)})$, 由于 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 有 $x_n^{(1)} \to 0, x_n^{(2)} \to 0, \cdots, x_n^{(k_1)} \to 0$. 可取 N_1, 使 $x_{N_1}^{(1)}, \cdots, x_{N_1}^{(k_1)}$ 的模长之和小于 $\frac{1}{4}$.

由 $\|x_{N_1}\| = 1$, 又有 $k_2 > k_1$, 使 $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} \left|x_{N_1}^{(i)}\right| > \frac{2}{3}$. 令 $y_i = \mathrm{sgn}\left(x_{N_1}^{(i)}\right)$, 其中 $i = k_1 + 1, \cdots, k_2$. 又可取 $N_2 > N_1$, 使 $\sum_{i=1}^{k_2} \left|x_{N_2}^{(i)}\right| < \frac{1}{4}$. 从而又有 $k_3 > k_2$, 使 $\sum_{k_2+1}^{k_3} \left|x_{N_2}^{(i)}\right| > \frac{2}{3}$. 对于 $i = k_2 + 1, \cdots, k_3$, 令 $y_i = \mathrm{sgn}\left(x_{N_2}^{(i)}\right)$.

这样, 可得 $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}\cdots$, 以及 $\{y_i\}$, 每个 y_i 为 0 或 ±1. 由 $\{y_i\}$, 可作 l^1 上的线性有界泛函 $f(x)$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x^{(i)}y_i \quad x=\left(x^{(1)},x^{(2)},\cdots\right)\in l^1$$

但 $f(x_{N_1}), f(x_{N_2}), f(x_{N_3}),\cdots$ 都使 $|f(x_{N_k})|>\frac{1}{3}$, 这与 $x_n\xrightarrow{w}0$ 矛盾. □

习题 24. 在 $L^p[a,b](1<p<\infty)$ 中作一个弱收敛, 但非强收敛的点列.

证明. 在 $L^2[0,1]$ 中, 设 $x_n=x_n(t)=\sin n\pi t$, 则由 Riemann-Lebsgue 定理. $\forall f\in\left(L^2[0,1]\right)'$, 有 $y\in L^2[0,1]$, 使

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)dt\to 0.$$

即 $x_n\xrightarrow{w}0$, 但 $\|x_n\|=1/\sqrt{2}$. 于是 $x_n\nrightarrow 0$. □

习题 25. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b], x\in C[a,b]$. 证明: 如果 $x_n\xrightarrow{w}x$, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逐点收敛于 x, 即任给 $t\in[a,b]$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$.

证明. $\forall t\in[a,b]$, 定义 f 满足

$$f(x)=x(t).$$

则 f 为线性的, 且 $\forall x$,

$$|f(x)|=|x(t)|\leqslant\|x\|$$

故 $f\in(C[a,b])'$, 有

$$f(x_n)=x_n(t)\to f(x)=x(t)$$

故 $\forall t\in[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$. □

习题 26. 设 X,Y 都是 Banach 空间, $T\in L(X,Y)$. 证明: 如果 $x_n\xrightarrow{w}x$, 则 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$.

证明. $\forall g'\in Y'$, 有

$$g'(Tx_n)=T'g'(x_n)\to T'g'(x)=g(Tx)$$

故 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$. □

习题 27. 设 M 是赋范线性空间 X 的子空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M, x_n\xrightarrow{w}x_0$, 则 $x_0\in M$.

证明. $\forall f \in X'$, 若 $f(x)=0, \forall x \in M$. 由于 $x_n \xrightarrow{w} x$, 有

$$0=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_n)$$

故由命题 2.3, $x_0 \in \bar{M}=M$ □

习题 28. 设 X,Y 都是赋范线性空间,$X \neq \{0\}$. 试证明: 如果 $L(X,Y)$ 是 Banach 空间, 则 Y 必是 Banach 空间.

证明. 取 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ 为 Y 中 Cauchy 列. 由于 $X \neq \{0\}$, 故取 $x_0 \in X, \|x_0\| \neq 0$. 由命题 2.1, 有 $f \in X'$, 使 $\|f\|=1$, 且 $f(x_0)=\|x_0\|$. 令 $F_n(x)=f(x)y_n$. 则由 f 的线性性知 F_n 也是线性的, 又 $\forall x$

$$\|F_n(x)\|=\|f(x)y_n\|=|f(x)|\|y_n\| \leqslant \|x\|\|y_n\|.$$

故 F_n 有界, $F_n \in L(X,Y)$. 又 $\forall m,n$

$$\|f_n-f_m\|=\sup_{\|x\|=1}\|(f_n-f_m)x\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\|y_n-y_m\|=\|f\|\|y_n-y_m\|$$

故 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L(X,Y)$ 中的 Cauchy 列, 于是收敛, 设 $F_n \to F$, 并记

$$y=\frac{F(x_0)}{\|x_0\|}.$$

$\forall n$,

$$\begin{aligned}\|y_n-y\| &= \left\|f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)y_n-\frac{F(x_0)}{\|x_0\|}\right\| \\ &= \left\|F_n\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)-F\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)\right\| \\ &\leqslant \|F_n-F\|\end{aligned}$$

故 $y_n \to y$, 于是 Y 为 Banach 空间. □

习题 29. 设 X 是线性空间, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 分别是 X 上范数. 如果凡按 $\|\cdot\|_1$ 连续的线性泛函也按 $\|\cdot\|_2$ 连续, 则必存在常数 $\alpha>0$, 使

$$\|x\|_1 \leqslant \alpha\|x\|_2, \forall x \in X.$$

证明. 设 $\langle x,\|\cdot\|_1\rangle=X_1, \langle x,\|\cdot\|_2\rangle=X_2$. 记 $I': X_1' \to X_2', I(f)=f$. 由题设, $X_1' \subset X_2'$, 于是 I' 为含入映射, 连续. 故有'

$$\|f\|_2 \leqslant N\|f\|_1$$

$\forall x \in X$, 有

$$\|x\|_1=\sup_{\|f\|_1\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|_1} \leqslant N\sup_{\|f\|_2\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|_2}=N\|x\|_2.$$

这个不等式中用到事实, $\|f\|_1=0 \iff \|f\|_2=0$. 这由范数的定义可以看出. □

习题 30. 设 X, Y 都是 Banach 空间, $T \in L(X, Y)$. 如果 $R(T) = T$, 则存在常数 $M > 0$, 对任何 $y \in Y$, 都有 $x \in X$, 使

$$y = Tx, \text{且} \|x\| \leqslant M\|y\|$$

证明. T 有界, 故 $N(T)$ 为子空间. 考虑商空间 $X/N(T)$ 到 Y 的算子 $\tilde{T}$.

$$\tilde{T}([x]) = T(x_1), \forall x_1 \in [x].$$

则 $\tilde{T}$ 线性. 又 $\forall [x] \in X/N(T)$,

$$\|\tilde{T}([x]) = \|T(x_1)\| \leqslant \|T\|\|x_1\|, \forall x_1 \in [x]$$

故 $\|\tilde{T}([x]) \leqslant \|T\|\|[x]\|$. 若 $\tilde{T}([x]) = 0$, 则 $[x] = 0$, 又 $R(T) = Y$, 故 $\tilde{T}$ 为双射. 于是其有界可逆. 设 $\tilde{T}$ 的逆映射为 $\tilde{T}^{-1}$, 则 $\forall y \in Y$, 有

$$\inf_{Tx=y} \|x\| = \|[x]\| = \|\tilde{T}^{-1}y\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\|\|y\|.$$

故 $\exists x \in [x], Tx = y$, 使

$$\|x\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\|\|y\|.$$

这就是结论. $\square$

第四章　有界线性算子谱论

习题 1. 设 S 是 Hilbert 空间 H 上单边移位算子 (见第四章 §1 第 4 小节), $R_\lambda = R(\lambda, S)$ 表示 S 的预解式. 试证明

$$\|R_\lambda\| = (|\lambda|-1)^{-1}, \text{当} |\lambda| > 1.$$

证明. $\forall x \in H$,

$$\begin{aligned}\|R_\lambda\| &= \sup_{\|x\|=1}\left\|\frac{1}{\lambda}\left\{I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^n}{\lambda^n}\right\}x\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^n}\right) \\ &= -\frac{1}{1-|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|-1}\end{aligned}$$

取 $x=(1,0,0,\cdots)\in H$, 有

$$\|R_\lambda\| = \sup_{\|x\|=1}\left\|\frac{1}{\lambda}\left\{I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^n}{\lambda^n}\right\}x\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|-1}$$

故有

$$\|R_\lambda\| = (|\lambda|-1)^{-1}$$

□

习题 2. 设 X 是 Banach 空间, $T_1, T_2 \in L(X)$, 且 $T_1T_2 = T_2T_1$. 如果 $\lambda \in \rho(T_1)\cap\rho(T_2)$, 则

$$R(\lambda,T_1)-R(\lambda,T_2) = (T_1-T_2)R(\lambda,T_1)R(\lambda,T_2),$$

这个等式称为第二预解公式. 试证明之.

证明. 由于 $T_1T_2 = T_2T_1$, 故 $(\lambda I-T_1)(\lambda I-T_2) = (\lambda I-T_2)(\lambda I-T_1)$. 于是

$$(\lambda I-T_1)(\lambda I-T_2)\left[R(\lambda,T_1)-R(\lambda,T_2)\right] = (\lambda I-T_2)-(\lambda I-T_1) = T_1-T_2$$

$$(\lambda I - T_1)(\lambda I - T_2)(T_1 - T_2)R(\lambda, T_1)R(\lambda, T_2) = T_1 - T_2$$

右乘也有相同的结论, 又由 $T_1 - T_2 \in L(x)$. 故

$$R(\lambda, T_1) - R(\lambda, T_2) = (T_1 - T_2)R(\lambda, T_1)R(\lambda, T_2),$$

□

习题 3. 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X), \alpha \in \rho(T), A = R(\alpha, T)$, 证明:

(1) 如果 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 使 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则 $\mu \in \sigma(A)$ 当且仅当 $\lambda \in \sigma(T)$.

(2) 如果 $\mu \in \rho(A)$, 且 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$, 则

$$R(\mu, A) = 1/\mu + (1/\mu^2)R(\lambda, T).$$

证明. (i)

命题相当于证明 $\lambda \in \rho(T) \iff \mu \in \rho(A)$, 这由

$$\begin{aligned}(\mu I - (\alpha I - T)^{-1}) &= \mu(\alpha I - T)^{-1}(\alpha I - T - \frac{1}{\mu} I) \\ &= \mu(\alpha I - T)^{-1}\left((\alpha - \frac{1}{\mu})I - T\right) \\ &= \mu(\alpha I - T)^{-1}(\lambda I - T).\end{aligned}$$

故 $(\mu I - A) = \mu A(\lambda I - T)$. 于是 $(\mu I - A)$ 有界可逆, 则 $(\lambda I - T) = \frac{1}{\mu}A^{-1}(\mu I - A)$ 也有界可逆. 反之, 若 $\lambda I - T$ 有界可逆, 则 $\mu I - A$ 也有界可逆. 又若 $R(\mu I - A) = x$, 则由 $R(A^{-1}) = x$, 得 $R(\lambda I - T) = x$. 同样若 $R(\lambda I - T) = X$, 则由 $R(A) = X$, 知 $R(\mu I - A) = X$ 于是

$$\lambda \in \rho(T) \iff \mu \in \rho(A)$$

这就是结论.

(ii)

$$\begin{aligned}R(\mu, A) = (\mu I - (\alpha I - T)^{-1})^{-1} &= \frac{1}{\mu}(\lambda I - T)^{-1}(\alpha I - T) \\ &= \frac{1}{\mu}(\lambda I - T)^{-1}(\frac{1}{\mu} I + \lambda I - T) \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}(\lambda I - T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}R(\lambda, T).\end{aligned}$$

□

习题 4. 设 X 是 Banach 空间, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X), T \in L(X), \|T_n - T\| \to 0$, 当 $n \to \infty$. 试证明, 如果 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 则当 n 充分大时, $\lambda_0 \in \rho(T_n)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}.$$

证明. $\|T_n - T\| \to 0$, 则 $\|(\lambda I - T_n) - (\lambda_0 I_T)\| \to 0$. 由第三章命题 1.6, 有 n 充分大, $\lambda_0 I - T_n$ 有界可逆, 且

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}$$

又由 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 故 $\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < +\infty$, 故 n 充分大, 有 $\|(\lambda_0 I - T_n)^{-1}\| < +\infty$. 又有形式上

$$\frac{1}{\lambda_0 - T_n} = \frac{1}{\lambda_0 - T + T - T_n} = \frac{1}{\lambda_0 - T}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T_n - T}{\lambda_0 - T}\right)^n\right].$$

而 $\left\|(T_n - T)(\lambda_0 I - T)^{-1}\right\| \leqslant \|T_n - T\| \left\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\right\|$. 所以 n 充分大, 有右边的级数按算子范数收敛. 于是用 $\lambda_0 I - T_n$ 左乘和右乘上式. 得到 $R(\lambda_0 I - T_n) = X$. 于是 $\lambda_0 \in \rho(T_n)$. $\square$

习题 5. 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X), n$ 是正整数, λ_0 是 T^n 的特征值, 则必存在 λ_0 的某个 n 次根是 T 的特征值.

证明. λ_0 是 T^n 的特征值, 若 $\lambda_0 = 1$, 则结论显然. 若 $\lambda_0 \neq 1$, 取 $\lambda_1 = \sqrt[n]{|\lambda_0|} e^{i\frac{1}{n}\arg(\lambda_0)}$. 设 x 为 T^n 对应 λ_0 的特征向量, 并设

$$Tx = \lambda_1 x + \alpha.$$

有

$$T^n x = \lambda_0 x + (1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_1^{n-1})\alpha.$$

又由

$$1 - \lambda_0 = (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_1^{n-1}).$$

故 $1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_1^{n-1} \neq 0$. 于是 $\alpha = 0$. 所以 λ_1 为 T 的特征值. $\square$

习题 6. 设 F 是复平面上有界的无穷闭集. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 F 的一个可数稠密子集, 在 l^1 中定义算子 T 为

$$y = Tx : y = \{\alpha_n \xi_n\}, x = \{\xi_n\}.$$

试证明:

(1) T 是从 l^1 到 l^1 的有界线性算子.

(2) 每个 α_n 都是 T 的特征值.

(3) $\sigma(T) = F$.

(4) $F \backslash \left(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sigma_c(T)$.

证明. (1) F 有界, 设 M 为其上界. $\forall x \in l^1$, 有

$$\|Tx\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \xi_n| \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = M\|x\|$$

T 的线性性显然, 故 $T \in L(l^1)$.

(2) $\forall \alpha_n$, 令 $x_n = \{\xi_j\}, \xi_j = \delta_{jn}$, 有

$$(\alpha_n I - T)x_n = 0.$$

于是 $\alpha_n \in \sigma_p(T)$

(3) 由定理 1.2, $\sigma(T)$ 为闭集. 而 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma(T)$, 且稠密. 故 $F \subset \sigma(T)$. 又 $\forall \lambda \notin F$, F 闭, 有 $\operatorname{dist}(\lambda, F) > 0$. 定义 $R_\lambda : l^1 \to l^1$,

$$R_\lambda(x) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \alpha_n} \xi_n \right\}$$

则 R_λ 线性, 且

$$\|R_\lambda\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} \xi_n \right| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, F)}$$

故 R_λ 有界, 且有

$$R_\lambda(\lambda I - T) = (\lambda I - T)R_\lambda I.$$

故 $R(\lambda I - T) = l^1$ 且 $\lambda I - T$ 有界可逆, 故 $\lambda \in \rho(T)$. 于是 $\sigma(T) \subset F$. 总之 $\sigma(T) = F$.

(4) 只需证明. $\forall \lambda \in F \backslash \left(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, λ 不是特征值, 且 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$. 事实上, 若 λ 为特征值, 有 $x = \{\xi_n\} \neq 0$, 使

$$(\lambda I - T)X = 0.$$

$\lambda \neq \alpha_n$, 故必有 $\forall n, \xi_n = 0$, 矛盾. $\forall y = \{\beta_n \xi_n\} \in X$. 令 $x_n = \{\frac{\beta_i}{\lambda - \alpha_i} \xi_i\}_{i \leqslant n}$, 则

$$(\lambda I - T)x_n = \{\beta_i \xi_i\}_{i \leqslant n} \to \{\beta_n \xi_n\} = y.$$

故 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$. 于是 $F \backslash \left(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sigma_c(T)$. □

习题 7. 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X), \mathscr{M} \in \operatorname{Lat} T$. 如果 $\mu \in \rho(T)$, 且 $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat} R(\mu, T)$, 则 $\mu \in \rho(T|\mathscr{M})$.

证明. $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat} T$, 设 P 为 X 到 M 的射影算子, 则有 $PT = PTP$, 同样 $PR(\eta, T) = PR(\eta, T)P$, 于是有

$$(\eta T - T|\mathscr{M})R(\eta, T)P = (\eta I - T)PR(\eta I, T)P = (\eta I - T)R(\eta, T)P = IP.$$

又有

$$R(\eta, T)P(\eta T - T|\mathscr{M}) = R(\eta I, T)P(\eta I - T)P = R(\eta, T)(\eta I - T)P = IP.$$

由此即知, $(\eta I - T|\mathscr{M})$ 有界可逆, 且 $R(\eta I - T|\mathscr{M}) = \mathscr{M}$. 故 $\eta \in \rho(T|\mathscr{M})$. □

习题 8. 设数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\alpha_n \to 0, n \to \infty$. 在 l^1 中定义算子 T 为

$$y = Tx : y = \{\alpha_n \xi_n\}, x = \{\xi_n\}.$$

试证明 T 是 l^1 上的紧算子.

证明. 取 $T_n(x) = (\alpha_1\xi_1, \cdots, \alpha_n\xi_n \cdots, 0, \cdots)$, 则 $\dim(T_n) = n < +\infty$, 且

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < +\infty$$

于是 T_n 是有限秩算子, 紧. 又 $\forall \varepsilon, \exists n, \forall j > n, |\alpha_j| < \varepsilon$.

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| < \varepsilon.$$

故 $T_n \to T$. 于是由定理 3.2 , T 是紧算子. □

习题 9. 试证明: 当 X 是自反空间时, 定理 3.3 的逆亦真, 即如果每当 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 必有 $Ax \to Ax_0$, 则 A 必是紧算子.

证明. 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 设 $\|x_n\| \leqslant <$, 则 $\{\frac{1}{M}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在自反空间 X 的单位球中，于是其弱列紧. 记

$$\frac{1}{M}x_{n_j} \xrightarrow{w} \frac{1}{M}x.$$

则有 $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$. 由题设, 有 $Ax_{n_j} \to Ax$. 这就说明 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 列紧, 即 A 为紧算子. □

习题 10. 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(x)$ 是紧算子, $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat} T$. 则 $T|\mathscr{M}$ 也是 $\mathscr{M}$ 上的紧算子.

证明. 取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ 有界, 则 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 列紧. 记 $Tx_{n_j} \to y$, 则由 $\mathscr{M} \in \operatorname{Lat} T$. 且 $\mathscr{M}$ 为子空间, 故 $y \in \mathscr{M}$. 于是 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{M}$ 上列紧, 又有 $Tx_n = T|\mathscr{M}x_n$, 于是 $T|\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的紧算子 □

习题 11. 设 X 是 Banach 空间, $K \in \mathscr{K}(X), \lambda \neq 0, T = \lambda I - K$, 则

(1) $N(T) = \{0\} \iff R(T) = X$.

(2) $\dim N(T) = 0 \iff \dim N(T') = 0$.

(3) $\dim N(T) = \dim N(T') < \infty$.

证明. (1) 必要性. $K \in \mathscr{K}(x)$, 故 $\frac{1}{\lambda}K \in \mathscr{K}(x)$. 由

$$N\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right) = N(\lambda I - K) = 0.$$

由命题 3.3, 得到

$$R(\lambda I-K)=\lambda R\left(I-\frac{1}{\lambda}KA\right)=\lambda X=X.$$

充分性. $R(T)=x$. 故由定理 3.11, $X={}^0N(T')$, 于是 $N(T')=0.T'$ 也是紧算子, 于是 $R(T')=X'$, 则

$$N(T)=R(T')={}^0(X')=\{0\}.$$

(2) 上面已经证得, 若 $\dim N(T')=0$, 则 $\dim N(T)=0$. 若 $\dim N(T)=0$, 则 $R(T)=X$, 故 T 有界可逆, T' 有界可逆, 则 $\dim N(T')=0$.

(3) 事实上, $A\in\mathscr{K}(X)$, 则 $\frac{1}{\lambda}A\in\mathscr{K}(X)$. 故由定理 3.8 有

$$\dim N(\lambda I-A)=\dim N\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)=\dim N\left(I-\frac{1}{\lambda}A'\right)=\dim N(\lambda I-A')<+\infty.$$

□

习题 12. 设 X 是 Banach 空间, $T\in L(X)$. 如果存在正整数 n, 使 T^n 是紧算子, 证明:

(1) $\sigma_p(T)$ 至多是可数集.

(2) $\sigma_p(T)$ 唯一可能聚点是 0.

证明. (1) $\forall\lambda\in\sigma_p(T),$, 有 $\lambda^n\in\sigma_p(T^n)$, 又 $\sigma_p(T^n)$ 至多可数, (命题 3.10, 说明.) 故 $\sigma_p(T)$ 至多可数.

(2) 设 $\lambda_m\to\lambda_0$, 则有 $\lambda_m^n\to\lambda_0^n$, 又 $\sigma_p(T^n)$ 没有非零聚点, 故 $\lambda_0^n=0$. 得 $\lambda_0=0$. □

习题 13. 设 T 是 Banach 空间 X 上有界线性算子, 且 $T^2=T$. 试证明: 如果 $T\neq 0,I$, 则 $\sigma(T)=\{0,1\}$.

证明. $T\neq 0$, 故 $\exists x_0, Tx_0\neq 0$, 于是

$$(I-T)(Tx_0)=0.$$

$1\in\sigma_p(T)$, 又 $T\neq I$, 故 $\exists x_1, Tx_1\neq x_1$, 于是

$$T(x_1-T_{x_1})=0.$$

于是 $0\in\sigma_p(T).\{0,1\}\subset\sigma(T)$.

又 $T\in L(X)$, 故 $\|T\|<+\infty$, 有

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=1.$$

故 $\forall\lambda > 1, \lambda \in \rho(T)$.$\forall 0 < \lambda < 1$, 取

$$Q = \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}T + \frac{1}{\lambda}I.$$

则有 $QT = TQ = \lambda Q + I$. 故

$$Q(T-\lambda I) = (T-\lambda I)Q = I.$$

于是 $(T-\lambda I)^{-1} \in L(X)$, 且 $R(T-\lambda I) = X$, 故 $\lambda \in \rho(T)$. 综上

$$\{0,1\} \subset \sigma(T) \subset \{0,1\},$$

命题得证. □

习题 14. 设 P_1, P_2 是 Hilbert 空间 H 上可交换的正交射影, 则

$$P \overset{d}{=} P_1 + P_2 - P_1P_2$$

也是正交射影, 且 $P \geqslant P_1, P \geqslant P_2$. 另外, 若正交射影 Q, 使 $Q \geqslant P_1, Q \geqslant P_2$, 则必有 $Q \geqslant P$.

证明.

$$\|P\| \leqslant \|P_1\| + \|P_2\| + \|P_1\|\|P_2\|$$

于是 P 为有界射影, 又由

$$\begin{aligned} P^* &= P_1^* + P_2^* - P_2^*P_1* = P_1 + P_2 - P_2P_1 \\ &= P_1 + P_2 - P_1P_2 = P. \end{aligned}$$

故 P 自伴, 于是 P 为正交射影.

$$\begin{aligned} PP_1 &= P_1^2 + P_2P_1 - P_1P_2P_1 \\ &= P_1^2 + P_2P_1 - P_2P_1^2 \\ &= P_1 + P_2P_1 - P_2P_1 = P_1 \end{aligned}$$

故 $P \geqslant P_1$, 同样有 $P \geqslant P_2$. 又若 $Q \geqslant P_1, Q \geqslant P_2$. 有

$$PQ = P_1Q + P_2Q - P_1P_2Q = P_1 + P_2 - P_1P_2 = P.$$

故 $Q \geqslant P$. □

习题 15. 设 T 是 Hilbert 空寂记按 H 上有界线性算子, 且 $\|T\| \leqslant 1$, 则

$$\{x \in H : Tx = x\} = \{x \in H : T^*x = x\}.$$

证明. 先证 $\{x\in H: Tx=x\}\subset\{x\in H: T^*x=x\}$. $\forall x\in\{x\in H: Tx=x\}$, 有 $((I-T)x,x)=(x,(I-T^*)x)=0$. 于是 x 与 $(I-T^*)x$ 正交. 又由

$$\begin{aligned}\left\|T^*x\right\|^2&=\left\|T^*x-x+x\right\|^2\\&=\left\|(T^*-I)x\right\|^2+\|x\|^2\\&\leqslant\|T^*\|\|x\|^2\\&\leqslant\|x\|^2.\end{aligned}$$

故 $(T^*-I)x=0$, 即 $T^*x=x$. 故 $x\{x\in H: T^*x=x\}$. 又由 $\|T^*\|=\|T\|\leqslant 1$, 且 $(T^*)^*=T$. 故

$$\{x\in H: T^*x=x\}\subset\{x\in H:(T^*)^*x=x\}=\{x\in H: Tx=x\}$$

于是有

$$\{x\in H: Tx=x\}=\{x\in H: T^*x=x\}$$

□

习题 16. 设 P 是 Hilbert 空间 H 上的非零正交射影, 证明:$\|P\|=1$.

证明. P 为非零正交射影, 故

$$\|P^*P\|=\|P^2\|=\|P\|^2=\|P\|,$$

于是 $\|P\|=1$. □

习题 17. 证明: 定理 4.5 中, $(-\infty,m)\subset\rho(A), m\in\sigma(A)$.

证明. 设 $\lambda=m-d, d>0$, 则任给 $x\in H$

$$\begin{aligned}((A-\lambda I)x,x)&=(Ax,x)-\lambda(x,x)\\&\geqslant(m-\lambda)(x,y)\\&=d(x,x)\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$|((A-\lambda)x,x)|\leqslant\|(A-\lambda I)x\|\|x\|.$$

故同样有

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant d\|x\|.$$

第二部分, 平移后. 设 $m\leqslant M\leqslant 0$. 于是有 $|m|=\|A\|$. 再将定理证明中的 M 换为 m 即可. □

习题 18. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 H 的正规正交基, $T\in L(H)$. 若对任何自然数 m,n 都有

$$(Te_n,e_m)=(e_n,Te_m),$$

则 T 是自伴的.

证明. 设 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\in H$, 则 $\forall m$, 成立

$$\begin{aligned}(T^*,e_m)&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(T^*(e_n),e_m\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(e_n,Te_m)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(Te_n,e_m)\\&=(Tx,e_m).\end{aligned}$$

又 $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为 H 正规正交基. 故 $T^*x=Tx$. 又由 x 任意, $T=T^*,T$ 自伴. □

习题 19. 设 H 是 Hilbert 空间, $T,W\in L(H)$. 如果 T 是自伴的, 则 W^*TW 也是自伴的.

证明.

$$(W^*TW)^*=W^*T^*W=W^*TW,$$

故 W^*TW 自伴. □

习题 20. 设 H 是 Hilbert 空间, $T\in L(H)$ 是自伴算子. 试证明:$T\geqslant 0$ 当且仅当 $\sigma(T)\subset[0,\infty)$.

证明. 必要性.$T\geqslant 0$, 则 $\forall x,(Tx.x)\geqslant 0$. 又 T 自伴,$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)\geqslant 0$, 由定理 4.5

$$\sigma(T)\subset[m,+\infty)\subset[0,+\infty).$$

充分性. 若 A 不是正算子, 则 $\exists x,(Tx,x)<0$. 故 $m<0$, 且 $m\in\sigma(T)$, 这与 $\sigma(T)\geqslant 0$ 矛盾. 故 A 必为正算子. □

习题 21. 设 H 是 Hilbert 空间, $T\in L(H)$ 是自伴算子, 且 $T\geqslant 0$. 试证明: 对任何的 $x\in H,Tx=0$ 当且仅当 $(Tx,x)=0$.

证明. 必要性显然.

充分性. $\|T\| \geqslant 0$, 故 $-1 \in \rho(T)$. 有 $I+T$ 可逆, 对 x, 使 $(Tx,x)=0$. 取 $y \in X$, 使

$$Ty+y=x.$$

则有

$$\begin{aligned}0&=(Ty+y,T^2y+Ty)\\&=(Ty,T^2y)+(Ty,Ty)+(y,T^2y)+(y,Ty).\end{aligned}$$

又由 $(Ty,T^2y)\geqslant 0,(y,Ty)\geqslant 0,(Ty,Ty)\geqslant 0$. 知

$$(y,T^2y)\leqslant 0.$$

又 $(y,T^2y)=(Ty,Ty)\geqslant 0$. 故 $Ty=0$. 于是 $y=x, Tx=0$. □

习题 22. 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 上的射影算子的序列, $P_n \to P$. 证明:P 亦是 H 上的射影. 进一步, 如果 P_n 都是正交射影, 则 P 亦是正交射影.

证明. $P_n \to P$, 故 $\forall x$

$$\begin{aligned}P(P(x))&=\lim_{n\to\infty}P_n\left(P_n(x)\right)\\&=\lim P_n(x)\\&=P(x)\end{aligned}$$

令 $\mathscr{M} \overset{d}{=} \{x;Px=x\}, N \overset{d}{=} \{x;Px=0\}$. 则由定理 2.2, P 是射影. 又若 P_n 正交, 则由 $\forall x,y$

$$(Px,(I-P)x)=\lim_{n\to\infty}\left(P_nx,(I-P_n)x\right)=0.$$

得 P_n 是正交射影. □

习题 23. 设 H 是无穷维的 Hilbert 空间,$T\in L(H)$. 如果 T 是下方有界的, 则 T 必不是紧算子. 试证明之.

证明. 取 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的一组正规正交集, 则 $\|e_n\|=1, \|e_n-e_m\|=\sqrt{2}\delta_{nm}$. 又 T 下方有界, 故

$$\|Te_n-Te_m\|\geqslant \mu\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}\mu$$

于是 $\{Te_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不可能列紧, 故 T 不为紧算子. □

习题 24. 设 H 是 Hilbert 空间,$T \in L(H)$ 称为正规算子, 如果 $T^*T = TT^*$. 试证明: 对正规算子 T, 总有

(1) $\|T^2\| = \|T\|^2$.

(2) $r(T) = \|T\|$.

(3) 若 λ 与 μ 是 T 之互异的特征根, x, y 分别是 T 对应 λ, μ 的特征元, 则 x 与 y 正交.

(4) 假如 T 还是紧的, 则必有 H 的一个正规正交集 $\{\varphi_n\}_{n\in J} \cup \{\psi_n\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, 使

(i) $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \lambda_n \neq 0$, 当 $n \in J$, $T\psi_n = 0$, 当 $\alpha \in \mathscr{A}$. 这里 J 是有限或可数无穷集, 若 J 是可数无穷集, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

(ii) 对任给的 $\psi \in H$, 有展开式

$$T\psi = \sum_{n\in J} \lambda_n(\psi, \varphi_n)\varphi_n,$$

这里右端级数是按范数收敛的.

证明. (1) 首先 $\forall x$

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) = (x, TT^*x) = (T*x, T*x) = \|T^*x\|^2.$$

又 $\|T^2\| = \|TT\| \leqslant \|T\|^2, \forall x$

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T*Tx, x) &\leqslant \|T^*Tx\|\|x\| \\ &= \|T(Tx)\|\|x\| \\ &\leqslant \|T^2\|\|x\|^2\end{aligned}$$

故 $\|T\| \leqslant \|T^2\|^{1/2}$. 于是 $\|T\|^2 \leqslant \|T^2\|$.. 综上 $\|T^2\| = \|T\|^2$.

(2) 由命题 4.2 的证明知, $\left\|^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$.

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

(3) T 正规, 于是 $\forall \lambda \in \mathrm{C}$,

$$(T - \lambda I)^*(T - \lambda I) = (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) = T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \lambda\bar{\lambda} I.$$

$$(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* = (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = TT^* - \bar{\lambda} T - \lambda T^* - \lambda\bar{\lambda} I.$$

二者相等. 故 $T - \lambda I$ 也正规, 于是

$$\|(T - \lambda I)x\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)x\|$$

于是若 $Tx=\lambda x$, 则 $T^*=\bar{\lambda}x$, 于是有

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,\bar{\mu}y)=\mu(x,y).$$

λ,μ 互异, 故 $(x,y)=0$.

(4) T 有非零特征值, 证明如 4.5 . 证明过程中, 命题 4.2 换成 (2), 并有几点不同.

若 $\mathscr{M}\in \mathrm{Lat}\,T$, 则 $\forall f\in M^{\perp}$, 可推出 $T^*f\in\mathscr{M}^{\perp}$. 故 $T^*\mathscr{M}^{\perp}\subset\mathscr{M}^{\perp}$. 又由 $\|Tx\|=\|T^*x\|$, 故 $N(T)=N(T^*)$, 由第二章定理 4.2, $\overline{R(T)}=\overline{R(T^*)}$. 于是 $T\mathscr{M}^{\perp}=T^*\mathscr{M}^{\perp}\subset\mathscr{M}^{\perp}$, 于是 $\mathscr{M}^{\perp}\in\mathrm{Lat}\,T$.

对正交射影 P, 有

$$(PAP)^*(PAP)=PA^*AP=PAA^*P=(PAP)(PAP)^*.$$

□

习题 25. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上自伴算子, $\{E_\lambda:-\infty<\lambda<\infty\}$ 是 T 的族谱. 证明: T 的值域的闭包是 $[I-E_0+E_{0-0}]H$.

证明. 分情况讨论.

若 $0\in\rho(T)$, 即 $R(T)=H$, 且 T 有界可逆, 则由定理 5.4 , 若 $0\neq[m,M]$, 则 $E_{0-0}=E_0=0$ 或 $E_{0-0}=E_0=I$. 于是

$$[I-E_0+E_{0-0}]H=R(T)=H.$$

若 $0\in[m,M]$, 则有 $[\alpha,\beta]\subset[m,M]$, 使 $\alpha<0<\alpha\beta$, 且 $E_{0-0}=E_0=E_\alpha$, 于是

$$[I-E_0+E_{0-0}]H=R(T)=H$$

若 $0\in\sigma_c(T)$. 则 $\overline{R(T)}=H$. 由定理 5.5 (3),$E_{0-0}=E_0$, 故

$$\overline{R(T)}=[I-E_0+E_{0-0}]H=H$$

若 $0\in\sigma_p(T)$, 则 0 为 T 特征值, 有

$$R(E_0-E_{0-0})=N(T).$$

故

$$[I-E_0+E_{0-0}]H=R(I-E_0+E_{0-0})=H-N(T)=N(T)^{\perp}=\overline{R(T)}.$$

于是命题证完. □

习题 26. 设 H 是 Hilbert 空间, $T,U\in L(X)$, U 是酉算子, 令 $\tilde{T}=U^{-1}TU$. 试证明:

(1) $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

(2) $\sigma(\tilde{T})=\sigma(T)$.

证明. (1) U 是酉算子, 故 $\|U^{-1}\|=\|U^*\|=\|U\|=1$.

$$\|\tilde{T}\|=\|U^{-1}TU\|\leqslant\|U^{-1}\|\|U\|\|T\|=\|T\|$$

又由 $T=U\tilde{T}U^{-1}$, 故

$$\|T\|\leqslant\|\tilde{T}\|$$

于是 $\|T\|=\|\tilde{T}\|$.

(2) U 是酉算子, 则 U^{-1} 也为酉算子. 故又只需证 $\rho(T)\subset\rho(\tilde{T})$. $\forall\lambda\in\rho(T)$, 有 $R(\lambda I-T)=\lambda$, 则

$$(\lambda I-\tilde{T})U^{-1}R(\lambda,T)U=U^{-1}R(\lambda,T)U(\lambda I-\tilde{T}).=I$$

故 $R(\lambda I-\tilde{T})=X$, 且 $\lambda I-\tilde{T}$ 可逆, 于是 $\lambda\in\rho(\tilde{T})$. 于是 $\rho(\tilde{T})=\rho(T)$. 即 $\sigma(\tilde{T})=\sigma(T)$ □

习题 27. 设 H 是 Hilbert 空间, $T,U\in L(H)$, T 是自伴算子,U 是酉算子, $\tilde{T}=U^{-1}TU$. 试证明: 对任何有界的 Borel 函数 f, 都有

$$f(\tilde{T})=U^{-1}f(T)U,$$

这里 $f(\tilde{T}),f(T)$ 分别表示 $\tilde{T}$ 和 T 的函数演算.

证明. 先证. $\tilde{P}_i=U^{-1}P_iU$, 其中 $\tilde{P}_i,P_i$ 为第 5 节中的记号.

由 P_i 定义, $P_ix=\sum\limits_{j=m}^{n}(x,\varphi_j)\varphi_j$. 而

$$\begin{aligned}\tilde{P}_ix&=\sum_{j=m}^{n}(x,\varphi_j')\varphi_j'\\&=\sum_{j=m}^{n}(x,U^{-1}\varphi_j)U^{-1}\varphi_j\\&=U^{-1}\sum_{j=m}^{n}(Ux,\varphi_j)\varphi_j\\&=U^{-1}P_iUx\end{aligned}$$

其中, φ_j 为 T 的特征向量, 则由本节例 5, $U^{-1}\varphi_j=\varphi_j'$. 其中后者为 $\tilde{T}$ 的特征向量. 于是有 $\tilde{E}_\lambda=U^{-1}E_\lambda$, 故 $\tilde{E}(\Delta\lambda)=U^{-1}E(\Delta\lambda)U$.

对实数轴的任意分化: Δ

$$\Delta : \mu_0 = m < \cdots < \mu_n = M$$

以及 $\xi_k \in [\mu_{k-1}, \mu_k]$, 作函数 $f_n(\lambda) = f(\xi_k)$, 当 $k \in [\mu_{k-1}, \mu_k]$

$$\begin{aligned}
(f_n(\tilde{T})x, y) &= \int_{m-0}^{M} f(\lambda) d\left(\tilde{E}_\lambda x, y\right) \\
&= \left(\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\tilde{E}(\Delta_k)\right] x, y\right) \\
&= \left(U^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)E(\Delta_k)\right] Ux, y\right) \\
&= \left(U^{-1} f_n(T)Ux, y\right)
\end{aligned}$$

于是有 $f_n(\tilde{T}) = U^{-1} f_n(T)U$, 又由定理 5.2 (5), 有

$$f(\tilde{T}) = U^{-1} f(T)U.$$

□

习题 28. 设 H 是 Hilbert 空间,$U \in L(H)$ 是酉算子. 试证明:

(1) 如果 $P \in L(H)$ 是正交射影, 则 $U^{-1}PU$ 也是正交射影.

(2) 如果 $T \in L(H)$ 是正规算子, 则 $U^{-1}TU$ 也是正规算子.

(1) 如果 $A \in L(H)$ 是正算子, 则 $U^{-1}AU$ 也是正算子.

证明. (1) P 是射影, U 为双射, 故 $U^{-1}PU$ 也是射影.

$$\left(U^{-1}PU\right)^* = U^*P^*\left(U^{-1}\right)^* = U^{-1}PU.$$

故 $U^{-1}PU$ 自伴, 其为正交射影.

(2)

$$\begin{aligned}
\left(U^{-1}TU\right)^*\left(U^{-1}TU\right) &= \left(U^{-1}T^*U\right)\left(U^{-1}TU\right) \\
&= \left(U^{-1}T^*TU\right) \\
&= \left(U^{-1}TT^*U\right) \\
&= (U^{-1}TU)(U^{-1}TU)^*
\end{aligned}$$

故 $U^{-1}TU$ 是正规算子.

(3) 只需证 $\sigma(^{-1}TU) \subset [0, \infty)$, 由于 $U^{-1}TU$ 自伴, 若有 $\lambda < 0$ 使

$$\lambda \in \sigma(U^{-1}YU).$$

若 λ 为 $U^{-1}TU$ 特征值, 则 λ 也为 T 特征值. 这与 T 为正算子矛盾. 若有 $\lambda \in \sigma_c\left(U^{-1}TU\right)$, 则 $\tilde{E}_\lambda$ 在 λ_0 处连续, 其中 $\tilde{E}_\lambda = U^{-1}E_\lambda U$. 于是 E_λ 也在 λ 处连续, 且 $\tilde{E}_{\lambda_1} \neq \tilde{E}_{\lambda_2} \Rightarrow E_{\lambda_1} \neq E_{\lambda_2}$. 于是 $\lambda \in \sigma_c(T) \subset \sigma(T)$, 矛盾. 故 $\sigma(U^{-1}TU) \subset [0,\infty), U^{-1}TU$ 为正算子. □

习题 29. 设 S 是 Hilbert 空间 H 上的单位移边算子:

$$S:\{x_0,x_1,,x_2,\cdots\} \mapsto \{0,x_0,x_1,x_2,\cdots\}.$$

求证 S 不能表成

$$S = UP,$$

这里 U 是酉算子, P 是正算子.

证明. 考虑 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 的正规正交基, 则 $S(H) = S_p\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由 U 是酉算子, 故 U 为双射. 故 $P(H) \subsetneq H$. 于是 $\exists x \in H$, 使 $x \neq 0$, 且 $(Px,x) = 0$, 于是 $Px = 0$.

$$S(X) = UP(X) = 0,$$

矛盾. □

习题 30. 设无穷矩阵 (u_{ij}) 是个酉矩阵. 求证: 它是可分 Hilbert 空间 H 上一个有界线性算子 A 的矩阵表达式, 而且 A 还是酉算子.

证明. 设 H 是可分无穷维 HilberT 空间, 记 $\{\varphi_1\cdots\}$ 为其正规正交基, 则任给 $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k.$$

令 $A = (a_{nk})_{n,k=1,2,\ldots}$, 且 A 为酉矩阵. 即 $AA^* = A^*A = I$. 令

$$(Ax,\varphi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k.$$

即

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}(Ax,\varphi_n)\varphi_n$$

则 A 为线性算子, 且 A 有界.

$$A^*x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_{kn}\xi_k\right)\varphi_n$$

于是有

$$AA^*x = A^*Ax = x$$

A 为酉算子. □