# 第四章 有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念. 我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法，把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、拓展达到无穷维空间. 证明了：任何一个无穷维可分的Hilbert 空间都可以表示为“坐标形式”的 $l^2$，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应. 例如在线性空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中三角函数系：

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots)$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中一组标准正交基, 于是$x(t)$ 可以按这个标准正交基展开成Fourier 级数：

$$x(t)=(x,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt+(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,$$

$$\text{即：}\quad x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）. 数学主要研究的对象是函数、运算. 微分,积分都是线性运算, 与$R^n$ 空间中线性变换$A$也有很多相同的性质.

许多数学问题, 例如:中学解析几何中的平移和旋转是线性变换, 线性方程组、微分方程、积分方程都是都与特定空间中的线性运算(变换) 或者说线性映射相关, 我们将把它们称之为线性算子. 线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.

进一步我们把全体有界线性算子看作一个线性空间，并赋予范数. 线性算子看作赋范空间中的元素, 线性算子空间是线性泛函分析研究的主要对象. 在新的线性空间框架下,研究线性运算的性质，解决分析、代数、几何中的问题. 在赋范空间中讨论有界线性算子的性质, 得到一些很深刻的结论：

一致有界原则, 逆算子定理, 闭图像定理.

# §4.1 有界线性算子与线性泛函

## 4.1.1 有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的微分、积分运算是线性的.

$$(x+y)' = x' + y', (\alpha x)' = \alpha x',$$
$$\int (x+y)\mathrm{d}t = \int x\mathrm{d}t + \int y\mathrm{d}t, \int \alpha x\mathrm{d}t = \alpha \int x\mathrm{d}t,$$

即满足性质 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$. 我们把具有这样性质的运算, 称为线性算子.

**定义 4.1.1** 设$X, X_1$是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$.$T$ 是从 $\mathscr{D}(T)$到 $X_1$的映射,满足

$$T(x+y) = Tx + Ty, \tag{4.1.1}$$
$$T(\alpha x) = \alpha Tx, \tag{4.1.2}$$

则称 $T$ 是从 $X$ 中到 $X_1$ 中的线性算子. $\mathscr{D}(T)$称为 $T$的定义域.

**注1** 一般地, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$, 如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 $T$ 是从 $X$ 上到 $X_1$的线性算子.

**注2** 若 $X_1 = \mathbb{K}$ (数域), $T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}$. 这样的线性算子称为是线性泛函. 即线性泛函 $T$ 是从赋范空间 $X$ 上到数域 $\mathbb{K}$ 的线性算子.

当 $\mathbb{K}$ 是实数域, 称为是实线性泛函. 当 $\mathbb{K}$ 是复数域, 称为是复线性泛函.

**定义 4.1.2** 设 $T$ 是从 $X$ 到 $X_1$ 的线性算子, 若存在 $M$, 使得

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.3}$$

则称 $T$为有界的线性算子. 如果一个线性泛函 $f$ 是有界的,即

$$|f(x)| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.4}$$

则称$f$是有界线性泛函.

**注1** 线性算子（线性泛函）的有界和函数的有界意义并不相同. 例如在实数空间 $\mathbb{R}$, 把$Tx = x$ 看作是是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子，则 $T$ 是有界线性算子，$\| T \| \le 1$，但是把 $Tx = x$ 看作普通的实函数，它是无界函数.

**注2** 由于内积可以产生范数, 内积空间也是赋范空间, 所以有关赋范空间上有界线性算子、有界线性泛函的讨论在内积空间依然成立.

显然我们有以下命题

**命题 4.1.3** 有界线性算子把有界集映成有界集.

线性算子由于具有可加性，关于连续性有更进一步的结果.

**定理 4.1.4** 设 $X, X_1$ 是赋范空间, $T$是从 $X$ 上到 $X_1$中的线性算子, $T: X \to X_1$，如果 $T$ 在 $x_0$ 点连续, 则 $T$ 在 $X$上连续.

**证明** 设 $T$ 在 $x_0$ 点连续, 即 $x_n \to x_0$, 可推知 $Tx_n \to Tx_0$. 对于 $X$ 中的任何一点 $y$, 要证 $T$在 $y$连续, 只须证明如果 $y_n \to y$，则 $Ty_n \to Ty$. 事实上

$\because y_n - y \to 0, \therefore y_n - y + x_0 \to x_0, \therefore T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$，即 $T(y_n - y) + Tx_0 \to Tx_0$，于是我们有 $T(y_n - y) \to 0$. □

**注** 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

**定理 4.1.5** $X, X_1$ 是赋范空间, $T$ 是从 $X$ 上到 $X_1$中的线性算子, 则 $T$是连续的当且仅当 $T$是有界的.

**证明** “$\Leftarrow$”已知 $T$ 有界, 证 $T$ 连续. 如果 $x_n \to x$，由于 $T$ 有界, 存在 $M > 0$，使得对于 $\forall x \in X$, 有 $\|x\| \leq M$. 于是我们有

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

所以 $T$是连续的.

“$\Rightarrow$”$T$连续$\Rightarrow$ $T$有界. 假如不然, $T$无界, 即对于 $\forall n > 0, \exists x_n$，使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}, \|y_n\| \to 0, \therefore y_n \to 0$.由于 $T$连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$.矛盾. □

**注** 线性算子连续等价于有界, 无界线性算子即不连续.

### 4.1.2 有界线性算子组成的赋范空间

我们可以把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间，即由全体有界线性算子构成的空间，从赋范空间的角度来了解和研究线性算子的性质.

**定义 4.1.6** 设 $X$, $X_1$ 是赋范空间, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 表示全体从 $X$ 到 $X_1$ 的有界线性算子. 如果 $X = X_1$，我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 简记为 $\mathscr{B}(X)$. 在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地定义线性运算, 即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

由于

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (M_1 + M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \le |\alpha|M_1\|x\|.$$

即 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 对加法、数乘运算封闭，成为一个线性空间.

下面我们有界线性算子看成一个元素，定义有界线性算子的范数.

**定义 4.1.7** 设$T$是从赋范空间$X$上到$X_1$中的有界线性算子, 即存在 $M > 0$, 使得

$$\|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{4.1.5}$$

$\|T\|$ 称为线性算子 $T$ 的范数.

**注** $\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M$, 且由 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\|$，可知与 $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$. 即 $\|T\|$ 是使 $\|Tx\| \le M\|x\|$ 成立的最小的 $M$.

$$\|T\| = \inf\{M | \ \|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in X\}. \tag{4.1.6}$$

**定理 4.1.8** 设$T$是从赋范空间$X$上到$X_1$中的有界线性算子,则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.7}$$

**证明**

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\\ &\ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.\end{aligned}$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X, y \neq 0, \|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, 两边取上确界, 得

$$\sup_{\substack{y\in X\\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

即$\|T\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. 于是结论成立. □

下面我们验证 $\|A\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$上的范数.

(i)$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge 0$.

(ii)$\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0, \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow A = 0$.

(iii)$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\||\alpha|\|Ax\|$.

(iv) $\|A+B\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax+Bx\| \leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| + \sup_{\|x\|=1}\|Bx\|$
$= \|A\| + \|B\|$

于是$(\mathscr{B}(X,X_1), \|\cdot\|)$是一个赋范空间.

**注** $\mathscr{B}(X,X_1)$ 中的元素是有界线性算子.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X,X_1)$, 定义 $(A\cdot B)(x) = A(Bx)$（一般记为 $AB$）. 显然 $AB$ 也是线性算子，并且

$$\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \| \, . \tag{4.1.8}$$

事实上，对于 $\forall x \in X$，

$$\| ABx \| \leq \| A \| \, \| Bx \| \leq \| A \| \, \| B \| \, \| x \|,$$

于是有（式4.1.8）成立.

### 4.1.3 例子

**例 4.1.9** 考虑 $n$ 阶方阵 $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n, x = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$，令

$$Ax = (a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots \\ \eta_n\end{pmatrix} = y, \tag{4.1.9}$$

其中 $\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然 $A$ 是从 $\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

$$\begin{aligned}\|Ax\| = (\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2)^{1/2} = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{1/2} \\ \leq (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|.\end{aligned}$$

因此$A$是有界线性算子. 一般地, $\|A\| \neq (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}$.

**例 4.1.10** 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$，对于任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \tag{4.1.10}$$

则 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函. 事实上

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i$$
$$=\alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y}).$$

即 $f$是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函. 其有界性可由Hölder 不等式证出：

$$\mid f(\mathbf{x})\mid=\mid\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\mid\leq\sum_{i=1}^{n}\mid a_ix_i\mid\leq(\sum_{i=1}^{n}\mid\mid a_i\mid^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}\mid\mid x_i\mid^2)^{\frac{1}{2}}=\parallel\mathbf{a}\parallel\parallel\mathbf{x}\parallel.$$

即 $f$是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

**注** 事实上 $\mathbb{R}^n$ 上的任何有界线性泛函一定可以写成式(4.1.10)的形式. 也就是说 $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函，是由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $\mathbf{a}$ 确定的。在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到，元素 $\mathbf{a}$ 正是平面 $f(\mathbf{x})=0$ 的法向量.

进一步的我们看到，定义在有限维空间上的线性算子，都是连续线性算子.

**定理 4.1.11** 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间，$(Y,\|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间，$T$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的线性算子，则 $T$ 是有界线性算子.

**证明** 在 $X$ 上我们定理一个新的范数

$$\parallel x\parallel_1=\parallel x\parallel+\parallel Tx\parallel,$$

显然范数的前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足，且

$$\parallel x+y\parallel_1=\parallel x+y\parallel+\parallel T(x+y)\parallel=\parallel x+y\parallel+\parallel T(x)+(Ty)\parallel$$
$$\leq\parallel x\parallel+\parallel y\parallel+\parallel T(x)\parallel+\parallel T(y)\parallel=\parallel x\parallel_1+\parallel y\parallel_1.$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 $X$ 上定义的另一个范数. 因为 $X$ 是有限维的赋范空间，根据定理2.4.1，同一个有限维空间上定义的范数都是等价的，于是 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价，即：存在 $K>0$，使得对于所有的 $x\in X$ 有 $\parallel x\parallel_1\leq K\parallel x\parallel$. 因此

$$\parallel T(x)\parallel\leq\parallel x\parallel_1\leq K\parallel x\parallel,$$

这说明 $T$ 是有界的.

**注** 定义域是有限维空间的线性算子是有界的，但是值域是有限维的线性算子不一定是有界线性算子.

**例 4.1.12** 设 $T$ 是从 $C[0,1]$ 到实数 $\mathbb{R}$ 的一个映射：

$$T(x)=x(0)\quad\forall x\in C[0,1],$$

则 $T$ 是一个有界线性泛函.

事实上，

$$| T(x) |=| x(0) |\leq \sup\{| x(t) | t\in[0,1]\} =\| x \| .$$

所以 $\| T \|\leq 1$. 另一方面，对于 $x_0(t)\equiv 1\in C[0,1]$，$T(x_0)=1=\| x \|$，于是我们有 $\| T \|=1$.

**例 4.1.13** 设 $X$ 是线性赋范空间，则 $X$ 上的范数 $\| x \|$ 定义了一个从 $X$ 到 $\mathbb{R}$ 的泛函，

$$\| \cdot \|: \quad X \longrightarrow \mathbb{R},$$

$f$ 是有界的，但不是线性的.

$f$ 是有界的是显然的. 假设 $f$ 是线性的，设 $x=0$, 则

$$0=\| 0 \|=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=\| x \| + \| -x \|=2 \| x \| .$$

矛盾. 即范数不是线性泛函.

**例 4.1.14** $y_0(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 对于任意的 $x\in C[a,b]$, 定义

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\mathrm{d}t. \tag{4.1.11}$$

$f$ 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函.

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq \int_a^b |x(t)y_0(t)|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_a^b |y_0(t)| \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|\mathrm{d}t=(\int_a^b |y_0(t)|\mathrm{d}t)\|x\|,\end{aligned}$$

即 $f$ 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函.

**注** 可以证明$\|f\|=\int_a^b |y_0(t)|\mathrm{d}t$.

**例 4.1.15** 无穷矩阵$(a_{ij})$，满足:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q<\infty \quad (q>1). \tag{4.1.12}$$

对于 $\forall x\in l^p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $x=(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_k,\cdots)$，令

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k \quad (i=1,2,\cdots),$$

$Tx=y, y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$则 $T$ 是从 $l^p$ 到 $l^q$ 的有界线性算子. 事实上

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q&=\sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q\\&\le\sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.\end{aligned}$$

即 $\|Tx\|_q=\|y\|_q\le(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}\|x\|^q$. 这说明 $T$ 是$l^q\to l^q$ 的有界线性算子.

但不是所有的线性算子都是有界的，十分重要的微分算子就是无界算子.

**例 4.1.16** (微分算子)设 $X=C[0,1]$,

$$T:D(T)\subset C[0,1]\to C[0,1], Tx(t)=x'(t),$$

其中$D(t)=\{x(t)\in C[0,1]|x(t)$的导数连续$\}$.

$T$是无界的线性算子. 事实上

$$\sin nt\in C[0,1], T(\sin nt)=n\cos nt, \|x_n\|=1,$$

但是 $\|Tx_n\|=n\to\infty(n\to\infty)$. 即 $T$ 是无界的.

**注** 微分算子是一类十分重要的无界线性算子, 它虽然是无界的，但是闭的线性算子(闭算子的定义见第三节，闭的线性算子也有“类似连续”的很好的性质).

### 4.1.4 有界线性算子范数的计算

**例 4.1.17** 设 $T$ 是从 $L[a,b]$ 到$C[a,b]$ 的线性算子，定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.1.13}$$

对于任意的 $x\in L[a,b]$，$\| x \|=\int_a^b x(\tau)\mathrm{d}\tau=1$，我们有

$$\| Tx \|=\max_{a\le t\le b}|\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau|\le\max_{a\le t\le b}\int_a^t|x(\tau)\mathrm{d}\tau|=\int_a^b x(\tau)\mathrm{d}\tau=1,$$

即 $\| T \|\le 1$. 另一方面，令 $x_0(t)=\frac{1}{b-a}\in L[a,b]$，$\| x_0 \|=1$，因此

$$\| T \|\ge\| Tx_0 \|=\max_{a\le t\le b}|\int_a^t x_0(\tau)\mathrm{d}\tau|=\max_{a\le t\le b}\int_a^t\frac{1}{b-a}\mathrm{d}\tau=1.$$

于是 $\| T \|=1$.

**注** 如果把上例中的线性算子 $T$ 看作是是从 $L[a,b]$ 到$L[a,b]$ 的线性算子，则 $\| T \| = b-a$，证明留给读者.

**例 4.1.18** (积分算子)设 $K(t,s)$是 $a \le t \le b, a \le s \le b$ 上的二元连续函数. 令

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{4.1.14}$$

$T$ 是 $C[a,b] \to C[a,b]$ 的线性算子. 由于

$$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b} |\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s| \le \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s\|x\| = \beta\|x\|,$$

其中 $\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s$，即$\|T\| \le \beta$. $T$ 是有界线性算子. 另一方面, 由于 $\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s$ 是关于 $t$的连续函数, 所以 $\exists t_0 \in [a,b]$ 使得 $\beta = \int_a^b |K(t_0,s)|\mathrm{d}s$. 令 $x_0(s) = \mathrm{sgn}K(t_0,s)$, 则 $x_0(s)$ 可测, 且$|x_0(s)| \le 1$. 由Лузин定理, 对于 $\forall n$ 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得 $|x_n(s)| \le 1$, 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的可测集 $E_n$外, $x_n(s) = x_0(s)$, 其中$M = \max\limits_{\substack{a\le t\le b\\ a\le s\le b}} K(t,s)$. 于是

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_a^b |K(t_0,s)|\mathrm{d}s = |\int_a^b K(t_0,s)x_0(s)\mathrm{d}s| \\
&\le |\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s| + |\int_a^b K(t_0,s)(x_0(s)-x_n(s))\mathrm{d}s| \\
&\le \|T\|\|x_n\| + 2M\mathrm{m}E_n \le \|T\| + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$时, 有 $\beta \le \|T\|$. 于是我们得到 $\|T\| = \beta$.

## §4.2 有界线性算子空间的收敛与完备性

### 4.2.1 有界线性算子空间中的收敛性

由算子的范数$\|\cdot\|$可以诱导出距离

$$d(A_1,A_2) = \|A_1 - A_2\|,$$

即 $\mathscr{B}(X,X_1)$也是距离空间. 显然在 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 中可以讨论算子列按范数的收敛性:

**定义 4.2.1** 设 $A_n$, $A \in \mathscr{B}(X,X_1)$, 如果 $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 则称有界线性算子$A_n$按范数收敛到有界线性算子$A$.

**定理 4.2.2** 空间 $\mathscr{B}(X,X_1)$中算子列按范数收敛等价于线性算子列在 $X$ 中的单位球面 $S$ 上一致收敛.

**证明** "$\Rightarrow$" 如果 $A_n\to A$, 对于 $\forall x\in S,\|x\|=1$,

$$\|A_nx-Ax\|\le\sup_{\|x\|=1}\|(A_n-A)x\|=\|A_n-A\|\to0(n\to\infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 $S$上一致收敛.

"$\Leftarrow$"反之, 如果 $\{A_n\}$ 在 $S$ 上一致收敛到 $A$, 则对于仅给的 $\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n\ge N$时, 对于任意的 $x\in S$ 有

$$\|A_nx-Ax\|<\varepsilon,$$

于是 $\|A_n-A\|=\sup_{\|x\|=1}\|A_nx-Ax\|\le\varepsilon$. 即 $A_n$ 按范数收敛到$A$. □

**注** 线性算子列$\{A_n\}$按范数收敛等价于在有界集上一致收敛. 事实上, 设 $M\subset X$ 是有界集, 则对于$\forall x\in M$, $\frac{x}{\|x\|}\in S$，于是 $\|A_n(\frac{x}{\|x\|})-A(\frac{x}{\|x\|})\|<\varepsilon,(n$充分大)，即$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon\|x\|\le K\varepsilon$，其中 $K$ 是 $M$ 的界.

在数学分析中，函数的收敛有逐点收敛、一致收敛，处理不同的问题使用不同的收敛性. 在泛函分析中，根据研究问题的不同，也可以考虑不同的收敛性. 线性算子在空间 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 中, 除了按范数收敛(或称为一致收敛), 还可以定义其它的收敛方式.

**定义 4.2.3** 设$T_n,T\in\mathscr{B}(X,X_1)(n=1,2,\cdots)$. 如果对于$\forall x\in X,T_nx\to Tx(n\to\infty)$，(即$\|T_nx-Tx\|\to0(n\to\infty)$)，则称 $T_n$ 逐点收敛到 $T$, 或称 $T_n$ 强收敛到 $T$. 记为$T_n\xrightarrow{强}T$.

**注** $T_n$ 按范数收敛到 $T$ (一致收敛) $\Rightarrow T_n\xrightarrow{强}T$. $\because\forall x\in X,\|T_n-T\|<\varepsilon\Rightarrow\|(T_n-T)x\|<\varepsilon\|x\|$. 但是强收敛不一定是一致收敛.

**例 4.2.4** $X=l^p,x\in l^p,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 考虑左移算子:

$$T_nx=x_n=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots).$$

$$\|T_nx\|=\|x_n\|=(\sum_{k=n}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}<(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}=\|x\|,$$

$T_n$ 是有界线性算子. 且 $\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|=\lim_{n\to\infty}\|x\|=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=n}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}=0$,即 $T_n$强收敛到零. 但 $T_n$ 不是按范数收敛到零. 事实上, 令 $y_n=(0,\cdots,1,\cdots)\in l^p,\|y_n\|=1,T_ny_n=(1,0,0,\cdots),\|Ty_n\|=1$.

$$\|T_n\|\ge\|T_n(y_n)\|=1,$$

即 $\|T_n\|=1,\|T_n-0\|=1$ 不收敛到零.

### 4.2.2 有界线性算子空间的完备性

**定理 4.2.5** 设 $X$ 是赋范空间, $X_1$ 是Banach空间, 则 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 是Banach 空间.

**证明** 要证明 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 是Banach 空间，对于空间中的任意一个Cauchy 列 $T_n$ ，要做以下三件事情：1 构造一个线性算子 $T$；2 证明 $T$ 是有界线性算子；3 证明 $T_n$ 按算子的范数趋近于 $T$.

1. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 中的Cauchy . 则对于任给的 $\varepsilon>0$, $\exists N$，当 $n\geq N$时，有

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon.$$

于是对于 $\forall x\in X$，

$$\|T_nx-T_mx\|\leq\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\|,$$

即对于任何给定的 $x\in X$, $\{T_nx\}$ 是 $X_1$ 中的Cauchy 列. $\because$ $X_1$ 完备， $\therefore$ 存在 $y\in X_1$ 使得

$$T_nx\to y,\forall x\in X.$$

于是对于任给的 $x\in X$, 有唯一确定的 $y\in X_1$和它对应, 我们可以定义 $Tx=y$.

由于极限运算是线性的, $T$ 是从 $X$ 到 $X_1$ 的线性算子.

2. 注意到

$$|\|T_n\|-\|T_m\||\leq\|T_n-T_m\|\to 0(n\to\infty),$$

即 $\{\|T_n\|\}$ 是Cauchy 数列, $\therefore\exists M>0$ 使得 $\|T_n\|\leq M(n=1,2,\cdots)$. 于是我们有

$$\|Tx\|=\|\lim_{n\to\infty}T_nx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leq\lim_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|<M\|x\|.$$

$T$ 是有界线性算子, $T\in\mathscr{B}(X,X_1)$.

3. 最后, 由于对于任给的 $\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时

$$\|T_nx-T_mx\|<\varepsilon\|x\|.$$

令 $m\to\infty$, 由范数的连续性，可推出 $\|T_n-T\|\leq\varepsilon(n>N)$，即 $T_n\to T(n\to\infty)$，所以 $\mathscr{B}(X,X_1)$ 是Banach 空间. □

**注** 对于$\mathscr{B}(X,\mathbb{K})=\{X$上定义的全体有界线性泛函$\}$，$X$是赋范空间，数域$\mathbb{K}$(实、复)是完备，$\therefore\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ 是完备的，即全体有线性泛函组成的空间是Banach 空间.

# §4.3 一致有界原则

在下面两节，我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素，从赋范空间的角度研究线性算子的性质. 这种抽象使我们能更清楚地看到线性算子的一些本质特征.

### 4.3.1 一致有界

一致有界是一个十分重要的概念. 例如在第一章的习题28中，$\mathscr{F}$ 是完备的距离空间 $X$ 上的实的连续函数族, 且对于 $\forall x\in X,\exists M_x>0$，使得: 对于每一个 $\mathcal{F}\in\mathscr{F}$，

$$|\mathcal{F}(x)|\leq M_x,$$

则存在开集 $U$ 及 $M>0$，使得对于任意的 $x\in U$, $\mathcal{F}\in\mathcal{F}$ 都有

$$|\mathcal{F}(x)|\leq M,$$

即在$U$上，$\mathcal{F}(x)$一致有界.

对于有界线性算子，我们可以得到更一般的一致有界原理，即一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

**定理 4.3.1** （Banach-Steinhaus 一致有界原理）$\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 是Banach 空间 $X$ 上到赋范空间 $X_1$ 中的有界线性算子族，如果对于 $\forall x\in X$, $\sup\|T_\alpha x\|<\infty$，则 $\{\|\mathcal{F}_n\||\alpha\in I\}$ 是有界集.

**注1** 定理说明，如果对于任意的 $x\in X$, 存在 $M_x>0$ ($x$给定, $M_x$给定) 使得

$$\|T_\alpha x\|\leq\sup_\alpha\|T_\alpha x\|=M_x<\infty,\quad\forall x\in X. \tag{4.3.1}$$

则存在一个共同的 $M$，使得

$$\|T_\alpha\|\leq M,\forall\alpha\in I$$

. 即点点有界 $\Rightarrow$ 一致有界 (前提:(1) $X-$ 是Banach 空间，(2) $T-$ 是线性的).

**注2** 这个定理的逆否命题是：如果 $X$ 是Banach 空间，$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha\|=\infty$，则存在 $x\in X$，使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|=\infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明的基本思路：要证明的是集合 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$中的线性算子有一个共同的上界（即一致有界）. 首先证明 $T_\alpha(\alpha\in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界，

$$\|T_\alpha x\| \leq M < \infty,\ \ \forall x\in B(0,r),\ \forall\alpha\in I.$$

然后根据算子的线性，对于 $\forall x\in X$，$\forall\alpha$，$\|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\|\leq M$，则推出

$$\|T_\alpha x\|\leq Mr\parallel x\parallel,$$

即在全空间上一致有界.

要证明在一个小球上一致有界，关键是用到 $X$ 是第二纲集. 存在一个 $M_k$（对于 $M_k=\{x\in X|\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\leq k\}$ 中的元素，$T_\alpha$ 一致有界），它在某一个开集中稠密，随之在一个闭球中稠，进而把它“平移”到以原点为中心的闭球，使之在这个闭球上一致有界.

**证明** (i) 令 $M_k=\{x\in X|\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\leq k\}=\cap_{\alpha\in I}\{x\in X|\|T_\alpha x\|\leq K\}$, $\|T_\alpha x\|$ 是关于 $x$ 的连续函数，因此对于每一个 $\alpha\in I$, $\{x\in X|\|T_\alpha x\|\leq k\}$ 是闭集，于是 $M_k$ 是闭集, 且

$$X=\cup_{k=1}^{\infty}M_k$$

. $\because X$ 是Banach 空间，$\therefore$ $X$ 是第二纲集. $\therefore$ 必有存在 $k_0$, $M_{k_0}$ 不是疏集, 即 $M_{k_0}$ 在 $X$ 中某个开集 $G$ 中稠密. 由于 $G$ 是开的，存在一个闭球 $\overline{B}\subset G$，于是 $M_{k_0}$在 $\overline{B}=\{x\in X|\|x-x_0\|\leq r\}$ 中稠密, 所以

$$\overline{B}\subset\overline{M_{k_0}}=M_{k_0}.$$

(这说明 $T_\alpha$ 在$\overline{B}$ 上是一致有界的).

(ii) 进一步证明 $T_\alpha(\alpha\in I)$ 在 $\overline{B_0}=\{x\in X|\|x\|\leq r\}$ 上一致有界.

对于任意的 $x\in\overline{B_0}=\{x\in X|\|x\|\leq r\}$，我们有 $x+x_0\in\overline{B}$，其中 $\overline{B}=\{x\in X|\|x-x_0\|\leq r\}$，于是

$$\|T_\alpha x\|\leq\|T_\alpha(x+x_0)\|+\|T_\alpha x_0\|\leq 2M_{k_0},\ \forall\alpha\in I.$$

(iii) 于是对于任意的 $x\in X$, $\because \frac{x}{\|x\|}r\in\overline{B_0}$ $\ \therefore \|T_\alpha\frac{rx}{\|x\|}\|\leq 2M_{k_0}$，于是

$$\|T_\alpha x\|\leq 2M_{k_0}\|x\|/r,$$

$\therefore \|T_\alpha\|\leq\frac{2}{r}M_{k_0}=M,\ \ \forall\alpha\in I$，即 $\sup_\alpha\|T_\alpha\|<\infty$. □

**注1** $X$ 是Banach 空间, 若 $f_\alpha$ 是定义在 $X$ 上的有界线性泛函 $(\alpha\in I)$, 如果对于每一个 $x\in X$, $\sup_{\alpha\in I}|f_\alpha(x)|<\infty$，则 $\{\|f_\alpha\|\alpha\in I\|\}$ 是有界集.

**注2** 当 $I$ 是一个可数集时，$X$ 是一个Banach 空间，如果对于 $\forall x \in X$，有 $\sup_n \|f_n\ (x)\| < \infty$，则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

**注3** 如果 $X$是一个Banach空间，$\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$，则存在 $x_0 \in X$，使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.

这是一致有界原则的逆否命题.

**注4** 定理中的条件，$X$ 是Banach 空间，仅仅用到推出 $X$是第二纲集. 即定理的条件可以减弱为 $X$ 是第二纲集.

**注5** 一致有界原则也可以由下一节关于范数等价的定理4.4.6推出.

### 4.3.2 强连续意义下的完备性

**定理 4.3.2** 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 $X$ 到Banach 空间 $X_1$ 中的有界线性算子列，如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) $G$ 是 $X$ 中的稠子集，$\forall x \in G, \|T_nx\|$收敛，则存在有界线性算子 $T(T \in \mathscr{B}(X,，X_1))$，使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T,\ 且\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

**证明** 对于任意的 $y \in G$，$T_ny$ 收敛，$\{T_ny\}$ 一个Cauchy列. 由于 $G$ 在 $X$中稠密，对于 $\forall x \in X$，存在 $y \in G$，使得 $\|x-y\| < \varepsilon$，再结合$\{\|T_n\|\}$ 有界. 于是

$$\begin{aligned}\|T_nx - T_mx\| &\leq \|T_nx - T_ny\| + \|T_ny - T_my\| + \|T_my - T_mx\| \\ &\leq \|T_n\|\|x-y\| + \|T_ny - T_my\| + \|T_m\|\|x-y\| \to 0(当 m,n \to \infty),\end{aligned}$$

即 $\{T_nx\}$ 是一个Cauchy列，由于 $X_1$ 是Banach空间. 于是存在 $z$，$\|T_nx - z\| \to 0\ (n \to \infty)$. 令 $Tx = z$，即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_nx$.

显然 $T$是线性的，且 $T_n$ 强收敛到 $T$. 进一步的

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_nx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_nx\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|.$$

于是 $T$ 是有界线性算子，且 $\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. □

**定理 4.3.3** 设 $X, X_1$是Banach 间，则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备.

**注** 完备的含意:

(1) $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$,

(2) $\forall x \in X, \{T_nx\}$ 是 $X_1$ 中的Cauchy 列，则存在 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$，$T_n \xrightarrow{\text{强}} T$，即 $T_nx \to Tx\ (\forall x \in X)$.

**证明** $\because X_1$ 完备，$\{T_n x\}$ 是Cauchy列, 存在 $z \in X$, $T_n x \to z = Tx$ (即$T_n x \to Tx$). 由于收敛的点列有界, 对于 $\forall x \in X$ 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

$\because X$ 是完备的, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ 有界.

再由 $X_1$ 是Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有 $\|T\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$，即 $T$ 界，$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$. □

**注** 定理要求条件: $X$ 是Banach 空间, $X_1$ 也是Banach空间.

由以上定理可知, 当 $X, X_1$ 是Banach 空间时，$T_n \xrightarrow{\text{强}} T$ 的充分必要条件是

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界,

(ii) $G$ 是 $X$中的稠子集, $\forall x \in G, \{T_n x\}$ 收敛.

### 4.3.3 共鸣定理的应用

**例 4.3.4** (Fourier 级数的发散性)

由一致有界原理我们知道, 如果 $\|f_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$，则存在$x_0$，$|f_n(x_0)| \to \infty$(发散). 据此下面我们证明存在连续函数, 在它的某一个连续点 $t_0$，其Fourier 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以$2\pi$为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

可以证明 $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ 是一个Banach 空间. 对于任意的 $x(t) \in C_{2\pi}$，它的Fourier 级数为

$$x(t) \sim \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{4.3.4}$$

我们知道如果 $x(t)$ 连续, 且 $x'(t)$ 连续, 则它的Fourier 级数收敛到 $x(t)$.

现在的问题问题是: 是否存在 $x(t) \in C_{2\pi}$，它的Fourier 级数在某一点的发散? 即它的前 $n+1$ 项的和在这点发散.

$x(t)$ 前 $n+1$项Fourier 级数的和为

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t))\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(s)[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t)]\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} x(s) k_n(s,t)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $k_n(s,t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s-t)}{2\pi \sin \frac{1}{2}(s-t)}$.

由于 $x(t)$是周期函数, 不失一般性, 我们证明对于 $t=0$，一定存在 $x(t)$, 它的Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

当 $t=0$时, $k_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s)}{2\pi\sin\frac{1}{2}s}=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ks$

考虑 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函,

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)k_n(s,0)\mathrm{d}s,$$

它是 $C_{2\pi}$ 上的有界连续泛函, 且可以证明

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|\mathrm{d}s$$

下面我们证明 $\|f_n\|\to\infty\ (n\to\infty)$.

$$\begin{aligned}\|f_n(x)\|&=\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|\mathrm{d}s=\int_{0}^{2\pi}|k_n(s,0)|\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t\\&\geq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t=(\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u)\frac{1}{2n+1}\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s\to\infty.\end{aligned}$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0\in C_{2\pi}$，$f_n(x_0)$发散, 即存在连续函数 $x_0(t)$，它在 $t=0$ 点的Fourier 级数发散.

**注1** 有界变差函数（两个单调函数之差）的Fourier 级数处处收敛. 在连续点收敛到 $x(t)$. 在不连续点收敛到 $\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2}$.

**注2** 但是对于连续函数, 其Fourier级数可以在一些点发散, 1876年P.du Bois Reymond给出这个否定的回答.

考虑三角多项式

$$\begin{aligned}T(x,n)=&\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}\\&-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.\end{aligned}$$

令 $f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2})$. 可以证明 $f(x)$连续, $f(x)$ 的Fourier级数在 0 点发散.（这是1911年,Féjer提出的例子）.

**注3** 上面的例子使用泛函分析的观点和方法，证明了存在连续函数 $x_0(t)$，它在任意指定的点 $t=0$ 的Fourier 级数发散. 这个定理是存在性证明，但与构造一个反例的证明相比较，方法简单，结论深刻.

**注4** 1966年, Carleson 证明了: $L^2$ 可积函数的Fourier 级数几乎处处收敛, 于是可知连续函数的Fourier 级数几乎处处收敛.

## §4.4 开映像定理与逆算子定理

### 4.4.1 逆算子

如果对于任给的 $y \in \mathscr{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$，则称 $T$ 是单射，这时可以定义从值域 $\mathscr{R}(T)$ 到 $X$ 的算子 $T^{-1}$. $T^{-1}$ 称为是 $T$的逆算子.

众多数学问题, 都可以归结为求方程 $Tx = y$ 的解，即考虑 $T^{-1}$ 是否存在、唯一以及 $T^{-1}$ 是否连续（保证解的稳定性）. 我们根据Banach 空间的基本性质来研究这些问题，我们将得到逆算子定理以及闭图像定理.

**定义 4.4.1** （逆算子）$T$ 是从线性空间 $X$ 到线性空间 $X_1$ 中的线性算子，如果存在 $X_1$ 到 $X$ 中的线性算子 $T_1$, 使得

$$T_1T = I_X \quad (X\text{中的单位算子}),$$
$$TT_1 = I_{X_1} \quad (X_1\text{中的单位算子}),$$

则称算子$T$有逆算子，$T_1$ 称为 $T$ 的逆算子，记为 $T_1 = T^{-1}$.

**注1** $T$ 存在逆算子，充分必要条件是: $T$ 是空间 $X$ 到空间 $X_1$ 中的一对一映射. 即；对于 $\forall x_1,\ x_2 \in \mathscr{D}(t)$,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2,$$

**注2** $T^{-1}$ 如果存在，则 $T^{-1}$是唯一的.

$$T^{-1}: \ \mathscr{R}(T) \longrightarrow \mathscr{D}(t)$$

$$y_0 \ \mapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0).$$

这意味着 $Tx = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$.

**注3** 可以证明 $T^{-1}$也是线性算子，即 $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$.

**注4** $(T^{-1})^{-1} = T$.

下面讨论在什么时候有 $T^{-1}$ 存在，什么时候 $T^{-1}$有界.

**定理 4.4.2** $T$ 是赋范空间 $X$ 上到赋范空间 $X$ 上线性算子, 且存在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geq m\|x\|(x \in X), \tag{4.4.1}$$

则 $T$ 存在有界的逆算子 $T^{-1}$.

**注** 未要求 $T$ 有界，只要 $T$ 下方有界.

**证明** (1) $T$ 是 $1-1$的.

$\because Tx_1 = Tx_2$ 可知 $T(x_1-x_2)=0$，但 $\|T(x_1-x_2)\| \geq m\|x_1-x_2\|$, $\therefore \|x_1-x_2\| = 0$，即 $x_1 = x_2$ ，$\therefore$ $T$ 是一对一的，于是逆算子存在.

(2)对于任意的 $y \in X_1, T^{-1}y \in X$.

由条件 $\|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|$，即 $\|y\| \geq m\|T^{-1}y\|$，于是我们有

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|,\ \forall y \in X, \tag{4.4.2}$$

$T^{-1}$是有界线性算子. □

### 4.4.2 开映射定理

首先我们证明与逆算子相关的一个重要定理—开映射定理.

**定义 4.4.3** 设 $T$ 是 $X \to X_1$ 的一个映射，如果 $T$ 把 $X$ 中的任何一个开集映成 $X_1$ 的开集，则称 $T$ 是开映像.

**定理 4.4.4** (开映射定理)

设 $T$ 是Banach 空间 $X$ 上到Banach空间 $X_1$ 上的有界线性算子，则 $T$ 是一个开映射.

**注1** 定理要求条件：$\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{R}(T) = X_1$, $TX = X_1$.

**注2** 这个定理说明，当 $T$ 是有界线性算子时，如果 $TX = X_1$, $X$, $X_1$ 都是Banach 空间，则我们有：对于开集 $G$, $TG$一定是开集.

**注3** 如果 $T$ 把一个开集映成开集，我们把 $T$ 称为是开映射.

注意 $T$ 是开映射与 $T$ 是连续的区别. $T$ 连续：$\Leftrightarrow$ 开集的原像是开的. 即 $G \subset X_1$，$G$ 是开集 $\Rightarrow T^{-1}(G)$ 是开集.

**证明** (1) 设 $B$ 是 $X$ 中的球, $B_1$ 是 $X_1$中的球. 注意到

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0,k),$$
$$X_1 = TX = \cup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0,k).$$

由于 $X_1$ 是第二纲集，存在 $K_0$, 使得 $T\overline{B}(0,k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0,r_0)$ 中稠, 由 $T$ 的线性性质可推出（通过“平移和相似变换”，细节略）：对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$（其中 $\delta = r_0/k_0$），使得 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠.

(2) 下面结合 $T$ 的连续性，我们证明对于任意的 $r > 0$，

$$T(\overline{B}(0,r)) \supset B_1(0,\frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.3}$$

(注意：这里的关系是包含，而不是前面的稠密.)

事实上，对于任意的 $y_0 \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$，因为 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2})$ 在 $B_1(0, \frac{\delta}{2})$ 中稠密, 存在 $x_1 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2})$, 使得

$$\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2},$$

因此 $y_1 = y_0 - Tx_1 \in S(0, \frac{\delta}{2^2})$. 再由于 $T\overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$ 在$S_1(0, \frac{\delta}{2^2})$ 中稠密, 存在 $x_2 \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^2})$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$, 于是 $y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in B_1(0, \frac{\delta}{2^3})$. 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}, x_n \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^n})(n = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{4.4.4}$$

因为 $X$ 是Banach 空间及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$，由定理2.5.1可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 收敛，即存在 $x_0 \in X$，使得 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 并且 $\|x_0\| \leq 1$. 由于 $T$ 是连续线性算子, 结合(4.4.4)式,有

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=1}^{n} x_k) = Tx_0. \tag{4.4.5}$$

这说明 $y_0 \in T\overline{B}(0, 1)$，于是我们证明了 $T\overline{B}(0, 1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta)$. 由 $T$ 的线性性质, 对于任意的 $r > 0$,

$$T\overline{B}(0, r) \supset B_1(0, \frac{1}{2}r\delta). \tag{4.4.6}$$

(3) 最后结合 $T$ 是一个线性算子，证明对于 $X$ 中的任意一个开集$G$，一定有 $TG$ 是开集.

任取 $Tx \in TG, x \in G$，因为 $G$是开集, 存在 $x$ 的领域 $B(x, r_1) \subset G$, 取正数 $r_2 < r_1$, 则 $\overline{B}(x, r_2) \subset B(x, r_1) \subset G$，因此

$$T\overline{B}(x, r_2) \subset TG. \tag{4.4.7}$$

由于 $\overline{B}(x, r_2) = x + \overline{B}(0, r_2)$, 因此

$$T\overline{B}(x, r_2) = Tx + T\overline{B}(0, r_2) \supset Tx + B_1(0, \frac{1}{2}r_2\delta) = B_1(Tx, \frac{1}{2}r_2\delta), \tag{4.4.8}$$

由式(4.4.7) 和式(4.4.8)说明 $Tx$ 是 $TG$ 的内点, 所以 $TG$ 是 $X_1$ 中的开集.

**注1** 定理中要求 $X_1$ 是Banach 空间, 证明中仅用到 $X_1$ 是第二纲集, 即条件可放宽为$X_1$ 是第二纲集.

**注2** 在证明的第二部分，由稠密性证明包含时, 选出了一个点列 $x_n$, 由于 $X$是Banach 空间, 且点列的前 $n$ 项范数的和收敛, 由定理2.5.1可知级数收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_0$. 这是证明的关键之一.

**注3**　$T$ 的线性性质, 在定理的证明中非常重要.

$T$ 的连续性这个条件, 定理中用在: 当

$$\begin{cases} S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \to x_0, \\ TS_n \to y_0, \end{cases} \tag{4.4.9}$$

由 $T$ 连续, 推出 $Tx_0 = y_0$. 以后我们可以看到，只要 $T$ 是闭算子，这个性质就可以成立, 不一定要求 $T$ 连续.

**注4**　如果线性算子 $T$ 的逆算子 $T^{-1}$ 存在，式(4.4.6)就意味着 $T^{-1}$ 的逆算子有界，因为对于 $T^{-1}$ 来说，它把小球 $B_1(0, \frac{1}{2}r\delta)$ 映到闭球 $\overline{B}(0,r)$ 中，即"放大的比例"不超过 $\frac{\delta}{4}$.

### 4.4.3 逆算子定理

下面我们用开映像定理，结合 $T$ 是一个线性算子来证明逆算子定理.

**定理 4.4.5**　(Banach 逆算子定理)

$T$ 是从Banach 空间 $X$ 上到Banach 空间 $X_1$ 上的一对一的有界线性算子，则 $T$ 的逆算子存在，且 $T^{-1}$是有界的.

**注1**　条件: $T$ 是一对一的，保证了 $T^{-1}$ 的存在.

**注2**　$X$ 是Banach空间，$\mathscr{D}(T) = X$, $X_1$ 是Banach 空间，$\mathscr{R}(T) = X_1$，即 $T$ 的定义域和值域都是Banach 空间（ $T$ 即是单射又是满射），在这样的条件下才能有结论: $T^{-1}$有界.

**证明**　由条件 $T^{-1}$存在，且由逆算子定理的证明（式(4.4.6)）可知，存在 $\delta > 0$,

$$T\overline{B}(0,1) \supset B_1(0, \frac{1}{2}\delta).$$

因此 $\forall y \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$，我们有 $T^{-1}y \in \overline{B}(0,1)$. 于是对于 $\forall z \in X_1$，$\frac{\delta z}{4\|z\|} \in B_1(0, \frac{\delta}{2})$.

$$T^{-1}(\frac{\delta z}{4\|z\|}) \in \overline{B}(0,1),$$

即 $\|T^{-1}\frac{\delta z}{4\|z\|}\| \leq 1$, $\|T^{-1}z\| \leq \frac{4\|z\|}{\delta}$，所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{4}{\delta}$，即 $T^{-1}$是有界线性算子.

**注1**　逆算子定理在泛函分析中有广泛的应用，包括在线性算子谱理论的研究中。

**注2**　$TX = X_1$ 是Banach 空间或第二纲集这个条件不能缺少.

例如 $X = X_1 = C[0,1]$，

$$Tx = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s, x(s) \in C[a,b]. \tag{4.4.10}$$

但 $TX \neq X_1$，事实上 $TX = M = \{y \in C^1[0,1] | \ y(0) = 0\}$. 可以证明 $M$ 是 $C[a,b]$ 中无处稠密集，不是第二纲集.

$T$ 的逆算子 $T^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是一个微分算子，是无界的线性算子（参阅例4.1.16）.

**定理 4.4.6** 设 $X$ 是一个线性空间，其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$, $(X, \|\cdot\|_1)$ 和$(X, \|\cdot\|_2)$ 都是Banach 空间，且存在常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$等价.

**注** 由等价范数的定义6.2.5，我们只需证明 $\exists \widetilde{C} > 0$，使得 $\|x\|_1 \leq \widetilde{C}\|x\|_2$.

**证明** 考虑恒等映射 $I : X \to X$，$I$ 是Banach 空间 $X_1$ 到Banach 空间 $X_2$ 上的一对一的有界线性算子，$\therefore$ 由Banach 逆算子定理，

$$I^{-1} = I : X_2 \to X_1$$

是有界线性算子. $\therefore \exists C_1 > 0$, $\therefore \|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2$，即 $\frac{1}{C_1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$，所以 $\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$ 等价. □

# §4.5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非常重要的线性算子，它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

## 4.5.1 闭算子的定义

**定义 4.5.1** $X, X_1$ 是赋范空间，$T$ 是从 $X$中到 $X_1$ 中的线性算子，考虑乘积空间 $X \times X_1 = \{(x,y) | x \in X, y \in X_1\}$，在其上定义范数：对于任意的 $z = (x,y) \in X \times X_1$, 令

$$\|z\| = \|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|_1, \tag{4.5.1}$$

根据定义2.5.9和定理2.5.10知 $X \times X_1$ 是赋范空间，如果 $X$ 和 $X_1$ 是Banach 空间，则 $X \times X_1$ 也是Banach 空间. 令

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X_1 \times X | x \in \mathscr{D}(T)\}, \tag{4.5.2}$$

称为 $G(T)$ 为算子 $T$ 的图象.

**定义 4.5.2** 如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的，则称 $T$是闭算子.

**定理 4.5.3** （闭算子的等价条件）设 $X$, $X_1$ 是赋范空间，$T$ 是从 $X$ 到 $X_1$ 中的线性算子，则 $T$ 是闭算子，当且仅当对于

$$\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T),\ x_n\to x\in X,\ \text{及}\ Tx_n\to y\in X_1,$$

必有 $x\in\mathscr{D}(T)$, $y=Tx$.

**证明** “$\Leftarrow$” 要证 $G(T)$ 是闭的，即 $\forall(x,y)\in\overline{G(T)}\Rightarrow(x,y)\in G(T)$. 对于

$$\forall(x,y)\in\overline{G(T)},\ \exists(x_n,y_n)\in G(T),\ (x_n,y_n)\to(x,y)\ (n\to\infty).$$

$\because(x_n,y_n)$ 是在 $T$ 的图象中，$\therefore y_n=Tx_n$，即

$$(x_n,Tx_n)\in G(T),\ (x_n,Tx_n)\to(x,y),$$

根据乘积空间范数的定义有，

$$\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0(n\to\infty).\ \therefore\|x_n-x\|\to 0,\ \|Tx_n-y\|\to 0,$$

即 $x_n\to x$, $Tx_n\to y$. 由定理中的条件可知 $x\in\mathscr{D}(T)$, $y=Tx$. $\therefore(x,y)\in G(T)$，这就证明了 $T$ 是闭算子.

“$\Rightarrow$” 如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$, $x_n\to x$, $Tx_n\to y(n\to\infty)$，于是

$$\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0,\ \therefore(x_n,Tx_n)\to(x,y).$$

‘$\because T$ 是闭的，$G(T)$ 是闭的，$\therefore(x,y)\in G(T)$，即 $x\in\mathscr{D}(T)$, $y=Tx$. $\therefore$ 条件成立. □

**注1** 可以把闭算子定义为: 如果对于任意的

$$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T),\ x_n\to x,\ Tx_n\to y,\ \text{其中}\ x\in X,\ y\in X_1, \tag{4.5.3}$$

一定能有$x\in\mathscr{D}(T)$, 且 $Tx=y$，则称 $T$ 是闭线性算子.

**注2** 由上述定义，显然定义在全空间上的有界（连续）线性算子一定是闭线性算子.

**注3** 由式（4.5.3）可以看出，闭的线性算子与连续线性算子有很“类似”的性质.

**注4** 在开映象定理中，$T$ 连续的条件，可以改为 $T$ 是闭算子. 即: $X$, $X_1$ 是Banach空间，$T$ 是在上的 $(TX=X_1)$, $T$ 是闭算子，则: $T$ 是开映象.

### 4.5.2 闭算子的例

下面的例子说明十分重要的无界线性算子—-微分算子是闭算子.

**例 4.5.4** $X=C[a,b],\ \mathscr{D}(T)=C^1[a,b]$

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\neq X,\ T:\mathscr{D}(T)\to C[a,b]. \tag{4.5.4}$$

则 $T$ 是闭算子.

要证 $T$ 是闭算子，就是要证明

$$x_n\in\mathscr{D}(T),\ x_n\to x, Tx_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n\to y\ \Rightarrow x\in\mathscr{D}(T),\text{且 } Tx=y.$$

由于

$$\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t)=x_n(t)-x_n(0),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

（一致收敛,可推出点点收敛）. 因为 $x_n'(s)\to y$ 是一致收敛（按范数收敛），所以积分和极限可以交换顺序，结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$ 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y_(s)\mathrm{d}s. \tag{4.5.5}$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

于是 $x'(t)=y(t)\in C[a,b]$. $x(t)\in C^1[a,b]$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=y(t),\ Tx=y,\ \therefore T$ 是闭算子.

但 $T$ 是无界线性算子（参阅例4.1.16）.

### 4.5.3 闭图象定理

**定理 4.5.5** （团图象定理）

设 $T$ Banach空间 $X$ 上到Banach 空间 $X_1$ 中的闭线性算子，则 $T$ 是有界线性算子.

**注** 定理说明：

$$\begin{cases}\mathscr{D}(T)=X,\ X\text{是Banach空间}\\ T\text{闭}\end{cases}\Longrightarrow T\text{有界}.$$

**证明**　$\because X$, $X_1$ 是Banach 空间，由定理2.5.10知 $X \times X_1$ 是Banach 空间. $\because T$ 闭，$\therefore G(T)$ 是 $X \times X_1$ 中的闭子空间，根据定理2.3.6知 $G(T)$ 是一个Banach 空间. 定义 $\widetilde{T}$：从 $G(T)$ 上到 $X$ 中的线性算子，

$$\widetilde{T}:(x, Tx) \to x,$$

$\widetilde{T}$ 是一一对应的、在上的线性算子 ($\because D(T)=X$)，$\therefore \widetilde{T}^{-1}$ 存在，$\widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$, 由Banach 逆算子定理4.4.5，$\widetilde{T}^{-1}$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, $\therefore \|Tx\| \leq (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|$，即 $T$ 是有界线性算子.□

**注1**　闭图像定理在研究线性算子连续时常要用到，特别是研究偏微分方程是这个定理比较重要. 在Hilbert 空间讨论对称算子是也要用到闭图像定理.

**注2**　定理的条件要求 $\mathscr{D}(T)=X$，这十分重要，定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是否是闭的，关系到 $\widetilde{T}^{-1}$是否有界.

**注3**　Banach 逆算子定理、闭图像定理、Banach-Steinhaus 共鸣定理和下一章的Hahn-Banach 线性泛函的延拓定理这四大定理奠定了泛函分析的基础. 这些定理在证明上有一定的技巧，在应用上十分广泛.

## 习题 4

1. 设$X$是有限维线性赋范空间,证明$X$中的弱收敛等价于按范数收敛.

2. 设$\sup_{n\geq 1}|a_n| < \infty$,在$l^1$上定义算子$T: y = Tx$,其中$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\}, \eta_k = \alpha_k \xi_k (k = 1, 2, \cdots)$.证明$T$是$l^1$上的有界线性算子并且$\|T\| = \sup_{n\geq 1}|a_n|$.

3. 设$G$是赋范空间$X$的子空间,$x_0 \in X$,证明$x_0 \in \overline{G}$, 当且仅当对于$X$上任一满足$f(x) = 0 (x \in G)$的有界线性泛函$f$必有$f(x_0) = 0$.

4. 设$\phi(t) \in C[0,1]$,在$C[0,1]$上定义泛函

$$\Phi(f) = \int_0^t \phi(t) f(t) \mathrm{d}t, \forall f \in C[0,1],$$

   求$\|\Phi\|$.

5. 设$X$是Banach 空间,$X_0$是$X$的闭子空间.定义映射$\Phi: X \to X/X_0$为$\Phi: x \to [x], \forall x \in X$,其中$[x]$表示含$x$的商类.证明$\phi$是开映射.

6. 设$X, Y$是线性赋范空间,$D$是$X$的线性子空间,$T: D \to Y$是线性映射.证明
   (1)若$T$连续,$D$是闭集,则$T$是闭算子;
   (2)若$T$连续且是闭算子,则$Y$完备蕴含$D$闭.

7. 设$X$为线性赋范空间,$f$是$X$上的线性泛函.证明
(1)$f$连续的充要条件是$f$的零空间$N(f)=\{x|f(x)=0\}$是$X$中闭子空间;
(2)当$f\neq 0$时,$f$连续的充要条件是$N(f)$在$X$中稠密.

8. 设$X$是有界实数列全体按通常的线性运算构成的线性空间.证明存在$X$上的线性泛函$f$,使得对任何$x=\{\alpha_n\}\in X$,均有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n\leq f(x)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n.$$

(提示:考察泛函$p(x)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n$).

9. 对$f\in L[a,b]$,定义

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明:(1)若$T$为$L[a,b]\to C[a,b]$的算子,则$\|T\|=1$.
(2)若$T$为$L[a,b]\to L[a,b]$的算子,则$\|T\|=b-a$.

10. 设$f\in L^p(E),1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,证明

$$\|f\|_p=\sup\{|\int_E fg\mathrm{d}\mu|\,|\,\|g\|_q\leq 1\}.$$

11. 设$x(t)\in C[a,b],f(x)=x(a)-x(b)$,证明$f$是$C[a,b]$上的有界线性泛函,并求$\|f\|$.

12. 求泛函$f(x)=\int_0^1\sqrt{t}x(t^2)\mathrm{d}t$在以下两种情形下的范数$\|f\|$.
(1)$x(t)\in C[0,1]$;(2)$x(t)\in L^2[0,1]$.

13. 设无穷矩阵$A=(a_{jk})$满足

$$M=\sup_j\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|<\infty.$$

对于$\forall x=\{x_1,x_2,\cdots\},y=\{y_1,y_2,\cdots\}\in l^\infty$,定义线性算子$T:l^\infty\to l^\infty,x\to y$,其中$y_j=\sum_{k=1}^\infty a_{jk}x_k,j=1,2,\cdots$
证明$\|T\|=M$.

14. 设$X,Y$为线性赋范空间,$T:X\to Y$为线性算子,若$T$为闭算子且逆算子$T^{-1}:Y\to X$存在,证明$T^{-1}$也是算子.

15. 设$X,Y,Z$都是Banach空间,若$T_1\in\mathscr{B}(X,Z),T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$,且对$\forall x\in X$,算子方程$T_1x=T_2y$都有唯一解$y=Tx$,证明$T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

16. 设$X,Y$为Banach空间,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$,若$T$是满单射,证明:存在正常数$a,b$,使得对$\forall x\in X$,有

$$a\|x\|\leq\|Tx\|\leq b\|x\|.$$

17. 设$X$是$l^\infty$中只有有限多个零项的序列构成的子空间.定义$T:X\to X,x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\to y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$,式中$y_k=\frac{1}{k}x_k$,
证明:$T\in\mathscr{B}(X)$,并计算$\|T\|$.但$T^{-1}$无界.这是否与Banach逆算子定理矛盾?

18. 设无穷矩阵$(a_{ij})(i,j=1,2,3,\cdots)$满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

令$y=Yx, y_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$.其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}, y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$,则$T$是$l^{\infty}$到$l^{\infty}$的有界线性算子,且$\|T\|=\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

19. 设$T_n$是$L^p(\mathbb{R})(1\le p<\infty)$到自身的算子.

$$(T_n f)(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\le n, \\ 0, & |x|>n. \end{cases}$$

其中$f\in L^p(\mathbb{R})$.证明$T_n$强收敛于恒同算子$I$ ,但不一致收敛到$I$.

20. 考虑$L^2(-\infty,\infty)$ 到其自身上的映射

$$T: x(t)\to x(-t).$$

问$T$ 是否为连续线性算子.

21. 设$M_n$ 表示$n\times n$ 的实矩阵空间, 对于$A=(a_{ij})\in M_n$, 定义$n(A)=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$.

(1) 证明$\|Ax\|_1\leqslant n(A)\,\|x\|_1$, 这里$x\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 具有范数$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$;

(2) 设$A,B\in M$. 证明$n(AB)\leqslant n(A)n(B)$;

(3) 设$\|A\|=\inf\{M:\|Ax\|\leqslant M\,\|x\|\,,\forall x\in\mathbb{R}^n\}$, 这里$X=Y=\mathbb{R}^n$ 并具有范数$\|x\|$, 比较$n(A)$ 和$\|A\|$ 在什么时候相等.

22. 设$X$, $Y$ 是赋范线性空间, 证明若$Y$ 不是完备的且$X\neq\{0\}$, 则$\mathcal{B}(X,Y)$ 不完备.

23. 设$X,Y$ 是赋范线性空间, $L_n(n=1,2,\cdots)$ 是从$X$ 到$Y$ 的连续线性算子, 假定$L$ 是从$X$ 至$Y$ 的映射, 并且对任意$n=1,2,\cdots$, 存在$M_n\geqslant 0$ 使得$\|LX-L_nX\|\leqslant M_n\,\|x\|$, $\forall x\in X$. 另外$M_n\to 0(n\to\infty)$. 证明$L$ 是从$X$ 到$Y$ 的连续线性映射(题目说明若序列$\{L_n\}$ 一致收敛, 则它的极限必是连续的、线性的).

24. (接第23题) 假若$\lim\limits_{n\to\infty}\|L_nx-Lx\|=0,\forall x\in X$, 也就是说$L_n$ 强收敛于$L$, 则$L$ 是线性的.

25. 设$B$ 是Banach 空间$L^2(-\infty,\infty)$, 并令$L: B\to B$ 由$(Lx)(t)=kx(t+\tau)$ 给定. 这里$\tau>0$, $|k|<1$ . 考虑差分方程$(I+L)x=y$. 证明对于给定的$y$ 来说, 解$x$ 是

$$x(t)=y(t)-ky(t+\tau)+k^2y(t+2\tau)-k^3y(t+3\tau)+\cdots.$$

26. 设$X$ 是赋范线性空间, 并且任何线性射$L:X\to Y$ 是连续的, 证明$X$ 是有限维的.

27. 证明有限维线性赋范空间上的每个线性算子都是有界的.

28. 对任何$f\in L[a,b]$, 作$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 把$T$ 视为$L[a,b]\to C[a,b]$ 的算子时, 试证明$\|T\|=1$.

29. 设$X$ 是赋范线性空间, $f$ 是$X$ 上的连续线性泛函的充要条件是$f$ 的零空间$\mathcal{N}=\{x|f(x)=0\}$ 为$X$ 中的闭子空间.

30. 在$C[0,1]$ 上定义线性泛函

$$f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明

(1) $f$ 是连续的;

(2) $\|f\|=1$;

(3) 不存在$x\in C[0,1]$, $\|x\|\leqslant 1$, $f(x)=1$.

31. 考虑算子$T:C^1[-1,1]\to C[-1,1]$：

$$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \forall x\in C^1[-1,1].$$

这里$C^1[-1,1]$ 是在$[-1,1]$ 中一阶导数连续的全体函数.

(1) 若$C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_1=\max\{\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,\ \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|\}.$$

问$T$ 是否有界;

(2) 若$C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_2=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

问$T$ 是否有界.

32. 设$X,Y$ 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是线性算子, 则$T$ 连续当且仅当$T$ 将$X$ 中的每个Cauchy 序列映射为$Y$ 中的Cauchy 序列.

33. 对于每个$\alpha\in C[a,b]$, 定义线性算子$T:L^1[a,b]\to L^1[a,b]$, $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$, 证明$\|T\|=\|\alpha\|$, 其中$\|\alpha\|$ 表示$\alpha$ 在$C[a,b]$ 中的范数.

34. 设$T$ 是$C[a,b]$ 上有界线性算子, 记

$$Tt^n=f_n(t),\ n=0,1,2,\cdots,$$

证明$T$ 完全由函数列$\{f_n(t)\}$ 唯一确定.

35. 设$\alpha(\cdot)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数. 令

$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)\ \ (x\in C[a,b]),$$

则$T$ 是由$C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子的充要条件是$\alpha(\cdot)$ 在$[a,b]$ 上连续.

36. 考虑$C[0,1]$ 上的算子序列$\{T_n\}$, 其中$\{T_nx\}(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$, 则$\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子, 但不依算子范数收敛于该算子.

37. 设$E$ 、$E_1$ 、$E_2$ 都是Banach 空间, $T_n$、$T\in\mathcal{B}(E,E_1)$, $S_n,S\in\mathcal{B}(E_1,E_2)$, 若$\{T_n\}$、$\{S_n\}$ 分别强收敛于$T$、$S$, 证明$\{S_nT_n\}$ 强收敛于$ST$.