卷Ⅱ (2020)

1. (1) 正则曲线的曲率的几何意义？空间正则曲线是平面曲线的充要条件

答：$k(s)=\frac{d\sigma}{ds}$ 为切线象的弧长元素与曲线的弧长元素之比

正则曲面是平面曲线 $\Leftrightarrow (r'(t), r''(t), r'''(t))\equiv 0$

(2) 4个内蕴几何量

答：长度，面积，Gauss曲率，测地曲率，测地线，协变微分

(3) Gauss曲率定义及计算公式，及其几何意义

答：设 k_1, k_2 为曲面在点 p 的主曲率，则 $G=k_1k_2$

公式：$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

几何意义 $K(p)=\lim_{D\to p}\frac{A(g(D))}{A(D)}$ 其中 $A(g(D))$, $A(D)$ 代表 $g(D)$ 与 D 的面积

(4) 判断柱面，单位球面，锥面，椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=2z$，切线面哪些可展，给出可展曲面的3个充要条件

答：3个条件：1° 局部上是柱面，锥面，切线面

2° 单参数曲面族的包络

3° 直纹面方程：$r=a(u)+v\,l(u)$，则可展 $\Leftrightarrow (a'(u), l(u), l'(u))=0$

可展：柱面，锥面，切线面

不可展：单位球面，椭圆抛物面 (由Gauss曲率 $\neq 0$ 知)

(5) W映射在自然标架下的表示，给出其与主曲率、主方向的联系

答：切空间 T_pS 的基 $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$

$$\begin{cases} W(\vec{r}_u)=-\vec{n}_u \\ W(\vec{r}_v)=-\vec{n}_v \end{cases} \Rightarrow W(\lambda\vec{r}_u+\mu\vec{r}_v)=-\lambda\vec{n}_u-\mu\vec{n}_v$$

矩阵形式：$W(\vec{r}_u, \vec{r}_v)=(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$

W映射的两个特征值为两个主曲率；两个特征方向为两个主方向

(6) 法曲率？与 k, k_g 的关系？

答：Ⅰ, Ⅱ 分别为曲面的第一、二标准形式

则 $k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ 称为曲面 S 在 (u,v) 处沿切方向 (du, dv) 的法曲率

$k^2=k_n^2+k_g^2$，k_n 为曲率向量在法向量上的正交投影

2. $r(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ 的曲率，挠率，Frenet 标架

解：$r'(t)=(3-3t^2, 6t, 3+3t^2)$ $|r'(t)|=3\sqrt{2}(t^2+1)$

$r''(t)=(-6t, 6, 6t)$ $r'(t)\times r''(t)=(18t^2-18, -36t, 18t^2+18)$

$r'''(t)=(-6,0,6)$ $|r'(t)\times r''(t)|=18\sqrt{2}(t^2+1)$

$$(r'(t), r''(t), r'''(t))=\begin{vmatrix} 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix}=36(3-3t^2)+36(3+3t^2)=216$$

曲率 $\kappa(t)=\dfrac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}=\dfrac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{27\cdot 2\sqrt{2}(t^2+1)^3}=\dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$

挠率 $\tau(t)=\dfrac{(r'(t), r''(t), r'''(t))}{|r'(t)\times r''(t)|^2}=\dfrac{216}{3\cdot 216(t^2+1)^2}=\dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$

Frenet 标架：$\alpha(t)=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)}(1-t^2, 2t, 1+t^2)$

$\gamma(t)=\dfrac{r'(t)\times r''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)}(t^2-1, -2t, t^2+1)$

$\beta(t)=\gamma(t)\times\alpha(t)=\dfrac{1}{(t^2+1)^2}(2t^3+2t, t^4-1, 0)$

$\{r(t); \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\}$

3. 曲面 S: $r=(u\cos v, u\sin v, 2\ln u)$，求 I, II, K, H，渐进曲线

解：$r_u=(\cos v, \sin v, \frac{2}{u})$

$r_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$

$r_u\times r_v=(-2\cos v, 2\sin v, u)$ $n=\dfrac{1}{\sqrt{4+u^2}}(-2\cos v, 2\sin v, u)$

$r_{uu}=(0,0,-\frac{2}{u^2})$ $r_{uv}=(-\sin v, \cos v, 0)$ $r_{vv}=(-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$E=(r_u)^2=1+\dfrac{4}{u^2}$ $F=r_u\cdot r_v=0$ $G=(r_v)^2=u^2$

$L=r_{uu}\cdot n=-\dfrac{2}{u\sqrt{4+u^2}}$ $M=r_{uv}\cdot n=0$ $N=\dfrac{2u}{\sqrt{4+u^2}}$

$\mathrm{I}=(1+\frac{4}{u^2})(du)^2+u^2(dv)^2$ $\mathrm{II}=-\dfrac{2}{u\sqrt{4+u^2}}(du)^2+\dfrac{2u}{\sqrt{4+u^2}}(dv)^2$

$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-\frac{4}{4+u^2}}{u^2+4}=-\dfrac{4}{(u^2+4)^2}$ $H=\dfrac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\dfrac{4}{u(u^2+4)^{3/2}}$

法曲率 $k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{du}{dv}\right)^2=u^2$

故渐近方向 $(du, dv)=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}(u,1)$ 或 $\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}(-u,1)$

将 (u,v) 看作定点，渐近线为 $\dfrac{du}{dv}=u$ 和 $\dfrac{du}{dv}=-u$

4. 证明：若曲面S上的渐近曲线网的夹角是常数，则曲面S的K与H^2成比例

证明：

取(u,v)是正交参数网

θ_1为渐近方向与u-曲线的夹角

则两渐近方向夹角为$\theta=2\theta_1$，故θ_1也为常数

再由Euler公式得 $k_n(\theta)=k_1\cos^2\theta_1+k_2\sin^2\theta_1$

由渐近方向，故$k_n(\theta)=0 \Rightarrow \dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\sin^2\theta_1}{\cos^2\theta_1}=\tan^2\theta_1$

故 $\dfrac{K}{H^2}=\dfrac{k_1k_2}{\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2}=4\dfrac{k_2}{k_1}+8+4\dfrac{k_1}{k_2}$ 为常数

5. (1) 测地线？判定条件

(2) 曲率线？判定条件

(3) S上一曲线即是测地线，又是曲率线，则它必是平面曲线

解：(1) 测地曲率为零的曲线

判定条件：曲线为直线或其主法向量处处是曲面S的法向量

(2) C上每一点的切向量都是曲面S在该点的主方向

判定条件 1° 曲面S: $r=r(u,v)$，曲线C: $u(t), v(t)$，$n(u(t),v(t))$为曲面的法向量，则C为测地线 $\Leftrightarrow \dfrac{dr(u(t),v(t))}{dt} \,/\!/\, \dfrac{dn(u(t),v(t))}{dt}$

2° 曲面S沿曲线C的法线构成一个可展曲面

(3) 设曲线C: $r=r(u(s),v(s))$，s为弧长参数，由其为测地线知

$r''(s) \,/\!/\, \vec{n}(s)$，$\vec{n}(s)$为法向量，由其为曲率线知 $\dfrac{dr(s)}{ds} \,/\!/\, \dfrac{dn(s)}{ds}$

1° C为直线 ✓

2° C不为直线，Frenet标架$\{r(s), \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\}$

于是 $\vec{\beta}(s)=\vec{n}(s)$ $\quad \dfrac{dn}{ds}=\dfrac{d\beta}{ds}=-k(s)\alpha(s)+\tau(s)\gamma(s) \,/\!/\, \alpha(s) \Rightarrow \tau(s)=0$

故C为平面曲线

(4) 若S上所有测地线都是平面曲线，则S必是全脐点曲面

设 $C: r=r(s)$ 为S的测地线，由其为平面曲线，只知 $k_g = k_r = 0$

故 S上的测地线均为直线

要证S全脐点，即证S为平面或球面

1° S为平面 ✓

2° S不为平面，

6. 设两柱面 $S_1: r(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$ 和 $S_2: r(\tilde{u},\tilde{v})=(\sqrt{2}\cos\tilde{u}, \tilde{v}, \sqrt{2}\sin\tilde{u})$

设 S_1, S_2 交线为C，易知 $P(0,1,\sqrt{2})$ 在曲线C上切方向为 $(1,0,0)$

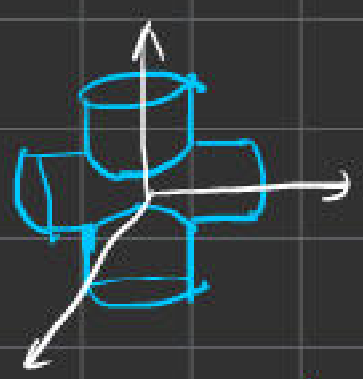
(1) 求C在P处曲率

(2) 求 S_1 在P处主方向和 k_n，并证明 S_1 在P点处沿两个互相正交的切方向的法曲率之和为一个常数

解: (1)

$r_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ $r_{\tilde{u}} = (-\sqrt{2}\sin\tilde{u}, 0, \sqrt{2}\cos\tilde{u})$

$r_v = (0,0,1)$ $r_{\tilde{v}} = (0,1,0)$



(2)

$E=(r_u)^2=1$ $F=0$ $G=1$

$r_{uu}=(-\cos u, -\sin u, 0)$ $r_{vv}=r_{uv}=(0,0,0)$

$r_u\times r_v = (\cos u, \sin u, 0)$

$L = r_{uu}\cdot n = -1$ $M=N=0$

于是 $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{-(du)^2}{(du)^2+(dv)^2}$

于是 $k_1=-1$ 的主方向为 $(1,0)$ $k_2=0$ 的主方向为 $(0,1)$

任取切方向 $\frac{du}{dv}=\lambda$，即 $g_1=(\lambda,1)$，则 $g_2=(-1,\lambda)$ 与其正交

$k_{n_1} = \frac{-\lambda^2}{\lambda^2+1}$ $k_{n_2} = \frac{-1}{\lambda^2+1}$ 而 $k_{n_1}+k_{n_2} = -1$ 为常数