内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），　13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 5 闭算子与闭图像定理

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

§5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子, 考虑**乘积空间***

§5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子, 考虑**乘积空间***

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子, 考虑**乘积空间***

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

***在其上定义范数**:*

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 设 X, X_1 *是赋范空间*, T *是从* X *中到* X_1 *中的线性算子, 考虑* ***乘积空间***

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

在其上定义范数:

对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$, 令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|_1, \tag{4.5.1}$$

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子, 考虑乘积空间*

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

在其上定义范数:

对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$, 令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|_1, \tag{4.5.1}$$

由第二章第5节“赋范空间的乘积空间”知: $X \times X_1$ 是赋范空间;

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子， 它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 *设* X, X_1 *是赋范空间*, T *是从* X *中到* X_1 *中的线性算子, 考虑**乘积空间***

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

在其上定义范数:

对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$, 令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|_1, \tag{4.5.1}$$

由第二章第5节“赋范空间的乘积空间”知: $X \times X_1$ 是赋范空间;

若 X 和 X_1 是 Banach 空间, 则 $X \times X_1$ 也是 Banach 空间.

§ 5 闭算子与闭图像定理

闭的线性算子是一类是非重要的线性算子，它具有和连续线性算子“相近”的性质，微分算子就是一类闭的线性算子.

一、闭算子的定义

定义 4.5.1 设 X, X_1 *是赋范空间*, T *是从* X *中到* X_1 *中的线性算子, 考虑**乘积空间***

$$X \times X_1 = \{(x, y)|x \in X, y \in X_1\},$$

在其上定义范数:

对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$, 令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|_1, \tag{4.5.1}$$

由第二章第5节“赋范空间的乘积空间”知: $X \times X_1$ 是赋范空间;

若 X 和 X_1 是 Banach 空间, 则 $X \times X_1$ 也是 Banach 空间.

令

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X_1 \times X|x \in \mathscr{D}(T)\}, \tag{4.5.2}$$

称 $G(T)$ 为算子 T 的图象.

定义 4.5.2 *如果* $G(T)$ *在乘积空间赋范空间* $X \times X_1$ *中是闭的, 则* *称* T *是闭算子*.

定义 4.5.2 *如果* $G(T)$ *在乘积空间赋范空间* $X \times X_1$ *中是闭的, 则称* T *是闭算子.*

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, *则* T *是闭算子, 当且仅当*

定义 4.5.2 *如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则称 T 是闭算子.*

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当*

$$\text{对于}\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

定义 4.5.2 *如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则* ***称 T 是闭算子.***

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当*

$$\text{对于}\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

定义 4.5.2 如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则 *称 T 是闭算子*.

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, *则 T 是闭算子, 当且仅当*

$$\text{对于}\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

要证 $G(T)$ **是闭的, 即证明** $\forall (x, y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x, y) \in G(T).$

定义 4.5.2 *如果* $G(T)$ *在乘积空间赋范空间* $X \times X_1$ *中是闭的, 则* *称* T *是闭算子.*

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* *设* X, X_1 *是赋范空间,* T *是从* X *到* X_1 *中的线性算子,* *则* T *是闭算子, 当且仅当*

$$\text{对于} \forall \{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

要证 $G(T)$ **是闭的, 即证明** $\forall (x, y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x, y) \in G(T).$

对于 $\forall (x, y) \in \overline{G(T)}$, 存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 使得

定义 4.5.2 如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则 称 T 是闭算子.

定理 4.5.3 (闭算子的等价条件) 设 $X,\ X_1$ 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当

$$\text{对于}\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及 } Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

要证 $G(T)$ **是闭的, 即证明** $\forall(x,y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x,y) \in G(T)$.

对于 $\forall(x,y) \in \overline{G(T)}$, 存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 使得

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty).$$

定义 4.5.2 *如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则 称 T 是闭算子.*

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当

$$\text{对于} \forall \{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

要证 $G(T)$ **是闭的, 即证明** $\forall (x, y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x, y) \in G(T)$.

对于 $\forall (x, y) \in \overline{G(T)}$, 存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 使得

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty).$$

因 (x_n, y_n) 在 T 的图象中, 故 $y_n = Tx_n$, 即

定义 4.5.2 *如果 $G(T)$ 在乘积空间赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的, 则 称 T 是闭算子.*

定理 4.5.3 *(闭算子的等价条件)* 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当

$$\text{对于}\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T),\ x_n \to x \in X,\ \text{及}\ Tx_n \to y \in X_1,$$

必有 $x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx.$

证明 **充分性.**

要证 $G(T)$ 是闭的, 即证明 $\forall(x, y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x, y) \in G(T)$.

对于 $\forall(x, y) \in \overline{G(T)}$, 存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 使得

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty).$$

因 (x_n, y_n) 在 T 的图象中, 故 $y_n = Tx_n$, 即

$$(x_n, Tx_n) \in G(T), \quad (x_n, Tx_n) \to (x, y).$$

根据乘积空间范数的定义有

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \quad Tx_n \to y.$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \qquad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \qquad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \quad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \quad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

必要性. **即证明：若 T 是闭的，且 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y(n \to \infty)$,**
则有：$x \in \mathscr{D}(T)$, $y = Tx$.

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \qquad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

必要性. **即证明: 若 T 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y(n \to \infty)$, 则有:** $x \in \mathscr{D}(T)$, $y = Tx$.

由已知有:

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0,$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \qquad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

必要性. **即证明: 若 T 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y(n \to \infty)$, 则有: $x \in \mathscr{D}(T)$, $y = Tx$.**

由已知有:

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0,$$

因而

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y).$$

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \quad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \quad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

必要性. **即证明: 若 T 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y(n \to \infty)$, 则有: $x \in \mathscr{D}(T)$, $y = Tx$.**

由已知有:

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0,$$

因而

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y).$$

因为 T 是闭的, 即 $G(T)$ 是闭的, 故 $(x, y) \in G(T)$, 即

根据乘积空间范数的定义有

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad \|Tx_n - y\| \to 0,$$

即

$$x_n \to x, \qquad Tx_n \to y.$$

由定理中的条件可知

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

故 $(x, y) \in G(T)$, 这就证明了 T 是闭算子.

必要性. **即证明: 若 T 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y(n \to \infty)$, 则有: $x \in \mathscr{D}(T)$, $y = Tx$.**

由已知有:

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0,$$

因而

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y).$$

因为 T 是闭的, 即 $G(T)$ 是闭的, 故 $(x, y) \in G(T)$, 即

$$x \in \mathscr{D}(T), \qquad y = Tx.$$

注1 可以把闭算子定义为:

注1 可以把闭算子定义为:

如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x, \; Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T), \; \text{且} \; Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T **是闭线性算子**.

注1 可以把闭算子定义为:

如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x,\ Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T),\ \text{且}\ Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T 是闭线性算子.

注2 由上述定义, 显然 **定义在全空间上的有界(连续)线性算子**一定是闭线性算子.

注1 可以把闭算子定义为:

如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x,\ Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T),\ \text{且}\ Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T 是闭线性算子.

注2 由上述定义, 显然 **定义在全空间上的有界(连续)线性算子**一定是闭线性算子.

注3 由式(4.5.3)(4.5.4)可以看出, 闭的线性算子与连续线性算子有很"类似"的性质.

注1 可以把闭算子定义为:

如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x,\ Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T),\ \text{且}\ Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T 是闭线性算子.

注2 由上述定义, 显然 **定义在全空间上的有界(连续)线性算子**一定是闭线性算子.

注3 由式(4.5.3)(4.5.4)可以看出, 闭的线性算子与连续线性算子有很 “类似” 的性质.

注4 对于闭算子来说，在上述条件下，极限运算可以和算子交换顺序。

注1 可以把闭算子定义为:

如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x,\ Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T),\ \text{且}\ Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T 是闭线性算子.

注2 由上述定义, 显然 **定义在全空间上的有界(连续)线性算子**一定是闭线性算子.

注3 由式(4.5.3)(4.5.4)可以看出, 闭的线性算子与连续线性算子有很“类似”的性质.

注4 对于闭算子来说，在上述条件下，极限运算可以和算子交换顺序。

注5 在开映象定理中, T **连续的条件**, **可以改为 T 是闭算子**. 即:

注1 可以把闭算子定义为:
如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T), \quad x_n \to x, \ Tx_n \to y, \quad \text{其中} x \in X, \quad y \in X_1, \tag{4.5.3}$$

$$\Longrightarrow x \in \mathscr{D}(T), \ \text{且}\ Tx = y, \tag{4.5.4}$$

则称 T 是闭线性算子.

注2 由上述定义, 显然 **定义在全空间上的有界(连续)线性算子**—定是闭线性算子.

注3 由式(4.5.3)(4.5.4)可以看出, 闭的线性算子与连续线性算子有很 "类似" 的性质.

注4 对于闭算子来说，在上述条件下，极限运算可以和算子交换顺序。

注5 在开映象定理中, T **连续的条件，可以改为 T 是闭算子.** 即:
X, X_1 是 Banach 空间, T 是在上的 $(TX = X_1)$, T 是闭算子, 则 T 是开映象.

二、闭算子的例

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—**微分算子是闭算子**.

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X = C[a,b]$, $\mathscr{D}(T) = C^1[a,b] \neq X$, 定义

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—**微分算子是闭算子**.

例 4.5.4 $X=C[a,b]$, $\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\neq X$, *定义*

$$T:\mathscr{D}(T)\to C[a,b],\quad T=\frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X=C[a,b]$, $\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\neq X$, 定义

$$T:\mathscr{D}(T)\to C[a,b],\quad T=\frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

证明 要证 T 是闭算子, 即要证明: 由

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X = C[a,b]$, $\mathscr{D}(T) = C^1[a,b] \neq X$, 定义

$$T : \mathscr{D}(T) \to C[a,b], \quad T = \frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

证明 要证 T 是闭算子, 即要证明: 由

$$x_n \in \mathscr{D}(T),\ x_n \to x, \quad Tx_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n \to y,$$

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X = C[a,b]$, $\mathscr{D}(T) = C^1[a,b] \neq X$, 定义

$$T : \mathscr{D}(T) \to C[a,b], \quad T = \frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

证明 要证 T 是闭算子, 即要证明: 由

$$x_n \in \mathscr{D}(T),\ x_n \to x, \quad Tx_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n \to y,$$

可推出

$$x \in \mathscr{D}(T), \ \text{且} \ Tx = y.$$

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X=C[a,b]$, $\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\neq X$, 定义

$$T:\mathscr{D}(T)\to C[a,b],\quad T=\frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

证明 要证 T 是闭算子, 即要证明: 由

$$x_n\in\mathscr{D}(T),\ x_n\to x,\quad Tx_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n\to y,$$

可推出

$$x\in\mathscr{D}(T),\ \text{且}\ Tx=y.$$

(1) 由于

$$\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t \mathrm{d}x_n(t)=x_n(t)-x_n(0),$$

二、闭算子的例

下面的例子说明 十分重要的无界线性算子—微分算子是闭算子.

例 4.5.4 $X = C[a,b]$, $\mathscr{D}(T) = C^1[a,b] \neq X$, 定义

$$T : \mathscr{D}(T) \to C[a,b], \quad T = \frac{d}{dt}, \tag{4.5.5}$$

则 T 是闭算子.

证明 要证 T 是闭算子, 即要证明: 由

$$x_n \in \mathscr{D}(T),\ x_n \to x, \quad Tx_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n \to y,$$

可推出

$$x \in \mathscr{D}(T), \quad \text{且} \quad Tx = y.$$

(1) 由于

$$\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}x_n(t) = x_n(t) - x_n(0),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)] = x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)] = x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛), 所以积分和极限可以交换顺序,** 结合条件 $x_n'\to y$ $(n\to\infty)$, 我们有

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛)**, **所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y$ $(n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛)**, **所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

即

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛)**, **所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛), 所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

于是 $x'(t)=y(t)\in C[a,b]$. 所以 $x(t)\in C^1[a,b]$, 且

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)]=x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛)**, **所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\lim_{n\to\infty}x_n'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

即

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

于是 $x'(t)=y(t)\in C[a,b]$. 所以 $x(t)\in C^1[a,b]$, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=y(t),\qquad Tx=y,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}[x_n(t)-x_n(0)] = x(t)-x(0),$$

(一致收敛, 可推出点点收敛).

(2) 因为 $x_n'(s)\to y$ **是一致收敛(按范数收敛)**, **所以积分和极限可以交换顺序**, 结合条件 $x_n'\to y\ (n\to\infty)$, 我们有

$$x(t)-x(0) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

即

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

于是 $x'(t)=y(t)\in C[a,b]$. 所以 $x(t)\in C^1[a,b]$, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = y(t), \qquad Tx = y,$$

因而, T 是闭算子, 但 T 是无界线性算子.

三、闭图像定理

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

注： 定理说明：

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}(T)=X, \quad X\text{是Banach空间} \\ X_1\text{是 Banach 空间} \\ T\text{闭}\end{array}\right. \Longrightarrow T\text{有界}.$$

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

注： 定理说明：

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}(T)=X, \quad X\text{是Banach空间} \\ X_1\text{是 Banach 空间} \\ T\text{闭}\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow T\text{有界}.$$

证明 (1) 因 X, X_1 是 Banach 空间, 故 $X \times X_1$ 是 Banach 空间.

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

注： 定理说明：

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}(T)=X, \quad X\text{是Banach空间} \\ X_1\text{是 Banach 空间} \\ T\text{闭}\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow T\text{有界}.$$

证明 (1) 因 X, X_1 是 Banach 空间, 故 $X \times X_1$ 是 Banach 空间.

(2) 因 T 是闭的, 故 $G(T)$ 是 $X \times X_1$ 中的闭子空间, 从而知$G(T)$ 是一个 Banach 空间.

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

注: 定理说明:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}(T)=X, \quad X\text{是Banach空间} \\ X_1\text{是 Banach 空间} \\ T\text{闭}\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow T\text{有界}.$$

证明 (1) 因 X, X_1 是 Banach 空间, 故 $X \times X_1$ 是 Banach 空间.

(2) 因 T 是闭的, 故 $G(T)$ 是 $X \times X_1$ 中的闭子空间, 从而知$G(T)$ 是一个 Banach 空间.

(3) 定义从 $G(T)$ 上到 X 中的线性算子,

$$\widetilde{T}:(x, Tx) \rightarrow x.$$

三、闭图像定理

定理 4.5.5 *(闭图象定理)* 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 中的闭线性算子, 则 T 是 有界线性算子.

注: 定理说明:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}(T)=X, \quad X\text{是Banach空间} \\ X_1\text{是 Banach 空间} \\ T\text{闭}\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow T\text{有界}.$$

证明 (1) 因 X, X_1 是 Banach 空间, 故 $X\times X_1$ 是 Banach 空间.

(2) 因 T 是闭的, 故 $G(T)$ 是 $X\times X_1$ 中的闭子空间, 从而知$G(T)$ 是一个 Banach 空间.

(3) 定义从 $G(T)$ 上到 X 中的线性算子,

$$\widetilde{T}:(x,Tx)\rightarrow x.$$

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T)=X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T) = X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T)=X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x,Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \le \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T)=X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, 所以

$$\|Tx\| \leq (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|,$$

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T)=X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, 所以

$$\|Tx\| \leq (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|,$$

即 T 是有界线性算子.

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 ($\because D(T)=X$). 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, 所以

$$\|Tx\| \leq (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|,$$

即 T 是有界线性算子.

注1 定理的条件要求 $\mathscr{D}(T) = X$, 这点十分重要. 定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是否是闭的, 关系到 $\widetilde{T}^{-1}$ 是否有界.

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T)=X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \le \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, 所以

$$\|Tx\| \le (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|,$$

即 T 是有界线性算子.

注1 定理的条件要求 $\mathscr{D}(T)=X$, 这点十分重要. 定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是否是闭的, 关系到 $\widetilde{T}^{-1}$ 是否有界.

注2 **Banach 逆算子定理**、**闭图像定理**、**Banach-Steinhaus 共鸣定理**和下一章的 **Hahn-Banach 线性泛函的延拓定理**这几大定理是泛函分析的重要内容.

$\widetilde{T}$ 是一一对应、在上的线性算子 $(\because D(T) = X)$. 所以 $\widetilde{T}^{-1}$ 存在,

$$\widetilde{T}^{-1}: \quad x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理4.4.5 $\quad \widetilde{T}^{-1}: x \to (x, Tx)$ 是有界的. 于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\widetilde{T}^{-1}(x)\| \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$, 所以

$$\|Tx\| \leq (\|\widetilde{T}\|^{-1} - 1)\|x\|,$$

即 T 是有界线性算子.

注1 定理的条件要求 $\mathscr{D}(T) = X$, 这点十分重要. 定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是否是闭的, 关系到 $\widetilde{T}^{-1}$ 是否有界.

注2 Banach 逆算子定理、闭图像定理、Banach-Steinhaus 共鸣定理和下一章的 Hahn-Banach 线性泛函的延拓定理这几大定理是泛函分析的重要内容.

这些定理在证明上有很高的技巧, 应用十分广泛.