姓名：__________

学号：__________

学院（系）：_______

_____ 级_____ 班

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 泛函分析 试卷 C 考试形式： 闭卷

授课院（系）： 数学 考试日期： 2020 年 5 月 试卷共 5 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九		总分
标准分	20	15	13	16	20	16					100
得 分											

一（20 分）1 设 X，Y 是赋范线性空间， A：$X \rightarrow Y$ 是线性算子，证明 A 在 X 中一个点的连续性等价于 A 在 X 上的连续性。

2 设f是 Banach 空间$C[a,b]$上的线性泛函$f(x) = 3x(a) - 2x(b) + x\left(\frac{a+b}{2}\right)$， 其中$x \in C[a,b]$，求f 的范数

3 叙述赋范线性空间和内积空间的关系，并证明内积空间上内积是二元连续函数

4 设 X 是无穷维 Banach 空间，证明 X 到 X 的恒同算子 I 一定不是全连续算子

二（15 分）叙述距离空间中列紧集、完全有界集以及紧集的定义，.并证明列紧集是完全有界集

三 （13分）叙述并证明Banach-Steinhauss定理（共鸣定理）

四 1（8 分叙述 Hilbert 空间之间有界线性算子的 Hilbert 共轭算子（伴随算子）的定义过程，并证明 Hilbert 共轭算子必也是有界线性算子

2（8 分）设 X 是赋范线性空间，E 是 X 的闭子空间，$x_0 \in X\backslash E$，证明存在 X 上的有界线性泛函f满足：$\|f\| = 1/d$, $f(x_0) = 1$并且 f 限制在 E 上恒为 0，其中 d 是x_0到 E 的距离

五 1（15分）设 X, X_1 是赋范线性空间，T是X到X_1的有界线性算子，

（1）叙述T 的Banach共轭算子 T^* 的定义

（2）证明 $\|T\|=\|T^*\|$

（3）设 x_n 是 X 中点列并且 x_n 弱收敛到 $x \in X$，证明 Tx_n 弱收敛到 Tx

2 （5 分）设 X 是 Banach 空间，如果$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是 X 上的级数并且$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$必收敛

六 1（6 分）设 X 是 Banach 空间，叙述 X 的二次对偶、典型映射以及 X 是自反空间的定义

2 （4 分） 设 X_1，X_2是 Banach 空间 X 的闭子空间，并且有拓扑直和分解：$X = X_1 + X_2$，证明 X 到X_1的投影算子是有界线性算子

3 （6分）设(X,d)是距离空间， 设 X 中存在具有下列性质的子集M：（1） M 不可列，（2）任给$x,y \in M$， $x \neq y$，必有$d(x,y)$ =1.

证明(X,d)是不可分的。