内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§5 有界自共轭线性算子的谱

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 *Hilbert* 空间中一类十分 重要 的 线 性 算 子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分 重要 的 线 性 算 子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T *是 Hilbert 空间* H *上的自共轭算子,* $\mu \neq \lambda$, *则零空间* $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ *和* $\mathcal{N}(\mu I - T)$ *相互正交.*

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\mu \neq \lambda$, 则零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 和 $\mathcal{N}(\mu I - T)$ 相互正交.

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

§5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T *是 Hilbert 空间* H *上的自共轭算子,* $\mu \neq \lambda$, *则零空间* $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ *和* $\mathcal{N}(\mu I - T)$ *相互正交.*

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

由于 T 是自共轭的，我们有 $(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$, 因此 $(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$,

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分 重要 的 线 性 算 子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\mu \neq \lambda$, 则零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 和 $\mathcal{N}(\mu I - T)$ 相互正交.

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

由于 T 是自共轭的，我们有 $(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$, 因此 $(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$,

即：$(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, 由于 $\mu \neq \lambda$, 所以 $(x,\ y) = 0$. □

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T *是 Hilbert 空间* H *上的自共轭算子,* $\mu \neq \lambda$, *则零空间* $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ *和* $\mathcal{N}(\mu I - T)$ *相互正交.*

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

由于 T 是自共轭的，我们有 $(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$, 因此 $(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$,

即：$(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, 由于 $\mu \neq \lambda$, 所以 $(x,\ y) = 0$. □

定理 6.5.2 *自共轭算子的剩余谱是空集.*

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T *是 Hilbert 空间* H *上的自共轭算子,* $\mu \neq \lambda$, *则零空间* $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ *和* $\mathcal{N}(\mu I - T)$ *相互正交.*

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

由于 T 是自共轭的，我们有 $(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$, 因此 $(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$,

即：$(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, 由于 $\mu \neq \lambda$, 所以 $(x,\ y) = 0$. □

定理 6.5.2 *自共轭算子的剩余谱是空集.*

证明 设 T 是Hilbert空间 H 上的自共轭算子, 我们需要证明的是 , 如果 $(\lambda I - T)$ **是一一的, 那么** $\lambda I - T$ **的值域** $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ **在** H **中是稠密的.**

§ 5 有界自共轭线性算子的谱

自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中一类十分 重要 的 线 性 算 子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子(矩阵)的推广.

由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

一、有界自共轭线性算子谱的性质

定理 6.5.1 T *是 Hilbert 空间* H *上的自共轭算子,* $\mu \neq \lambda$, *则零空间* $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ *和* $\mathcal{N}(\mu I - T)$ *相互正交.*

证明 令 $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, $y \in \mathcal{N}(\mu I - T)$,

由于 T 是自共轭的，我们有 $(Tx,\ y) = (x,\ Ty)$, 因此 $(\lambda x,\ y) = (x,\ \bar{\mu} y)$,

即：$(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, 由于 $\mu \neq \lambda$, 所以 $(x,\ y) = 0$. □

定理 6.5.2 *自共轭算子的剩余谱是空集.*

证明 设 T 是Hilbert空间 H 上的自共轭算子, 我们需要证明的是 , 如果 $(\lambda I - T)$ **是一一的, 那么** $\lambda I - T$ **的值域** $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ **在** H **中是稠密的.**

(1) 令 $\lambda = \rho + i\sigma$ $(\sigma \neq 0)$,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = (\rho x - Tx,\ \ \rho x - Tx) + (i\sigma x,\ \ i\sigma x) \geqslant |\sigma|^2 \|x\|^2 . \tag{6.5.1}$$

(1) 令 $\lambda=\rho+i\sigma\ (\sigma\neq 0)$,

$$\|(\lambda I-T)x\|^2=(\rho x-Tx,\ \ \rho x-Tx)+(i\sigma x,\ \ i\sigma x)\geqslant|\sigma|^2\,\|x\|^2\,. \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I-T$ **是下方有界,** $\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$.

(1) 令 $\lambda = \rho + i\sigma \ (\sigma \neq 0)$,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = (\rho x - Tx,\ \ \rho x - Tx) + (i\sigma x,\ \ i\sigma x) \geqslant |\sigma|^2 \|x\|^2 . \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I - T$ **是下方有界,** $\lambda \overline{\in} \sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y \in H$, 且 $y \perp \mathcal{R}(\lambda I - T)$,

(1) 令 $\lambda = \rho + i\sigma \ (\sigma \neq 0)$,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = (\rho x - Tx,\ \ \rho x - Tx) + (i\sigma x,\ \ i\sigma x) \geqslant |\sigma|^2 \|x\|^2 . \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I - T$ **是下方有界,** $\lambda \overline{\in} \sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y \in H$, 且 $y \perp \mathcal{R}(\lambda I - T)$,

即对于 $\forall x \in H$, $(\lambda x - Tx,\ y) = 0$.

(1) 令 $\lambda=\rho+i\sigma\ (\sigma\neq 0)$,

$$\|(\lambda I-T)x\|^2=(\rho x-Tx,\ \ \rho x-Tx)+(i\sigma x,\ \ i\sigma x)\geqslant|\sigma|^2\,\|x\|^2\,. \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I-T$ **是下方有界,** $\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y\in H$, 且 $y\perp\mathcal{R}(\lambda I-T)$,

即对于 $\forall x\in H$, $(\lambda x-Tx,\ y)=0$.

因为 $((\lambda I-T)x,\ y)=\big(x,\ (\bar{\lambda}-T)y\big)=0\ \ (\forall x\in H)$**,** 所以

$$y\in\mathcal{N}(\bar{\lambda}I-T) \tag{6.5.2}$$

(1) 令 $\lambda=\rho+i\sigma\ (\sigma\neq 0)$,

$$\|(\lambda I-T)x\|^2=(\rho x-Tx,\ \ \rho x-Tx)+(i\sigma x,\ \ i\sigma x)\geqslant|\sigma|^2\,\|x\|^2\,. \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I-T$ **是下方有界,** $\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y\in H$, 且 $y\perp\mathcal{R}(\lambda I-T)$,

即对于 $\forall x\in H$, $(\lambda x-Tx,\ y)=0$.

因为 $((\lambda I-T)x,\ y)=\big(x,\ (\bar\lambda-T)y\big)=0\ \ (\forall x\in H)$**,** 所以

$$y\in\mathcal{N}(\bar\lambda I-T) \tag{6.5.2}$$

(i) 当 $\lambda\overline{\in}\mathbb{R}$ 时，由(1) 知 $\bar\lambda$ 不是 T 的特征值, 于是 $y=0$.

(1) 令 $\lambda = \rho + i\sigma \ (\sigma \neq 0)$,

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = (\rho x - Tx,\ \ \rho x - Tx) + (i\sigma x,\ \ i\sigma x) \geqslant |\sigma|^2 \|x\|^2 . \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I - T$ **是下方有界,** $\lambda \overline{\in} \sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y \in H$, 且 $y \perp \mathcal{R}(\lambda I - T)$,

即对于 $\forall x \in H$, $(\lambda x - Tx,\ y) = 0$.

因为 $((\lambda I - T)x,\ y) = \big(x,\ (\bar{\lambda} - T)y\big) = 0 \ \ (\forall x \in H)$**,** 所以

$$y \in \mathcal{N}(\bar{\lambda} I - T) \tag{6.5.2}$$

(i) 当 $\lambda \overline{\in} \mathbb{R}$ 时，由(1) 知 $\bar{\lambda}$ 不是 T 的特征值, 于是 $y = 0$.

(ii) 当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 时，式（6.5.2）成为 $y \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$, 由于 λ 不是 T 的特征值, 于是 $y = 0$.

(1) 令 $\lambda=\rho+i\sigma\ (\sigma\neq 0)$,

$$\|(\lambda I-T)x\|^2=(\rho x-Tx,\ \ \rho x-Tx)+(i\sigma x,\ \ i\sigma x)\geqslant|\sigma|^2\|x\|^2. \tag{6.5.1}$$

因此 $\lambda I-T$ **是下方有界**, $\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$.

(2) 设 λ 不是 T 的特征值, $y\in H$, 且 $y\perp\mathcal{R}(\lambda I-T)$,

即对于 $\forall x\in H$, $(\lambda x-Tx,\ y)=0$.

因为 $((\lambda I-T)x,\ y)=\big(x,\ (\bar\lambda-T)y\big)=0\ \ (\forall x\in H)$, 所以

$$y\in\mathcal{N}(\bar\lambda I-T) \tag{6.5.2}$$

(i) 当 $\lambda\overline{\in}\mathbb{R}$ 时，由(1) 知 $\bar\lambda$ 不是 T 的特征值, 于是 $y=0$.

(ii) 当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 时，式（6.5.2）成为 $y\in\mathcal{N}(\lambda I-T)$, 由于 λ 不是 T 的特征值, 于是 $y=0$.

结合(1)和(2)我们有，**当 λ 不是 T 的特征值时，** $\mathcal{R}(\lambda I-T)^\perp=\{0\}$, **这意味着 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 H 中稠密，** 说明剩余谱是空集. □

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列*** $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, ***且*** $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$.

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列*** $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, ***且*** $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$.***

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即**逆算子$(T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 且逆算子有界.**

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列*** $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, ***且*** $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即**逆算子**$(T - \lambda I)^{-1}$ **存在, 且逆算子有界.**

由定理 6.5.2, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$.***

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即**逆算子$(T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 且逆算子有界.**

由定理 6.5.2, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当 λ 是特征值, 命题成立.

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$.***

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即**逆算子$(T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 且逆算子有界.**

由定理 6.5.2, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当 λ 是特征值, 命题成立.

若 λ **不是特征值, 逆算子存在,** 令 $y_n = (\lambda I - T)x_n$, 即

$$x_n = (\lambda I - T)^{-1} y_n.$$

定理 6.5.3 ***一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合***的充分必要条件是***存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$.***

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即**逆算子**$(T - \lambda I)^{-1}$ **存在, 且逆算子有界.**

由定理 6.5.2, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当 λ 是特征值, 命题成立.

若 λ **不是特征值, 逆算子存在,** 令 $y_n = (\lambda I - T)x_n$, 即

$$x_n = (\lambda I - T)^{-1} y_n.$$

若 $\lambda \in \rho(T)$, 则 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界, $\exists M > 0$, 使得

$$\|x_n\| = \left\|(\lambda I - T)^{-1} y_n\right\| \leqslant M \|y_n\| ,$$

定理 6.5.3 一个复数 λ 属于自共轭算子 T 的谱集合的充分必要条件是存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$.

证明 必要性. 假如不然, 则存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $x \in H$, 有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta \|x\| . \tag{6.5.3}$$

即逆算子$(T - \lambda I)^{-1}$ 存在, 且逆算子有界.

由定理 6.5.2, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当 λ 是特征值, 命题成立.

若 λ 不是特征值, 逆算子存在, 令 $y_n = (\lambda I - T)x_n$, 即

$$x_n = (\lambda I - T)^{-1} y_n.$$

若 $\lambda \in \rho(T)$, 则 $(\lambda I - T)^{-1}$ 有界, $\exists M > 0$, 使得

$$\|x_n\| = \left\|(\lambda I - T)^{-1} y_n\right\| \leqslant M \|y_n\| ,$$

由于左边趋近于 1, 而右边趋近于零, 矛盾. □

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

推论 6.5.4 *若* T ***是一个有界的自共轭算子****,* *则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$***;*** ***且*** $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$***.***

推论 6.5.4 *若* T *是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$*; 且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$*.*

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$*;*

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

根据定理 5.4.7, 如果 T 是 Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) 是实的.

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

根据定理 5.4.7, 如果 T 是 Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) 是实的.

对于 T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

根据定理 5.4.7, 如果 T 是 Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) 是实的.

对于 T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计

定理 6.5.5 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 令*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \tag{6.5.4}$$

则

$$\sigma(T) \subset [m, M]. \tag{6.5.5}$$

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

根据定理 5.4.7, 如果 T 是 **Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子**, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) **是实的**.

对于 T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计

定理 6.5.5 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 令*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \tag{6.5.4}$$

则

$$\sigma(T) \subset [m, M]. \tag{6.5.5}$$

证明 因为 T 是自共轭算子, $\sigma(T)$ 是在实轴上. **下面证明对任意的实数** $c > 0$, $\lambda = M + c \in \rho(T)$.

推论 6.5.4 *若 T 是一个有界的自共轭算子, 则*

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$; *且* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

(2) $\sigma_r(T) = \emptyset$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

根据定理 5.4.7, 如果 T **是 Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子**, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) **是实的**.

对于 T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计

定理 6.5.5 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 令*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \tag{6.5.4}$$

则

$$\sigma(T) \subset [m, M]. \tag{6.5.5}$$

证明 因为 T 是自共轭算子, $\sigma(T)$ 是在实轴上. **下面证明对任意的实数 $c > 0$, $\lambda = M + c \in \rho(T)$.**

对于 $\forall x \in H$, $x \neq 0$, 令 $v = \frac{x}{\|x\|}$,

$$(Tx, x) = \|x\|^2 (Tv, v) \leqslant \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1} (Tu, u) = (x, x)M,$$

$$(Tx, x) = \|x\|^2 (Tv, v) \leqslant \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1} (Tu, u) = (x, x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I - T)x\| \, \|x\| \geqslant ((\lambda I - T)x, x) = \lambda(x, x) - (Tx, x) \geqslant (\lambda - M)(x, x) = c \, \|x\| \, ,$$

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u)=(x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant(\lambda-M)(x,x)=c\,\|x\|\,,$$

其中 $c=\lambda-M>0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda\in\rho(T)$. 对于 $\lambda<m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda\in\rho(T)$. □

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u)=(x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant(\lambda-M)(x,x)=c\,\|x\|\,,$$

其中 $c=\lambda-M>0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda\in\rho(T)$. 对于 $\lambda<m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda\in\rho(T)$. □

定理 6.5.6 *T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则*

$$\|T\|=\max\{|m|\,,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\,. \tag{6.5.6}$$

$$(Tx,x) = \|x\|^2 (Tv,v) \leqslant \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1} (Tu,u) = (x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I - T)x\| \|x\| \geqslant ((\lambda I - T)x, x) = \lambda(x,x) - (Tx,x) \geqslant (\lambda - M)(x,x) = c\|x\|,$$

其中 $c = \lambda - M > 0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda \in \rho(T)$. 对于 $\lambda < m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 6.5.6 *T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则*

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|. \tag{6.5.6}$$

证明 由Schwarz不等式有

$$\sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \|x\| = \|T\|,$$

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u)=(x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant(\lambda-M)(x,x)=c\,\|x\|,$$

其中 $c=\lambda-M>0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda\in\rho(T)$. 对于 $\lambda<m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda\in\rho(T)$. □

定理 6.5.6 *T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则*

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{6.5.6}$$

证明 由Schwarz不等式有

$$\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\,\|x\|=\|T\|,$$

令 $k=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$, **只须证明** $\|T\|\leqslant k$.

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u)=(x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant(\lambda-M)(x,x)=c\|x\|,$$

其中 $c=\lambda-M>0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda\in\rho(T)$. 对于 $\lambda<m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda\in\rho(T)$. $\square$

定理 6.5.6 *T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则*

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{6.5.6}$$

证明 由Schwarz不等式有

$$\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\,\|x\|=\|T\|,$$

令 $k=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$, **只须证明** $\|T\|\leqslant k$.

由于 T 是自共轭的, 对于 $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$,

$$(Tx,x)=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|u\|=1}(Tu,u)=(x,x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant(\lambda-M)(x,x)=c\,\|x\|,$$

其中 $c=\lambda-M>0$. 根据定理 6.5.3, $\lambda\in\rho(T)$. 对于 $\lambda<m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda\in\rho(T)$. $\square$

定理 6.5.6 *T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则*

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{6.5.6}$$

证明 由Schwarz不等式有

$$\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\,\|x\|=\|T\|,$$

令 $k=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$, 只须证明 $\|T\|\leqslant k$.

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H, \ \|x\| = \|y\| = 1,$

运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H,\ \|x\| = \|y\| = 1$,

运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y),(x+y)) - (T(x-y),(x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$,

运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \alpha y) = Re(Tx, \alpha y) \leqslant k,$$

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$,

运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \alpha y) = Re(Tx, \alpha y) \leqslant k,$$

由定理5.4.8推出 $\|T\| \leqslant k$. $\square$

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$,

运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \alpha y) = Re(Tx, \alpha y) \leqslant k,$$

由定理5.4.8推出 $\|T\| \leqslant k$. $\square$

结合定理6.2.13可知

由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$,
运用平行四边形法则, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\ &\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \alpha y) = Re(Tx, \alpha y) \leqslant k,$$

由定理5.4.8推出 $\|T\| \leqslant k$. □

结合定理6.2.13可知

推论 6.5.7 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有 界 自共轭线性算子, 则*

$$\sup\{|\lambda| \,|\lambda \in \sigma(T)\} = r_\sigma(T) = \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|. \tag{6.5.7}$$

定理 6.5.8 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

定理 6.5.8 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于** $c > 0$, **算子** $T + cI$ **相应的** m, M **以及** $\sigma(T)$ **都向右平移** c, 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,

定理 6.5.8 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于 $c > 0$, 算子 $T + cI$ 相应的 m, M 以及 $\sigma(T)$ 都向右平移 c,** 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,

根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 且

$(Tx_n, x_n) \to M \ (n \to \infty)$, 于是

定理 6.5.8 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于** $c > 0$, **算子** $T + cI$ **相应的** m, M **以及** $\sigma(T)$ **都向右平移** c, 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,

根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 且 $(Tx_n, x_n) \to M \ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned} &\|Tx_n - Mx_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2 \|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Tx_n, x_n) \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

定理 6.5.8 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于 $c > 0$, 算子 $T + cI$ 相应的 m, M 以及 $\sigma(T)$ 都向右平移 c,** 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,
根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, 且
$(Tx_n, x_n) \to M \ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned} &\|Tx_n - Mx_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2 \|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Tx_n, x_n) \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

由定理 6.5.3 $M \in \sigma(T)$. 类似地, 可以证明 $m \in \sigma(T)$.

定理 6.5.8 *T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子, m, M 同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于 $c > 0$, 算子 $T + cI$ 相应的 m, M 以及 $\sigma(T)$ 都向右平移 c,** 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,

根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 且 $(Tx_n, x_n) \to M\ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned}
&\|Tx_n - Mx_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\
&= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Tx_n, x_n) \to 0\ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

由定理 6.5.3 $M \in \sigma(T)$. 类似地, 可以证明 $m \in \sigma(T)$.

注 **由推论 6.5.7 结合 $\sigma(T)$ 是闭的，也可以证明定理6.5.8.**

定理 6.5.8 T *是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线 性 算子*, m, M *同定理 6.5.5, 则:*

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{6.5.8}$$

证明 **对于 $c > 0$, 算子 $T + cI$ 相应的 m, M 以及 $\sigma(T)$ 都向右平移 c,** 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 6.5.6, $\|T\| = M$,
根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 且
$(Tx_n, x_n) \to M \ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned} &\|Tx_n - Mx_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2 \|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Tx_n, x_n) \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

由定理 6.5.3 $M \in \sigma(T)$. 类似地, 可以证明 $m \in \sigma(T)$.

注 **由推论 6.5.7 结合 $\sigma(T)$ 是闭的，也可以证明定理6.5.8.**

二、紧的自共轭算子的谱分解

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T *是一个紧的自共轭算子*, $\{\lambda_j\}$ *是* T *的非零特征值(计算按照重数), 且* $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$,

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子, $\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数), 且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$,

则 $|\lambda_1| = \|T\|$, 且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子，$\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数)，且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$，

则 $|\lambda_1| = \|T\|$，且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup \{\|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1\}. \tag{6.5.9}$$

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子，$\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数)，且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$，

则 $|\lambda_1| = \|T\|$，且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup\left\{\|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1\right\}. \tag{6.5.9}$$

证明 由于 T 是自共轭的，由定理6.2.13知，谱半径 $r_\sigma = \|T\|$，

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子，$\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数)，且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$，

则 $|\lambda_1| = \|T\|$，且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup \left\{ \|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1 \right\}. \tag{6.5.9}$$

证明 由于 T 是自共轭的，由定理6.2.13知，谱半径 $r_\sigma = \|T\|$，

由 T 是紧的，$\sigma(T) \backslash \{0\} = \sigma_p(T) \backslash \{0\}$，得到 $|\lambda_1| = \|T\|$.

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子，$\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数)，且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$，

则 $|\lambda_1| = \|T\|$，且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup \{\|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1\}. \tag{6.5.9}$$

证明 由于 T 是自共轭的，由定理6.2.13知，谱半径 $r_\sigma = \|T\|$，

由 T 是紧的，$\sigma(T) \backslash \{0\} = \sigma_p(T) \backslash \{0\}$，得到 $|\lambda_1| = \|T\|$.

令 $\{x_j\}$ 是正交列，$\|x_j\| = 1$，使得 $Tx_j = \lambda_j x_j$.

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子，$\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数)，且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, ...)$，

则 $|\lambda_1| = \|T\|$，且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup \{\|Tx\|, \ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1\}. \tag{6.5.9}$$

证明 由于 T 是自共轭的，由定理6.2.13知，谱半径 $r_\sigma = \|T\|$，

由 T 是紧的，$\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$，得到 $|\lambda_1| = \|T\|$.

令 $\{x_j\}$ 是正交列，$\|x_j\| = 1$，使得 $Tx_j = \lambda_j x_j$.

我们选择 $y_j = x_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，那么对于任意的 $x \perp y_1, y_2, \cdots y_n$，$\|x\| = 1$ 我们有

二、紧的自共轭算子的谱分解

定理 6.5.9 令 T 是一个紧的自共轭算子, $\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值(计算按照重数), 且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

则 $|\lambda_1| = \|T\|$, 且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{q_1, q_2, \cdots, q_n \in H} \sup\left\{\|Tx\|,\ x \perp q_1, \cdots, q_n, \|x\| = 1\right\}. \tag{6.5.9}$$

证明 由于 T 是自共轭的, 由定理6.2.13知，谱半径 $r_\sigma = \|T\|$,

由 T 是紧的, $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, 得到 $|\lambda_1| = \|T\|$.

令 $\{x_j\}$ 是正交列, $\|x_j\| = 1$, 使得 $Tx_j = \lambda_j x_j$.

我们选择 $y_j = x_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 那么对于任意的 $x \perp y_1, y_2, \cdots y_n$, $\|x\| = 1$ 我们有

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \Big\| \sum_{j>n} \lambda_j \,(x,\ y_j)\, y_j \Big\|^2 = \sum_{j>n} |\lambda_j|^2 \, |(x, y_j)|^2 \\ &\leqslant |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j>n} |(x,\ x_j)|^2 \leqslant |\lambda_{n+1}|^2 \,\|x\| = |\lambda_{n+1}|^2\,, \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n\in H} \sup\left\{\|Tx\|,\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\right\}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n\in H} \sup\left\{\|Tx\|,\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\right\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的非零线性组合,

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1, y_2, \cdots, y_n \in H} \sup \{\|Tx\|,\ x \perp y_1, \cdots, y_n,\ \|x\| = 1\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$，令 x 是 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的非零线性组合，$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}$, $\|x\| = 1$,

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n \in H} \sup\{\|Tx\|\,,\ x \perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\| = 1\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的非零线性组合,
$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1},\ \|x\| = 1$,
其中系数 α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1,\ y_1) + a_2(x_2,\ y_1) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1) = 0 \\ a_1(x_1,\ y_2) + a_2(x_2,\ y_2) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2) = 0 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_1(x_1,\ y_n) + a_2(x_2,\ y_n) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n) = 0, \end{cases}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n\in H} \sup\{\|Tx\|,\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的非零线性组合,
$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}$, $\|x\| = 1$,
其中系数 α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1,\ y_1) + a_2(x_2,\ y_1) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1) = 0 \\ a_1(x_1,\ y_2) + a_2(x_2,\ y_2) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2) = 0 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_1(x_1,\ y_n) + a_2(x_2,\ y_n) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n) = 0, \end{cases}$$

即 $x\perp\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$. 由于

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1, y_2, \cdots, y_n \in H} \sup \{\|Tx\|, \ x \perp y_1, \cdots, y_n, \ \|x\| = 1\}$$

对于任意的 $y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n$, 令 x 是 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的非零线性组合,

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}, \ \|x\| = 1$,

其中系数 α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1, \ y_1) + a_2(x_2, \ y_1) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1}, \ y_1) = 0 \\ a_1(x_1, \ y_2) + a_2(x_2, \ y_2) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1}, \ y_2) = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \\ a_1(x_1, \ y_n) + a_2(x_2, \ y_n) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1}, \ y_n) = 0, \end{cases}$$

即 $x \perp \{y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n\}$. 由于

$$\|Tx\|^2 = \| \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (x, x_j) x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j|^2 |(x, x_j)|^2 \geqslant |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2 = |\lambda_{n+1}|^2,$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n\in H} \sup\left\{\|Tx\|,\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\right\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的非零线性组合, $x = a_1x_1 + a_2x_2+\cdots+a_{n+1}x_{n+1},\ \|x\|=1$,

其中系数 α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1,\ y_1)+a_2(x_2,\ y_1)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1)=0\\ a_1(x_1,\ y_2)+a_2(x_2,\ y_2)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2)=0\\ \cdots \qquad \cdots\\ a_1(x_1,\ y_n)+a_2(x_2,\ y_n)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n)=0, \end{cases}$$

即 $x\perp\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$. 由于

$$\|Tx\|^2=\left\|\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x,x_j)x_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j|^2|(x,x_j)|^2\geqslant|\lambda_{n+1}|^2\|x\|^2=|\lambda_{n+1}|^2,$$

我们有

$$|\lambda_{n+1}| \leqslant \inf_{y_1,\cdots,y_n\in H} \sup\left\{\|Tx\|:\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\right\}. \tag{6.5.11}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}| \geqslant \inf_{y_1,y_2,\cdots,y_n\in H} \sup\{\|Tx\|\,,\; x\perp y_1,\cdots,y_n,\; \|x\|=1\}$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的非零线性组合,
$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1},\ \|x\| = 1$,
其中系数 α_i 由以下方程组确定,

$$\begin{cases} a_1(x_1,\ y_1) + a_2(x_2,\ y_1) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1) = 0 \\ a_1(x_1,\ y_2) + a_2(x_2,\ y_2) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2) = 0 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_1(x_1,\ y_n) + a_2(x_2,\ y_n) + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n) = 0, \end{cases}$$

即 $x\perp\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$. 由于

$$\|Tx\|^2 = \|\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x,x_j)x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j|^2\,|(x,x_j)|^2 \geqslant |\lambda_{n+1}|^2\,\|x\|^2 = |\lambda_{n+1}|^2\,,$$

我们有

$$|\lambda_{n+1}| \leqslant \inf_{y_1,\cdots,y_n\in H} \sup\{\|Tx\| :\ x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\}\,. \tag{6.5.11}$$

结合 (6.5.10)和 (6.5.11), 定理得证. □

进一步地, 如果我们**按正负值把特征值排列起来**, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots < 0. \tag{6.5.12}$$

进一步地, 如果我们**按正负值把特征值排列起来**, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots < 0. \tag{6.5.12}$$

我们有

定理 6.5.10 *(**极大极小原理**) 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的**紧自共轭算子**, 则*

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp} \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}, \tag{6.5.13}$$

进一步地, 如果我们**按正负值把特征值排列起来**, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots < 0. \tag{6.5.12}$$

我们有

定理 6.5.10 *(**极大极小原理**) 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的**紧自共轭算子**, 则*

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp} \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}, \tag{6.5.13}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp} \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}, \tag{6.5.14}$$

进一步地, 如果我们**按正负值把特征值排列起来**, 记作

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \cdots \geqslant 0, \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \cdots < 0. \tag{6.5.12}$$

我们有

定理 6.5.10 *(**极大极小原理**) 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的**紧自共轭算子**, 则*

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp} \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}, \tag{6.5.13}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp} \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}, \tag{6.5.14}$$

其中 E_{n-1} 是 H 中的任意 $n-1$ 维闭的线性子空间.

于是关于紧的自共轭线性算子的谱分解，我们有

于是关于紧的自共轭线性算子的谱分解，我们有

定理 6.5.11 ***设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是紧的自共轭算子,*** *则存在* ***至多可数个非零的，只可能以零为聚点的实数列*** $\{\mu_j\}$ $(\mu_j \to 0)$ *(或者 μ_j 只有有限个), 和* ***一个在 H 中正交的点列 $\{e_j\}$,*** *使得:*

于是关于紧的自共轭线性算子的谱分解，我们有

定理 6.5.11 *设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是紧的自共轭算子, 则存在至多可数个非零的，只可能以零为聚点的实数列$\{\mu_j\}$ $(\mu_j \to 0)$ (或者 μ_j 只有有限个), 和一个在 H 中正交的点列 $\{e_j\}$, 使得:*

$$x = x_0 + \sum_i (x, e_i)e_1, \tag{6.5.15}$$

$$Tx = \sum_i \lambda_i (x, e_i)e_1. \tag{6.5.16}$$

于是关于紧的自共轭线性算子的谱分解，我们有

定理 6.5.11 *设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是紧的自共轭算子, 则存在至多可数个非零的，只可能以零为聚点的实数列$\{\mu_j\}$ $(\mu_j \to 0)$ (或者 μ_j 只有有限个), 和一个在 H 中正交的点列 $\{e_j\}$, 使得：*

$$x = x_0 + \sum_i (x, e_i) e_1, \tag{6.5.15}$$

$$Tx = \sum_i \lambda_i (x, e_i) e_1. \tag{6.5.16}$$

其中 $x_0 \in \mathcal{N}(T)$, μ_1, $\mu_2, \ldots$ 是 T 的非零特征值, x_i 是在对应的特征元素.

于是关于紧的自共轭线性算子的谱分解，我们有

定理 6.5.11 *设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是紧的自共轭算子, 则存在至多可数个非零的，只可能以零为聚点的实数列$\{\mu_j\}$ $(\mu_j \to 0)$ (或者 μ_j 只有有限个), 和一个在 H 中正交的点列 $\{e_j\}$, 使得:*

$$x = x_0 + \sum_i (x, e_i) e_1, \tag{6.5.15}$$

$$Tx = \sum_i \lambda_i (x, e_i) e_1. \tag{6.5.16}$$

其中 $x_0 \in \mathcal{N}(T)$, μ_1, $\mu_2, \ldots$ 是 T 的非零特征值, x_i 是在对应的特征元素.