泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙炯教授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

第二章　线性赋范空间

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = (\mid x_1 - y_1 \mid^2 + \mid x_2 - y_2 \mid^2)^{\frac{1}{2}},$$

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此引出了“接近”、极限、开集等概念.

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

对于 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$d(x,y)=(|\ x_1-y_1\ |^2+|\ x_2-y_2\ |^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此引出了“接近”、极限、开集等概念.

(3) 代数结构:

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此引出了“接近”、极限、开集等概念.

(3) 代数结构:

在平面上定义了加法和数乘

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \text{对于任何实数}\ \alpha,\ \ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

第二章　线性赋范空间

赋范线性空间的例子 $\longrightarrow$ **赋以 Euclidian 距离的平面**.

从三方面来了解**平面上的数学结构**:

(1) 集合的结构:

平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) 拓扑结构:

对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此引出了“接近”、极限、开集等概念.

(3) 代数结构:

在平面上定义了加法和数乘

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \text{对于任何实数}\ \alpha,\ \ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

空间对加法、数乘封闭.

目的：把平面上向量的一些性质**“类比”推广**到我们研究的空间中.

目的：把平面上向量的一些性质**“类比”推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

目的： 把平面上向量的一些性质 **“类比” 推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

目的： 把平面上向量的一些性质 **"类比" 推广** 到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上, 引进元素的长度的概念（随之引出距离的概念）, 给出元素的"度量",

目的: 把平面上向量的一些性质**“类比”推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集,给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上,引进元素的长度的概念(随之引出距离的概念),给出元素的“度量”,

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

目的: 把平面上向量的一些性质**"类比"推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集,给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上,引进元素的长度的概念(随之引出距离的概念),给出元素的"度量",

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

形成我们称之为的**赋范线性空间**.

目的: 把平面上向量的一些性质**“类比”推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上, 引进元素的长度的概念（随之引出距离的概念）, 给出元素的“度量”,

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

形成我们称之为的**赋范线性空间**.

在 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中，向量有长度(或模),

目的: 把平面上向量的一些性质 **“类比” 推广** 到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上, 引进元素的长度的概念（随之引出距离的概念）, 给出元素的 “度量”,

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

形成我们称之为的**赋范线性空间**.

在 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中，向量有长度(或模),

但在一般的线性空间中(可能是无穷维空间)，向量的长度如何来定义呢?

目的: 把平面上向量的一些性质 **“类比” 推广**到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上, 引进元素的长度的概念 (随之引出距离的概念), 给出元素的 “度量”,

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

形成我们称之为的**赋范线性空间**.

在 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中，向量有长度(或模),

但在一般的线性空间中(可能是无穷维空间)，向量的长度如何来定义呢?

我们从 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中向量的长度的基本性质，抽象出 下面我们要给出的 “范数” 定义.

目的： 把平面上向量的一些性质"类比"推广到我们研究的空间中.

上一章我们在集合上赋以距离,

定义了开集、闭集, 给出了空间的拓扑结构.

这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上, 引进元素的长度的概念（随之引出距离的概念），给出元素的"度量"，

使一个集合上同时具有代数结构、拓扑结构

形成我们称之为的赋范线性空间.

在 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中，向量有长度(或模)，

但在一般的线性空间中(可能是无穷维空间)，向量的长度如何来定义呢?

我们从 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中向量的长度的基本性质，抽象出 下面我们要给出的"范数"定义.

下面我们从熟悉的 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 空间中长度开始我们的讨论.

§ 1 赋范空间的基本概念

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

我们先看什么是范数$\longleftrightarrow$ 向量的“模”.

§1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ **赋予了范数的线性空间**.

我们先看什么是**范数**$\longleftrightarrow$ **向量的“模”**.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ **赋予了范数的线性空间**.

我们先看什么是**范数**$\longleftrightarrow$ **向量的“模”**.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x = (x_1, x_2) \longrightarrow$ 长度记为 $\| x \|$ (或 $| x |$),

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

我们先看什么是范数 $\longleftrightarrow$ 向量的"模".

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2)\longrightarrow$ 长度记为 $\|x\|$ (或 $|x|$),

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

我们先看什么是范数$\longleftrightarrow$ 向量的“模”.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2)\longrightarrow$ 长度记为 $\|x\|$ (或 $|x|$),

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

即 $\|x\|=d(x,0)$，且 $d(x,y)=\|x-y\|$.

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ **赋予了范数的线性空间**.

我们先看什么是**范数**$\longleftrightarrow$ **向量的"模"**.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2) \longrightarrow$ 长度记为 $\| x \|$ (或 $| x |$),

$$\| x \| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

即 $\| x \| = d(x,0)$，且 $d(x,y)=\|x-y\|$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中:

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

我们先看什么是范数$\longleftrightarrow$ 向量的 “模”.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2)\longrightarrow$ 长度记为 $\|x\|$ (或 $|x|$),

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

即 $\|x\|=d(x,0)$，且 $d(x,y)=\|x-y\|$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中:

可以定义 $\|x\|=d(x,0)$

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ **赋予了范数的线性空间**.

我们先看什么是**范数**$\longleftrightarrow$ **向量的“模”**.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2) \longrightarrow$ 长度记为 $\| x \|$ (或 $| x |$),

$$\| x \| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

即 $\| x \| = d(x,0)$，且 $d(x,y) = \|x-y\|$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中:

可以定义 $\| x \| = d(x,0)$

其中 $d(x,0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中点 x 到原点的距离,

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ **赋予了范数的线性空间**.

我们先看什么是**范数**$\longleftrightarrow$ **向量的"模"**.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x=(x_1,x_2)\longrightarrow$ 长度记为 $\| x \|$ (或 $| x |$),

$$\| x \| = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

即 $\| x \| = d(x,0)$，且 $d(x,y)=\|x-y\|$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中:

可以定义 $\| x \| = d(x,0)$

其中 $d(x,0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中点 x 到原点的距离,

通常称之为**向量的"模"**, 或者称为**元素的"长度"**.

§ 1　赋范空间的基本概念

一、赋范空间和Banach空间的定义

赋范空间 $\longrightarrow$ 赋予了范数的线性空间.

我们先看什么是范数$\longleftrightarrow$ 向量的“模”.

Euclidean 平面 $\mathbb{R}^2$ 上:

点 $x = (x_1, x_2) \longrightarrow$ 长度记为 $\| x \|$ (或 $| x |$),

$$\| x \| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

即 $\| x \| = d(x, 0)$，且 $d(x, y) = \|x - y\|$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中:

可以定义 $\| x \| = d(x, 0)$

其中 $d(x, 0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中点 x 到原点的距离,

通常称之为向量的“模”, 或者称为元素的“长度”.

且模和距离的关系为： $d(x, y) = \|x - y\|$.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \, \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)****;*

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \, \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)***;

ii) $\|x\| = 0$*当且仅当*$x = 0$ ***(正定性)***;

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)***;

ii) $\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$ ***(正定性)***;

iii) $\forall x \in X, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ***(齐次)***;

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)***;

ii) $\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$ ***(正定性)***;

iii) $\forall x \in X, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ***(齐次)***;

iv) $\forall x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(三角不等式)***.

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \, \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)****;*

ii) $\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$ ***(正定性)****;*

iii) $\forall x \in X, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ***(齐次)****;*

iv) $\forall x, y \in X, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(三角不等式)****.*

*则称 $\| \cdot \|$ 是 X 上 的一个**范数**.*

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)***;

ii) $\|x\| = 0$*当且仅当*$x = 0$ ***(正定性)***;

iii) $\forall x \in X, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ***(齐次)***;

iv) $\forall x, y \in X, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(三角不等式)***.

*则称 $\| \cdot \|$ 是 X 上 的一个**范数**.*

*定义了范数 的线性空间称为**赋范线性空间**,*

对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

(1) $\| x \| = d(x, 0) \geq 0$;

(2) $\| x + y \| = d(x + y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) = \| x \| + \| y \|$;

(3) $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 *X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 函数 $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ 满足:*

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ ***(非负性)***;

ii) $\|x\| = 0$*当且仅当*$x = 0$ ***(正定性)***;

iii) $\forall x \in X, \alpha \in K, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ***(齐次)***;

iv) $\forall x, y \in X, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(三角不等式)***.

*则称 $\| \cdot \|$ 是 X 上 的一个**范数**.*

*定义了范数 的线性空间称为**赋范线性空间**,*

记为 $(X, \| \cdot \|)$ *或简记为 X.*

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{2.1.1}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x, y)$ 是一个距离.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y)=\|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x,y\in X$, 有

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x, y \in X$, 有

(1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$;

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x, y \in X$, 有

(1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$;

(2) $d(x,y) = \|x-y\| = 0$当且仅当$x = y$;

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x, y \in X$, 有

(1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$;

(2) $d(x,y) = \|x-y\| = 0$当且仅当$x = y$;

(3) $d(y,x) = \|y-x\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$;

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y)=\|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x,y\in X$, 有

(1) $d(x,y)=\|x-y\|\geq 0$;

(2) $d(x,y)=\|x-y\|=0$当且仅当$x=y$;

(3) $d(y,x)=\|y-x\|=|-1|\|x-y\|=\|x-y\|=d(x,y)$;

(4) $d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$,

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y)=\|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x,y\in X$, 有

(1) $d(x,y)=\|x-y\|\geq 0$;

(2) $d(x,y)=\|x-y\|=0$当且仅当$x=y$;

(3) $d(y,x)=\|y-x\|=|-1|\|x-y\|=\|x-y\|=d(x,y)$;

(4) $d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$,

注 1. 把 (X,d) 称为由范数诱导的距离空间.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x, y \in X$, 有

(1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$;

(2) $d(x,y) = \|x-y\| = 0$当且仅当$x = y$;

(3) $d(y,x) = \|y-x\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$;

(4) $d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$,

注 1. 把 (X,d) 称为由范数诱导的距离空间.

可见,赋范空间一定是距离空间.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x, y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x, y \in X$, 有

(1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;

(2) $d(x, y) = \|x - y\| = 0$当且仅当$x = y$;

(3) $d(y, x) = \|y - x\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$;

(4) $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$,

注 1. 把 (X, d) 称为由范数诱导的距离空间.

可见,赋范空间一定是距离空间.

今后凡说赋范空间的距离如无特殊说明都是指由范数诱导的距离.

2. 赋范空间有了距离就可以定义开集, 闭集, 以及完备性等概念. 收敛(极限)也可以引入.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们看到了范数和距离的关系,

有了范数可以自然地定义距离:

$$d(x,y)=\|x-y\|. \tag{2.1.1}$$

由范数定义, 易验证 $d(x,y)$ 是一个距离.

事实上, 对于 $\forall x,y\in X$, 有

(1) $d(x,y)=\|x-y\|\geq 0$;

(2) $d(x,y)=\|x-y\|=0$当且仅当$x=y$;

(3) $d(y,x)=\|y-x\|=|-1|\|x-y\|=\|x-y\|=d(x,y)$;

(4) $d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$,

注 1. 把 (X,d) 称为由范数诱导的距离空间.

可见,赋范空间一定是距离空间.

今后凡说赋范空间的距离如无特殊说明都是指由范数诱导的距离.

2. 赋范空间有了距离就可以定义开集, 闭集, 以及完备性等概念. 收敛(极限)也可以引入.

事实上, $d(x_n,x)\to 0$ 即 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$.

定义 2.1.2 设 x_n 是赋范空间 X 中的点列, $x \in X$.

定义 2.1.2 设 x_n *是赋范空间* X *中的点列*, $x \in X$.
如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

定义 2.1.2 *设* x_n *是赋范空间* X *中的点列*, $x \in X$.
如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 x_n ***按范数收敛****到* x, *记为* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

定义 2.1.2 *设* x_n *是赋范空间* X *中的点列*, $x \in X$.
如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 x_n ***按范数收敛****到* x, *记为* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

有了距离和收敛性, 我们引进泛函分析中十分重要的概念——**Banach空间**:

定义 2.1.2 *设* x_n *是赋范空间* X *中的点列,* $x \in X$.
如果
$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$
则称 x_n ***按范数收敛****到* x, *记为* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

有了距离和收敛性, 我们引进泛函分析中十分重要的概念——**Banach空间**:

定义 2.1.3 ***完备的赋范空间称为Banach空间.***

定义 2.1.2 *设* x_n *是赋范空间* X *中的点列*, $x \in X$.
如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 x_n ***按范数收敛****到* x, *记为* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

有了距离和收敛性, 我们引进泛函分析中十分重要的概念——**Banach空间**:

定义 2.1.3 ***完备的赋范空间称为Banach空间.***

注 **由于赋范空间就是距离空间,**

定义 2.1.2 *设 x_n 是赋范空间 X 中的点列, $x \in X$. 如果*

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 x_n ***按范数收敛****到 x, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

有了距离和收敛性, 我们引进泛函分析中十分重要的概念——**Banach空间**:

定义 2.1.3 ***完备的赋范空间称为Banach空间.***

注 **由于赋范空间就是距离空间, Banach 空间是完备的距离空间, 因此具有完备距离空间的所有性质.**

二、 范数的连续性

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间, 则*

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间, 则*

(1) 对于任何 $x, y \in X$, *有*

$$| \, \|y\| - \|x\| \, | \leq \|y - x\|.$$

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间, 则*

(1) 对于任何 $x, y \in X$, *有*

$$|\,\|y\| - \|x\|\,| \leq \|y - x\|.$$

(2) ***范数*** $\|\cdot\|$ ***是一个连续函数.*** *即*

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间, 则*

(1) 对于任何 $x, y \in X$, *有*

$$\big|\, \|y\| - \|x\| \,\big| \leq \|y - x\|.$$

(2) ***范数*** $\|\cdot\|$ ***是一个连续函数.*** *即*

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\| \ (n \to \infty).$$

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则

(1) 对于任何 $x, y \in X$, 有

$$| \, \|y\| - \|x\| \, | \leq \|y - x\|.$$

(2) 范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数. 即

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\| \ (n \to \infty).$$

(3)范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的. 即

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则

(1) 对于任何 $x,y\in X$, 有

$$|\,\|y\|-\|x\|\,|\leq \|y-x\|.$$

(2) **范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.** 即

$$x_n\to x\ (n\to\infty)\Longrightarrow \|x_n\|\to\|x\|\ (n\to\infty).$$

*(3)***范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的.** 即

$$x_n\to x,\quad y_n\to y\ (n\to\infty)\Longrightarrow x_n+y_n\to x+y,$$

二、范数的连续性

定理 2.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则

(1) 对于任何 $x, y \in X$, 有

$$| \|y\| - \|x\| | \le \|y - x\|.$$

(2) **范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.** 即

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\| \ (n \to \infty).$$

(3) **范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的.** 即

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \ (n \to \infty) \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y,$$

$$\alpha_n \to \alpha, \ x_n \to x \Longrightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x.$$

利用范数的定义来证明.

证明

证明

(1) 由三角不等式

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \le \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \le \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y-x\|$.

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\, \|y\| - \|x\| \,| \leq \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \le \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \le \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $| \, \|y\| - \|x\| \, | \le \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\|.$$

于是由 $x_n \to x$, 可推出 $\|x_n\| \to \|x\| (n \to \infty)$. 即：范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

于是由 $x_n \to x$, 可推出 $\|x_n\| \to \|x\|(n \to \infty)$. 即：范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.

(3) 由于$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$,

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \le \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \le \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\ \|y\| - \|x\|\ | \le \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\|.$$

于是由 $x_n \to x$, 可推出 $\|x_n\| \to \|x\| (n \to \infty)$. 即：范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.

(3) 由于$\|x_n + y_n - x - y\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$,

以及

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \le \|\alpha_n x_n - \alpha x + \alpha_n x - \alpha x\|$$

$$\le |\alpha_n| \|x_n - x\| + \|x\| |\alpha_n - \alpha|,$$

证明

(1) 由三角不等式

$$\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|,$$

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| = \|y-x\| + \|y\|,$$

可知 $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y-x\|$.

(2). 由(1)知

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

于是由 $x_n \to x$, 可推出 $\|x_n\| \to \|x\|(n \to \infty)$. 即：范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数.

(3) 由于$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$,

以及

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq \|\alpha_n x_n - \alpha x + \alpha_n x - \alpha x\|$$

$$\leq |\alpha_n|\|x_n - x\| + \|x\||\alpha_n - \alpha|,$$

结合 $|\alpha_n|$ 有界, 即可得范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续. $\square$

三、 范数与距离的关系

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设 X 是赋范空间, d 是由范数诱导的距离.*

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设* X *是赋范空间,* d *是由范数诱导的距离.*
则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, *都有*

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设* X *是赋范空间,* d *是由范数诱导的距离.*

则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, *都有*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{2.1.2}$$

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设 X 是赋范空间, d 是由范数诱导的距离. 则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, 都有*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y). \tag{2.1.3}$$

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, 距离空间是不是一定是赋范空间?

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设* X *是赋范空间,* d *是由范数诱导的距离. 则对于任何的* $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, *都有*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y). \tag{2.1.3}$$

分析: 利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设* X *是赋范空间,* d *是由范数诱导的距离.*

则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, *都有*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\ \alpha\ |\ d(x, y). \tag{2.1.3}$$

分析: **利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.**

证明 $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y);$

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设 X 是赋范空间, d 是由范数诱导的距离. 则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, 都有*

$$d(x,y) = d(x+z, y+z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y). \tag{2.1.3}$$

分析: **利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.**

证明 $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$;

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \, d(x,y)$$

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设 X 是赋范空间, d 是由范数诱导的距离. 则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, 都有*

$$d(x,y) = d(x+z, y+z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y). \tag{2.1.3}$$

分析: **利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.**

证明 $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y);$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| d(x,y)$$

注1 上述 (2.1.2) 和 (2.1.3) 是**范数诱导出的距离需要满足的必要条件**.

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 设 X *是赋范空间*, d *是由范数诱导的距离. 则对于任何的* $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, *都有*

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x, y). \tag{2.1.3}$$

分析: **利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.**

证明 $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y);$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \mid \alpha \mid d(x, y)$$

注1 上述 (2.1.2) 和 (2.1.3) 是**范数诱导出的距离需要满足的必要条件**.

注2 (2.1.2)式 **反映了范数诱导出的距离在“刚体运动”以后距离不变**.

三、 范数与距离的关系

问题: 赋范空间一定是距离空间,

反过来, **距离空间是不是一定是赋范空间?**

赋范空间诱导出的距离空间有以下性质:

定理 2.1.5 *设 X 是赋范空间, d 是由范数诱导的距离. 则对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, 都有*

$$d(x,y) = d(x+z, y+z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x,y). \tag{2.1.3}$$

分析: **利用范数与其诱导的距离之间的关系证明.**

证明 $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$;

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \mid \alpha \mid d(x,y)$$

注1 上述 (2.1.2) 和 (2.1.3) 是**范数诱导出的距离需要满足的必要条件**.

注2 (2.1.2)式 **反映了范数诱导出的距离在"刚体运动"以后距离不变**.

注3 (2.1.3)式 **反映了这种距离的某种"齐次"性质**.

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间*s, *即全体实数列组成的集合上定义距离:*

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间*s, *即全体实数列组成的集合上定义距离:*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$. s *是距离空间.*

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间s, 即全体实数列组成的集合上定义距离:*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}.$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$. s 是距离空间.

考虑 $d(\alpha x,0)$, 显然, 只要 $\alpha\neq 0$, 则

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间*s, *即全体实数列组成的集合上定义距离:*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}.$$

其中 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}$. s *是距离空间.*

考虑 $d(\alpha x,0)$, 显然, 只要 $\alpha\neq 0$, 则

$$d(\alpha x,0)\neq|\ \alpha\ |\ d(x,0),$$

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间s, 即全体实数列组成的集合上定义距离:*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\mid \xi_k-\eta_k \mid}{1+\mid \xi_k-\eta_k \mid}.$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$. s 是距离空间.

考虑 $d(\alpha x,0)$, 显然, 只要 $\alpha\neq 0$, 则

$$d(\alpha x,0)\neq\mid \alpha \mid d(x,0),$$

可见, 这个距离 d 不满足 (2.1.3)式,

不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 *空间s, 即全体实数列组成的集合上定义距离:*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$. s 是距离空间.

考虑 $d(\alpha x,0)$, 显然, 只要 $\alpha\neq 0$, 则

$$d(\alpha x,0)\neq|\alpha|d(x,0),$$

可见, 这个距离 d 不满足 (2.1.3)式,

因此空间 s 中的距离不是由任何一个范数诱导出来的 .

四、赋范空间的完备化

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

可以证明 $C[a,b]$ **是一个赋范空间**.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

可以证明 $C[a,b]$ **是一个赋范空间**.

在**由范数诱导的距离**

$$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)| \tag{2.1.4}$$

下, 它是**完备的, 可分的**.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

可以证明 $C[a,b]$ **是一个赋范空间**.

在**由范数诱导的距离**

$$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)| \tag{2.1.4}$$

下, 它是**完备的, 可分的**.

类似地可以考虑 $C(\Omega)$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 是列紧的闭集.

四、赋范空间的完备化

赋范空间中有了距离就可以考虑空间的完备性,

有了完备性,极限运算(微积分)才能很好的进行.

任何一个距离空间都可以完备化.

赋范空间是距离空间, 因而任何赋范空间都是可以完备化的.

完备空间的例子:

例 2.1.7 $C[a,b]$. *闭区间* $[a,b]$ *上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:*

$$\|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|.$$

可以证明 $C[a,b]$ **是一个赋范空间**.

在**由范数诱导的距离**

$$d(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| \tag{2.1.4}$$

下, 它是**完备的, 可分的**.

类似地可以考虑 $C(\Omega)$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 是列紧的闭集.

例 2.1.8 设 X 表示 $[a, b]$ 上的全体连续函数, ***在 X 上定义***

例 2.1.8 设 X *表示* $[a,b]$ *上的全体连续函数*, ***在*** X ***上定义***

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\boldsymbol{d}t. \tag{2.1.5}$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式, 可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数, 即 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是一赋范空间**.

例 2.1.8 设 X 表示 $[a,b]$ *上的全体连续函数*, ***在 X 上定义***

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| \boldsymbol{d}t. \tag{2.1.5}$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式, 可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数, 即 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是一赋范空间**.

但在由此范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t)-y(t)| \mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

下不是完备的(例1.4.13中已证明).

例 2.1.8 设 X *表示* $[a,b]$ *上的全体连续函数*, ***在*** X ***上定义***

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| \boldsymbol{d}t. \tag{2.1.5}$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式, 可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数, 即 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是一赋范空间**.

但在由此范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

下不是完备的(例1.4.13中已证明).

因而赋范空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是不完备的.**

例 2.1.8 设 X *表示* $[a,b]$ *上的全体连续函数*, ***在*** X ***上定义***

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\boldsymbol{d}t. \tag{2.1.5}$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式, 可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数, 即 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是一赋范空间**.

但在由此范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t)-y(t)|\mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

下不是完备的(例1.4.13中已证明).

因而赋范空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ **是不完备的.**

同样可以证明在 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成的线性空间中, 赋以范数:

$$\|x\| = [\int_b^a |x(t)|^2 \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.7}$$

形成的赋范空间也是不完备的.

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: 赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: 赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

定理 2.1.9 ***赋范空间可以完备化.***

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = x_n + y_n, \alpha\widetilde{x} = \alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

定理 2.1.9 ***赋范空间可以完备化.***

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = x_n + y_n, \alpha\widetilde{x} = \alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

则 $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间,

定理 2.1.9 ***赋范空间可以完备化.***

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\widetilde{X}$, $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=x_n+y_n, \alpha\widetilde{x}=\alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

则 $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间,

并且 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子集等距同构.

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = x_n + y_n, \alpha\widetilde{x} = \alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

则 $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间,

并且 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子集等距同构.

即 赋范空间 X 可以完备化.

定理 2.1.9 ***赋范空间可以完备化.***

分析: **赋范空间是距离空间, 根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}, \widetilde{y} = \{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = x_n + y_n, \alpha\widetilde{x} = \alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

则 $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间,

并且 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子集等距同构.

即 赋范空间 X 可以完备化.

完备化以后的空间，填补了原来的“缝隙”， 空间中的元素增加了,

定理 2.1.9 *赋范空间可以完备化.*

分析: **赋范空间是距离空间，根据距离空间的可以完备化来证明赋范空间可以完备化.**

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化, 成为 $\widetilde{X}$.

（注意： $\widetilde{X}$ 现在是一个距离空间）

设 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\widetilde{X}$, $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列,

在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=x_n+y_n, \alpha\widetilde{x}=\alpha x_n, \tag{2.1.8}$$

$$\|\widetilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|, \tag{2.1.9}$$

则 $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间,

并且 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子集等距同构.

即 赋范空间 X 可以完备化.

完备化以后的空间，填补了原来的“缝隙”， 空间中的元素增加了,

使得所有的Cauchy列都收敛.

注 上例 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数,在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.10}$$

$(X, \|\cdot\|)$ 不是Banach空间, 于是它可以完备化.

注 上例 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数,在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.10}$$

$(X, \|\cdot\|)$ 不是Banach空间, 于是它可以完备化.

完备化空间为:

注 上例 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数,在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.10}$$

$(X, \|\cdot\|)$ 不是Banach空间, 于是它可以完备化.

完备化空间为:

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}, \|\cdot\|_1) &= \{\textbf{全体在}[a,b]\textbf{上绝对可积的函数}\} \\ &= \{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|\mathbf{d}t < \infty\} \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

注 上例 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数,在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.10}$$

$(X, \|\cdot\|)$ 不是Banach空间, 于是它可以完备化.

完备化空间为:

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}, \|\cdot\|_1) &= \{\text{全体在}[a,b]\text{上绝对可积的函数}\} \\ &= \{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|\mathbf{d}t < \infty\}\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

可以看到这个新的空间中的元素比 $C[a,b]$ 中的元素增加了, 使得所有的Cauchy列都收敛.

注 上例 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数,在 X 上定义

$$\|x\|_1=\int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.10}$$

$(X,\|\cdot\|)$ 不是Banach空间, 于是它可以完备化.

完备化空间为:

$$\begin{aligned}(\widetilde{X},\|\cdot\|_1)&=\{\textbf{全体在}[a,b]\textbf{上绝对可积的函数}\}\\&=\{x(t)\mid \int_a^b |x(t)|\mathbf{d}t<\infty\}\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

可以看到这个新的空间中的元素比 $C[a,b]$ 中的元素增加了, 使得所有的Cauchy列都收敛.

问题: 全体连续函数函组成的线性空间, 在范数(2.1.7)下, 完备化的空间是什么?)