内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Email：masun@imu.edu.cn

§3 一致有界原则

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质.**

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质**.

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质**.

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质**.

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质**.
这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.
例如在第一章的习题 29 中, 设 $\mathscr{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对于任何 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得:

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质.**

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.

例如在第一章的习题 29 中, 设 $\mathscr{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对于任何 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得:

对于每一个 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(x)| \le M_x,$$

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质.**

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.

例如在第一章的习题 29 中, 设 $\mathscr{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对于任何 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得:

对于每一个 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(x)| \leq M_x,$$

则存在开集 U 及 $M > 0$, 使得对于任意的 $x \in U$, $f \in \mathscr{F}$ 都有

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质.**

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.

例如在第一章的习题 29 中, 设 $\mathscr{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对于任何 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得:

对于每一个 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(x)| \leq M_x,$$

则存在开集 U 及 $M > 0$, 使得对于任意的 $x \in U$, $f \in \mathscr{F}$ 都有

$$|f(x)| \leq M,$$

§3 一致有界原则

我们把线性算子抽象成为线性算子空间中的元素, 从赋范空间的角度**研究线性算子的性质.**

这种抽象使我们能更清楚地看到**线性算子的一些本质特征**.

一、一致有界

一致有界是一个十分重要的概念.

例如在第一章的习题 29 中, 设 $\mathscr{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对于任何 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得:

对于每一个 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(x)| \leq M_x,$$

则存在开集 U 及 $M > 0$, 使得对于任意的 $x \in U$, $f \in \mathscr{F}$ 都有

$$|f(x)| \leq M,$$

即在 U 上, $fx)$ 一致有界.

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**

即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**

即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus 一致有界原理*)

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**

即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus* **一致有界原理**)

设 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$ 是 *Banach* **空间** X **上**到赋范空间 X_1 中的**有界线性算子族**.

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 *(Banach-Steinhaus 一致有界原理)*
设 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族.
如果对于 $\forall x \in X$,

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 *(Banach-Steinhaus 一致有界原理)*
设 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族.
如果对于 $\forall x \in X$,

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha x\| < \infty,$$

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**

即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus 一致有界原理*)

设 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 *Banach 空间* X *上*到赋范空间 X_1 中的*有界线性算子族*.

如果对于 $\forall x \in X$,

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha x\| < \infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\| | \alpha \in I\}$ *是有界集.*

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus* **一致有界原理**)
设 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 *Banach* **空间** X **上**到赋范空间 X_1 中的**有界线性算子族**.
如果对于 $\forall x\in X$,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\||\alpha\in I\}$ 是有界集.

注1 定理表明, 若对任意的 $x\in X$, 存在 $M_x>0$ (x给定, M_x给定), 使得

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus 一致有界原理*)
设 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 *Banach 空间* X *上*到赋范空间 X_1 中的*有界线性算子族*.
如果对于 $\forall x\in X$,
$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\|<\infty,$$
则 $\{\|T_\alpha\||\alpha\in I\}$ *是有界集.*

注1 定理表明, 若对任意的 $x\in X$, 存在 $M_x>0$ (x给定, M_x给定), 使得
$$\|T_\alpha x\|\le\sup_\alpha\|T_\alpha x\|=M_x<\infty, \tag{4.3.1}$$

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (***Banach-Steinhaus 一致有界原理***)
设 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 ***Banach 空间*** X ***上***到赋范空间 X_1 中的***有界线性算子族***.
如果对于 $\forall x\in X$,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\||\alpha\in I\}$ *是有界集.*

注1 定理表明, 若对任意的 $x\in X$, 存在 $M_x>0$ (x给定, M_x给定), 使得

$$\|T_\alpha x\| \le \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty, \tag{4.3.1}$$

则**存在一个共同的** M, 使得

$$\|T_\alpha\| \le M, \quad \forall\alpha\in I$$

.

对于 **有界线性算子, 我们可以得到更一般的一致有界原理,**
即:一族点点有界的有界线性算子必定一致有界.

定理 4.3.1 (*Banach-Steinhaus 一致有界原理*)
设 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$ 是 *Banach 空间* X *上*到赋范空间 X_1 中的*有界线性算子族*.
如果对于 $\forall x \in X$,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\| |\alpha \in I\}$ *是有界集.*

注1 定理表明, 若对任意的 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$ (x给定, M_x给定), 使得

$$\|T_\alpha x\| \le \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty, \tag{4.3.1}$$

则**存在一个共同的** M, 使得

$$\|T_\alpha\| \le M, \quad \forall \alpha \in I$$

.
简言之, 点点有界 $\Rightarrow$ 一致有界.

前提条件:

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty$,

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha}\|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha}\|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明思路:

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha}\|T_\alpha\|=\infty$,

则存在 $x\in X$, 使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|=\infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明思路:

目标: **要证明的是集合 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 中的线性算子有一个共同的上界(即一致有界).**

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha}\|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明思路:

目标: **要证明的是集合 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$ 中的线性算子有一个共同的上界(即一致有界).**

步骤: **(1) 首先证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界,** 即存在 $r > 0$

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha}\|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明思路:

目标: **要证明的是集合 $\{T_\alpha|\alpha \in I\}$ 中的线性算子有一个共同的上界(即一致有界).**

步骤: **(1) 首先证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界,** 即存在 $r > 0$

$$\|T_\alpha x\| \le M < \infty, \ \forall x \in B(0, r), \ \forall \alpha \in I.$$

前提条件:

(1) X 是 Banach 空间,

(2) T 是线性的, 是定义在 X 上的.

注2 定理逆否命题是:

如果 X 是 Banach 空间, $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty$,

则存在 $x \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| = \infty. \tag{4.3.2}$$

称其为共鸣定理.

证明思路:

目标: 要证明的是集合 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 中的线性算子有一个共同的上界(即一致有界).

步骤: (1) 首先证明 $T_\alpha (\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界,即存在 $r > 0$

$$\|T_\alpha x\| \le M < \infty, \ \forall x \in B(0, r), \ \forall \alpha \in I.$$

(2) 根据算子的线性性,

(2) **根据算子的线性性**,

对于 $\forall x \in X,\ \forall \alpha,\ \|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \le M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \le Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

(2) 根据算子的线性性,

对于 $\forall x \in X$, $\forall \alpha$, $\|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \le M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \le Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

即在全空间上一致有界.

(2) 根据算子的线性性,

对于 $\forall x \in X$, $\forall \alpha$, $\|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \le M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \le Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

即在全空间上一致有界.

要证明 在一个小球上一致有界, 关键是用到 X 是 第二纲集.

(2) **根据算子的线性性**,

对于 $\forall x \in X$, $\forall \alpha$, $\|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \leq M$, **则推出**

$$\|T_\alpha x\| \leq Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

即在全空间上一致有界.

要证明 在一个小球上一致有界, **关键是用到** X **是 第二纲集**.

(a)存在一个 M_k

(**对于** $M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k\}$ **中的元素**, T_α **一致有界**),

它在某一个开集中稠密,

(2) 根据算子的线性性,

对于 $\forall x \in X,\ \forall \alpha,\ \|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \le M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \le Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

即在全空间上一致有界.

要证明 在一个小球上一致有界, 关键是用到 X 是 第二纲集.

(a)存在一个 M_k

(对于 $M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le k\}$ 中的元素, T_α 一致有界),

它在某一个开集中稠密,

(b) 随之在一个闭球中稠,

(2) 根据算子的线性性,

对于 $\forall x \in X,\ \forall \alpha,\ \|T_\alpha(\frac{rx}{\|x\|})\| \leq M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \leq Mr^{-1} \parallel x \parallel,$$

即在全空间上一致有界.

要证明 在一个小球上一致有界, 关键是用到 X 是 第二纲集.

(a)存在一个 M_k

(对于 $M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k\}$ 中的元素, T_α 一致有界),

它在某一个开集中稠密,

(b) 随之在一个闭球中稠,

(c) 进而把它 “平移” 到以原点为中心的闭球, 使之在这个闭球上一致有界 .

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$\begin{aligned} M_k &= \{x \in X | \sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha x\| \le K\} \\ &= \cap_{\alpha\in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\}, \end{aligned}$$

因 $\|T_\alpha x\|$ **是关于** x **的连续函数**,

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续函数,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\}$$

是闭集,

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \leq K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续函数,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \leq k\}$$

是闭集,

于是 M_k 是闭集, 且由点点有界可知:

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ **是关于** x **的连续函数**,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\}$$

是闭集,

于是 M_k **是闭集**, 且由点点有界可知:

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因 X 是 Banach 空间, 故 X **是第二纲集.**

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ **是关于** x **的连续函数**,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\}$$

是闭集,

于是 M_k **是闭集**, 且由点点有界可知:

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因 X 是 Banach 空间, 故 X **是第二纲集**.

因此, **必存在** k_0, M_{k_0} **不是疏集**, 即

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$
$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续函数,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\}$$

是闭集,

于是 M_k 是闭集, 且由点点有界可知:

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因 X 是 Banach 空间, 故 **X 是第二纲集.**

因此, **必存在 k_0, M_{k_0} 不是疏集**, 即

M_{k_0} 在 X 中某个开集 G 中稠密.

证明 (1) 证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的一个小球上一致有界.

(i) 令

$$M_k = \{x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le K\}$$

$$= \cap_{\alpha \in I}\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le K\},$$

因 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续函数,

因此对于每一个 $\alpha \in I$,

$$\{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\}$$

是闭集,

于是 M_k 是闭集, 且由点点有界可知:

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因 X 是 Banach 空间, 故 **X 是第二纲集.**

因此, **必存在 k_0, M_{k_0} 不是疏集**, 即

M_{k_0} 在 X 中某个开集 G 中稠密.

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密, 所以

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密, 所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

(ii) 由于 G 是开的, **存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密, 所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为: $M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k_0\}$

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$，于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密，所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为：$M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k_0\}$

(iii) **进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\}$ 上一致有界.**

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$，于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密，所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为：$M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k_0\}$

(iii) **进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\}$ 上一致有界.**

对于任意的

$$x \in \overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\},$$

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \le r\}$$

中稠密, 所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为：$M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le k_0\}$

(iii) ***进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \le r\}$ 上一致有界.***

对于任意的

$$x \in \overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \le r\},$$

我们有 $x + x_0 \in \overline{B}$, 其中

(ii) 由于 G 是开的, **存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密, 所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为: $M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k_0\}$

(iii) **进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\}$ 上一致有界.**

对于任意的

$$x \in \overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\},$$

我们有 $x + x_0 \in \overline{B}$, 其中

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\},$$

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$，于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

中稠密，所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为：$M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k_0\}$

(iii) **进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\}$ 上一致有界.**

对于任意的

$$x \in \overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \leq r\},$$

我们有 $x + x_0 \in \overline{B}$，其中

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\},$$

于是

(ii) 由于 G 是开的，**存在一个闭球 $\overline{B} \subset G$, 于是 M_{k_0} 在**

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \le r\}$$

中稠密, 所以

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0}.$$

这说明 T_α 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的. 因为：$M_{k_0} = \{x \in X | \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le k_0\}$

(iii) *进一步证明 $T_\alpha(\alpha \in I)$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \le r\}$ 上一致有界.*

对于任意的

$$x \in \overline{B_0} = \{x \in X | \|x\| \le r\},$$

我们有 $x + x_0 \in \overline{B}$, 其中

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \le r\},$$

于是

$$\|T_\alpha x\| \le \|T_\alpha(x+x_0)\| + \|T_\alpha x_0\| \le 2M_{k_0},\ \forall \alpha \in I.$$

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(iv) 对于任意的 $x \in X$, 因 $\frac{x}{\|x\|} r \in \overline{B_0}$, 故

$$\|T_\alpha \frac{rx}{\|x\|}\| \leq 2M_{k_0}.$$

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(iv) 对于任意的 $x \in X$, 因 $\frac{x}{\|x\|}r \in \overline{B_0}$, 故

$$\|T_\alpha \frac{rx}{\|x\|}\| \le 2M_{k_0}.$$

于是

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(iv) 对于任意的 $x \in X$, 因 $\frac{x}{\|x\|}r \in \overline{B_0}$, 故

$$\|T_\alpha \frac{rx}{\|x\|}\| \le 2M_{k_0}.$$

于是

$$\|T_\alpha x\| \le 2M_{k_0}\|x\|/r.$$

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(iv) 对于任意的 $x \in X$, 因 $\frac{x}{\|x\|}r \in \overline{B_0}$, 故

$$\|T_\alpha \frac{rx}{\|x\|}\| \leq 2M_{k_0}.$$

于是

$$\|T_\alpha x\| \leq 2M_{k_0}\|x\|/r.$$

因此,

$$\|T_\alpha\| \leq \frac{2}{r}M_{k_0} = M, \ \ \forall \alpha \in I,$$

即 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

(iv) 对于任意的 $x \in X$, 因 $\frac{x}{\|x\|}r \in \overline{B_0}$, 故

$$\|T_\alpha \frac{rx}{\|x\|}\| \le 2M_{k_0}.$$

于是

$$\|T_\alpha x\| \le 2M_{k_0}\|x\|/r.$$

因此,

$$\|T_\alpha\| \le \frac{2}{r}M_{k_0} = M, \quad \forall \alpha \in I,$$

即 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.

注1 X 是 Banach 空间, 若 f_α 是定义在 X 上的有界线性泛函 $(\alpha \in I)$, 如果对于每一个 $x \in X$,

$$\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| < \infty,$$

则 $\{\|f_\alpha\| \alpha \in I\|\}$ 是有界集.

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n(x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n(x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注3 当 I 是一个可数集时, 若 X 是一个 Banach 空间, $\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n(x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注3 当 I 是一个可数集时, 若 X 是一个 Banach 空间, $\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.

这是一致有界原则的逆否命题.

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n(x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注3 当 I 是一个可数集时, **若 X 是一个 Banach 空间, $\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.**
这是一致有界原则的逆否命题.

注4 定理中的条件, **X 是 Banach 空间, 仅仅用到推出 X 是第二纲集.**

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n(x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注3 当 I 是一个可数集时, 若 X 是一个 Banach 空间, $\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.
这是一致有界原则的逆否命题.

注4 定理中的条件, X **是 Banach 空间, 仅仅用到推出 X 是第二纲集.**
即定理的条件可以减弱为 X 是第二纲集.

注2 **当 I 是一个可数集时**, X 是一个 Banach 空间, 如果对于 $\forall x \in X$,有 $\sup_n \|f_n\ (x)\| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

注3 当 I 是一个可数集时, 若 X 是一个 Banach 空间, $\sup_n \|f_n(x)\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使 $\sup_n \|f_n(x_0)\| = \infty$.

这是一致有界原则的逆否命题.

注4 定理中的条件, X **是 Banach 空间, 仅仅用到推出 X 是第二纲集.**

即定理的条件可以减弱为 X 是第二纲集.

注5 一致有界原则也可以由下一节关于范数等价的定理4.4.6 推出.

二、强连续意义下的完备性

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: **(1) 构造这样的线性算子 T.**

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 $Banach$ 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: **(1) 构造这样的线性算子 T.**

(i)**由已知 G 在 X 中稠密,** 对于 $\forall x \in X$, 存在 $y \in G$, 使得 $\|x - y\| < \varepsilon$.

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 Banach 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: (1) 构造这样的线性算子 T.

(i)**由已知 G 在 X 中稠密,** 对于 $\forall x \in X$, 存在 $y \in G$, 使得 $\|x - y\| < \varepsilon$.

(ii) 由已知: **对任意的 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛,** 因此 $\{T_n y\}$ 一个 Cauchy 列.

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 *Banach* 空间 X_1 中的有界线性算子列，如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集，且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: **(1) 构造这样的线性算子 T.**

(i)**由已知 G 在 X 中稠密,** 对于 $\forall x \in X$, 存在 $y \in G$, 使得 $\|x-y\| < \varepsilon$.

(ii) 由已知: **对任意的 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛,** 因此 $\{T_n y\}$ 一个 Cauchy 列.

(iii)**结合已知 $\{\|T_n\|\}$ 有界,** 得到:

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 Banach 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: **(1) 构造这样的线性算子 T.**

(i)**由已知 G 在 X 中稠密,** 对于 $\forall x \in X$, 存在 $y \in G$, 使得 $\|x - y\| < \varepsilon$.

(ii) 由已知: **对任意的 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛,** 因此 $\{T_n y\}$ 一个 Cauchy 列.

(iii)**结合已知 $\{\|T_n\|\}$ 有界,** 得到:

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\ &\leq \|T_n\|\|x - y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m\|\|x - y\| \to 0 \ \ (\text{当 } m, n \to \infty),\end{aligned}$$

二、强连续意义下的完备性

定理 4.3.2 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 *Banach* 空间 X_1 中的有界线性算子列, 如果

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) G 是 X 中的稠子集, 且对任何 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛;

则存在有界线性算子 T $(T \in \mathscr{B}(X, X_1))$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T, \text{ 且 } \|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{4.3.3}$$

证明: **(1) 构造这样的线性算子 T.**

(i)**由已知 G 在 X 中稠密**, 对于 $\forall x \in X$, 存在 $y \in G$, 使得 $\|x - y\| < \varepsilon$.

(ii) 由已知: **对任意的 $y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛**, 因此 $\{T_n y\}$ 一个 Cauchy 列.

(iii)**结合已知 $\{\|T_n\|\}$ 有界**, 得到:

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &\le \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\ &\le \|T_n\|\|x - y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m\|\|x - y\| \to 0 \ \ (\text{当 } m, n \to \infty),\end{aligned}$$

即 $\{T_n x\}$ 是一个 Cauchy 列.

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$**, 即** $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$**.**

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

(2) 证明算子 T 有界.

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$**, 即** $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$**.**

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|.$$

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.
显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.
(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 4.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间, ***则*** $\mathscr{B}(X, X_1)$ ***在强收敛的意义下完备.***

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.
显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.
(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 4.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间, ***则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备.***

注 完备的含意:

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, **即** $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 4.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间, ***则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备.***

注 完备的含意:

(1) $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$,

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$, 即 $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$.
显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.
(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 4.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间, ***则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备.***

注 完备的含意:
(1) $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$,
(2) $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列,

由于 X_1 是 Banach 空间. 于是存在 z, 使得

$$\|T_n x - z\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

令 $Tx = z$**, 即** $Tx = z = \lim_{n\to\infty} T_n x$**.**

显然 T 是线性的, 且 T_n 强收敛到 T.

(2) 证明算子 T 有界.

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|.$$

于是 T 是有界线性算子, 且 $\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 4.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间, ***则*** $\mathscr{B}(X, X_1)$ ***在强收敛的意义下完备.***

注 完备的含意:

(1) $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$,

(2) $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列,

则存在 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $\quad T_n \xrightarrow{强} T$, 即

$$T_n x \to Tx \qquad (\forall x \in X).$$

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界,** 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) **因 X_1 完备**, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界,** 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ **有界**.

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) **因 X_1 完备**, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界**, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ **有界**.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) 由于收敛的点列有界, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ 有界.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{强} T$, 且

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) 由于收敛的点列有界, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ 有界.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{强} T$, 且

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

注 定理条件要求:

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) 由于收敛的点列有界, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.
因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ 有界.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$, 且

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

注 定理条件要求:
X 是 Banach 空间, X_1 也是 Banach 空间.

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界**, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ **有界**.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{强} T$, 且

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

注 定理条件要求:

X 是 Banach 空间, X_1 也是 Banach 空间.

由定理可知, 当 X, X_1 是 Banach 空间时, $T_n \xrightarrow{强} T$ 的充分必要条件是

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界**, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ **有界**.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{强} T$, 且

$$\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

注 定理条件要求:

X 是 Banach 空间, X_1 也是 Banach 空间.

由定理可知, 当 X, X_1 是 Banach 空间时, $T_n \xrightarrow{强} T$ 的充分必要条件是

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界,

证明 设 $T_n \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 且 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

(i) 因 X_1 完备, $\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列, 故存在 $z \in X$, 使得 $T_n x \to z = Tx$, 即 $T_n x \to Tx$.

(ii) **由于收敛的点列有界**, 对于 $\forall x \in X$, 我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$.

因 X 完备, 由一致有界原理, $\{\|T_n\|\}$ 有界.

(iii) 再由 X_1 是 Banach 空间, 结合定理4.3.2, 我们有

$T \in \mathscr{B}(X, X_1)$, $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$, 且

$$\|T\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|,$$

注 定理条件要求:

X 是 Banach 空间, X_1 也是 Banach 空间.

由定理可知, 当 X, X_1 是 Banach 空间时, $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$ 的充分必要条件是

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界,

(ii) G 是 X中的稠子集, $\forall y \in G$, $\{T_n y\}$ 收敛.

三、共鸣定理的应用

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty \ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 **Fourier** 级数是发散的.

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 **Fourier** 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 **Fourier** 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 ***(Fourier 级数的发散性)***

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 **Fourier** 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

可以证明 $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ **是一个 Banach 空间**.

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 **Fourier** 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

可以证明 $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ **是一个 Banach 空间**.

对于任意的 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数为

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 Fourier 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

可以证明 $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

对于任意的 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数为

$$x(t) \sim \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{4.3.4}$$

三、共鸣定理的应用

例 4.3.4 *(Fourier 级数的发散性)*

由一致有界原理我们知道:

若 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$, 则存在 x_0, 使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$(发散).

据此下面证明:

存在连续函数, 在它的某一个连续点 t_0, 其 Fourier 级数是发散的.

考虑: $C_{2\pi} = \{$直线上以2π为周期的全体实值连续函数$\}$. 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|.$$

可以证明 $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

对于任意的 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数为

$$x(t) \sim \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{4.3.4}$$

我们知道如果 $x(t)$ 连续, 且 $x'(t)$ 连续, 则它的 Fourier 级数收敛到 $x(t)$.

现在的问题是:

现在的问题是:

是否存在 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数在某一点的发散? 即它的前 $n+1$ 项的和在这点发散.

现在的问题是:

是否存在 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数在某一点的发散? 即它的前 $n+1$ 项的和在这点发散.

函数 $x(t)$ 前 $n+1$ 项 Fourier 级数的和为

现在的问题是:

是否存在 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数在某一点的发散? 即它的前 $n+1$ 项的和在这点发散.

函数 $x(t)$ 前 $n+1$ 项 Fourier 级数的和为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t))\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x(s)[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t)]\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)k_n(s,t)\mathrm{d}s,$$

其中 $k_n(s,t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s-t)}{2\pi \sin\frac{1}{2}(s-t)}$.

现在的问题是:

是否存在 $x(t) \in C_{2\pi}$, 它的 Fourier 级数在某一点的发散? 即它的前 $n+1$ 项的和在这点发散.

函数 $x(t)$ 前 $n+1$ 项 Fourier 级数的和为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t))\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x(s)[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos k(s-t)]\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)k_n(s,t)\mathrm{d}s,$$

其中 $k_n(s,t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s-t)}{2\pi \sin\frac{1}{2}(s-t)}$.

当$t = t_0$ 给定时, $x(t)$ 前n项的和

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)k_n(s,t)\mathrm{d}s,$$

在 t_0 点的值, 是关于 $x(t)$ 的线性泛函.

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

不失一般性, 我们证明对于 $t=0$,一定存在 $x(t)$, 它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

不失一般性, 我们证明对于 $t=0$,一定存在 $x(t)$, 它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

当 $t=0$时, $k_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s)}{2\pi\sin\frac{1}{2}s}=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos ks.$

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

不失一般性, 我们证明对于 $t=0$,一定存在 $x(t)$, 它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

当 $t=0$时, $k_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s)}{2\pi\sin\frac{1}{2}s}=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ks.$

(1) 考虑 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函,

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)k_n(s,0)\mathrm{d}s.$$

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

不失一般性, 我们证明对于 $t=0$,一定存在 $x(t)$, 它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

当 $t=0$时, $k_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s)}{2\pi\sin\frac{1}{2}s}=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ks.$

(1) 考虑 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函,

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)k_n(s,0)\mathrm{d}s.$$

(2) 它是 $C_{2\pi}$ 上的**有界连续泛函**, 且可以证明

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|\mathrm{d}s.$$

我们要证明存在 $x(t)$,它的 Fourier 级数在某一点t_0发散.

不失一般性, 我们证明对于 $t=0$,一定存在 $x(t)$, 它的 Fourier 级数在 $t=0$ 点发散.

当 $t=0$时, $k_n(s,t)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(s)}{2\pi\sin\frac{1}{2}s}=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ks.$

(1) 考虑 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函,

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)k_n(s,0)\mathrm{d}s.$$

(2) 它是 $C_{2\pi}$ 上的**有界连续泛函**, 且可以证明

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|\mathrm{d}s.$$

(3) 下面**证明** $\|f_n\|\to\infty\ (n\to\infty).$

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= (\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= (\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0 \in C_{2\pi}$, $f_n(x_0)$ 发散, 即

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= (\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0 \in C_{2\pi}$, $f_n(x_0)$ 发散, 即
存在连续函数 $x_0(t)$, 它在 $t=0$ 点的 Fourier 级数发散.

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u\right)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0 \in C_{2\pi}$, $f_n(x_0)$ 发散, 即
存在连续函数 $x_0(t)$, 它在 $t=0$ 点的 Fourier 级数发散.

注1 有界变差函数(两个单调函数之差)的 Fourier 级数处处收敛.

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= (\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0 \in C_{2\pi}$, $f_n(x_0)$ 发散, 即

存在连续函数 $x_0(t)$, 它在 $t=0$ 点的 Fourier 级数发散.

注1 **有界变差函数(两个单调函数之差)的 Fourier 级数处处收敛.**

在连续点收敛到 $x(t)$. 在不连续点收敛到 $\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2}$.

$$\|f_n(x)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |k_n(s,0)|\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})s|}{|\sin\frac{1}{2}s|}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})2t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2n+1)s|}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{\frac{u}{2n+1}}\mathrm{d}u\right)\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}s \to \infty.$$

由一致收敛原则, 存在 $x_0 \in C_{2\pi}$, $f_n(x_0)$ 发散, 即

存在连续函数 $x_0(t)$, 它在 $t=0$ 点的 Fourier 级数发散.

注1 **有界变差函数(两个单调函数之差)的 Fourier 级数处处收敛.**

在连续点收敛到 $x(t)$. 在不连续点收敛到 $\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2}$.

注2 **但是对于一些连续函数, 其 Fourier 级数可以在一些点发散,** 1876年

P.du Bois Reymond 给出这个否定的回答.

考虑三角多项式

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$

$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$
$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2}).$$

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$
$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2}).$$

可以证明 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 0 点发散. (这是1911年, Féjer提出的例子).

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$
$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2}).$$

可以证明 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 0 点发散. (这是1911年, Féjer提出的例子).

注3 上面我们使用泛函分析的观点和方法, 证明了存在连续函数 $x_0(t)$, 它在任意指定的点 $t=0$ 的 Fourier 级数发散.

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$
$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2}).$$

可以证明 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 0 点发散. (这是1911年, Féjer提出的例子).

注3 上面我们使用泛函分析的观点和方法, 证明了存在连续函数 $x_0(t)$, 它在任意指定的点 $t=0$ 的 Fourier 级数发散.

这个定理是存在性证明, 但与构造一个反例的证明相比较, 方法简单, 结论更深刻.

考虑三角多项式

$$T(x,n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(n+(n-1))x}{1} - \frac{\cos(n+(n+1))x}{1} - \cdots - \frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} T(x, 2^{p^2}).$$

可以证明 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 0 点发散. (这是1911年, Féjer提出的例子).

注3 上面我们使用泛函分析的观点和方法, 证明了存在连续函数 $x_0(t)$, 它在任意指定的点 $t=0$ 的 Fourier 级数发散.

这个定理是存在性证明, 但与构造一个反例的证明相比较, 方法简单, 结论更深刻.

注4 1966年, Carleson 证明了: L^2 可积函数的 Fourier 级数 几乎处处收敛,

考虑三角多项式

$$T(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(n+(n-1))x}{1}$$
$$-\frac{\cos(n+(n+1))x}{1}-\cdots-\frac{\cos(n+2n)x}{n}.$$

令

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}T(x,2^{p^2}).$$

可以证明 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 的 Fourier 级数在 0 点发散. (这是1911年, Féjer提出的例子).

注3 上面我们使用泛函分析的观点和方法, 证明了存在连续函数 $x_0(t)$, 它在任意指定的点 $t=0$ 的 Fourier 级数发散.

这个定理是存在性证明, 但与构造一个反例的证明相比较, 方法简单, 结论更深刻.

注4 1966年, Carleson 证明了: L^2 可积函数的 Fourier 级数 几乎处处收敛, 于是可知连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛.