内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§1 距离空间的基本概念

§1　距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

§1　距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,

§1 距离空间的基本概念

一、距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.

§ 1 距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.
连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.

§1 距离空间的基本概念

一、距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.
连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.
极限是研究函数的重要工具,

§1 距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.
连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.
极限是研究函数的重要工具,
极限方法是研究变量的一种基本方法.

§1 距离空间的基本概念

一、距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,

运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.

连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.

极限是研究函数的重要工具,

极限方法是研究变量的一种基本方法.

我们希望把这一重要的概念"类比"地推广到更一般的空间.

§1 距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.
连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.
极限是研究函数的重要工具,
极限方法是研究变量的一种基本方法.
我们希望把这一重要的概念“类比”地推广到更一般的空间.
所谓空间—是指集合加上一定的“结构“。
一维空间: 数列的极限: $x_n \to x (n \to \infty)$

§1　距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,

运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.

连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.

极限是研究函数的重要工具,

极限方法是研究变量的一种基本方法.

我们希望把这一重要的概念“类比”地推广到更一般的空间.

所谓空间—是指集合加上一定的“结构“。

一维空间： 数列的极限: $x_n \to x(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 只要 $n \geq N$ 时, 有

§1　距离空间的基本概念

一、　距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,

运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.

连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.

极限是研究函数的重要工具,

极限方法是研究变量的一种基本方法.

我们希望把这一重要的概念“类比”地推广到更一般的空间.

所谓空间—是指集合加上一定的“结构“。

一维空间：　数列的极限: $x_n \to x(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 只要 $n \geq N$ 时, 有

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

§ 1　距离空间的基本概念

一、 距离空间的定义

在高等数学中引进的最重要的概念就是**极限**,
运用极限来研究定义在实数域上的函数的性质.
连续、微分、积分、无穷级数都是由极限定义的.
极限是研究函数的重要工具,
极限方法是研究变量的一种基本方法.
我们希望把这一重要的概念“类比”地推广到更一般的空间.
所谓空间—是指集合加上一定的“结构“。
一维空间： 数列的极限: $x_n \to x(n \to \infty)$
如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 只要 $n \geq N$ 时, 有

$$| x_n - x | < \varepsilon$$

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$.

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

在这里 $|x_n - x|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N,只要 $n \geq N$时, 有

在这里 $|\ x_n - x\ |$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N,只要 $n \geq N$时, 有

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon$$

在这里 $|\ x_n - x\ |$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N,只要 $n \geq N$时, 有

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon$$

则称点列$x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$.

在这里 $|\, x_n - x \,|$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N,只要 $n \geq N$时, 有

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon$$

则称点列$x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$.

一般地, 我们可以定义 n 维空间中点列的极限, 所不同的只是距离 $d(x_n, x)$ 的具体表示形式.

在这里 $|\ x_n - x\ |$ 是 x_n 和 x 之间的距离 $d(x_n, x)$。

即: 在n充分大时， x_n 和 x之间的距离 $d(x_n, x)$可以任意小，

则称数列$x_n \to x(n \to \infty)$。

二维的情况: 我们可以类似的定义点列的极限,

所不同的是 x_n 和 x 之间的距离是平面上两点之间的距离.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$

如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数N,只要 $n \geq N$时, 有

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon$$

则称点列$x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$.

一般地, 我们可以定义 n 维空间中点列的极限, 所不同的只是距离 $d(x_n, x)$ 的具体表示形式.

在泛函分析中，我们将研究更一般的“空间”

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

引进了极限这一概念（运算）, 进而可以研究一般“空间”中的元素（函数、算子）的性质.

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

引进了极限这一概念(运算), 进而可以研究一般“空间”中的元素(函数、算子)的性质.

本节的内容:

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

引进了极限这一概念（运算）, 进而可以研究一般“空间”中的元素（函数、算子）的性质.

本节的内容:

(1) 距离空间的定义;

在泛函分析中, 我们将研究更一般的"空间"

以及在这些"空间"上定义的"函数"、"映射",进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的"空间"中建立极限的概念,

我们需在引入"距离"的概念.

即在一个集合上定义两点之间的"距离",使之成为我们下面所说的"距离空间".

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

引进了极限这一概念(运算),进而可以研究一般"空间"中的元素(函数、算子)的性质.

本节的内容:

(1) **距离空间的定义**;

(2) **例子**;

在泛函分析中, 我们将研究更一般的“空间”

以及在这些“空间”上定义的“函数”、“映射”, 进一步讨论与它们相关的极限和性质.

要在一般的”空间”中建立极限的概念,

我们需在引入“距离”的概念.

即在一个集合上定义两点之间的“距离”, 使之成为我们下面所说的“距离空间”.

有了距离,我们就可以定义相应的极限.

引进了极限这一概念（运算）, 进而可以研究一般“空间”中的元素（函数、算子）的性质.

本节的内容:

(1) 距离空间的定义;

(2) 例子;

(3) 距离空间中的收敛性.

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

它满足

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

它满足

1. 距离是非负的： $d(x,y)\geq 0$,

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

它满足

1. 距离是非负的： $d(x,y)\geq 0$,
2. 距离是严格正的的，$d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

它满足

1. 距离是非负的： $d(x, y) \geq 0$,
2. 距离是严格正的的，$d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$
3. 距离是对称的：$d(y, x) = d(x, y)$

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

它满足

1. 距离是非负的： $d(x,y)\geq 0$,
2. 距离是严格正的的，$d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$
3. 距离是对称的：$d(y,x)=d(x,y)$
4. 距离满足三角不等式（两边之和大于第三边）： $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

如何定义距离？ 即如何抽象出极限的本质特征？

设x,y 是平面上两点： $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. 两点间的距离为：

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

它满足

1. 距离是非负的： $d(x,y)\geq 0$,
2. 距离是严格正的的，$d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$
3. 距离是对称的：$d(y,x)=d(x,y)$
4. 距离满足三角不等式（两边之和大于第三边）： $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

于是我们把具有这些性质的一个到实数的二元映射（$X\times X\to\mathbb{R}$）定义为距离。

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (**非负性**);

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y, x) = d(x, y)$ (**对称性**);

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y, x) = d(x, y)$ (**对称性**);

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (**三角不等式**).

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x,y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x,y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y,x) = d(x,y)$ (**对称性**);

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (**三角不等式**).

则称 $d(x,y)$ 为 X 中的一个距离.

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x,y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x,y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y,x) = d(x,y)$ (**对称性**);

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (**三角不等式**).

则称 $d(x,y)$ 为 X 中的一个*距离*.

定义了距离 d 的集合称为一个*距离空间*, 记为 (X,d), 简记为 X.

注1. 在距离的定义中, 保留了实数空间(或者说在平面和 n 维空间)中距离的最基本性质.

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x, y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y, x) = d(x, y)$ (**对称性**);

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (**三角不等式**).

则称 $d(x, y)$ 为 X 中的一个*距离*.

定义了距离 d 的集合称为一个*距离空间*, 记为 (X, d), 简记为 X.

注1. 在距离的定义中, 保留了实数空间(或者说在平面和 n 维空间)中距离的最基本性质.

从一些具体实例中抽象出问题的本质特征, 加以概括, 给出在一般意义下的定义, 使之能够运用于更加广阔的范围, 是数学研究中的重要方法.

定义 1.1.1 *(距离空间定义)* 设 X 是任一非空集合, 对于 X 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $d(x,y)$ 与它对应, 且满足:

(1) $d(x,y) \geq 0$ (**非负性**);

(2) $d(x,y) = 0$, 当且仅当 $x = y$ (**严格正**);

(3) $d(y,x) = d(x,y)$ (**对称性**);

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (**三角不等式**).

则称 $d(x,y)$ 为 X 中的一个*距离*.

定义了距离 d 的集合称为一个*距离空间*, 记为 (X,d), 简记为 X.

注1. 在距离的定义中, 保留了实数空间(或者说在平面和 n 维空间)中距离的最基本性质.

从一些具体实例中抽象出问题的本质特征, 加以概括, 给出在一般意义下的定义, 使之能够运用于更加广阔的范围, 是数学研究中的重要方法.

2. 性质 (1) – (4) 称为是距离公理, 其中性质 (4) 来源于三角形中的两边之和大于第三边. 见图1.1.1

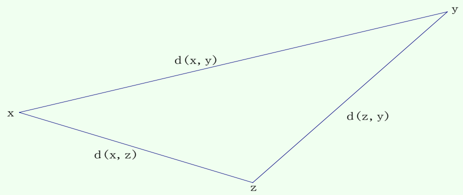

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

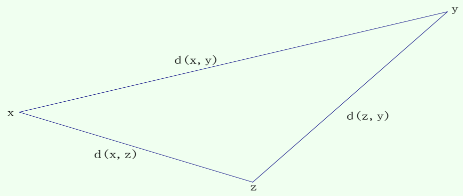

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为:

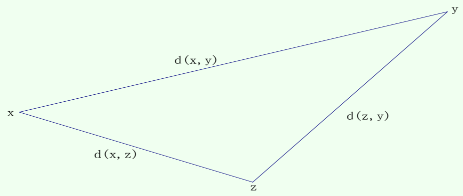

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为:

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

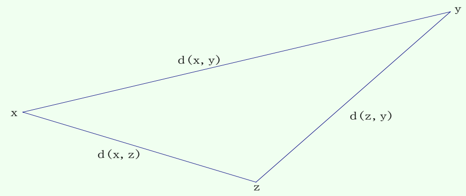

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

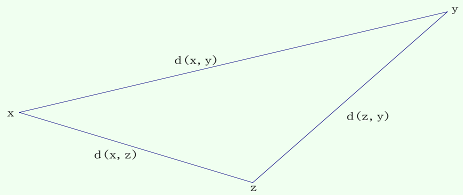

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

$$| d(x, y) - d(y, z) | \leq d(x, z).$$

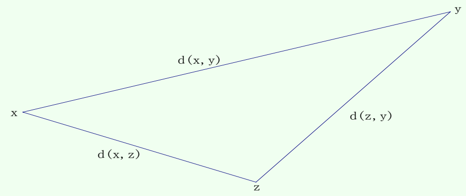

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为：

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

$$| d(x, y) - d(y, z) | \leq d(x, z).$$

即：两边之差小于第三边.

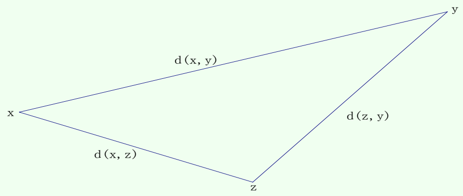

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为：

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

$$\mid d(x, y) - d(y, z) \mid \leq d(x, z).$$

即：两边之差小于第三边.

事实上, 由 $d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y) \Longrightarrow d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$

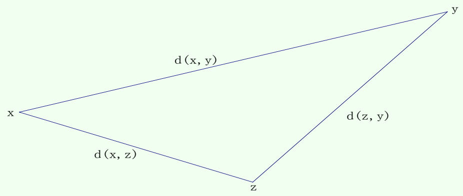

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

$$| \, d(x, y) - d(y, z) \, | \leq d(x, z).$$

即: 两边之差小于第三边.

事实上, 由 $d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y) \Longrightarrow d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$

$d(x, z) + d(x, y) \geq d(y, z) \Longrightarrow d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$

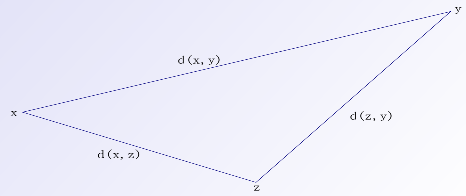

Figure 1.1.1: 平面上的三角不等式

3. 运用数学归纳法, 可把三角不等式推广为：

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

4. 设 (X, d) 是一个距离空间, 由三角不等式可证, 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有

$$| d(x, y) - d(y, z) | \leq d(x, z).$$

即：两边之差小于第三边.

事实上, 由 $d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y) \Longrightarrow d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$

$d(x, z) + d(x, y) \geq d(y, z) \Longrightarrow d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$

我们有上述结论。

二、距离空间的例

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在* n *维实向量空间* $\mathbb{R}^n$ *中, 定义*

$$d(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\Big)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. *则* $(\mathbb{R}^n,d)$ *是一个距离空间.*

二、距离空间的例

例 1.1.2 在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间.

分析: 要证明 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 根据距离空间的定义, 即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间.

分析： 要证明 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 根据距离空间的定义, 即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

前三条（非负、正定、对称）显然成立.

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \eta_k)^2\right)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间.

分析： 要证明 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间, 根据距离空间的定义, 即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

前三条（非负、正定、对称）显然成立.

只需证明 (4) (三角不等式) 成立, 证明主要利用Cauchy 不等式.

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间.

分析： 要证明 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 根据距离空间的定义, 即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

前三条（非负、正定、对称）显然成立.

只需证明 (4) (三角不等式) 成立, 证明主要利用Cauchy 不等式.

证明 (1)-(3)显然成立, 下面验证(4)成立.

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义*

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \eta_k)^2)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间.

分析： 要证明 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间, 根据距离空间的定义, 即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

前三条（非负、正定、对称）显然成立.

只需证明 (4) (三角不等式) 成立, 证明主要利用Cauchy 不等式.

证明 (1)-(3)显然成立, 下面验证(4)成立.

由 Cauchy 不等式 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le (\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2)^{1/2}(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2)^{1/2}$, 可推出：

二、距离空间的例

例 1.1.2 *在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，定义*

$$d(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\Big)^{1/2}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 则 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间.

分析： 要证明 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间，根据距离空间的定义，即要证明在 $\mathbb{R}^n$ 定义的距离(1.1.1) 满足定义 1.1.1 中的条件 (1)-(4).

前三条（非负、正定、对称）显然成立.

只需证明 (4) (三角不等式) 成立，证明主要利用Cauchy 不等式.

证明 (1)-(3)显然成立，下面验证(4)成立.

由 Cauchy 不等式 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}$, 可推出：

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\Big)^{1/2}\le\Big(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\Big)^{1/2}. \tag{1.1.2}$$

事实上,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + 2[(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2)]^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 = [(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2)^{1/2}]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点.

在不等式1.1.2

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2}\leq(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点.

在不等式1.1.2

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2}\leq(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}.$$

中, 令 $a_k=(\xi_k-\zeta_k)$, $b_k=(\zeta_k-\eta_k)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2=[(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点.

在不等式1.1.2

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2}\leq(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2)^{1/2}.$$

中, 令 $a_k=(\xi_k-\zeta_k)$, $b_k=(\zeta_k-\eta_k)$, 则

$$[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2]^{1/2}\leq[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2]^{1/2}+[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2]^{1/2}.$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点.

在不等式1.1.2

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2}\leq(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}.$$

中, 令 $a_k=(\xi_k-\zeta_k)$, $b_k=(\zeta_k-\eta_k)$, 则

$$[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2]^{1/2}\leq[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2]^{1/2}+[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2]^{1/2}.$$

即

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)]^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=[(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}]^2$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意三点. 在不等式1.1.2

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2)^{1/2}\leq(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)^{1/2}+(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2)^{1/2}.$$

中, 令 $a_k=(\xi_k-\zeta_k)$, $b_k=(\zeta_k-\eta_k)$, 则

$$[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2]^{1/2}\leq[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2]^{1/2}+[\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2]^{1/2}.$$

即

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

所以 $(\mathbb{R}^n,d)$ 是一个距离空间, 简记为 $\mathbb{R}^n$. $\square$

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} |\ \xi_k - \eta_k\ |^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} \mid \xi_k - \eta_k \mid^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

例 1.1.3 *在$\mathbb{R}^n$ 中, 可分别定义*

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} |\ \xi_k - \eta_k\ |^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

例 1.1.3 *在$\mathbb{R}^n$ 中, 可分别定义*

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |\ \xi_k - \eta_k\ |, \tag{1.1.3}$$

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} \mid \xi_k - \eta_k \mid^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

例 1.1.3 *在*$\mathbb{R}^n$ *中, 可分别定义*

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mid \xi_k - \eta_k \mid, \tag{1.1.3}$$

$$d_\infty(x,y) = max\{\mid \xi_1 - \eta_1 \mid, \cdots, \mid \xi_n - \eta_n \mid\}, \tag{1.1.4}$$

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} |\ \xi_k - \eta_k\ |^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

例 1.1.3 *在*$\mathbb{R}^n$ *中, 可分别定义*

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |\ \xi_k - \eta_k\ |, \tag{1.1.3}$$

$$d_\infty(x,y) = max\{|\ \xi_1 - \eta_1\ |, \cdots, |\ \xi_n - \eta_n\ |\}, \tag{1.1.4}$$

由实数的三角不等式, 容易验证 $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 都是距离空间.

注1 在 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 可类似的定义距离

$$d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2)^{1/2}.$$

注2 在一个集合上可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间.

例 1.1.3 *在 $\mathbb{R}^n$ 中, 可分别定义*

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|, \tag{1.1.3}$$

$$d_\infty(x,y)=max\{|\xi_1-\eta_1|,\cdots,|\xi_n-\eta_n|\}, \tag{1.1.4}$$

由实数的三角不等式, 容易验证 $(\mathbb{R}^n,d_1)$, $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ 都是距离空间.
证明留给读者.

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) | \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, *其中* c_x *与* j *无关, 即* l^∞ *是全体有界的数列.*

例 1.1.4 *序列空间 l^∞.*

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) \mid \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列.

在 l^∞ 中定义

例 1.1.4 *序列空间 l^∞.*

令 $l^\infty=\{x=(\xi_j) \mid \mid \xi_j \mid\leq c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列.

在 l^∞ 中定义

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\mid \xi_j-\eta_j \mid\}, \tag{1.1.5}$$

例 1.1.4 *序列空间 l^∞.*

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) \mid |\xi_j| \le c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列.

在 l^∞ 中定义

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j - \eta_j|\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y = (\eta_j) \in l^\infty$ 并且 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, □

例 1.1.4 *序列空间 l^∞.*

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) \mid |\xi_j| \le c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列.

在 l^∞ 中定义

$$d(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\xi_j - \eta_j|\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y = (\eta_j) \in l^\infty$ 并且 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

令 $l^\infty=\{x=(\xi_j) \mid |\xi_j| \le c_x\}$, *其中* c_x *与* j *无关, 即* l^∞ *是全体有界的数列.*

在 l^∞ *中定义*

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\xi_j-\eta_j|\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y=(\eta_j)\in l^\infty$ *并且* $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

注意: 由于数列是有界的, （1.1.5）式中的上确界存在.

例 1.1.4 *序列空间 l^∞.*

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) \mid \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列.

在 l^∞ 中定义

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{\mid \xi_j - \eta_j \mid\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y = (\eta_j) \in l^\infty$ 并且 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

注意：由于数列是有界的,（1.1.5）式中的上确界存在.

注 l^∞ 可看作是 $\mathbb{C}^n$ 由(1.1.4)式定义的距离 $d_\infty(x, y)$ 产生的 距离空间 $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$ 的推广, 由于是无穷序列, max 被 sup 所代替,

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) | \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, *其中* c_x *与* j *无关, 即* l^∞ *是全体有界的数列.*

在 l^∞ *中定义*

$$d(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{\mid \xi_j - \eta_j \mid\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y = (\eta_j) \in l^\infty$ *并且* $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

注意： 由于数列是有界的，（1.1.5）式中的上确界存在.

注 l^∞ **可看作是** $\mathbb{C}^n$ 由(1.1.4)式定义的距离 $d_\infty(x,y)$ 产生的 **距离空间** $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$ **的推广**, 由于是无穷序列, max 被 sup 所代替,

例 1.1.5 *连续函数空间* $C[a,b]$.

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) | \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, *其中* c_x *与* j *无关, 即* l^∞ *是全体有界的数列.*

在 l^∞ *中定义*

$$d(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{\mid \xi_j - \eta_j \mid\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y = (\eta_j) \in l^\infty$ *并且* $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

注意：由于数列是有界的，（1.1.5）式中的上确界存在.

注 l^∞ 可看作是 $\mathbb{C}^n$ 由(1.1.4)式定义的距离 $d_\infty(x,y)$ 产生的 距离空间 $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$ 的推广, 由于是无穷序列, max 被 sup 所代替,

例 1.1.5 *连续函数空间* $C[a,b]$.

考虑闭区间 $[a,b]$ *上全体连续函数, 定义*

例 1.1.4 *序列空间* l^∞.

令 $l^\infty=\{x=(\xi_j) \mid \mid \xi_j \mid \leq c_x\}$, *其中* c_x *与* j *无关, 即* l^∞ *是全体有界的数列.*

在 l^∞ *中定义*

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\mid \xi_j-\eta_j \mid\}, \tag{1.1.5}$$

其中 $y=(\eta_j)\in l^\infty$ *并且* $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, □

l^∞ 是一个距离空间（证明留给读者）.

注意：由于数列是有界的，（1.1.5）式中的上确界存在.

注 l^∞ 可看作是 $\mathbb{C}^n$ 由(1.1.4)式定义的距离 $d_\infty(x,y)$ 产生的 距离空间 $(\mathbb{C}^n,d_\infty)$ 的推广, 由于是无穷序列, max 被 sup 所代替,

例 1.1.5 *连续函数空间* $C[a,b]$.

考虑闭区间 $[a,b]$ *上全体连续函数, 定义*

$$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}\mid x(t)-y(t)\mid, \tag{1.1.6}$$

其中 $x(t),y(t)$ *是* $[a,b]$ *上的任意两个连续函数, 则* $C[a,b]$ *是一个距离空间.*

分析: 即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离（1.1.6）满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).

分析: 即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离 (1.1.6) 满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

分析: 即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离 (1.1.6) 满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称）显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

分析: **即要证明在由闭区间** $[a,b]$ **上全体连续函数组成的集合上定义的距离** (1.1.6) **满足定义** (1.1.1)**的**(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

要证 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,**即证**

分析: **即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离 (1.1.6) 满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).**

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

要证 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$,**即证**

$$\max_{a\le t\le b} \mid x(t) - y(t) \mid \le \max_{a\le t\le b} \mid x(t) - z(t) \mid + \max_{a\le t\le b} \mid z(t) - y(t) \mid$$

分析: 即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离 (1.1.6) 满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

要证 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,即证

$$\max_{a\leq t\leq b} \mid x(t) - y(t) \mid \leq \max_{a\leq t\leq b} \mid x(t) - z(t) \mid + \max_{a\leq t\leq b} \mid z(t) - y(t) \mid$$

由绝对值三角不等式,

分析: **即要证明在由闭区间** $[a,b]$ **上全体连续函数组成的集合上定义的距离** (1.1.6) **满足定义** (1.1.1)**的**(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t),y(t),z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

要证 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$,**即证**

$$\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\le \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|$$

由绝对值三角不等式,

$$\begin{aligned}&|x(t)-y(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\le \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|=d(x,z)+d(z,y).\end{aligned}$$

分析: 即要证明在由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上定义的距离（1.1.6）满足定义 (1.1.1)的(1)-(4).

证明(1)-(3)（非负、正定、对称） 显然成立. 下面证(4)成立.

设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意三个连续函数,

要证 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$,即证

$$\max_{a\le t\le b} | x(t) - y(t) | \le \max_{a\le t\le b} | x(t) - z(t) | + \max_{a\le t\le b} | z(t) - y(t) |$$

由绝对值三角不等式,

$$\begin{aligned} & | x(t) - y(t) | \le | x(t) - z(t) | + | z(t) - y(t) | \\ & \le \max_{a\le t\le b} | x(t) - z(t) | + \max_{a\le t\le b} | z(t) - y(t) | = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

两边对 $t \in [a,b]$ 取最大值，我们有

$$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} | x(t) - y(t) | \le d(x,z) + d(z,y).$$

于是 $[a,b]$ 上的全体连续函数赋以上述距离成为一个距离空间, 记为 $C[a,b]$. □

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E |\, x(t)-y(t)\,|\, dt. \tag{1.1.7}$$

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E |\, x(t)-y(t)\,|\, dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间,（请读者验证它是一个距离空间）

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E \mid x(t)-y(t)\mid dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间, （请读者验证它是一个距离空间）
但它与 $C[a,b]$ 空间有很大的不同. （有什么不同？）

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E |\,x(t)-y(t)\,|\,dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间,（请读者验证它是一个距离空间）

但它与 $C[a,b]$ 空间有很大的不同. （有什么不同？）

例 1.1.6 $X=C(-\infty,\infty)$ *是定义在* $(-\infty,\infty)$ *上的实值连续函数的全体, 定义*

$$d(x,y)=\sup_{0<T}\{\min[1/T,\sup_{|t|\le T}|\,x(t)-y(t)\,|]\},$$

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E \mid x(t)-y(t)\mid dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间,（请读者验证它是一个距离空间）
但它与 $C[a,b]$ 空间有很大的不同.（有什么不同？）

例 1.1.6 $X=C(-\infty,\infty)$ *是定义在* $(-\infty,\infty)$ *上的实值连续函数的全体, 定义*

$$d(x,y)=\sup_{0<T}\{\min[1/T,\sup_{|t|\le T}\mid x(t)-y(t)\mid]\},$$

可以证明 (X,d) *是一个距离空间.（留做习题）*

注 在一个集合上, 可以引进多种距离。要根据研究问题的不同，定义不同的距离。

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E \mid x(t)-y(t)\mid dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间,（请读者验证它是一个距离空间）
但它与 $C[a,b]$ 空间有很大的不同. （有什么不同？）

例 1.1.6 $X=C(-\infty,\infty)$ *是定义在* $(-\infty,\infty)$ *上的实值连续函数的全体, 定义*

$$d(x,y)=\sup_{0<T}\{\min[1/T,\sup_{|t|\le T}\mid x(t)-y(t)\mid]\},$$

可以证明 (X,d) *是一个距离空间.（留做习题）*

注 在一个集合上, 可以引进多种距离。要根据研究问题的不同，定义不同的距离。

以后我们可以看到, 在有的距离下空间完备; 有的距离下, 空间不完备.

注 在由闭区间上全体连续函数组成的集合上, 还可定义

$$d(x,y)=\int_E |\ x(t)-y(t)\ |\ dt. \tag{1.1.7}$$

形成一个新的距离空间,（请读者验证它是一个距离空间）
但它与 $C[a,b]$ 空间有很大的不同.（有什么不同？）

例 1.1.6 $X=C(-\infty,\infty)$ *是定义在* $(-\infty,\infty)$ *上的实值连续函数的全体, 定义*

$$d(x,y)=\sup_{0<T}\{\min[1/T,\sup_{|t|\le T}|\ x(t)-y(t)\ |]\},$$

可以证明 (X,d) *是一个距离空间.（留做习题）*

注 在一个集合上, 可以引进多种距离。要根据研究问题的不同，定义不同的距离。
以后我们可以看到, 在有的距离下空间完备; 有的距离下, 空间不完备.
i）空间的完备性是很重要的, 有了完备性, 极限运算（微分和积分）才能很好的进行.

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设 B 为全体由整数组成的元素序列,*

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设* B *为全体由整数组成的元素序列,*

即 $B = \{n = (n_1, n_2, \cdots)|n_i \in N\}$, *定义*

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设 B 为全体由整数组成的元素序列,*

即 $B = \{n = (n_1, n_2, \cdots)|n_i \in N\}$, 定义

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, \text{如果} n_i = m_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \\ \dfrac{1}{k}, \quad k \text{是} n_i \neq m_i \text{头一个指标}, \end{cases}$$

其中 $m = (m_1, m_2, \cdots)$. 可以验证 (B, d) 是一个距离空间,

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设 B 为全体由整数组成的元素序列,*

即 $B=\{n=(n_1,n_2,\cdots)|n_i\in N\}$, 定义

$$d(n,m)=\begin{cases} 0,\text{如果} n_i=m_i,\quad i=1,2,\cdots, \\ \dfrac{1}{k},\quad k\text{是} n_i\neq m_i\text{头一个指标}, \end{cases}$$

其中 $m=(m_1,m_2,\cdots)$. 可以验证 (B,d) 是一个距离空间,

且这个距离满足 “更强” 的三角不等式, 即对于 $\forall n,m,h\in B$, 有

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设 B 为全体由整数组成的元素序列,*

即 $B=\{n=(n_1,n_2,\cdots)|n_i\in N\}$, 定义

$$d(n,m)=\begin{cases}0,\text{如果}n_i=m_i,\quad i=1,2,\cdots,\\ \dfrac{1}{k},\quad k\text{是}n_i\neq m_i\text{头一个指标},\end{cases}$$

其中 $m=(m_1,m_2,\cdots)$. 可以验证 (B,d) 是一个距离空间,

且这个距离满足 “更强” 的三角不等式, 即对于 $\forall n,m,h\in B$, 有

$$d(n,m)\leq\max\{d(n,h),d(h,m)\}\tag{1.1.8}$$

事实上, 只要注意到 n,h 和 h,m 头一个不相等项的指标一定小于或者等于n,m 头一个不相等项的指标, 则有 (1.1.8) 式成立.

ii）不同的距离导出的收敛性不同.

距离空间中距离的选择是十分重要的,

具体定义什么样的距离, 要根据不同的问题, 设定的不同目标, 涉及的不同极限过程, 来引进不同的距离.

例 1.1.7 *设 B 为全体由整数组成的元素序列,*

即 $B=\{n=(n_1,n_2,\cdots)|n_i\in N\}$, 定义

$$d(n,m)=\begin{cases}0,\text{如果} n_i=m_i,\quad i=1,2,\cdots,\\ \frac{1}{k},\quad k\text{是} n_i\neq m_i \text{头一个指标},\end{cases}$$

其中 $m=(m_1,m_2,\cdots)$. 可以验证 (B,d) 是一个距离空间,

且这个距离满足“更强”的三角不等式, 即对于 $\forall n,m,h\in B$, 有

$$d(n,m)\leq \max\{d(n,h),d(h,m)\} \tag{1.1.8}$$

事实上, 只要注意到 n,h 和 h,m 头一个不相等项的指标一定小于或者等于n,m 头一个不相等项的指标, 则有 (1.1.8) 式成立.

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号,

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号,

且 $s(t)$ (i) 每秒取样一次, (ii) 在单位时间看作常量, (iii) 信号码都编译成整数.

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号,

且 $s(t)$ (i) 每秒取样一次, (ii) 在单位时间看作常量, (iii) 信号码都编译成整数.

如图1.1.2所示:

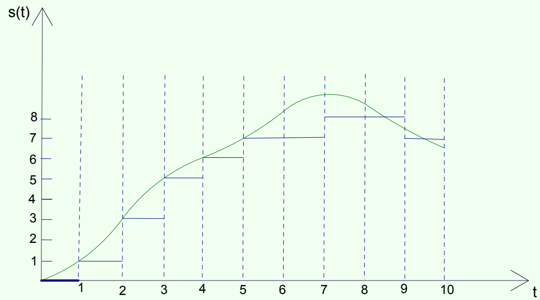

Figure 1.1.2: 通讯信号

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号,

且 $s(t)$ (i) 每秒取样一次, (ii) 在单位时间看作常量, (iii) 信号码都编译成整数.

如图1.1.2所示:

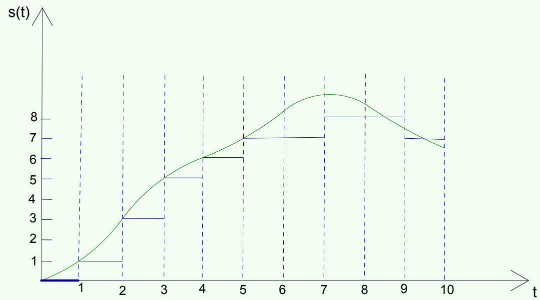

Figure 1.1.2: 通讯信号

在图 1.1.2中表示整数的信号是

$$n_s = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 7, \cdots\}.$$

这一距离, 是从下述数学模型中抽象出来的.

假设 $s(t)$ 是一个通过某一通讯系统送出的信号,

且 $s(t)$ (i) 每秒取样一次, (ii) 在单位时间看作常量, (iii) 信号码都编译成整数.

如图1.1.2所示:

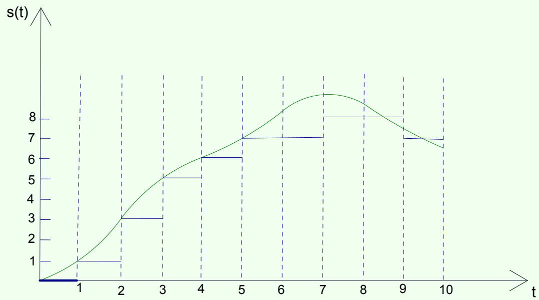

Figure 1.1.2: 通讯信号

在图 1.1.2中表示整数的信号是

$$n_s = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 7, \cdots\}.$$

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 X *是一个非空集合*, $x, y \in X$, *定义*

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 *X 是一个非空集合, $x, y \in X$, 定义*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 X *是一个非空集合*, $x, y \in X$, *定义*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

容易验证d是一个距离, (X, d)是一个距离空间, 称为离散的距离空间, 记为 D.

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 X *是一个非空集合*, $x, y \in X$, *定义*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

容易验证d是一个距离, (X,d)是一个距离空间, 称为离散的距离空间, 记为 D.

注 **许多距离空间是在线性空间上定义的**, 即 X 是一个线性空间, 集合对加法, 数乘是封闭的.

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,
即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 X *是一个非空集合*, $x, y \in X$, *定义*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

容易验证d是一个距离, (X, d)是一个距离空间, 称为离散的距离空间, 记为 D.
注 **许多距离空间是在线性空间上定义的**, 即 X 是一个线性空间, 集合对加法, 数乘是封闭的.
例如 $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, s 都是线性空间.

由于系统和环境的扰动, 收到的信号可能会发生误差. 假定收到的信号是

$$n_r = \{n_{r_1}, n_{r_2}, \cdots\},$$

则我们可以通过送出和收到的信号的距离 $d(n_s, n_r)$ 来刻画多长时间某一个误差发生,

即 $d(n_s, n_r)$ 越小, 则通信系统不发生误差运行的时间越长.

例 1.1.8 *X 是一个非空集合, $x, y \in X$, 定义*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

容易验证d是一个距离, (X, d)是一个距离空间, 称为离散的距离空间, 记为 D.

注 **许多距离空间是在线性空间上定义的**, 即 X 是一个线性空间, 集合对加法, 数乘是封闭的.

例如 $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, s 都是线性空间.

但例 1.1.8 的**离散空间** D **不一定是线性空间**.

三、 收敛点列的定义和性质

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后, 我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后, 我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X,d) 是一个距离空间. $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$,

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X, d) *是一个距离空间.* $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, *如果当* $n \to \infty$ *时,* $d(x_n, x_0) \to 0$, *则称* $\{x_n\}$ *以* x_0 *为极限,*

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X,d) 是一个距离空间. $\{x_n\}\subset X$, $x_0\in X$, 如果当 $n\to\infty$ 时, $d(x_n,x_0)\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X, d) *是一个距离空间.* $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, *如果当* $n \to \infty$ *时*, $d(x_n, x_0) \to 0$, *则称* $\{x_n\}$ *以* x_0 *为极限, 或者说* $\{x_n\}$ *收敛到* x_0, *记为*

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty), \text{ 或者 } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

注1 x_0 必须属于 (X, d).

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X,d) 是一个距离空间. $\{x_n\}\subset X$, $x_0\in X$, 如果当 $n\to\infty$ 时, $d(x_n,x_0)\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{或者}\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

注1 x_0 必须属于 (X,d).

注2 X 是距离空间, 其中 $d(x_n,x_0)\to\ 0\ (n\to\infty)$ 是 数列趋近于零.

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X, d) *是一个距离空间.* $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, *如果当* $n \to \infty$ *时,* $d(x_n, x_0) \to 0$, *则称* $\{x_n\}$ *以* x_0 *为极限, 或者说* $\{x_n\}$ *收敛到* x_0*, 记为*

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty), \text{或者} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

注1 x_0 必须属于 (X, d).

注2 X 是距离空间, 其中 $d(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty)$ 是 数列趋近于零.

注3 对于 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 用 $\varepsilon - N$ 语言表述为:

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后, 我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X, d) 是一个距离空间. $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, 如果当 $n \to \infty$ 时, $d(x_n, x_0) \to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

$$x_n \to x_0\ (n \to \infty),\ \text{或者}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

注1 x_0 必须属于 (X, d).

注2 X 是距离空间, 其中 $d(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty)$ 是 数列趋近于零.

注3 对于 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 用 $\varepsilon - N$ 语言表述为:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \text{当}\, n \geq N\ \text{时},\ \text{有}\, d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

三、 收敛点列的定义和性质

在空间中定义了距离后，我们就可以在距离空间中引入极限的概念.

这是我们的重要目的之一

定义 1.1.9 设 (X,d) 是一个距离空间. $\{x_n\}\subset X$, $x_0\in X$, 如果当 $n\to\infty$ 时, $d(x_n,x_0)\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{或者}\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

注1 x_0 必须属于 (X,d).

注2 X 是距离空间, 其中 $d(x_n,x_0)\to\ 0\ (n\to\infty)$ 是 数列趋近于零.

注3 对于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 用 $\varepsilon-N$ 语言表述为:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \text{当}n\geq N\ \text{时},\ \text{有}d(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

距离空间中收敛点列的性质:

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在 X 中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

(ii) 若 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限, 则它的任何子列也收敛到 x_0.

分析: 利用距离空间中数列极限的定义来证明.

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ **语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ **语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ **语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

同时存在 N_2, 当 $n \geq N_2$ 时,

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) *若* x_0 *是* $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ **语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

同时存在 N_2, 当 $n \geq N_2$ 时,

$$d(y_0, x_n) < \varepsilon_0.$$

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ **语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

同时存在 N_2, 当 $n \geq N_2$ 时,

$$d(y_0, x_n) < \varepsilon_0.$$

于是当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时,

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$.

根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ 语言, 我们有: 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

同时存在 N_2, 当 $n \geq N_2$ 时,

$$d(y_0, x_n) < \varepsilon_0.$$

于是当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < 2\varepsilon_0 = d(x_0, y_0),$$

定理 1.1.10 $\{x_n\}$ *在* X *中收敛, 则*

(i) $\{x_n\}$ ***的极限是唯一的.***

(ii) ***若*** x_0 ***是*** $\{x_n\}$ ***的极限, 则它的任何子列也收敛到*** x_0.

分析: **利用距离空间中数列极限的定义来证明.**

证明

(i)**反证法.** 假设同时有 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0 (n \to \infty)$. **根据收敛数列的 $\varepsilon - N$ 语言, 我们有:** 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(x_0, y_0) > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geq N_1$ 时,

$$d(x_0, x_n) < \varepsilon_0,$$

同时存在 N_2, 当 $n \geq N_2$ 时,

$$d(y_0, x_n) < \varepsilon_0.$$

于是当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < 2\varepsilon_0 = d(x_0, y_0),$$

这是不可能的, 因此极限唯一.

(ii) 与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.

(ii) 与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

(ii) **与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.**

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

(ii) 与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (要证 $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$.)

(ii) **与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.**

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (**要证** $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$.)

由 $n_k \geq k$, $n_k \to \infty\ (k \to \infty)$.

(ii) **与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.**

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (**要证** $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$.)

由 $n_k \geq k$, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

取 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > K = N$, 于是

(ii) 与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.

由已知 $x_n \to x_0(n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (要证 $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$.)

由 $n_k \geq k$, $n_k \to \infty\ (k \to \infty)$.

取 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon,$$

(ii) **与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.**

由已知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (**要证** $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$.)

由 $n_k \geq k$, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

取 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0.$$

定理 1.1.11 $d(x, y)$*是关于*x*和*y*的二元连续函数*.

(ii) 与数学分析中(通常实数域距离空间中)收敛数列类似性质的证明方法一样.

由已知 $x_n \to x_0(n \to \infty)$, 据定义有: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, (要证 $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$.)

由 $n_k \geq k$, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

取 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > K = N$, 于是

$$d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

定理 1.1.11 $d(x, y)$是关于x和y的二元连续函数.

即当 $x_n \to x, y_n \to y(n \to \infty)$ 时,

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y)(n \to \infty).$$

分析：在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x,y 都有唯一确定的 实数 $d(x,y)$ 与之对应,

分析：在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x,y 都有唯一确定的 实数 $d(x,y)$ 与之对应,

$d(x,y)$ 是一个 二元实函数.

分析： 在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x, y 都有唯一确定的 实数 $d(x,y)$ 与之对应,

$d(x,y)$ 是一个 二元实函数.

定理即要证： 在通常的绝对值距离实数域空间中, 在条件

$x_n \to x, y_n \to y(n \to \infty)$ 下，有

分析： 在距离空间 (X, d) 中对于任何两点 x, y 都有唯一确定的 实数 $d(x, y)$ 与之对应,

$d(x, y)$ 是一个 二元实函数.

定理即要证： 在通常的绝对值距离实数域空间中, 在条件

$x_n \to x, y_n \to y(n \to \infty)$ 下， 有

$$| d(x_n, y_n) - d(x, y) | \to 0 \ (n \to \infty).$$

分析：在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x,y 都有唯一确定的 实数 $d(x,y)$ 与之对应,

$d(x,y)$ 是一个 二元实函数.

定理即要证：在通常的绝对值距离实数域空间中，在条件

$x_n \to x, y_n \to y(n\to\infty)$ 下，有

$$\mid d(x_n,y_n)-d(x,y)\mid \to 0\ (n\to\infty).$$

证明 由距离的三角不等式有：

$$d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n),$$

即 $$d(x_n,y_n)-d(x,y)\le d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

分析： 在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x,y 都有唯一确定的 实数 $d(x,y)$ 与之对应,

$d(x,y)$ 是一个 二元实函数.

定理即要证： 在通常的绝对值距离实数域空间中, 在条件 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty)$ 下，有

$$|\ d(x_n,y_n) - d(x,y)\ | \to 0\ (n \to \infty).$$

证明 由距离的三角不等式有:

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n),$$

即 $\qquad d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y_n,y),$

同理有 $d(x,y) - d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(y_n,y),$

分析：在距离空间 (X,d) 中对于任何两点 x,y 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应,

$d(x,y)$ 是一个二元实函数.

定理即要证：在通常的绝对值距离实数域空间中, 在条件 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty)$ 下，有

$$| d(x_n,y_n) - d(x,y) | \to 0 \ (n \to \infty).$$

证明 由距离的三角不等式有：

$$d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n),$$

即 $\quad d(x_n,y_n) - d(x,y) \le d(x_n,x) + d(y_n,y),$

同理有 $d(x,y) - d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(y_n,y),$

于是有

$$| d(x_n,y_n) - d(x,y) | \le d(x_n,x) + d(y_n,y) \to 0 \ (n \to \infty).$$

$\square$

四、 距离空间中收敛的“含义”

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间. 设*

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中，我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间. 设*

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的 “具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间.* 设

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n, x) \to 0$, 等价于

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间.* 设

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n, x) \to 0$, *等价于*

$$\xi_i^n \to \xi_i \ (n \to \infty), i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1.10}$$

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ 空间. 设

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n, x) \to 0$, 等价于

$$\xi_i^n \to \xi_i \ (n \to \infty), i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间. 设*
$x_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\cdots,\xi_m^n)(n=1,2,\cdots)$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$,
则 $d(x_n,x)\to 0$, *等价于*

$$\xi_i^n\to\xi_i\ (n\to\infty), i=1,2,\cdots,m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

证明 $d(x_n,x)\to 0$, **即** $\sqrt{(\xi_1^n-\xi_1)^2+(\xi_2^n-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_m^n-\xi_m)^2}\to 0.\ (n\to\infty)$

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ *空间. 设*

$x_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\cdots,\xi_m^n)(n=1,2,\cdots)$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n,x)\to 0$, *等价于*

$$\xi_i^n\to\xi_i\ (n\to\infty), i=1,2,\cdots,m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

证明 $d(x_n,x)\to 0$, **即** $\sqrt{(\xi_1^n-\xi_1)^2+(\xi_2^n-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_m^n-\xi_m)^2}\to 0.\ (n\to\infty)$

由下述不等式

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中，我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ 空间. 设

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n, x) \to 0$, 等价于

$$\xi_i^n \to \xi_i \ (n \to \infty), i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

证明 $d(x_n, x) \to 0$, **即** $\sqrt{(\xi_1^n - \xi_1)^2 + (\xi_2^n - \xi_2)^2 + \cdots + (\xi_m^n - \xi_m)^2} \to 0.$ $(n \to \infty)$

由下述不等式

$$|\xi_i^n - \xi_i| \leq (\sum_{k=1}^m |\xi_k^n - \xi_k|^2)^{1/2} = d(x_n, x), \ \ i = 1, 2, \cdots, m$$

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ 空间. 设

$x_n=(\xi_1^n,\xi_2^n,\cdots,\xi_m^n)(n=1,2,\cdots)$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n,x)\to 0$, 等价于

$$\xi_i^n\to\xi_i\ (n\to\infty), i=1,2,\cdots,m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

证明 $d(x_n,x)\to 0$, **即** $\sqrt{(\xi_1^n-\xi_1)^2+(\xi_2^n-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_m^n-\xi_m)^2}\to 0.\ (n\to\infty)$

由下述不等式

$$|\xi_i^n-\xi_i|\le(\sum_{k=1}^m|\xi_k^n-\xi_k|^2)^{1/2}=d(x_n,x),\ \ i=1,2,\cdots,m$$

$$d(x_n,x)=(\sum_{k=1}^m|\xi_k^n-\xi_k|^2)^{1/2}\le|\xi_1^n-\xi_1|+\cdots+|\xi_m^n-\xi_m|.$$

四、 距离空间中收敛的“含义”

下面在一些距离空间中, 我们研究收敛的“具体含义”.

例 1.1.12 $\mathbb{R}^m$ 空间. 设

$x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n)(n = 1, 2, \cdots)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

则 $d(x_n, x) \to 0$, 等价于

$$\xi_i^n \to \xi_i \ (n \to \infty), i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1.10}$$

在$\mathbb{R}^m$ 空间中，点列的收敛，等价于 按坐标收敛.

证明 $d(x_n, x) \to 0$, **即** $\sqrt{(\xi_1^n - \xi_1)^2 + (\xi_2^n - \xi_2)^2 + \cdots + (\xi_m^n - \xi_m)^2} \to 0.$ $(n \to \infty)$

由下述不等式

$$|\xi_i^n - \xi_i| \leq (\sum_{k=1}^m |\xi_k^n - \xi_k|^2)^{1/2} = d(x_n, x), \ \ i = 1, 2, \cdots, m$$

$$d(x_n, x) = (\sum_{k=1}^m |\xi_k^n - \xi_k|^2)^{1/2} \leq |\xi_1^n - \xi_1| + \cdots + |\xi_m^n - \xi_m|.$$

即可得到结论（空间中点列的收敛，等价于 按坐标收敛）. □

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

例 1.1.13 *$C[a,b]$空间.*

$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}\mid x_n(t)-x(t)\mid\to 0(n\to\infty).$$

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots), x(t)\in C[a,b]$, **且** $d(x_n,x)\to 0$, **即**

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0, \exists N$, **当** $n\ge N$ **时**, **对** $\forall t\in[a,b]$, **有**

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\leq t\leq b} | x_n(t)-x(t) |\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\geq 0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$| x_n(t)-x(t) | \leq \max_{a\leq t\leq b} | x_n(t)-x(t) | < \varepsilon,$$

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即：$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即: $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$, 我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即：$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$, 我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

事实上， $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，即：

例 1.1.13 $C[a,b]$*空间.*

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即：$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之，$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

事实上， $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，即：

对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\leq t\leq b}\mid x_n(t)-x(t)\mid\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\geq 0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$\mid x_n(t)-x(t)\mid\leq\max_{a\leq t\leq b}\mid x_n(t)-x(t)\mid<\varepsilon,$$

即: $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$, 我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

事实上, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$, 即:

对于 $\forall\varepsilon\geq 0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$\mid x_n(t)-x(t)\mid<\varepsilon,$$

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$, $x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}\mid x_n(t)-x(t)\mid\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\geq 0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$\mid x_n(t)-x(t)\mid\leq\max_{a\le t\le b}\mid x_n(t)-x(t)\mid<\varepsilon,$$

即： $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之, $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$, 我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

事实上， $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，即：

对于 $\forall\varepsilon\geq 0,\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$\mid x_n(t)-x(t)\mid<\varepsilon,$$

上式两边对 $t\in[a,b]$ 取最大值, 则

$$\max_{a\le t\le b}\mid x_n(t)-x(t)\mid\leq\varepsilon$$

例 1.1.13 $C[a,b]$空间.

$C[a,b]$ ***中的收敛性是函数列在*** $[a,b]$***上的一致收敛.***

设 $x_n(t)(n=1,2,\cdots),\ x(t)\in C[a,b]$, 且 $d(x_n,x)\to 0$, 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

于是对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即：$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

反之，$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，我们可以推出 $d(x_n,x)\to 0$.

事实上， $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$，即：

对于 $\forall\varepsilon\ge 0,\exists N$, 当 $n\ge N$ 时, 对 $\forall t\in[a,b]$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

上式两边对 $t\in[a,b]$ 取最大值, 则

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon$$

即 $x_n\to x$. 这说明 即 $C[a,b]$ 中的收敛 是函数列在 $[a,b]$上的一致收敛.

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y)=\{\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y) = \{\int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离（证明见第二章第2节）.

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y)=\{\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离（证明见第二章第2节）.

考虑 (X,d_2) 中的点列 $\{x_n\}$,

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y)=\{\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离（证明见第二章第2节）.

考虑 (X,d_2) 中的点列 $\{x_n\}$,

$$x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & 0\le t\le 1/n,\\ 0, & 1/n<t\le 1.\end{cases}$$

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y)=\{\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离（证明见第二章第2节）.

考虑 (X,d_2) 中的点列 $\{x_n\}$,

$$x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & 0\le t\le 1/n,\\ 0, & 1/n<t\le 1.\end{cases}$$

则 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0\equiv 0$.

例 1.1.14 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义

$$d_2(x,y)=\{\int_0^1 \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}. \tag{1.1.11}$$

可以证明，$d_2(x,y)$是X 上定义的距离（证明见第二章第2节）.

考虑 (X,d_2) 中的点列 $\{x_n\}$,

$$x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & 0\le t\le 1/n,\\ 0, & 1/n<t\le 1.\end{cases}$$

则 $\{x_n\}$ 收敛到 $x_0\equiv 0$.

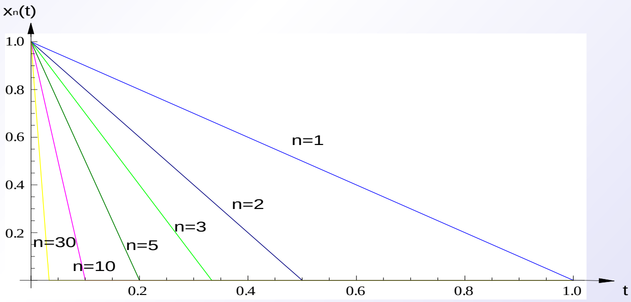

Figure 1.1.3: 函数列

事实上,

$$d_2(x_n, x_0) = \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2}$$
$$= \{\int_0^1 (1 - nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}.$$

事实上,

$$d_2(x_n, x_0) = \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2}$$

$$= \{\int_0^1 (1 - nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}.$$

注: 1. 上述 $\{x_n\}$ 在距离(1.1.7)下也收敛到 x_0.

$$d(x, y) = \int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid dt. \qquad (1.1.7)$$

事实上,

$$\begin{aligned} d_2(x_n,x_0) &= \{\int_0^1 \mid x_n(t)-x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2} \\ &= \{\int_0^1 (1-nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}. \end{aligned}$$

注: 1. 上述 $\{x_n\}$ 在距离(1.1.7)下也收敛到 x_0.

$$d(x,y) = \int_0^1 \mid x(t)-y(t) \mid dt. \tag{1.1.7}$$

请读者自己证明.

事实上,

$$
\begin{aligned}
d_2(x_n, x_0) &= \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2} \\
&= \{\int_0^1 (1-nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

注: 1. 上述 $\{x_n\}$ 在距离(1.1.7)下也收敛到 x_0.

$$d(x, y) = \int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid dt. \tag{1.1.7}$$

请读者自己证明.

2. 但是由于 $x_n(0) \equiv 1$,

事实上,

$$d_2(x_n, x_0) = \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2}$$
$$= \{\int_0^1 (1-nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}.$$

注: 1. 上述 $\{x_n\}$ 在距离(1.1.7)下也收敛到 x_0.

$$d(x,y) = \int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid dt. \tag{1.1.7}$$

请读者自己证明.

2. 但是由于 $x_n(0) \equiv 1$,

$\{x_n\}$ 并不一致收敛到 x_0, (甚至$x_n(t)$ 都不是每点都收敛到$x_0(t)$.)

事实上,

$$\begin{aligned} d_2(x_n, x_0) &= \{\int_0^1 \mid x_n(t) - x_0(t) \mid^2 dt\}^{1/2} \\ &= \{\int_0^1 (1-nt)^2 dt\}^{1/2} = (3n)^{-1/2}. \end{aligned}$$

注: 1. 上述 $\{x_n\}$ 在距离(1.1.7)下也收敛到 x_0.

$$d(x,y) = \int_0^1 \mid x(t) - y(t) \mid dt. \tag{1.1.7}$$

请读者自己证明.

2. 但是由于 $x_n(0) \equiv 1$,

$\{x_n\}$ 并不一致收敛到 x_0,（甚至$x_n(t)$ 都不是每点都收敛到$x_0(t)$.）

这说明 **这些空间中点列(函数列)的收敛与 $C[a,b]$ 中点列的收敛在“具体意义”下有很大的不同.**

例 1.1.15 *在* $C[0,1]$ *我们重新考虑上面的例子.*

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n, x_0) \equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n, x_0) \equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n,x_0)\equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

$$y_0(t)=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & 0<t<1.\end{cases}$$

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n,x_0)\equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

$$y_0(t)=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & 0<t<1.\end{cases}$$

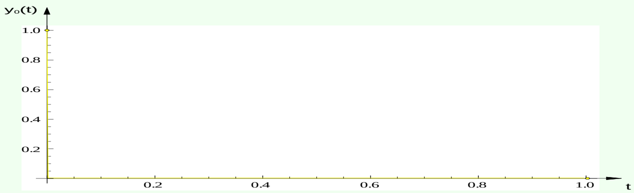

Figure 1.1.4: 函数y0

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,*都有* $d(x_n, x_0) \equiv 1$, *于是*$\{x_n\}$*不收敛到*x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

$$y_0(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

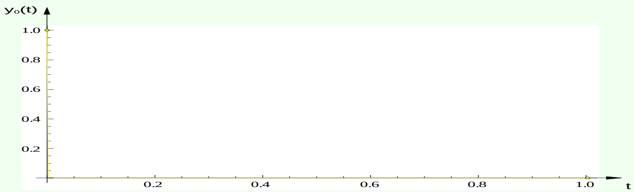

Figure 1.1.4: 函数y0

但是我们首先要注意到$y_0 \bar{\in} C[0,1]$, 于是$\{x_n\}$ 不能趋近到y_0.

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n, x_0) \equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

$$y_0(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

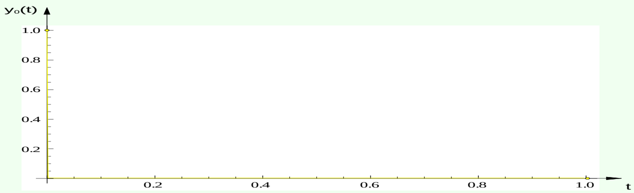

Figure 1.1.4: 函数y0

但是我们首先要注意到$y_0 \overline{\in} C[0,1]$, 于是$\{x_n\}$ 不能趋近到y_0.

事实上, 对与 $\forall N$, $\exists n, m > N$, 使得 $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}$, 可见在空间 $C[0,1]$ 中, 这个点列 $\{x_n\}$ 不收敛. □

例 1.1.15 *在 $C[0,1]$ 我们重新考虑上面的例子.*

由于对于任何的 n,都有 $d(x_n,x_0)\equiv 1$, 于是$\{x_n\}$不收敛到x_0.

我们可能会认为 $\{x_n\}$ 趋近到 y_0, 其中

$$y_0(t)=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & 0<t<1.\end{cases}$$

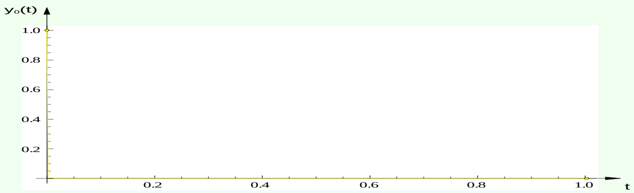

Figure 1.1.4: 函数y0

但是我们首先要注意到$y_0\bar{\in}C[0,1]$, 于是$\{x_n\}$ 不能趋近到y_0.

事实上, 对与 $\forall N$, $\exists n,m>N$, 使得 $d(x_n,x_m)\geq\frac{1}{2}$, 可见在空间 $C[0,1]$ 中, 这个点列 $\{x_n\}$ 不收敛. □

注： 上述例子可以看到, **同一个点列, 在不同的距离空间收敛性会不相同.**

例 1.1.16 *空间* s.

例 1.1.16 *空间* s.

设 $s = \{\{\xi_n\}\}$, *即全体实数列组成的集合. 定义*

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, *即全体实数列组成的集合. 定义*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}. \tag{1.1.12}$$

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, *即全体实数列组成的集合. 定义*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, *则*

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\mid\xi_k-\eta_k\mid}{1+\mid\xi_k-\eta_k\mid}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为距离空间;

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, *即全体实数列组成的集合. 定义*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\mid\xi_k-\eta_k\mid}{1+\mid\xi_k-\eta_k\mid}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}$, *则*

1. s *为距离空间;*

2. s *中的收敛是按坐标收敛. 即*

例 1.1.16 空间 s.

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k-\eta_k\,|}{1+|\,\xi_k-\eta_k\,|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为距离空间;
2. s 中的收敛是按坐标收敛. 即

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s,$

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, *即全体实数列组成的集合. 定义*

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}$, *则*

1. s *为距离空间;*

2. s *中的收敛是按坐标收敛. 即*

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s,$

则 "$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$" 等价于 $\forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

例 1.1.16 *空间 s.*

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k-\eta_k\,|}{1+|\,\xi_k-\eta_k\,|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为**距离空间**;
2. s 中的收敛是**按坐标收敛**. 即

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s$,

则 "$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$" 等价于 $\forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

分析 1. 要证 s 为距离空间, 只要证明在 s 中所定义的距离 d 满足距离定义的4条即可. 其中 (1), (2), (3) 显然成立,

例 1.1.16 空间 s.

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k-\eta_k\,|}{1+|\,\xi_k-\eta_k\,|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为**距离空间**;
2. s 中的收敛是**按坐标收敛**. 即

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s,$

则 "$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$" 等价于 $\forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

分析 1. 要证 s 为距离空间, 只要证明在 s 中所定义的距离 d 满足距离定义的4条即可. 其中 (1), (2), (3) 显然成立,

只要验证 (4) 三角不等式成立, 即 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

例 1.1.16 空间 s.

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为**距离空间**;
2. s 中的收敛是**按坐标收敛**. 即

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s, \quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s$,

则 "$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$" 等价于 $\forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

分析 1. 要证 s 为距离空间, 只要证明在 s 中所定义的距离 d 满足距离定义的4条即可. 其中 (1), (2), (3) 显然成立,

只要验证 (4) 三角不等式成立, 即 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

利用函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 的单增性, 以及三角绝对值不等式, 可以加以证明.

例 1.1.16 空间 s.

设 $s=\{\{\xi_n\}\}$, 即全体实数列组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k-\eta_k\,|}{1+|\,\xi_k-\eta_k\,|}. \tag{1.1.12}$$

其中 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}$, 则

1. s 为距离空间;
2. s 中的收敛是按坐标收敛. 即

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s$,

则 "$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$" 等价于 $\forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$.

分析 1. 要证 s 为距离空间, 只要证明在 s 中所定义的距离 d 满足距离定义的4条即可. 其中 (1),(2),(3) 显然成立,

只要验证 (4) 三角不等式成立, 即 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

利用函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 的单增性, 以及三角绝对值不等式, 可以加以证明.

证明 1. 验证 (4) 成立.

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},\ t\in(0,\infty)$, $\varphi(t)$ **是单增的**.

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},\ t\in(0,\infty)$**,** $\varphi(t)$ **是单增的**.

设 $x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\},z=\{\zeta_k\}$, 由于

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, $t \in (0, \infty)$, $\varphi(t)$ **是单增的**.

设 $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\}, z = \{\zeta_k\}$, 由于

$$\mid \xi_k - \eta_k \mid \leq \mid \xi_k - \zeta_k \mid + \mid \zeta_k - \eta_k \mid,$$

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t},\ t\in(0,\infty)$, $\varphi(t)$ **是单增的**.

设 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}, z=\{\zeta_k\}$, 由于

$$|\ \xi_k-\eta_k\ |\leq|\ \xi_k-\zeta_k\ |+|\ \zeta_k-\eta_k\ |,$$

结合 $\varphi(t)$ 是单增的, 则

$$\frac{|\ \xi_k-\zeta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\zeta_k\ |}\leq\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |+|\ \eta_k-\zeta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |+|\ \eta_k-\zeta_k\ |}\leq\frac{|\ \xi_k-\eta_k\ |}{1+|\ \xi_k-\eta_k\ |}+\frac{|\ \eta_k-\zeta_k\ |}{1+|\ \eta_k-\zeta_k\ |}.$$

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$, $t\in(0,\infty)$, $\varphi(t)$ **是单增的**.

设 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}, z=\{\zeta_k\}$, 由于

$$|\xi_k-\eta_k|\le|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|,$$

结合 $\varphi(t)$ 是单增的, 则

$$\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\le\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\le\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}.$$

在上面不等式两边乘以 $\frac{1}{2^k}$ 并求和, 有

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

证明 1. 验证 (4) 成立.

考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$, $t\in(0,\infty)$, $\varphi(t)$ **是单增的**.

设 $x=\{\xi_k\}, y=\{\eta_k\}, z=\{\zeta_k\}$, 由于

$$|\xi_k-\eta_k|\leq|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|,$$

结合 $\varphi(t)$ 是单增的, 则

$$\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\leq\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\leq\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}.$$

在上面不等式两边乘以 $\frac{1}{2^k}$ 并求和, 有

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}=d(x,z)+d(z,y).$$

我们把这个距离空间记为 s.

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \iff \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证: **对于任意给定的** $k \in N$, **要能做到**:

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证： 对于任意给定的 $k \in N$, **要能做到：**

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$, **当** $n > N$ **时, 有** $\mid \xi_k^{(n)} - \xi_k \mid < \varepsilon$.

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证: **对于任意给定的** $k \in N$, **要能做到**:

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,$ **当** $n > N$ **时**, **有** $|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \varepsilon$.

证明 "$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$,

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证：对于任意给定的 $k \in N$, **要能做到：**

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N,$ **当** $n > N$ **时，有** $|\, \xi_k^{(n)} - \xi_k \,| < \varepsilon$.

证明 "$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$,

由于 $d(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$，对于这个$\varepsilon_0 > 0$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证：对于任意给定的 $k \in N$, **要能做到：**

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$, **当** $n > N$ **时，有** $|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \varepsilon$.

证明“$\Longrightarrow$” 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$,

由于 $d(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$，对于这个$\varepsilon_0 > 0$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$d(x_n, x) < \varepsilon_0$, 即：

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$.

必要性要证: **对于任意给定的** $k \in N$, **要能做到**:

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$, **当** $n > N$ **时**, **有** $|\, \xi_k^{(n)} - \xi_k \,| < \varepsilon$.

证明 "$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$,

由于 $d(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$，对于这个$\varepsilon_0 > 0,\ \exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$d(x_n, x) < \varepsilon_0$, 即:

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\, \xi_k^{(n)} - \xi_k \,|}{1 + |\, \xi_k^{(n)} - \xi_k \,|} < \varepsilon_0 = \frac{1}{2^{k_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n,x)\to 0 \iff \forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k$.

必要性要证：对于任意给定的 $k\in N$, **要能做到：**

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N$, **当** $n>N$ **时，有** $|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|<\varepsilon$.

证明"$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$,

由于 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，对于这个$\varepsilon_0>0$, $\exists\,N$, 当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,x)<\varepsilon_0$, 即：

$$d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}{1+|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}<\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

由于每项都是正的，于是我们有

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n,x)\to 0 \Longleftrightarrow \forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k$.

必要性要证: **对于任意给定的** $k\in N$, **要能做到**:

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N$, **当** $n>N$ **时**, **有** $|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|<\varepsilon$.

证明 "$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$,

由于 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，对于这个$\varepsilon_0>0$, $\exists\,N$, 当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,x)<\varepsilon_0$, 即:

$$d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}{1+|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}<\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

由于每项都是正的，于是我们有

$$\frac{1}{2^{k_0}}\frac{|\,{\xi_{k_0}}^{(n)}-\xi_0\,|}{1+|\,{\xi_{k_0}}^{(n)}-\xi_{k_0}\,|}<\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

我们把这个距离空间记为 s.

分析: 2. **要证明** $d(x_n,x)\to 0 \iff \forall k,\ \xi_k^{(n)}\to\xi_k$.

必要性要证：对于任意给定的 $k\in N$, **要能做到：**

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N$, **当** $n>N$ **时，有** $|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|<\varepsilon$.

证明 "$\Longrightarrow$" 对于任意给定的 k_0, 对于 $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$,

由于 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，对于这个$\varepsilon_0>0$, $\exists\,N$, 当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,x)<\varepsilon_0$, 即：

$$d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}{1+|\,\xi_k^{(n)}-\xi_k\,|}<\varepsilon_0=\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

由于每项都是正的，于是我们有

$$\frac{1}{2^{k_0}}\frac{|\,\xi_{k_0}{}^{(n)}-\xi_0\,|}{1+|\,\xi_{k_0}{}^{(n)}-\xi_{k_0}\,|}<\frac{1}{2^{k_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

结合$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 是单增的, 我们有 $|\,\xi_{k_0}{}^{(n)}-\xi_{k_0}\,|<\varepsilon$, 即 $\xi_{k_0}{}^{(n)}\to\xi_{k_0}\ (n\to\infty)$.

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数, 充分靠后面的无穷多项可以任意小.

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数，充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项, 由条件可以找到共同的 N, 当 $n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数, 充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项, 由条件可以找到共同的 N, 当$n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 "$\Longleftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数，充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项，由条件可以找到共同的 N，当 $n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 “$\Longleftarrow$” 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

由于 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k\ (n \to \infty)\ (k = 1, 2, \cdots, K)$,

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数, 充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项, 由条件可以找到共同的 N, 当$n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 “$\Longleftarrow$” 对于 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

由于 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k\ (n \to \infty)\ (k = 1, 2, \cdots, K)$,

所以存在 N, 当 $n > N$时, $|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \frac{1}{2}\varepsilon\ \ (k = 1, 2, \cdots, K).$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数，充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项，由条件可以找到共同的 N，当 $n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 "$\Longleftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K$，使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

由于 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k\ (n \to \infty)\ (k = 1, 2, \cdots, K)$，

所以存在 N，当 $n > N$时，$|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \frac{1}{2}\varepsilon\ \ (k = 1, 2, \cdots, K).$

于是当 $n > N$ 时，

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数, 充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项, 由条件可以找到共同的 N, 当 $n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 "$\Longleftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

由于 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k\ (n \to \infty)\ (k = 1, 2, \cdots, K)$,

所以存在 N, 当 $n > N$时, $|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \frac{1}{2}\varepsilon\ \ (k = 1, 2, \cdots, K).$

于是当 $n > N$ 时,

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

即 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛到 x. $\square$

分析: 充分性我们要证 $\forall k,\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$

即要证明 $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1+|\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \longrightarrow 0.$

注意到收敛的级数，充分靠后面的无穷多项可以任意小.

对于前面的有限项, 由条件可以找到共同的 N, 当 $n > N$ 时级数中的这些项都一致很小.

证明 "$\Longleftarrow$" 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 使得 $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\varepsilon.$

由于 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k\ (n \to \infty)\ (k = 1, 2, \cdots, K)$,

所以存在 N, 当 $n > N$时, $|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ | < \frac{1}{2}\varepsilon\ \ (k = 1, 2, \cdots, K).$

于是当 $n > N$ 时,

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}{1+|\ \xi_k^{(n)} - \xi_k\ |}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

即 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛到 x. $\square$

注 在式有关级数的证明中, 由级数的收敛性, 先让后面的项“很小”, 再对前面的有限项进行估计, 这是很常用的办法.

注 在式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.

例 1.1.17 *空间 S.*

注 **在式有关级数的证明中, 由级数的收敛性, 先让后面的项“很小”, 再对前面的有限项进行估计, 这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数, 其中

注 **在式有关级数的证明中, 由级数的收敛性, 先让后面的项“很小”, 再对前面的有限项进行估计, 这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数, 其中 $E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集, 且 $mE < \infty$.

注 在式有关级数的证明中, 由级数的收敛性, 先让后面的项“很小”, 再对前面的有限项进行估计, 这是很常用的办法.

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数, 其中

$E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集, 且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$, 定义

注 在式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.

例 1.1.17 空间 S.

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数，其中 $E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集，且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$，定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{|\, x(t) - y(t)\,|}{1 + |\, x(t) - y(t)\,|} dt.$$

注 **在式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数，其中 $E \subset R$ 是一个$Lebesgue$可测集，且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$，定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{| x(t) - y(t) |}{1 + | x(t) - y(t) |} dt.$$

则

注 **在式有关级数的证明中, 由级数的收敛性, 先让后面的项“很小”, 再对前面的有限项进行估计, 这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数, 其中 $E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集, 且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$, 定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{|\, x(t) - y(t)\,|}{1 + |\, x(t) - y(t)\,|} dt.$$

则

(1) S 为距离空间;

注 **在式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数，其中 $E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集，且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$，定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{| x(t) - y(t) |}{1+ | x(t) - y(t) |} dt.$$

则

*(1) S 为**距离空间**;*

*(2) S 中的收敛是**按测度收敛**.*

注 **在式有关级数的证明中，由级数的收敛性，先让后面的项“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法.**

例 1.1.17 *空间 S.*

S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数，其中

$E \subset R$ 是一个Lebesgue可测集，且 $mE < \infty$.

对于 $x = x(t), y = y(t) \in S$，定义

$$d(x, y) = \int_E \frac{| x(t) - y(t) |}{1+ | x(t) - y(t) |} dt.$$

则

*(1) S 为**距离空间**;*

*(2) S 中的收敛是**按测度收敛**.*

即 $d(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$，等价于$x_n \xrightarrow{m} x (n \to \infty)$ (依测度收敛).

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) “$\Longrightarrow$” 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x (n \to \infty)$.

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

.

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是测度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

即对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$时,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是测度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

即对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$时,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

我们把将集合 E 分成两部分: 对于任意给定的 $\sigma > 0$ 和 自然数 n,

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

即对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$时,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

我们把将集合 E 分成两部分: 对于任意给定的 $\sigma > 0$ 和 自然数 n,

令 $E_1 = \{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | < \sigma\}$,

(1) **用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.**

(2) "$\Longrightarrow$" **分析**: **由** $d(x_n, x) \to 0$ **要推出** $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ **对于** $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

即对于$\forall \varepsilon > 0$, **存在** N, **当** $n > N$**时**,

$$m\{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

我们把将集合 E 分成两部分: 对于任意给定的 $\sigma > 0$ 和 自然数 n,

令 $E_1 = \{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | < \sigma\}$,

$E_2 = \{t \in E \mid | x_n(t) - x(t) | \geq \sigma\}$,

(1) 用例 1.1.16 的方法可证明 S 是一个距离空间.

(2) "$\Longrightarrow$" 分析: 由 $d(x_n, x) \to 0$ 要推出 $x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty)$.

什么是侧度收敛?

$x_n \xrightarrow{m} x(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ 对于 $\forall \sigma > 0$,

$$m\{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\} \longrightarrow 0,$$

即对于$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$时,

$$m\{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

我们把将集合 E 分成两部分: 对于任意给定的 $\sigma > 0$ 和 自然数 n,

令 $E_1 = \{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| < \sigma\}$,

$E_2 = \{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}$,

$E = E_1 \cup E_2$,

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

证 (2) 由

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt \geq \int_{\{t \in E \mid \ \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\}} \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt.$$

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

证 (2) 由

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1 + \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt \geq \int_{\{t \in E \mid \ |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}} \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1 + \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt.$$

因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增, 而 $\mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma$, 于是

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

证 (2) 由

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt \geq \int_{\{t\in E|\ |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt.$$

因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增, 而 $\mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma$, 于是

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\geq \int_{\{t\in E|\ |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt \\ &= \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\}. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\} \to 0 \ (n \to \infty)$.

证 (2) 由

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt \geq \int_{\{t \in E \mid \ |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}} \frac{\mid x_n(t) - x(t) \mid}{1+ \mid x_n(t) - x(t) \mid} dt.$$

因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增, 而 $\mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma$, 于是

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\geq \int_{\{t \in E \mid \ |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma\}} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt \\ &= \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\}. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

由于$d(x_n, x) \to 0$, σ 给定, 由不等式

$$d(x_n, x) \geq \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t \in E \mid \mid x_n(t) - x(t) \mid \geq \sigma\}.$$

利用函数 $\frac{t}{1+t}$ 单增

证明 $m\{t\in E \mid |\, x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma\} \to 0\ (n\to\infty)$.

证 (2) 由

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt \geq \int_{\{t\in E|\ |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt.$$

因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增, 而 $|\, x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma$, 于是

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\geq \int_{\{t\in E|\ |x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt \\ &= \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t\in E \mid |\, x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma\}. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

由于$d(x_n, x)\to 0$, σ 给定, 由不等式

$$d(x_n, x) \geq \frac{\sigma}{1+\sigma} m\{t\in E \mid |\, x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma\}.$$

推出 $m\{t\in E \mid |\, x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma\} \to 0\ (n\to\infty)$.

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt=\int_{E_1} \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt+\int_{E_2} \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt$$

$$\le \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt+\int_{E_2} \frac{|\, x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\, x_n(t)-x(t)\,|}dt \le \frac{\sigma}{1+\sigma}mE+mE_2.$$

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x) = \int_E \frac{|\ x_n(t) - x(t)\ |}{1+ |\ x_n(t) - x(t)\ |}dt = \int_{E_1} \frac{|\ x_n(t) - x(t)\ |}{1+ |\ x_n(t) - x(t)\ |}dt + \int_{E_2} \frac{|\ x_n(t) - x(t)\ |}{1+ |\ x_n(t) - x(t)\ |}dt$$

$$\le \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt + \int_{E_2} \frac{|\ x_n(t) - x(t)\ |}{1+ |\ x_n(t) - x(t)\ |}dt \le \frac{\sigma}{1+\sigma}mE + mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n, x) = \int_E \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt = \int_{E_1} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt$$

$$\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma} dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1+|x_n(t) - x(t)|} dt \leq \frac{\sigma}{1+\sigma} mE + mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

由 $mE_2 = m\{t \in E \mid |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma_0\} \to 0$,

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt=\int_{E_1} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt+\int_{E_2} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt+\int_{E_2} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt \leq \frac{\sigma}{1+\sigma}mE+mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

由 $mE_2 = m\{t \in E \mid |x_n(t)-x(t)| \geq \sigma_0\} \to 0$,

存在 N, 当 $n \geq N$ 时, $mE_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x) = \int_E \frac{|\, x_n(t) - x(t)\,|}{1+|\, x_n(t) - x(t)\,|}dt = \int_{E_1} \frac{|\, x_n(t) - x(t)\,|}{1+|\, x_n(t) - x(t)\,|}dt + \int_{E_2} \frac{|\, x_n(t) - x(t)\,|}{1+|\, x_n(t) - x(t)\,|}dt$$

$$\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt + \int_{E_2} \frac{|\, x_n(t) - x(t)\,|}{1+|\, x_n(t) - x(t)\,|}dt \leq \frac{\sigma}{1+\sigma}mE + mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

由 $mE_2 = m\{t \in E \mid |\, x_n(t) - x(t)\,| \geq \sigma_0\} \to 0$,

存在 N, 当 $n \geq N$ 时, $mE_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

这里用到了依测度收敛

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n, x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x)=\int_E \frac{|\,x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\,x_n(t)-x(t)\,|}dt=\int_{E_1} \frac{|\,x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\,x_n(t)-x(t)\,|}dt+\int_{E_2} \frac{|\,x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\,x_n(t)-x(t)\,|}dt$$

$$\leq \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt+\int_{E_2} \frac{|\,x_n(t)-x(t)\,|}{1+|\,x_n(t)-x(t)\,|}dt \leq \frac{\sigma}{1+\sigma}mE+mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

由 $mE_2 = m\{t \in E \mid |\,x_n(t)-x(t)\,| \geq \sigma_0\} \to 0$,

存在 N, 当 $n \geq N$ 时, $mE_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

这里用到了依测度收敛

于是

$$d(x_n,x) \leq \frac{\sigma_0}{1+\sigma_0}mE+mE_2 < \sigma_0 mE+\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

反之, 由 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t)$, 可推出 $d(x_n,x) \to 0$. 事实上,

$$d(x_n,x) = \int_E \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt = \int_{E_1} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$\le \int_{E_1} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt + \int_{E_2} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt \le \frac{\sigma}{1+\sigma}mE + mE_2.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\sigma_0 mE < \frac{\varepsilon}{2}$, 对于这个 $\sigma_0 > 0$,

由 $mE_2 = m\{t \in E \mid |x_n(t)-x(t)| \ge \sigma_0\} \to 0$,

存在 N, 当 $n \ge N$ 时, $mE_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

这里用到了依测度收敛

于是

$$d(x_n,x) \le \frac{\sigma_0}{1+\sigma_0}mE + mE_2 < \sigma_0 mE + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $d(x_n,x) \to 0 \ (n \to \infty)$. □