内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主　讲　孙炯教授

电话：0471-4992491（H），　13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 1　从数学分析、线性代数到泛函分析

§ 1 从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

§ 1　从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

§ 1　从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数　$x \in X \to f(x) \in Y$

§ 1　从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数　$x \in X \to f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

§1 从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数 $\quad x \in X \to f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

2. 运算(算子)

§ 1 从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数 $x \in X \rightarrow f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

2. 运算(算子)

微分、积分都是运算，特别的 都是线性运算。

§ 1 从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数 $x \in X \to f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

2. 运算(算子)

微分、积分都是运算，特别的 都是线性运算。

$\sin x \xrightarrow{'} \cos x$

§ 1　从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数　$x \in X \to f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

2. 运算(算子)

微分、积分都是运算，特别的 都是线性运算。

$\sin x \xrightarrow{'} \cos x$

$$\cos x \xrightarrow{\int} \sin x$$

§1 从数学分析、线性代数到泛函分析

一、泛函分析的研究对象

1. 函数 $\Rightarrow$ 映射

函数 $\quad x \in X \rightarrow f(x) \in Y$

进一步：从一个空间X到另一个空间Y的映射.

2. 运算(算子)

微分、积分都是运算，特别的 都是线性运算。

$\sin x \xrightarrow{\prime} \cos x$

$\cos x \xrightarrow{\int} \sin x$

实际上,运算也是一种映射： $X \rightarrow Y$

二、泛函分析研究的方法

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2.$

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2.$

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2.$

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

空间中的元素

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2.$

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

空间中的元素

函数: $x \to f(x)$

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2$.

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

空间中的元素

函数: $x \to f(x)$

运算: $X \to Y$

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2.$

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

空间中的元素

函数: $x \to f(x)$

运算: $X \to Y$

矩阵（线性运算）$A_{n\times n}$ $X_{n\text{维}} \to Y_{n\text{维}}$

$$x \to Ax \in Y$$

二、泛函分析研究的方法

笛卡尔坐标系的建立,创立了解析几何,把代数问题几何化,把几何问题代数化.

方程变成了图形 $x^2 + y^2 = a^2$.

运动的概念引入数学, 为微积分的创立做了准备.

1.建立一个新的空间框架.

空间中的元素

函数： $x \to f(x)$

运算： $X \to Y$

矩阵（线性运算） $A_{n\times n}$ $X_{n维} \to Y_{n维}$

$$x \to Ax \in Y$$

2.在新的空间框架下,研究解决分析、代数、几何中的问题.（把分析中的问题结合几何、代数的方法加以处理.）

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

从无穷维空间 到无穷维空间的线性运算。

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

从无穷维空间 到无穷维空间的线性运算。

(1)相同：线性空间.

(2)不同：无穷维.

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

从无穷维空间 到无穷维空间的线性运算。

(1)相同：线性空间.

(2)不同：无穷维.

(3)有什么新的问题？

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

从无穷维空间 到无穷维空间的线性运算。

(1)相同：线性空间.

(2)不同：无穷维.

(3)有什么新的问题？

(i)无穷维空间的性质

在线性代数中，研究的是：从 n维空间到 m 维空间的线性运算。

在泛函分析（线性泛函分析）中，研究的是：

从无穷维空间 到无穷维空间的线性运算。

(1)相同：线性空间.

(2)不同：无穷维.

(3)有什么新的问题？

(i)无穷维空间的性质

(ii)收敛性的问题.（加法与无穷级数的区别）

三、实例(感悟数学)

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}\to(a_1,a_2,a_3)$

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \to (a_1, a_2, a_3)$

坐标系为如下正交坐标系:

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \to (a_1, a_2, a_3)$

坐标系为如下正交坐标系:

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1).$$

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \to (a_1, a_2, a_3)$

坐标系为如下正交坐标系:

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1).$$

可以定义内积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \to (a_1, a_2, a_3)$

坐标系为如下正交坐标系:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1).$$

可以定义内积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$

其中 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3).$

三、实例(感悟数学)

例 0.0.1 $\mathbb{R}^3$*(三维实空间)*

坐标系: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}\to(a_1,a_2,a_3)$

坐标系为如下正交坐标系:

$$\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1).$$

可以定义内积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$

其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3).$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

$a_1=(\vec{a},\vec{i})$,是$\vec{a}$在$\vec{i}$上的投影. $a_2=(\vec{a},\vec{j})$,是$\vec{a}$在$\vec{j}$上的投影.
$a_3=(\vec{a},\vec{k})$,是$\vec{a}$在$\vec{k}$上的投影.

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(\vec{a},\vec{i})\vec{i}+(\vec{a},\vec{j})\vec{j}+(\vec{a},\vec{k})\vec{k}$$

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\vec{e_1} \cdots + a_n\vec{e_n}$$

$$\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e_1})\vec{e_1} + \cdots + (\vec{a}, \vec{e_n})\vec{e_n}$$

把一个向量做了分解（投影）, 把复杂的问题简单化.

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\vec{e_1} \cdots + a_n\vec{e_n}$$

$$\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e_1})\vec{e_1} + \cdots + (\vec{a}, \vec{e_n})\vec{e_n}$$

把一个向量做了分解（投影）, 把复杂的问题简单化.

例 0.0.2 *线性变换 A （如何分解）*

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\vec{e_1}\cdots + a_n\vec{e_n}$$

$$\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e_1})\vec{e_1} + \cdots + (\vec{a}, \vec{e_n})\vec{e_n}$$

把一个向量做了分解（投影），把复杂的问题简单化.

例 0.0.2 *线性变换 A （如何分解）*

A是从$\mathbb{R}^4$到$\mathbb{R}^4$的对称矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\vec{e_1}\cdots + a_n\vec{e_n}$$
$$\vec{a} = (\vec{a}, \vec{e_1})\vec{e_1} + \cdots + (\vec{a}, \vec{e_n})\vec{e_n}$$

把一个向量做了分解（投影）, 把复杂的问题简单化.

例 0.0.2 *线性变换 A （如何分解）*

A是从$\mathbb{R}^4$到$\mathbb{R}^4$的对称矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A:\ x \to\ Ax, \qquad Ax = y$$

（有什么特点？）

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\vec{e_1}\cdots+a_n\vec{e_n}$$
$$\vec{a}=(\vec{a},\vec{e_1})\vec{e_1}+\cdots+(\vec{a},\vec{e_n})\vec{e_n}$$

把一个向量做了分解（投影）, 把复杂的问题简单化.

例 0.0.2 *线性变换 A （如何分解）*

A是从$\mathbb{R}^4$到$\mathbb{R}^4$的对称矩阵,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A:\ x\rightarrow\ Ax,\qquad Ax=y$$

（有什么特点？）
(1) A是线性变换

(2) 特征值是实的;

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1) $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3),\ \lambda = -3, +1$是特征值.

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1)$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3),\ \lambda = -3, +1$是特征值.

其中$\lambda = +1$是三重特征值,$\lambda = -3$是单重特征值.

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1)$| \lambda E - A | = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3)$, $\lambda = -3, +1$是特征值.

其中$\lambda = +1$是三重特征值,$\lambda = -3$是单重特征值.

(2)$\lambda = +1$时,求其基础解系如下:

$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1)$|\lambda E - A| = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$, $\lambda=-3,+1$是特征值.

其中$\lambda=+1$是三重特征值,$\lambda=-3$是单重特征值.

(2)$\lambda=+1$时,求其基础解系如下:

$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\alpha_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\alpha_3=(-1,0,\ 0,\ 1)$

(3)该基础解系不正交,将其单位正交化:

$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0)$, $\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0)$, $\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}})$

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1)$|\lambda E - A| = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$, $\lambda = -3, +1$是特征值.

其中$\lambda = +1$是三重特征值,$\lambda = -3$是单重特征值.

(2)$\lambda = +1$时,求其基础解系如下:

$\alpha_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\alpha_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0,\ 0,\ 1)$

(3)该基础解系不正交,将其单位正交化:

$\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,\ 0)$, $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$

当$\lambda = -3$时,可得: $\beta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 成为 $\mathbb{R}^4$中的一组标准正交基.

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵.

对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵. 做法:

(1)$|\lambda E - A| = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$, $\lambda = -3, +1$是特征值.

其中$\lambda = +1$是三重特征值,$\lambda = -3$是单重特征值.

(2)$\lambda = +1$时,求其基础解系如下:

$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$

(3)该基础解系不正交,将其单位正交化:

$\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$

当$\lambda = -3$时,可得: $\beta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 成为 $\mathbb{R}^4$中的一组标准正交基.

在这组标准正交基下,矩阵 A 成为对角矩阵。

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)_{4\times 4}$$

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

注1 在新的坐标系$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$下, 线性变换 A有最简单的标准型.

$$A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)_{4\times 4}$$

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

注1 在新的坐标系$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$下, 线性变换 A有最简单的标准型.

注2 在每一个特征子空间上,进一步在每一个坐标系生成的一维子空间上, A作用的形式是最简单的 (放大、缩小特征值的倍数)

$$A\beta_1 = \beta_1, \qquad A\beta_2 = \beta_2, \qquad A\beta_3 = \beta_3, \qquad A\beta_4 = -3\beta_4.$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1),$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$,

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$,

$$\mathbf{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中
$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中$a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 ,于是

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中$a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 ,于是

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4) = a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 = y = (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned}$$

矩阵 A 确定了一组正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$,

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中
$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中$a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 ,于是

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4) = a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 = y = (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned}$$

矩阵 A 确定了一组正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$,
对于任何的$x \in \mathbb{R}^4$, 只要知道x在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影 (a_1, a_2, a_3, a_4), 则A作用的方式一目了然. 即:

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中$a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 ,于是

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4) = a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 = y = (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned}$$

矩阵 A 确定了一组正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$,

对于任何的$x \in \mathbb{R}^4$, 只要知道x在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影 (a_1, a_2, a_3, a_4), 则A作用的方式一目了然. 即:

$$Ax = (a_1, a_2, a_3, -3a_4)$$

$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1, e_2, e_3, e_4$下,其中

$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$,

$$\mathrm{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, \qquad \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$\mathbf{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4$$

其中$a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 ,于是

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4) = a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 = y = (a_1, a_2, a_3, -3a_4) \end{aligned}$$

矩阵 A 确定了一组正交基$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$,

对于任何的$x \in \mathbb{R}^4$, 只要知道x在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影 (a_1, a_2, a_3, a_4), 则A作用的方式一目了然. 即:

$$Ax = (a_1, a_2, a_3, -3a_4)$$

注 A 的作用方式是由特征值、特征向量决定的.

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$
\begin{aligned}
A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\
&= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4
\end{aligned}
$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \;\; \lambda_4 = -3.$

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4$$
$$= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \;\; \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

$************************************$

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \;\; \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4$$
$$= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

例如三元一次方程组⇒(代入消元)二元一次方程组⇒一元一次方程: $ax = b$,

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4$$
$$= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

例如三元一次方程组⇒(代入消元)二元一次方程组⇒一元一次方程: $ax = b$, 当$a \neq 0$时有唯一解, 当$a = 0, b \neq 0$时无解, 当$a = 0, b = 0$时有无穷多解. 泛函分析, 我们要研究的对象是函数、运算。

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4$$
$$= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

例如三元一次方程组⇒(代入消元)二元一次方程组⇒一元一次方程: $ax = b$, 当$a \neq 0$时有唯一解, 当$a = 0, b \neq 0$时无解, 当$a = 0, b = 0$时有无穷多解. 泛函分析, 我们要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分运算, 它们作用的对象是函数,

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \ \ \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

例如三元一次方程组⇒(代入消元)二元一次方程组⇒一元一次方程: $ax = b$,

当$a \neq 0$时有唯一解, 当$a = 0, b \neq 0$时无解, 当$a = 0, b = 0$时有无穷多解. 泛函分析, 我们要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分运算, 它们作用的对象是函数,

微分, 积分运算与R^n空间中线性变换A相同的是: 线性运算,

P_1, P_2, P_3, P_4是 在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$上的投影算子, 则

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \\ &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \end{aligned}$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \;\; \lambda_4 = -3.$

线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

****

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

例如三元一次方程组$\Rightarrow$(代入消元)二元一次方程组$\Rightarrow$一元一次方程: $ax = b$,

当$a \neq 0$时有唯一解, 当$a = 0, b \neq 0$时无解, 当$a = 0, b = 0$时有无穷多解. 泛函分析, 我们要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分运算, 它们作用的对象是函数,

微分, 积分运算与R^n空间中线性变换A相同的是: 线性运算,

不同的是微(积)分把一个函数映射成另一个函数. A把一个n维向量变成n维向量.

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是:

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间(无穷维空间).

这就要研究以下问题:

(一)无穷维空间的几何结构结构,特别是:

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是:

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是:

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题：

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是：

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

（二）无穷维空间线性算子的结构：

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过"类比和联想", 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是:

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

（二）无穷维空间线性算子的结构:

(1) 线性算子的性质（有没有对称算子？）

函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画.

我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式 推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题:

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是:

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$? (2)正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$? (3)元素能不能分解?

$$\mathrm{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

（二）无穷维空间线性算子的结构:

(1) 线性算子的性质（有没有对称算子？）

(2) 线性算子 T 能不能分解?

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \quad \text{（有限维）}$$

$$T? = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + \lambda_3P_3 + \lambda_4P_4 + ... \quad \text{（无穷维）}$$

其中 $P_1, P_2, P_3, P_4, ...$是在$e_1, e_2, e_3, e_4, ...$上的投影算子。

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$f(x) \backsim \left(f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots\right)$$

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$f(x)\backsim\left(f(0),\frac{f'(0)}{1!},\frac{f''(0)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots\right)$$

这和一个向量在n维空间的展开完全类似,

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$f(x)\backsim\left(f(0),\frac{f'(0)}{1!},\frac{f''(0)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots\right)$$

这和一个向量在n维空间的展开完全类似,

区别在于$(x^0,x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots)$不是"正交系".

例 0.0.4 *Fourier级数,(无穷维的Hilbert空间)*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$f(x) \backsim \left(f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots\right)$$

这和一个向量在n维空间的展开完全类似,

区别在于$(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots)$不是“正交系”.

例 0.0.4 *Fourier级数,(无穷维的Hilbert空间)*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

其中 $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$

$$f(x) \sim (a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots)$$

函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画.

例 0.0.3 *Taylor展开*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$f(x) \backsim (f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots)$$

这和一个向量在n维空间的展开完全类似,

区别在于$(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots)$不是“正交系”.

例 0.0.4 *Fourier级数,(无穷维的Hilbert空间)*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

其中 $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx$

$$f(x) \sim (a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots)$$

f可以由这无穷多个数确定.

其坐标系为:

其坐标系为:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$$

$$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \cdots$$

其坐标系为：

$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$

$\cdots,\ e_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\cdots$

$(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$为函数 f在这个坐标系下的坐标。

类似于$\mathbb{R}^n$，在这个函数空间$L^2(-\pi,\pi)$上定义内积为：

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

其坐标系为:

$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$

$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \cdots$

$(a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots)$为函数 f在这个坐标系下的坐标。

类似于$\mathbb{R}^n$，在这个函数空间$L^2(-\pi,\pi)$上定义内积为:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

可以验证 $\{e_i\}$ 是一组标准正交基

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

其坐标系为:

$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$

$\cdots,\ e_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\cdots$

$(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$为函数 f在这个坐标系下的坐标。

类似于$\mathbb{R}^n$，在这个函数空间$L^2(-\pi,\pi)$上定义内积为:

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

可以验证 $\{e_i\}$ 是一组标准正交基

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0 & i\neq j,\\ 1 & i=j.\end{cases}$$

对照：在$\mathbb{R}^n$中, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 有

其坐标系为：

$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,$

$\cdots,\ e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\ e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \cdots$

$(a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots)$为函数 f在这个坐标系下的坐标。

类似于$\mathbb{R}^n$，在这个函数空间$L^2(-\pi,\pi)$上定义内积为：

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

可以验证 $\{e_i\}$ 是一组标准正交基

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

对照：在$\mathbb{R}^n$中, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

其中$x_1 = (x,e_1), x_2 = (x,e_2), \cdots, x_n = (x,e_n),$

对于函数 f，我们有：

对于函数 f，我们有：

$$f(x) = a_0e_0 + a_1e_1 + b_1e_2 + \cdots + a_ke_{2k-1} + b_ke_{2k} + \cdots$$

其中： $a_0 = (f, e_0), a_1 = (f, e_1), b_1 = (f, e_2), \cdots, a_k = (f, e_{2k-1}), b_k = (f, e_{2k}), \cdots$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \ dx = 0$$

对于函数 f，我们有：

$$f(x) = a_0 e_0 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + \cdots + a_k e_{2k-1} + b_k e_{2k} + \cdots$$

其中：$a_0 = (f, e_0), a_1 = (f, e_1), b_1 = (f, e_2), \cdots, a_k = (f, e_{2k-1}), b_k = (f, e_{2k}), \cdots$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \; dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \; dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \; dx = 0$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_i \; e_j \; dx = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

对于函数 f，我们有：

$$f(x) = a_0e_0 + a_1e_1 + b_1e_2 + \cdots + a_ke_{2k-1} + b_ke_{2k} + \cdots$$

其中：$a_0 = (f, e_0), a_1 = (f, e_1), b_1 = (f, e_2), \cdots, a_k = (f, e_{2k-1}), b_k = (f, e_{2k}), \cdots$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \ dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \ dx = 0$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_i \ e_j \ dx = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

所以$\{e_i\}$形成空间中的一组标准正交基.

问题：系数是否等于(f, e_i)?

问题：系数是否等于(f, e_i)?

我们有 $$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}(f(x), 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi}(f(x), \cos kx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)$$

问题：系数是否等于(f, e_i)？

我们有 $$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}(f(x), 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi}(f(x), \cos kx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)$$

并且 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$= (f(x), e_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx$$

$$= (f(x), e_0)e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k + \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k')e_k' = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \widetilde{e_k})\widetilde{e_k}\text{(重新编号)}$$

即： (1) 在函数空间建立了一个正交坐标系.

即：(1) 在函数空间建立了一个正交坐标系.

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,e_k)e_k$$

其中系数是$f(x)$和e_k的内积, 即$f(x)$在e_k上的投影.

$$\text{对照：}\quad x=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

即：(1) 在函数空间建立了一个正交坐标系.

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

其中系数是$f(x)$和e_k的内积, 即$f(x)$在e_k上的投影.

$$\text{对照：}\quad x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

二者之间的区别是什么？

即：(1) 在函数空间建立了一个正交坐标系.

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

其中系数是$f(x)$和e_k的内积, 即$f(x)$在e_k上的投影.

对照： $$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

二者之间的区别是什么？

$\mathbb{R}^n$是有限维空间而函数空间是无穷维的.

即：(1) 在函数空间建立了一个正交坐标系.

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

其中系数是$f(x)$和e_k的内积, 即$f(x)$在e_k上的投影.

$$\text{对照：} \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

二者之间的区别是什么?

$\mathbb{R}^n$是有限维空间而函数空间是无穷维的.

无穷维求和是一个极限过程.

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

即要引进极限等概念.

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

即要引进极限等概念.

在Fourier级数中, 有Riemamn引理

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

即要引进极限等概念.

在Fourier级数中, 有Riemamn引理

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

即要引进极限等概念.

在Fourier级数中, 有Riemamn引理

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

即：$\lim_{n\to\infty}(f(x), e_k) = 0,\ \forall f(x)$

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题.

如收敛,在什么意义下收敛?

$$f(x) = (?) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

根据数学分析，我们有：$f(x)$逐段可微, 则其Fourier级数收敛, 且收敛到$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛），

所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），

即要引进极限等概念.

在Fourier级数中, 有Riemamn引理

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

即：$\lim_{n\to\infty}(f(x), e_k) = 0, \ \forall f(x)$

以后我们看到 这是 e_k弱收敛到0.

注 在泛函分析中要研究

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性(强,弱,一致收敛等).

这是泛函分析研究的一些重点.

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性(强,弱,一致收敛等).

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子(微分运算)

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照:

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照:

$A = (a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照:

$A = (a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性(强,弱,一致收敛等).

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子(微分运算)

与有限维空间的线性算子相对照:

$A=(a_{ij})_{n\times n}\Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

$\Rightarrow$ A在这个正交坐标系成为对角矩阵

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性(强,弱,一致收敛等).

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子(微分运算)

与有限维空间的线性算子相对照:

$A=(a_{ij})_{n\times n}\Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

$\Rightarrow A$在这个正交坐标系成为对角矩阵

不同的对称矩阵可以产生不同的正交系

注　在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照：

$A=(a_{ij})_{n\times n}\Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

$\Rightarrow A$在这个正交坐标系成为对角矩阵

不同的对称矩阵可以产生不同的正交系

问题：在Fourier级数展开中， 这个正交坐标系$(1,\cos kx,\sin kx,k=0,1,2,...)$

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照：

$A=(a_{ij})_{n\times n}\Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

$\Rightarrow$ A在这个正交坐标系成为对角矩阵

不同的对称矩阵可以产生不同的正交系

问题：在Fourier级数展开中， 这个正交坐标系$(1,\cos kx,\sin kx,k=0,1,2,\ldots)$

是否也可以是一些运算(算子)的特征函数？

注 在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积;

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

****

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）

与有限维空间的线性算子相对照:

$A = (a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系.

$\Rightarrow$ A在这个正交坐标系成为对角矩阵

不同的对称矩阵可以产生不同的正交系

问题：在Fourier级数展开中，这个正交坐标系$(1, \cos kx, \sin kx, k = 0, 1, 2, \ldots)$

是否也可以是一些运算(算子)的特征函数？

例 0.0.5 $Sturm - Liouville$问题

例 0.0.5 *Sturm − Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

例 0.0.5 *Sturm – Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制,

例 0.0.5 *Sturm – Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，

微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

例 0.0.5 *Sturm − Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，

微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

注 把$Ty = -y''$看成一种运算,

例 0.0.5 *Sturm – Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，
微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域
注 把$Ty = -y''$看成一种运算,
边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.

例 0.0.5 *Sturm – Liouville问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，

微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

注 把$Ty = -y''$看成一种运算,

边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.

这样$Sturm - Liouville$问题 $Ty = \lambda y$与$Ax = \lambda x$,形式上相似,

例 0.0.5 *$Sturm-Liouville$问题*

$$\begin{cases} -y''(t)=\lambda y(t), \\ y(-\pi)=y(\pi), \\ y'(-\pi)=y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制,

微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

注 把$Ty=-y''$看成一种运算,

边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.

这样$Sturm-Liouville$问题 $Ty=\lambda y$与$Ax=\lambda x$,形式上相似,

我们可以猜想：

例 0.0.5 *$Sturm-Liouville$问题*

$$\begin{cases} -y''(t)=\lambda y(t), \\ y(-\pi)=y(\pi), \\ y'(-\pi)=y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，
微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域
注 把$Ty=-y''$看成一种运算,
边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.
这样$Sturm-Liouville$问题 $Ty=\lambda y$与$Ax=\lambda x$,形式上相似,
我们可以猜想：
$Sturm-Liouville$ 算子 T：有可数多个特征值, 不同特征值对应的特征函数相互正交.

例 0.0.5 *$Sturm-Liouville$问题*

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制,
微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域
注 把$Ty = -y''$看成一种运算,
边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.
这样$Sturm-Liouville$问题 $Ty = \lambda y$与$Ax = \lambda x$,形式上相似,
我们可以猜想:
$Sturm-Liouville$ 算子 T：有可数多个特征值, 不同特征值对应的特征函数相互正交.
因为要满足边界条件，不是所有的 λ，$Sturm-Liouville$问题都有解.

例 0.0.5 $Sturm-Liouville$问题

$$\begin{cases} -y''(t)=\lambda y(t), \\ y(-\pi)=y(\pi), \\ y'(-\pi)=y'(\pi). \end{cases} \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，

微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

注 把$Ty=-y''$看成一种运算,

边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”算子.

这样$Sturm-Liouville$问题 $Ty=\lambda y$与$Ax=\lambda x$,形式上相似,

我们可以猜想：

$Sturm-Liouville$ 算子 T：有可数多个特征值, 不同特征值对应的特征函数相互正交.

因为要满足边界条件，不是所有的 λ，$Sturm-Liouville$问题都有解.

有解的那些λ，是$Sturm-Liouville$问题的特征值。

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\quad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\, t + B\sin\sqrt{\lambda}\, t$

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\qquad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\qquad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\, t + B\sin\sqrt{\lambda}\, t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\quad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\qquad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\qquad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

由于$\lambda > 0$,A, B不同时为零$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\qquad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

由于$\lambda > 0, A, B$不同时为零$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$

所以$\lambda_n = n^2$即$\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots$时两个边界条件满足.

(b) 当$\lambda = 0$时, $-y'' = 0$,求出$x \equiv 1$, 满足边界条件.

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\quad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

由于$\lambda > 0$,A, B不同时为零$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$.

所以$\lambda_n = n^2$即$\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots$时两个边界条件满足.

(b) 当$\lambda = 0$时, $-y'' = 0$,求出$x \equiv 1$, 满足边界条件.

(c) 当$\lambda < 0$时，求出方程的解： $y = Ce^{\pm\sqrt{-\lambda}\,t}$

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $\quad y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,t + B\sin\sqrt{\lambda}\,t$

代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

由于$\lambda > 0, A, B$不同时为零$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$.

所以$\lambda_n = n^2$即$\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots$时两个边界条件满足.

(b) 当$\lambda = 0$时, $-y'' = 0$,求出$x \equiv 1$, 满足边界条件.

(c) 当$\lambda < 0$时，求出方程的解：$\quad y = Ce^{\pm\sqrt{-\lambda}\,t}$

不满足周期边界条件.

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

注2 把 $Ty = -y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）.

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

注2 把 $Ty = -y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）.

把： $Ty_n = \lambda_n y_n$

与： $Ay_n = \lambda_n y_n$ 相对比；,

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

注2 把 $Ty = -y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）.

把： $Ty_n = \lambda_n y_n$

与： $Ay_n = \lambda_n y_n$ 相对比；,

我们有

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \qquad \text{（有限维）}$$

$$T = (?)\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots \qquad \text{（无穷 维）}$$

P_i是其在特征元素上的投影算子

所以特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$

把$Ty = -y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

注2 把 $Ty = -y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）.

把： $Ty_n = \lambda_n y_n$

与： $Ay_n = \lambda_n y_n$ 相对比；,

我们有

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \qquad \text{（有限维）}$$

$$T = (?)\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots \qquad \text{（无穷 维）}$$

P_i是其在特征元素上的投影算子

$\Rightarrow$无穷维空间上线性算子的一种分解（谱分解）.

所以特征值$\{\lambda_n\}=\{0,1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots\}$

把$Ty=-y''$看成一种运算, 对应的特征函数为

$$\{e_n\}=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化)

注2 把 $Ty=-y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）.

把：　$Ty_n=\lambda_n y_n$

与：　$Ay_n=\lambda_n y_n$　相对比；,

我们有

$$A=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n \qquad \text{（有限维）}$$

$$T=(?)\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n+\cdots \qquad \text{（无穷 维）}$$

P_i是其在特征元素上的投影算子

$\Rightarrow$无穷维空间上线性算子的一种分解（谱分解）.

注3 在新的函数空间下,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i$$

注3 在新的函数空间下,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i$$

所以: $Tf=T\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i=(?)\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)Te_i=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\lambda_i e_i.$(因为$Te_i=\lambda_i e_i$).

例 0.0.6 *Legendra*多项式. 考虑*Legendra*方程

$$\begin{cases}-(1-x^2)y''+2xy'=\lambda y, \quad (-1<x<1)\\ y(1)<\infty,\\ y(-1)<\infty.\end{cases}$$

注3 在新的函数空间下，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i$$

所以： $Tf = T\sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)e_i = (?)\sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)Te_i = \sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)\lambda_i e_i.$(因为$Te_i = \lambda_i e_i$).

例 0.0.6 *Legendra多项式. 考虑Legendra方程*

$$\begin{cases} -(1-x^2)y'' + 2xy' = \lambda y, \quad (-1 < x < 1) \\ y(1) < \infty, \\ y(-1) < \infty. \end{cases}$$

方程可以化为

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)y') = \lambda y$$

注3 在新的函数空间下,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i$$

所以: $Tf=T\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i=(?)\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)Te_i=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\lambda_i e_i$.(因为$Te_i=\lambda_i e_i$).

例 0.0.6 *Legendra多项式. 考虑Legendra方程*

$$\begin{cases}-(1-x^2)y''+2xy'=\lambda y, \quad (-1<x<1)\\ y(1)<\infty,\\ y(-1)<\infty.\end{cases}$$

方程可以化为

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)y')=\lambda y$$

是对称的微分算子.

注3 在新的函数空间下,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i$$

所以: $Tf=T\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i=(?)\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)Te_i=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\lambda_i e_i.$(因为$Te_i=\lambda_i e_i$).

例 0.0.6 *Legendra多项式. 考虑Legendra方程*

$$\begin{cases}-(1-x^2)y''+2xy'=\lambda y, \quad (-1<x<1)\\ y(1)<\infty,\\ y(-1)<\infty.\end{cases}$$

方程可以化为

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)y')=\lambda y$$

是对称的微分算子.

可以求出特征值为$\lambda_n=n(n+1)$,

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

且满足$\int_{-1}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = 0.\ (m \neq n)$

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

且满足$\int_{-1}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = 0.\ (m \neq n)$

是$L^2[-1,1]$上的正交系(对称线性算子的特征函数系).

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

且满足$\int_{-1}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = 0.\ (m \neq n)$

是$L^2[-1,1]$上的正交系(对称线性算子的特征函数系).

其中

$$y_0(x) = 1 \qquad y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad y_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$y_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x+3) \qquad y_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15t)$$

......

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

且满足$\int_{-1}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = 0.\ (m \neq n)$

是$L^2[-1,1]$上的正交系(对称线性算子的特征函数系).

其中

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 & y_1(x) &= x \\
y_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & y_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\
y_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x+3) & y_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15t)
\end{aligned}
$$

......

从这看到，和R^n中一样，

可以求出特征值为$\lambda_n = n(n+1)$,

特征函数为$y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

且满足$\int_{-1}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = 0.\ (m \neq n)$

是$L^2[-1,1]$上的正交系(对称线性算子的特征函数系).

其中

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 & y_1(x) &= x \\
y_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & y_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\
y_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x+3) & y_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15t)
\end{aligned}
$$

......

从这看到，和R^n中一样，

在无穷维空间也可以有不同的正交系.

泛函分析：

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

(1) 理解为什么会有泛函分析,

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

泛函分析：

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标：

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

(ii) 数学研究的基本方法：划归，类比，归纳，联想；

泛函分析:

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标:

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

(ii) 数学研究的基本方法：划归，类比，归纳，联想；

(iii) 一定的抽象思维的能力；

泛函分析：

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标：

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

(ii) 数学研究的基本方法：划归，类比，归纳，联想；

(iii) 一定的抽象思维的能力；

概念清楚，思维清晰

泛函分析：

(1) 首先引入空间, 极限这些概念，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性算子空间)的性质.

目标：

(1) 理解为什么会有泛函分析,

明白泛函分析在做什么,

最后才是：我们怎么要做.

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

(ii) 数学研究的基本方法：划归，类比，归纳，联想；

(iii) 一定的抽象思维的能力；

概念清楚，思维清晰

(2) 努力展现数学的美学结构.

结束语：

结束语:

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

结束语：

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

“**数学决不应成为一门十分费解的科学**”.

结束语:

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

“数学决不应成为一门十分费解的科学”.

2. 要从宏观上了解数学，才能有良好的数学素质;

结束语:

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

"数学决不应成为一门十分费解的科学".

2. 要从宏观上了解数学，才能有良好的数学素质;

3. 要从具体的实例中感悟数学;

结束语：

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

“数学决不应成为一门十分费解的科学”.

2. 要从宏观上了解数学，才能有良好的数学素质;

3. 要从具体的实例中感悟数学;

我们认为要真正理解泛函分析中的一些重要的概念和理论，灵活运用这一强有力的工具，其唯一的途径就是深入了解它们的来源和背景，注意研究一些重要的、一般性定理的深刻的、具体的含义。不然的话，如果只是从概念到概念，纯形式地理解抽象定理证明的推演，那么学习泛函分析的结果只能是“如入宝山而空返”，一无所获。

————张恭庆（中科院院士）