泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 4 自共轭的有界线性算子

§4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A = (a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^* = (\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A = A^* \Leftrightarrow$ 是$a_{ij} = a_{ji}$, 即 A 是对称的.

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^* \Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

§4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H\mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^*\Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

　(A 和 A^* 的关系)

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^* \Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

(A 和 A^* 的关系)

(1)（5.3.10）式定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子,

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^* \Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

   (A 和 A^* 的关系)

(1)（5.3.10）式定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子,

(2) 于是可以研究和比较 A 和 A^*,看它们是否相等？ 即它是否是自共轭.

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H\mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^*\Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

   (A 和 A^* 的关系)

(1)（5.3.10）式定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子,

(2) 于是可以研究和比较 A 和 A^*,看它们是否相等？ 即它是否是自共轭.

对称具有许多非常好的美学性质, 自共轭是对称的一个直接推广.

§ 4　自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   ($H \mapsto H$ 的映射)

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^* \Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

   (A 和 A^* 的关系)

(1)（5.3.10）式定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子,

(2) 于是可以研究和比较 A 和 A^*,看它们是否相等？ 即它是否是自共轭.

对称具有许多非常好的美学性质, 自共轭是对称的一个直接推广.

下面我们将看到，自共轭算子具有与对称矩阵相类似的许多性质，

§ 4 自共轭的有界线性算子

以下我们还是在 Hilbert空间中讨论， A 是从 H 到 H 的有界线性算子.

1. 在有限维 空间,$A=(a_{ij})$ 的共轭算子（矩阵）是$A^*=(\overline{a_{ji}})$.

   $(H\mapsto H$ 的映射$)$

2. 在实的Hilbert空间， $A=A^*\Leftrightarrow$ 是$a_{ij}=a_{ji}$, 即 A 是对称的.

我们考虑的问题：

在Hilbert空间，是否可以类似的考虑 线性算子 A 的某种对称性？

   $(A$ 和 A^* 的关系$)$

(1)（5.3.10）式定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子,

(2) 于是可以研究和比较 A 和 A^*,看它们是否相等？ 即它是否是自共轭.

对称具有许多非常好的美学性质, 自共轭是对称的一个直接推广.

下面我们将看到，自共轭算子具有与对称矩阵相类似的许多性质，

自共轭算子的谱（特征值）是相对简单的.

一、有界自共轭算子的定义、例

一、有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是自共轭的.

一、有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是自共轭的.

注1 由定义(5.3.2)（5.3.10式），有界线性算子 A 是自共轭的, 当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.4.1}$$

一、有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是自共轭的.

注1 由定义(5.3.2)（5.3.10式），有界线性算子 A 是自共轭的, 当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.4.1}$$

注2 对于有界线性算子而言， 自共轭算子也称为对称算子.

例 5.4.2 令 $H = \mathbb{C}^n$, 其上定义的内积为 $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i$,

一、有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是自共轭的.

注1 由定义(5.3.2) （5.3.10式），有界线性算子 A 是自共轭的, 当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay)\,, \quad \forall x, y \in H. \tag{5.4.1}$$

注2 对于有界线性算子而言， 自共轭算子也称为对称算子.

例 5.4.2 令 $H = \mathbb{C}^n$, 其上定义的内积为 $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i$,

A 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的有界线性算子,

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad Ax = z,$$

一、有界自共轭算子的定义、例

定义 5.4.1 A 是Hilbert是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是自共轭的.

注1 由定义(5.3.2) （5.3.10式），有界线性算子 A 是自共轭的, 当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H. \tag{5.4.1}$$

注2 对于有界线性算子而言， 自共轭算子也称为对称算子.

例 5.4.2 令 $H = \mathbb{C}^n$, 其上定义的内积为 $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i$,

A 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的有界线性算子,

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad Ax = z,$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n), z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_n)$, 且 $\varsigma_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j (i = 1, 2, \ldots, n)$,

对于$\forall y \in \mathbb{C}^n$, $y = (\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n)$, 由于

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j)\,\bar{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_j\,\bar{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\bar{\eta_i})\xi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overline{(\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}\eta_i)}\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{(\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ji}\eta_j)} = (x, A^* y),$$

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j)\,\bar{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_j\,\bar{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\bar{\eta_i})\xi_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\overline{(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ij}\eta_i)}\xi_j = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}\eta_j)} = (x, A^*y),$$

我们有 $A^* = (\bar{a}_{ji}) = (a_{ij})^*$, 即$A^*$ 是 A 的转置共轭.

$$A = (a_{ij})_{n\times n},\ \ A^* = (\bar{a}_{ji})_{n\times n}.$$

$$(Ax,y)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j)\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_j\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,\bar{\eta_i})\xi_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\overline{(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ij}\eta_i)}\xi_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}\eta_j)}=(x,A^*y),$$

我们有 $A^*=(\bar{a}_{ji})=(a_{ij})^*$, 即$A^*$ 是 A 的转置共轭.

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\ \ A^*=(\bar{a}_{ji})_{n\times n}.$$

因此 A 是自共轭的充分必要条件是矩阵(a_{ij})和它的共轭转置矩阵 $(\bar{a}_{ji})$ 相等.

$$(Ax,y)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j)\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_j\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,\bar{\eta_i})\xi_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\overline{(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ij}\eta_i)}\xi_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}\eta_j)}=(x,A^*y),$$

我们有 $A^*=(\bar{a}_{ji})=(a_{ij})^*$, 即$A^*$ 是 A 的转置共轭.

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad A^*=(\bar{a}_{ji})_{n\times n}.$$

因此 A 是自共轭的充分必要条件是矩阵(a_{ij})和它的共轭转置矩阵 $(\bar{a}_{ji})$ 相等.

注　如果在 $\mathbb{R}^n$中，A 是自共轭的充分必要条件是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对称的.

$$(Ax,y)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j)\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_j\,\bar{\eta_i}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,\bar{\eta_i})\xi_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\overline{(\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ij}\eta_i)\xi_j}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{(\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}\eta_j)}=(x,A^*y),$$

我们有 $A^*=(\bar{a}_{ji})=(a_{ij})^*$, 即$A^*$ 是 A 的转置共轭.

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\ \ A^*=(\bar{a}_{ji})_{n\times n}.$$

因此 A 是自共轭的充分必要条件是矩阵(a_{ij})和它的共轭转置矩阵 $(\bar{a}_{ji})$ 相等.

注 如果在 $\mathbb{R}^n$中，A 是自共轭的充分必要条件是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是对称的.

例 5.4.3 *记 $H=L^2(I)$, 其中 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个可测集合. $k(s,t)$ 是 $I\times I\to\mathbb{C}$ 的函数, 满足*

$$\int_I\int_I|k(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t<\infty. \tag{5.4.2}$$

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注 条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注 条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

证明 对于$\forall y \in L^2(I)$ 由于

$$(Kx,y) = \int_I \Big[\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s = \int_I\int_I [k(s,t)x(t)]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_I x(t)\overline{\left[\int_I \overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t = (x, K^*y).$$

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注 条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

证明 对于$\forall y \in L^2(I)$ 由于

$$(Kx,y) = \int_I \Big[\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s = \int_I\int_I [k(s,t)x(t)]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_I x(t)\overline{\left[\int_I \overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t = (x, K^*y).$$

因此

$$K^*y(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t = \int_I k^*(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注 条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

证明 对于$\forall y \in L^2(I)$ 由于

$$(Kx,y) = \int_I [\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s = \int_I\int_I [k(s,t)x(t)]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_I x(t)\overline{\left[\int_I \overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t = (x, K^*y).$$

因此

$$K^*y(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t = \int_I k^*(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 K^* 也是积分算子, 且 $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$.

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注 条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

证明 对于$\forall y \in L^2(I)$ 由于

$$(Kx,y) = \int_I \left[\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right]\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s = \int_I\int_I [k(s,t)x(t)]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_I x(t)\overline{\left[\int_I \overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t = (x, K^*y).$$

因此

$$K^*y(s) = \int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t = \int_I k^*(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 K^* 也是积分算子, 且 $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$.

注 K 是自共轭的充分必要条件是 $k\,(s,t) = \overline{k\,(t,s)}$, $t,s \in I$.

K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义 $z=Kx$, 其中

$$z(s)=\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4.3}$$

它的共轭算子 K^*

$$(K^*y)(s)=\int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

注　条件(5.4.2)保证 K 是从$L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子.

证明　对于$\forall y\in L^2(I)$ 由于

$$(Kx,y)=\int_I\Big[\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s=\int_I\int_I[k(s,t)x(t)]\,\bar{y}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_I x(t)\overline{\left[\int_I\overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t=(x,K^*y).$$

因此

$$K^*y(s)=\int_I\overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t=\int_I k^*(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 K^* 也是积分算子, 且 $k^*(s,t)=\overline{k(t,s)}$.

注　K 是自共轭的充分必要条件是 $k\,(s,t)=\overline{k\,(t,s)}$, $t,s\in I$.

例 5.4.4 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上考虑乘法算子

$$Fx(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)| \leqslant B < \infty$ 几乎处处成立.

例 5.4.4 *在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上考虑乘法算子*

$$Fx(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)| \leqslant B < \infty$ 几乎处处成立.

容易验证, F 是一个有界线性算子且

例 5.4.4 *在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上考虑乘法算子*

$$Fx(t)\to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)|\leqslant B<\infty$ 几乎处处成立.

容易验证, F 是一个有界线性算子且

$$\|F\|=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in R}|f(t)|=\|f\|_{\infty}\,.$$

例 5.4.4 *在* $L^2(-\infty,\infty)$ *上考虑乘法算子*

$$Fx(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)| \leqslant B < \infty$ *几乎处处成立.*

容易验证, F 是一个有界线性算子且

$$\|F\| = ess\sup_{t\in R} |f(t)| = \|f\|_{\infty}\,.$$

由于

$$(Fx,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}\,\mathrm{d}t = (x, F^*y).$$

例 5.4.4 在 $L^2(-\infty, \infty)$ 上考虑乘法算子

$$Fx(t) \rightarrow f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)| \leqslant B < \infty$ 几乎处处成立.

容易验证, F 是一个有界线性算子且

$$\|F\| = \underset{t \in R}{ess\sup} |f(t)| = \|f\|_{\infty}.$$

由于

$$(Fx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}\,\mathrm{d}t = (x, F^* y).$$

即它的共轭算子 F^* 也是乘法算子:

$$F^* : y(t) \rightarrow \overline{f(t)}y(t),$$

例 5.4.4 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上考虑乘法算子

$$Fx(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)| \leqslant B < \infty$ 几乎处处成立.

容易验证, F 是一个有界线性算子且

$$\|F\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in R} |f(t)| = \|f\|_\infty .$$

由于

$$(Fx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}\,\mathrm{d}t = (x, F^*y).$$

即它的共轭算子 F^* 也是乘法算子:

$$F^* : y(t) \to \overline{f(t)}y(t),$$

注 显然 F 是自共轭的，当且仅当$f(t)$ 是实函数.

二、自共轭算子的性质

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

证明 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n\to\infty)$, $A\in\mathcal{B}(H)$. 我们要证明 A 是自共轭的. 即: $(Ax,y)-(x,Ay)=0,\ \ \forall x,y\in H$

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

证明 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n \to \infty)$, $A \in \mathcal{B}(H)$. 我们要证明 A 是自共轭的. 即: $(Ax, y) - (x, Ay) = 0, \;\; \forall x, y \in H$
由于 A_n 是自共轭的, 我们有

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

证明 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n\to\infty)$, $A\in\mathcal{B}(H)$. 我们要证明 A 是自共轭的. 即: $(Ax,y)-(x,Ay)=0,\ \ \forall x,y\in H$
由于 A_n 是自共轭的, 我们有

$$
\begin{aligned}
&|(Ax,y)-(x,Ay)| = |(Ax,y)-(A_nx,y)+(x,A_ny)-(x,Ay)| \\
&\leqslant |((A-A_n)x,y)| + |(x,(A_n-A)y)| \leqslant 2\,\|A_n-A\|\,\|x\|\,\|y\| \to 0(n\to\infty),
\end{aligned}
$$

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

证明 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n\to\infty)$, $A\in\mathcal{B}(H)$. **我们要证明 A 是自共轭的. 即:** $(Ax,y)-(x,Ay)=0,\ \ \forall x,y\in H$
由于 A_n 是自共轭的, 我们有

$$\begin{aligned}&|(Ax,y)-(x,Ay)| = |(Ax,y)-(A_nx,y)+(x,A_ny)-(x,Ay)|\\ &\leqslant |((A-A_n)x,y)|+|(x,(A_n-A)y)| \leqslant 2\,\|A_n-A\|\,\|x\|\,\|y\| \to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $(Ax,y)=(x,Ay)$, $\therefore A$ 是一个自共轭算子. $\square$

二、自共轭算子的性质

显然 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的,
并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的.
进一步的我们有:

定理 5.4.5 *Hilbert空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集.*

证明 考虑 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n\to\infty)$, $A\in\mathcal{B}(H)$. **我们要证明 A 是自共轭的. 即:** $(Ax,y)-(x,Ay)=0,\ \ \forall x,y\in H$
由于 A_n 是自共轭的, 我们有

$$
\begin{aligned}
&|(Ax,y)-(x,Ay)| = |(Ax,y)-(A_nx,y)+(x,A_ny)-(x,Ay)|\\
&\leqslant |((A-A_n)x,y)|+|(x,(A_n-A)y)| \leqslant 2\,\|A_n-A\|\,\|x\|\,\|y\| \to 0(n\to\infty),
\end{aligned}
$$

即 $(Ax,y)=(x,Ay)$, $\therefore A$ 是一个自共轭算子. □

注 全体自共轭算子组成一个实的赋范线性空间, 但是在复的有界线性算子空间$\mathcal{B}(H)$ 中, 它不是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个子空间.

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 $Hilbert$ 空间上的有界自共轭算子, 则 AB 是自共轭的充分必要条件是 $AB = BA$.

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 $Hilbert$ 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 *Hilbert* 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.
由于: $(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 *Hilbert* 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.
由于：$(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,
根据共轭算子的定义，我们有：

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 *Hilbert* 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.

由于：$(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,

根据共轭算子的定义，我们有：

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (Bx, Ay) = (x, B^*Ay) = (x, BAy)$$

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 *Hilbert* 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.
由于：$(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,
根据共轭算子的定义，我们有：

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (Bx, Ay) = (x, B^*Ay) = (x, BAy)$$

即 AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ $AB = BA$. $\square$

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 Hilbert 空间上的有界自共轭算子, 则 AB 是自共轭的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.
由于：$(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,
根据共轭算子的定义，我们有：

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (Bx, Ay) = (x, B^*Ay) = (x, BAy)$$

即 AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow AB = BA$. □

定理 5.4.7 设 A 是Hilbert空间 H 上的有界线性算子, 则 A 是自共轭的当且仅当对于 $\forall x \in H, (x, Ax)$ 是实的.

定理 5.4.6 设 A 、 B 是 *Hilbert* 空间上的有界自共轭算子, 则AB 是自共轭的充分必要条件是$AB = BA$.

证明 按照定义, AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall x, y \in H$ 有 $(ABx, y) = (x, ABy)$.
由于：$(AB)^* = B^*A^*$, 且 A 、 B 是自共轭的,
根据共轭算子的定义，我们有：

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (Bx, Ay) = (x, B^*Ay) = (x, BAy)$$

即 AB 是自共轭的 $\Leftrightarrow AB = BA$. □

定理 5.4.7 设 A 是*Hilbert*空间 H 上的有界线性算子, 则A 是自共轭的当且仅当对于$\forall x \in H, (x, Ax)$ 是实的.

证明 $(\Rightarrow)$ 因为 A 是自共轭的, 所以 $(x, Ax) = (Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$.

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$
\begin{aligned}
4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
& + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
& + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=& 4(Ax, y),
\end{aligned}
$$

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$\begin{aligned}
4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
&+ i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
&+ i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=& 4(Ax, y),
\end{aligned}$$

即 $A = A^*$. $\square$

($\Leftarrow$) 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$\begin{aligned}
4(x, Ay) =&(x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
&+i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=&(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
&+i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=&4(Ax, y),
\end{aligned}$$

即 $A = A^*$. □

定理 5.4.8 设 A 是 *Hilbert* *空间* H *中的有界自共轭算子, 则*

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$\begin{aligned} 4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\ & +i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\ =& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\ & + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\ =& 4(Ax, y), \end{aligned}$$

即 $A = A^*$. $\square$

定理 5.4.8 设 A 是 *Hilbert* 空间 H 中的有界自共轭算子, 则

$$\|A\| = \sup_{x \in H} \left\{ |(Ax, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\} = \sup_{x \in H,\ y \in H} \left\{ |(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$
\begin{aligned}
4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
& + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
& + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=& 4(Ax, y),
\end{aligned}
$$

即 $A = A^*$. $\square$

定理 5.4.8 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子, 则

$$
\|A\| = \sup_{x \in H} \left\{ |(Ax, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\} = \sup_{x \in H,\ y \in H} \left\{ |(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.
$$

证明 令 $\alpha = \sup \left\{ |(Ax, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$, 因为

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$
\begin{aligned}
4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
& + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
& + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=& 4(Ax, y),
\end{aligned}
$$

即 $A = A^*$. $\square$

定理 5.4.8 *设 A 是 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子, 则*

$$
\|A\| = \sup_{x \in H} \left\{ |(Ax, x)| \,\big|\, \|x\| = 1 \right\} = \sup_{x \in H,\ y \in H} \left\{ |(Ax, y)| \,\big|\, \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.
$$

证明 令 $\alpha = \sup \left\{ |(Ax, x)| \,\big|\, \|x\| = 1 \right\}$, 因为

$$
|(Ax, x)| \leqslant \|A\| \, \|x\|^2 ,
$$

($\Leftarrow$) 如果 $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, 对于任何的 $x, y \in H$, 由直接计算我们有

$$
\begin{aligned}
4(x, Ay) =& (x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) \\
& + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) \\
=& (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\
& + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) \\
=& 4(Ax, y),
\end{aligned}
$$

即 $A = A^*$. $\square$

定理 5.4.8 *设 A 是 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子, 则*

$$
\|A\| = \sup_{x \in H} \left\{ |(Ax, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\} = \sup_{x \in H,\ y \in H} \left\{ |(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.
$$

证明 令 $\alpha = \sup \left\{ |(Ax, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$, 因为

$$
|(Ax, x)| \leqslant \|A\| \, \|x\|^2 ,
$$

所以 $\alpha \leqslant \|A\|$.

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right) \\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2). \end{aligned}$$

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right) \\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2). \end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2 x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right)\\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2).\end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

$$4\|Ax\|^2 \leqslant 2\alpha(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2) \leqslant 4\alpha\|Ax\|\|x\|. \tag{5.4.4}$$

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right) \\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2). \end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

$$4\|Ax\|^2 \leqslant 2\alpha(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2) \leqslant 4\alpha\|Ax\|\,\|x\|. \tag{5.4.4}$$

于是我们有$\|A\| \leqslant \alpha$. 令

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right)\\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2).\end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

$$4\|Ax\|^2 \leqslant 2\alpha(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2) \leqslant 4\alpha\|Ax\|\|x\|. \tag{5.4.4}$$

于是我们有$\|A\| \leqslant \alpha$. 令

$$\beta = \sup_{\chi\in \mathrm{H}, y\in H}\left\{|(Ax, y)| \;\middle|\; \|x\| = \|y\| = 1\right\},$$

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}
4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right) \\
&\leqslant \alpha \left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha \left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2).
\end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

$$4\|Ax\|^2 \leqslant 2\alpha(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2) \leqslant 4\alpha\|Ax\|\|x\|. \tag{5.4.4}$$

于是我们有$\|A\| \leqslant \alpha$. 令

$$\beta = \sup_{\chi\in \mathrm{H}, y\in H}\left\{|(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1\right\},$$

因为 $|(Ax, y)| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, 所以 $\beta \leqslant \|A\|$,

反之, 对于任何的 $\gamma > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x + \gamma^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right), \gamma x - \gamma^{-1}Ax\right)\\ &\leqslant \alpha\left\|\gamma x + \gamma^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\gamma x - \gamma^{-1}Ax\right\|^2 = 2\alpha(\gamma^2\|x\|^2 + \gamma^{-2}\|Ax\|^2).\end{aligned}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\gamma^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 ()有

$$4\|Ax\|^2 \leqslant 2\alpha(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2) \leqslant 4\alpha\|Ax\|\|x\|. \tag{5.4.4}$$

于是我们有$\|A\| \leqslant \alpha$. 令

$$\beta = \sup_{\chi\in \mathrm{H}, y\in H}\left\{|(Ax, y)| \,\middle|\, \|x\| = \|y\| = 1\right\},$$

因为 $|(Ax, y)| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, 所以 $\beta \leqslant \|A\|$,
注意到$\alpha \leqslant \beta$, 结合 $\|A\| \leqslant \alpha$. 有$\|A\| = \alpha = \beta$. $\square$

三、Cartesian 分解

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

其中A 、 B 是*Hilbert*空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

其中A 、 B 是*Hilbert*空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{5.4.6}$$

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为：$c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有：

定理 5.4.9 设 H 是一个 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

其中A 、 B 是Hilbert空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{5.4.6}$$

显然 $A = A^*$, $B = B^*$, 即 A、B 是有界的自共轭算子, 且

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

其中A、 B 是*Hilbert*空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{5.4.6}$$

显然 $A = A^*$, $B = B^*$, 即 A、B 是有界的自共轭算子, 且

$$T = A + iB, \quad T^* = A - iB. \tag{5.4.7}$$

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为: $c=a+bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有:

定理 5.4.9 设 H 是一个 Hilbert 空间, $T\in\mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T=A+iB, \tag{5.4.5}$$

其中A 、 B 是Hilbert空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A=\frac{1}{2}(T+T^*),\quad B=\frac{1}{2i}(T-T^*). \tag{5.4.6}$$

显然 $A=A^*$, $B=B^*$, 即 A、B 是有界的自共轭算子, 且

$$T=A+iB,\quad T^*=A-iB. \tag{5.4.7}$$

可以证明这样的分解是唯一的. 事实上, 若$T=A_1+iB_1$, 其中 A_1、B_1 是自共轭的, 于是有

三、Cartesian 分解

对于任意的复数 c, 可以分解为：$c = a + bi$, 其中 a 和 b 是实数. 类似的我们有：

定理 5.4.9 设 H 是一个 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + iB, \tag{5.4.5}$$

其中A 、 B 是Hilbert空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \tag{5.4.6}$$

显然 $A = A^*$, $B = B^*$, 即 A、B 是有界的自共轭算子, 且

$$T = A + iB, \quad T^* = A - iB. \tag{5.4.7}$$

可以证明这样的分解是唯一的. 事实上, 若$T = A_1 + iB_1$, 其中 A_1、B_1 是自共轭的, 于是有

$$A - A_1 = i(B_1 - B),$$

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x)\,.$$

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x) \, .$$

由于 $A - A_1$ 和 $B - B_1$ 是自共轭的, 上式右边是实的, 左边是纯虚数, 于是

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x)\,.$$

由于 $A - A_1$ 和 $B - B_1$ 是自共轭的, 上式右边是实的, 左边是纯虚数, 于是

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x)\,.$$

由于 $A - A_1$ 和 $B - B_1$ 是自共轭的, 上式右边是实的, 左边是纯虚数, 于是

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

由于 $A - A_1$ 和 即 $B - B_1$ 是自共轭的， $\therefore A - A_1 = B - B_1 = 0.$ $\square$

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x)\,.$$

由于 $A - A_1$ 和 $B - B_1$ 是自共轭的, 上式右边是实的, 左边是纯虚数, 于是

$$((A - A_1)x, x) = (i(B_1 - B)x, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

由于 $A - A_1$ 和 即 $B - B_1$ 是自共轭的, $\therefore A - A_1 = B - B_1 = 0.$ □

注 (5.4.5)给出的分解 $T = A + iB$, 其中 A、B 是 Hilbert 空间中的自共轭算子, 称为T 的 Cartesian 分解.