内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），　13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$可能是不可数集.

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$可能是不可数集.

下面仅讨论由可数多个元素组成的正交系, 即可数正交列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$**可能是不可数集.**

下面仅讨论由可数多个元素组成的正交系, 即可数正交列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定理 3.4.1 *(**Bessel 不等式**)* *设* $\{e_n\}$ *是内积空间* X *中的**标准正交列**, 则对于任意的*$x\in X$, *有*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\le\|x\|^2. \tag{3.4.1}$$

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$**可能是不可数集.**

下面仅讨论由可数多个元素组成的正交系, 即可数正交列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定理 3.4.1 *(**Bessel 不等式**) 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的**标准正交列**, 则对于任意的$x\in X$, 有*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\le\|x\|^2. \tag{3.4.1}$$

分析: 根据内积和范数的关系, 以及正交列的定义即可证明.

§ 4 Bessel 不等式和正交列的完备性

一、 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$可能是不可数集.

下面仅讨论由可数多个元素组成的正交系, 即可数正交列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定理 3.4.1 *(Bessel 不等式)* *设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交列, 则对于任意的$x\in X$, 有*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\leq\|x\|^2. \tag{3.4.1}$$

分析: 根据内积和范数的关系, 以及正交列的定义即可证明.

证明 由于对于任意的 n

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|^2=(x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k)$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2\geq 0,$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|(x, e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2.$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2.$

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2.$ **注 1：** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$. **注 1：** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2\leq\|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\leq\|x\|^2$. **注 1：** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n\xrightarrow{\omega}0)$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2\le\|x\|^2.$

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2\le\|x\|^2$. **注 1:** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n\xrightarrow{\omega}0)$.

推论 3.4.2 *(Riemann-Lebesgue 引理)*

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$. **注 1**: 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n \xrightarrow{\omega} 0)$.

推论 3.4.2 ***(Riemann-Lebesgue 引理)***

设 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=0 \tag{3.4.2}$$

于是 $\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2$. **注 1:** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n \xrightarrow{\omega} 0)$.

推论 3.4.2 ***(Riemann-Lebesgue 引理)***

设 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt dt=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt dt=0 \tag{3.4.2}$$

证明 在第三节中, 我们知道 $\{\sin nt\}$, $\{\cos nt\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的**正交列**,

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2$. **注 1**: 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n \xrightarrow{\omega} 0)$.

推论 3.4.2 ***(Riemann-Lebesgue 引理)***

设 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt dt=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt dt=0 \tag{3.4.2}$$

证明 在第三节中, 我们知道 $\{\sin nt\}$, $\{\cos nt\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的**正交列**, 从 **Bessel** 不等式可知 $x(t)$ 的 **Fourier** 系数趋近于零, 从而得证.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2$.

令 $n\to\infty$, 即得结论 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2$. **注 1：** 与正交列相对应的 **Fourier** 系数是平方可和的,并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注 2:由 (3.4.1) 式知, 对于任意的 $x\in X$ $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.

以后将看到, 若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正交列, 则 e_n 弱收敛到 **0** $(e_n\xrightarrow{\omega} 0)$.

推论 3.4.2 ***(Riemann-Lebesgue 引理)***

设 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$, *那么*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt dt=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt dt=0 \tag{3.4.2}$$

证明 在第三节中, 我们知道 $\{\sin nt\}$, $\{\cos nt\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的**正交列**, **从 Bessel 不等式可知 $x(t)$ 的 Fourier 系数趋近于零,** 从而得证.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\mathrm{d}t = 0$$

注 当 $x(t)$ **是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=0$$

注 当 $x(t)$ **是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.**

由 Bessel 不等式, 有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=0$$

注 当 $x(t)$ **是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.**

由 Bessel 不等式, 有:

推论 3.4.3 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$ *是内积空间* X *中的* ***标准正交系, 则****对于每个* $x\in X$, x *关于这个标准正交系的* ***Fourier 系数*** $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$ ***最多有可数个不为零.***

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\mathrm{d}t = 0$$

注 当 $x(t)$ **是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.**

由 Bessel 不等式, 有:

推论 3.4.3 设 $\{e_\alpha\}(\alpha \in I)$ *是内积空间* X *中的* ***标准正交系, 则****对于每个* $x \in X$, x *关于这个标准正交系的* ***Fourier 系数*** $\{(x, e_\alpha)|\alpha \in I\}$ ***最多有可数个不为零.***

证明留给读者.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=0$$

注 当 $x(t)$ **是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.**

由 Bessel 不等式, 有:

推论 3.4.3 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$ *是内积空间* X *中的* ***标准正交系, 则****对于每个* $x\in X$, x *关于这个标准正交系的* ***Fourier 系数*** $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$ ***最多有可数个不为零.***

证明留给读者.

定理 3.4.4 设 H 是一个 ***Hilbert 空间***, $\{e_n\}$ 是 H 中的*标准正交列*, $\{\alpha_n\}$ 是一个数列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin ntdt=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos ntdt=0$$

注 当 $x(t)$ 是连续函数时, 这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理.

由 Bessel 不等式, 有:

推论 3.4.3 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$ 是内积空间 X 中的 ***标准正交系***, ***则***对于每个 $x\in X$, x 关于这个标准正交系的 ***Fourier 系数*** $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$ ***最多有可数个不为零.***

证明留给读者.

定理 3.4.4 设 H 是一个 ***Hilbert 空间***, $\{e_n\}$ 是 H 中的*标准正交列*, $\{\alpha_n\}$ 是一个数列, 则

级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ *收敛的充要条件* 为 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2<\infty$. 并且在上述条件下,

$$\|\ \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\ \|^2=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2.$$

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到 :

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ 是正交列. $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ 是正交列. $(e_n, e_m) = 0, n \neq m,$ $(e_i, e_i) = 0,$ $i = 1, 2, \cdots.$

(2) α_m 与 x 的Fourier 系数 (x, e_m) 之间应建立联系.

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ 是正交列. $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

(2) α_m 与 x 的Fourier 系数 (x, e_m) 之间应建立联系.

(3) 结合 Bessel 不等式来证明.

分析: 必要性: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ **是正交列.** $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

(2) α_m **与** x **的Fourier 系数** (x, e_m) **之间应建立联系.**

(3) **结合 Bessel 不等式来证明.**

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛, 记

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

分析: 必要性: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

由 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ **是正交列.** $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

(2) α_m **与** x **的Fourier 系数** (x, e_m) **之间应建立联系.**

(3) **结合** Bessel **不等式来证明.**

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛, 记

$$x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

则对任意 $m \in \mathbb{N}$, 注意到内积的连续性, 有:

分析: 必要性: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

由 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ 是正交列. $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

(2) α_m 与 x 的Fourier 系数 (x, e_m) 之间应建立联系.

(3) 结合 Bessel 不等式来证明.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛, 记

$$x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

则对任意 $m \in \mathbb{N}$, 注意到内积的连续性, 有:

$$(x, e_m) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, e_m) = (\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \alpha_m.$$

(因为 k 最终要大于 m.)

分析: 必要性: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的必要条件为 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2<\infty$.

由 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n = x$ 收敛, 注意到:

(1) $\{e_n\}$ **是正交列.** $(e_n, e_m) = 0, n \neq m$, $(e_i, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

(2) α_m **与** x **的Fourier 系数** (x, e_m) **之间应建立联系.**

(3) **结合 Bessel 不等式来证明.**

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛, 记

$$x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n.$$

则对任意 $m \in \mathbb{N}$, 注意到内积的连续性, 有:

$$(x, e_m) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, e_m) = (\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \alpha_m.$$

(因为 k 最终要大于 m.)

由 Bessel 不等式, 有

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}\mid(x, e_n)\mid^2 \leq \| x \|^2 < \infty.$$

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

(2) 要证此序列收敛, 注意到这里 H 是 Hilbert 空间, 若能证明它们是 H 中的Cauchy 列即可.

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

(2) 要证此序列收敛, 注意到这里 H 是 Hilbert 空间, 若能证明它们是 H 中的Cauchy 列即可.

(3) 为此要证明: $\|x_n - x_m\| \to 0, \ (n, m \to \infty)$.

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

(2) 要证此序列收敛, 注意到这里 H 是 Hilbert 空间, 若能证明它们是 H 中的Cauchy 列即可.

(3) 为此要证明: $\|x_n - x_m\| \to 0, \ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

(2) 要证此序列收敛, 注意到这里 H 是 Hilbert 空间, 若能证明它们是 H 中的Cauchy 列即可.

(3) 为此要证明: $\|x_n - x_m\| \to 0,\ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

分析:充分性: **由** $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty \Rightarrow$ **级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ **收敛.**

(1) **要证无穷级数收敛, 只要证明前** n **项和序列收敛.**

(2) **要证此序列收敛, 注意到这里** H **是 Hilbert 空间, 若能证明它们是** H **中的Cauchy 列即可.**

(3) **为此要证明:** $\|x_n - x_m\| \to 0, \ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

对于任意的 $j, k \in \mathbb{N}, \ k > j$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列,

分析:充分性: 由 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty \Rightarrow$ **级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ **收敛.**

(1) **要证无穷级数收敛, 只要证明前** n **项和序列收敛.**

(2) **要证此序列收敛, 注意到这里** H **是 Hilbert 空间, 若能证明它们是** H **中的Cauchy 列即可.**

(3) **为此要证明:** $\|x_n - x_m\| \to 0, \ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

对于任意的 $j, k \in \mathbb{N}, \ k > j$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列,

$$\| x_k - x_j \|^2 = \| \sum_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} | \alpha_n |^2 .$$

分析:充分性: 由 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty \Rightarrow$ **级数** $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ **收敛.**

(1) **要证无穷级数收敛, 只要证明前** n **项和序列收敛.**

(2) **要证此序列收敛, 注意到这里** H **是 Hilbert 空间, 若能证明它们是** H **中的Cauchy 列即可.**

(3) **为此要证明:** $\|x_n - x_m\| \to 0,\ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

对于任意的 $j, k \in \mathbb{N},\ k > j$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列,

$$\| x_k - x_j \|^2 = \| \Sigma_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \Sigma_{n=j+1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

由于 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2$ 收敛, 上式说明 $\{x_k\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 因此收敛.

分析:充分性: 由 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty \Rightarrow$ 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛.

(1) 要证无穷级数收敛, 只要证明前 n 项和序列收敛.

(2) 要证此序列收敛, 注意到这里 H 是 Hilbert 空间, 若能证明它们是 H 中的Cauchy 列即可.

(3) 为此要证明: $\|x_n - x_m\| \to 0,\ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

对于任意的 $j, k \in \mathbb{N},\ k > j$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列,

$$\| x_k - x_j \|^2 = \| \Sigma_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \Sigma_{n=j+1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

由于 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2$ 收敛, 上式说明 $\{x_k\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 因此收敛.

进一步地由范数的连续性, 我们有

分析:充分性: **由** $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty \Rightarrow$ **级数** $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ **收敛.**

(1) **要证无穷级数收敛, 只要证明前** n **项和序列收敛.**

(2) **要证此序列收敛, 注意到这里** H **是 Hilbert 空间, 若能证明它们是** H **中的Cauchy 列即可.**

(3) **为此要证明:** $\|x_n - x_m\| \to 0, \ (n, m \to \infty)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$.

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$,

对于任意的 $j, k \in \mathbb{N}, \ k > j$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列,

$$\| x_k - x_j \|^2 = \| \Sigma_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \Sigma_{n=j+1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

由于 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2$ 收敛, 上式说明 $\{x_k\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 因此收敛.

进一步地由范数的连续性, 我们有

$$\begin{aligned} \| \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \|^2 &= \lim_{k \to \infty} \| \Sigma_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 \\ &= \lim_{k \to \infty} \Sigma_{n=1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 . \end{aligned}$$

上述定理可表示为:

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中*, ***级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.***

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中, **级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\}\in l^2$.***

推论 3.4.6 设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交列, ***则对于任意的 $x\in H$, x 的 Fourier 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 都收敛.***

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中, **级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.***

推论 3.4.6 *设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交列, **则对于任意的 $x \in H$, x 的 Fourier 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 都收敛.***

收敛的原因: 由定理3.4.1(Bessel 不等式) 知, Fourier 系数是平方可和的, 并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中, **级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.***

推论 3.4.6 *设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交列, **则对于任意的 $x \in H$, x 的 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 都收敛.***

收敛的原因: 由定理3.4.1(Bessel 不等式) 知, Fourier 系数是平方可和的, 并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

这就回答了上一节最后面提出的关于 Fourier 级数是否收敛的问题.

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中, 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.*

推论 3.4.6 *设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交列, 则对于任意的 $x \in H$, x 的 Fourier 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 都收敛.*

收敛的原因: 由定理3.4.1(Bessel 不等式) 知, Fourier 系数是平方可和的, 并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

这就回答了上一节最后面提出的关于 Fourier 级数是否收敛的问题.

注 这里的收敛是在 Hilbert 空间中按范数收敛,

上述定理可表示为:

推论 3.4.5 *在 Hilbert 空间 H 中, 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.*

推论 3.4.6 *设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交列, 则对于任意的 $x \in H$, x 的 Fourier 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 都收敛.*

收敛的原因: 由定理3.4.1(Bessel 不等式) 知, Fourier 系数是平方可和的, 并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

这就回答了上一节最后面提出的关于 Fourier 级数是否收敛的问题.

注 这里的收敛是在 Hilbert 空间中按范数收敛,
不是数学分析中的逐点收敛.

二、 正交列的完备性

二、 正交列的完备性

问题: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?

二、 正交列的完备性

问题： 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?

答案: 一般来说是否定的.

二、 正交列的完备性

问题: **级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?**

答案: 一般来说是否定的.

例 3.4.7 *在* $\mathbb{R}^3$ *中*, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ *是* $\mathbb{R}^3$ *中的正交列*, $x=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$, *但是*

$$(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2\neq x.$$

二、 正交列的完备性

问题: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?

答案: 一般来说是否定的.

例 3.4.7 *在* $\mathbb{R}^3$ *中*, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ *是* $\mathbb{R}^3$ *中的正交列*, $x=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$, *但是*

$$(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2\neq x.$$

例 3.4.8 *设* $\{e_n\}$ *是 Hilbert 空间* H *中的标准正交列, 令* $S=\{e_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, S *是* H *中的由无穷多个元素组成的标准正交列*,

二、 正交列的完备性

问题: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?

答案: 一般来说是否定的.

例 3.4.7 *在* $\mathbb{R}^3$ *中*, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ *是* $\mathbb{R}^3$ *中的正交列*, $x=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$, *但是*

$$(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2\neq x.$$

例 3.4.8 设 $\{e_n\}$ *是 Hilbert 空间* H *中的标准正交列*, 令 $S=\{e_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, S *是* H *中的由无穷多个元素组成的标准正交列*,

但是对于 $x=e_1$, 无论如何选择 α_{2n},

$$x\neq\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}.$$

二、 正交列的完备性

问题: **级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 是否收敛到 x?**

答案: 一般来说是否定的.

例 3.4.7 *在* $\mathbb{R}^3$ *中*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ *是* $\mathbb{R}^3$ *中的正交列*, $x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, *但是*

$$(x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 \neq x.$$

例 3.4.8 *设* $\{e_n\}$ *是 Hilbert 空间* H *中的标准正交列, 令* $S = \{e_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, S *是* H *中的由无穷多个元素组成的标准正交列,*

但是对于 $x = e_1$, 无论如何选择 α_{2n},

$$x \neq \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}.$$

这是因为: 若

$$x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n},$$

二、 正交列的完备性

问题: 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 是否收敛到 x?

答案: 一般来说是否定的.

例 3.4.7 *在 $\mathbb{R}^3$ 中, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正交列, $x=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$, 但是*

$$(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2\neq x.$$

例 3.4.8 *设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交列, 令 $S=\{e_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, S 是 H 中的由无穷多个元素组成的标准正交列,*

但是对于 $x=e_1$, 无论如何选择 α_{2n},

$$x\neq\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}.$$

这是因为: 若

$$x=\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n},$$

可证明对任何 m, 有 $\alpha_{2m}=0$, 从而 $x=0$.

事实上, 因对所有的 m,

$$
\begin{aligned}
0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) \\
&= \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},
\end{aligned}
$$

事实上, 因对所有的 m,

$$
\begin{aligned}
0 = &(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\Sigma_{n=1}^{k} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},
\end{aligned}
$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n} = 0$, 矛盾.

事实上, 因对所有的 m,

$$\begin{aligned} 0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) \\ =& \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m}, \end{aligned}$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 **3.4.6**, x 关于这个正交系的 **Fourier** 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

事实上, 因对所有的 m,

$$
\begin{aligned}
0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) \\
=& \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},
\end{aligned}
$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 3.4.6, x 关于这个正交系的 Fourier 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

原因是这个正交列不完备.

先给出正交列完备的定义

事实上, 因对所有的 m,

$$
\begin{aligned}
0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) \\
&= \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},
\end{aligned}
$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 **3.4.6**, x 关于这个正交系的 **Fourier** 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

原因是这个正交列不完备.

先给出正交列完备的定义

定义 3.4.9 设 X 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的标准正交列, $x \in X$. 若

事实上, 因对所有的 m,

$$
\begin{aligned}
0 = &(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\Sigma_{n=1}^{k} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},
\end{aligned}
$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 **3.4.6**, x 关于这个正交系的 **Fourier** 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

原因是这个正交列不完备.

先给出正交列完备的定义

定义 3.4.9 设 X *是内积空间*, $\{e_n\}$ *是* X *中的标准正交列*, $x \in X$. *若*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 = \|x\|^2, \tag{3.4.3}
$$

事实上, 因对所有的 m,

$$\begin{aligned} 0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) \\ =& \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m}, \end{aligned}$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 **3.4.6**, x 关于这个正交系的 **Fourier** 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

原因是这个正交列不完备.

先给出正交列完备的定义

定义 3.4.9 设 X 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的标准正交列, $x \in X$. 若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2 = \|x\|^2, \tag{3.4.3}$$

称 x 关于$\{e_n\}$ 的 Parseval 等式成立.

事实上, 因对所有的 m,

$$\begin{aligned}0 =&(e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m})\\ &= \lim_{k\to\infty}(\Sigma_{n=1}^{k}\alpha_{2n}e_{2n}, e_{2m}) = \alpha_{2m},\end{aligned}$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}e_{2n} = 0$, 矛盾.

这说明: 即使无穷多个元素组成的标准正交列, 根据推论 **3.4.6**, x 关于这个正交系的 **Fourier** 级数收敛. 但它可能不收敛到 x,

原因是这个正交列不完备.

先给出正交列完备的定义

定义 3.4.9 设 X 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 X 中的标准正交列, $x \in X$. 若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2 = \|x\|^2, \tag{3.4.3}$$

称 x 关于$\{e_n\}$ 的 Parseval 等式成立.

如果对于任意的 $x \in H$, Parseval 等式成立, 则称 $\{e_n\}$ 是 ***完备的.***

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中, x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中, x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 *设* $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

(1) $\{e_n\}^\perp = \{0\}$

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**，当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 *设* $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密**, 或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ 是 ***Hilbert 空间*** H 中的一个***标准正交列***. 则下列***叙述是等价的***:

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密****, 或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密**, 或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$

*(**即** x **的 Fourier 级数收敛到** x);*

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 *设* $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密***, *或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$

*(**即** x **的 Fourier 级数收敛到** x);*

(3) $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中, x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**, 当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 *设* $\{e_n\}$ *是* ***Hilbert 空间*** H *中的一个**标准正交列**. 则下列**叙述是等价的**:*

(1) $\{e_n\}^\perp = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密**, 或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$

*(**即** x **的 Fourier 级数收敛到** x);*

(3) $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

*(**即** $\{e_n\}$ **是** H **中的一个标准正交基**);*

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**，当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ 是 ***Hilbert 空间*** H 中的一个***标准正交列***. 则下列***叙述是等价的***:

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密***, 或者说 $\{e_n\}$ 是*完全的*);

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$

(***即*** x ***的 Fourier 级数收敛到*** x);

(3) $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

(***即*** $\{e_n\}$ ***是*** H ***中的一个标准正交基***);

(4) 对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$,

注1 在三维欧式空间中，Parseval 等式就是勾股定理.

注2 以下证明**在 Hilbert 空间**中，x **关于** $\{e_n\}$ **的 Fourier 级数收敛到** x**，当且仅当** x **关于** $\{e_n\}$ **的 Parseval 等式成立.**

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ 是 ***Hilbert 空间*** H 中的一个***标准正交列***. 则下列***叙述是等价的***:

(1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$

(即 $\{e_n\}$ ***在*** H ***中稠密***, *或者说* $\{e_n\}$ *是完全的);*

(2) 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$

*(**即** x **的 Fourier 级数收敛到** x);*

(3) $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

*(**即** $\{e_n\}$ **是** H **中的一个标准正交基**);*

(4) 对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2$,

即 $\{e_n\}$ *是完备的*, ***即对于任意的*** $x \in H$, ***Parseval 等式成立***.

证明 (1)⇒(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k.$

已知： $\{e_n\}^{\perp} = \{0\},$

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

已知： $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$,

要证: $y = 0$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k.$

已知： $\{e_n\}^{\perp} = \{0\},$

要证: $y = 0.$

对任何 $m \in \mathbb{N}$, 根据内积的连续性,

证明 (1)⇒(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

已知： $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$,

要证: $y = 0$.

对任何 $m \in \mathbb{N}$, 根据内积的连续性,

$$
\begin{aligned}
(y, e_m) &= (x, e_m) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, e_m\right) \\
&= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n, e_m\right) \\
&= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)(e_n, e_m)\right) \\
&= (x, e_m) - (x, e_m) = 0
\end{aligned}
$$

证明 (1)⇒(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

已知： $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$,

要证: $y = 0$.

对任何 $m \in \mathbb{N}$, 根据内积的连续性,

$$
\begin{aligned}
(y, e_m) &= (x, e_m) - (\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, e_m) \\
&= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n, e_m) \\
&= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)(e_n, e_m)) \\
&= (x, e_m) - (x, e_m) = 0
\end{aligned}
$$

由于 $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$, $\therefore$有 $y = 0$, 即 $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$.

(2) $\Rightarrow$(3), 根据正交基的定义, 只需证明: 由条件 $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k$, 可推出

$\overline{Span}\{e_n\} = H$,

$(2) \Rightarrow (3)$, 根据正交基的定义, 只需证明: 由条件 $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 可推出 $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

于是对任何 $x \in H$, 要证明 $x \in \overline{Span}\{e_n\}$.

$(2) \Rightarrow (3)$, **根据正交基的定义，只需证明：由条件** $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$**，可推出** $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

于是对任何 $x \in H$, **要证明** $x \in \overline{Span}\{e_n\}$.

因为对于任何的 $x \in H$, 由条件（2）

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k = lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n),$$

$(2) \Rightarrow (3)$, **根据正交基的定义，只需证明：由条件** $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$**，可推出** $\overline{Span}\{e_n\} = H$,

于是对任何 $x \in H$**，要证明** $x \in \overline{Span}\{e_n\}$.

因为对于任何的 $x \in H$, 由条件（2）

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k = lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n),$$

而

$$\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n \in \mathrm{Span}\{e_n\},$$

(2) $\Rightarrow$(3), **根据正交基的定义，只需证明：由条件** $x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$，**可推出** $\overline{Span}\{e_n\}=H$，

于是对任何 $x\in H$，**要证明** $x\in\overline{Span}\{e_n\}$.

因为对于任何的 $x\in H$, 由条件（2）

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k=lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x,e_n)e_n),$$

而

$$\sum_{n=1}^{k}(x,e_n)e_n\in \mathrm{Span}\{e_n\},$$

所以 $x\in\overline{Span}\{e_n\}$, 即 $\overline{Span}\{e_n\}=H$.

(3)$\Rightarrow$(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

(3)$\Rightarrow$(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, **有** $y = 0$.

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^{\perp} \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^\perp = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^\perp$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^\perp$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^\perp \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^\perp = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^\perp$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^\perp$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^\perp \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

$\{y\}^\perp$ **是一个闭子空间.**

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^{\perp} \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

$\{y\}^{\perp}$ **是一个闭子空间.**

(iii) 于是 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$.

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^{\perp} \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

$\{y\}^{\perp}$ **是一个闭子空间.**

(iii) 于是 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$.

(iv) 由条件 $\overline{Span}\{e_n\} = H$, **即** $\{y\}^{\perp} = H$.

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^{\perp} \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

$\{y\}^{\perp}$ **是一个闭子空间.**

(iii) 于是 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$.

(iv) 由条件 $\overline{Span}\{e_n\} = H$, 即 $\{y\}^{\perp} = H$.

于是 $(y, y) = 0$, 所以 $y = 0$.

(3)⇒(1), 即 “$\overline{Span}\{e_n\} = H \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$” .

只要证明对任何 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 有 $y = 0$.

事实上, (i) 若 $y \in \{e_n\}^{\perp}$, 则

$$(y, e_n) = 0 \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N}),$$

即 $e_n \in \{y\}^{\perp} \ \ (\forall n \in \ \mathbb{N})$.

(ii) 根据内积空间中一集合的正交补是一闭子空间. 知

$\{y\}^{\perp}$ **是一个闭子空间.**

(iii) 于是 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$.

(iv) 由条件 $\overline{Span}\{e_n\} = H$, **即** $\{y\}^{\perp} = H$.

于是 $(y, y) = 0$, 所以 $y = 0$.

以上的证明说明命题(1)到(3)是等价的.

(2)$\Rightarrow$(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$.

(2)⇒(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2$.

已知了 x, 要求 $\|x\| = ?$ 要用到内积诱导的范数;

(2)⇒(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$.

已知了 x, 要求 $\|x\| = ?$ 要用到内积诱导的范数;

由条件 $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 再运用 内积的性质和范数的连续性来证明.

(2)⇒(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2$.

已知了 x, 要求 $\|x\| = ?$ 要用到内积诱导的范数；

由条件 $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$, 再运用 内积的性质和范数的连续性来证明.

因为对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$, 于是

(2)⇒(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$.

已知了 x, 要求 $\|x\| =?$ 要用到内积诱导的范数;

由条件 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 再运用 内积的性质和范数的连续性来证明.

因为对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 于是

$$\| x \|^2 = \| \Sigma_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| \Sigma_{k=1}^{n}(x, e_k)e_n \|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} \mid (x, e_k) \mid^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \mid (x, e_k) \mid^2 .$$

(这里用到的是**范数的连续性**.)

(2)$\Rightarrow$(4). 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$.

已知了 x, 要求 $\|x\| =?$ 要用到内积诱导的范数;

由条件 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 再运用 内积的性质和范数的连续性来证明.

因为对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, 于是

$$\| x \|^2 = \| \Sigma_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| \Sigma_{k=1}^{n}(x, e_k)e_n \|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} \mid (x, e_k) \mid^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \mid (x, e_k) \mid^2 .$$

(这里用到的是**范数的连续性**.)

因此 $\{e_n\}$ 是完备的.

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即**完备推出完全**.

(4)$\Rightarrow$(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即完备推出完全.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即完备推出完全.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即**完备推出完全**.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 = 0,$$

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即完备推出完全.

只要证明下面事实：若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 = 0,$$

$\because (x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$, 于是 $x = 0$.

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即**完备推出完全**.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = 0,$$

$\because (x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$ 于是 $x = 0$.

注1 我们看到,当 $\{e_n\}$ 是正交基时, **Bessel** 不等式中的"小于等于号"成为等号, 即成为 **Parseval** 等式.

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即**完备推出完全**.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = 0,$$

$\because (x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$ 于是 $x = 0$.

注1 我们看到,当 $\{e_n\}$ 是正交基时, **Bessel** 不等式中的"小于等于号"成为等号, 即成为 **Parseval** 等式.

如果 $\{e_n\}$ 不是正交基,则 Bessel 不等式是严格的不等式.

(4)⇒(1), "对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 \Rightarrow \{e_n\}^{\perp} = \{0\}$," 即**完备推出完全**.

只要证明下面事实: 若 $x \in H$, 都有

$$(x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则推出 $x = 0$.

事实上, **由已知的 Parseval 等式**

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 = 0,$$

$\because (x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$, 于是 $x = 0$.

注1 我们看到,当 $\{e_n\}$ 是正交基时, **Bessel 不等式中的"小于等于号"成为等号, 即成为 Parseval 等式.**

如果 $\{e_n\}$ 不是正交基,则 Bessel 不等式是严格的不等式.

注2 在无穷维空间, 确定一组元素是否正交相对较为容易, 但是要确定一组正交系是否是空间的正交基相对较为困难.

三、 例

三、 例

定理 3.4.11 ***三角函数系:***

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.4.4}$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的***一组标准正交基***.

三、 例

定理 3.4.11 *三角函数系:*

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.4.4}$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的**一组标准正交基**.

证明分析: 前面已在命题3.3.8 中证明了 $\{e_n\}$ **是标准正交系.** 根据定理3.4.10, **只要证明** $Span\{e_n\}$ **在** $L^2[-\pi, \pi]$ **中稠密即可.**

三、 例

定理 3.4.11 ***三角函数系:***

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.4.4}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的***一组标准正交基***.

证明分析: 前面已在命题3.3.8 中证明了 $\{e_n\}$ **是标准正交系.** 根据定理3.4.10, **只要证明 $Span\{e_n\}$ 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密即可.**

证明

(1) 由定理 2.2.7 及定理后的注可知: **连续函数在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密**. 即:

三、 例

定理 3.4.11 *三角函数系:*

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots) \qquad (3.4.4)$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的**一组标准正交基**.

证明分析: 前面已在命题3.3.8 中证明了 $\{e_n\}$ **是标准正交系**. 根据定理3.4.10, **只要证明** $Span\{e_n\}$ **在** $L^2[-\pi,\pi]$ **中稠密即可.**

证明

(1) 由定理 2.2.7 及定理后的注可知: **连续函数在** $L^2[-\pi,\pi]$ **中稠密**. 即: 对于任意的 $x\in L^2[-\pi,\pi]$ 及 $\varepsilon>0$, 都存在周期为 2π 的连续函数 $y(t)$, 使得

三、 例

定理 3.4.11 *三角函数系:*

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.4.4}$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的**一组标准正交基**.

证明分析: 前面已在命题3.3.8 中证明了 $\{e_n\}$ 是标准正交系. 根据定理3.4.10, 只要证明 $Span\{e_n\}$ 在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密即可.

证明

(1) 由定理 2.2.7 及定理后的注可知: **连续函数在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密**. 即: 对于任意的 $x \in L^2[-\pi, \pi]$ 及 $\varepsilon > 0$, 都存在周期为 2π 的连续函数 $y(t)$, 使得

$$\| x(t) - y(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

三、 例

定理 3.4.11 *三角函数系:*

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.4.4}$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基.

证明分析: 前面已在命题3.3.8 中证明了 $\{e_n\}$ 是标准正交系. 根据定理3.4.10, 只要证明 $Span\{e_n\}$ 在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密即可.

证明

(1) 由定理 2.2.7 及定理后的注可知: **连续函数在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密**. 即: 对于任意的 $x \in L^2[-\pi, \pi]$ 及 $\varepsilon > 0$, 都存在周期为 2π 的连续函数 $y(t)$, 使得

$$\| x(t) - y(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

(2) **对于这个连续函数** $y(t)$ 和 $\varepsilon > 0$, **根据 Weierstrass 第二逼近定理, 存在三角多项式在** $[-\pi, \pi]$ **上一致收敛到** $y(t)$,

即存在

即存在

$$T(t)=\alpha_0+\Sigma_{k=1}^{m}\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt,$$

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$）在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密.

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$ ）在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密.

即 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基.

即存在

$$T(t)=\alpha_0+\Sigma_{k=1}^{m}\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt,$$

使得

$$\| y(t)-T(t)\|_{L^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t)-T(t)\|_{L^2}\leq\| x-y\|+\| y-T\|<\varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$）在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密.

即 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一组标准正交基.

注1 这样对于函数 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$, 都有

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$ ）在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密.

即 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基.

注1 这样对于函数 $x(t) \in L^2[-\pi, \pi]$, 都有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \tag{3.4.5}$$

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$ ）在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密.

即 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基.

注1 这样对于函数 $x(t) \in L^2[-\pi, \pi]$, 都有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \tag{3.4.5}$$

但这里的相等, 是在 L^2 空间中“积分意义下的平方平均”收敛, 即当 $n \to \infty$ 时,

即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得

$$\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(3) 于是

$$\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon.$$

即全体三角多项式（$Span\{e_n\}$ ）在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密.

即 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一组标准正交基.

注1 这样对于函数 $x(t) \in L^2[-\pi,\pi]$, 都有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \tag{3.4.5}$$

但这里的相等, 是在 L^2 空间中"积分意义下的平方平均"收敛, 即当 $n \to \infty$ 时,

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0.$$

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

这与数分中经典的 Fourier 级数的**收敛意义不同**,**数学分析中 Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.** 这里的收敛是在L^2空间中按范数收敛.

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

这与数分中经典的 Fourier 级数的**收敛意义不同**,**数学分析中 Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.** 这里的收敛是在L^2空间中按范数收敛.

注2 1913年, 鲁津猜测函数 $x(t) \in L^2$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛到 $x(t)$, 直到1966年, L.Carleson 才证明了鲁津的猜测是正确的, 即：对于$\forall x(t) \in L^2$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt) = x(t) \tag{3.4.6}$$

几乎处处成立.

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

这与数分中经典的 Fourier 级数的**收敛意义不同**,**数学分析中 Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.** 这里的收敛是在L^2空间中按范数收敛.

注2 1913年, 鲁津猜测函数 $x(t) \in L^2$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛到 $x(t)$, 直到1966年, L.Carleson 才证明了鲁津的猜测是正确的, 即：对于$\forall x(t) \in L^2$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt) = x(t) \tag{3.4.6}$$

几乎处处成立.

注3 Hilbert 空间中的正交系不仅仅可以由例3.4.11给出的“三角函数系”构成, 我们当然**希望正交系由一些更容易处理的函数系组成, 比如说多项式.**

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

这与数分中经典的 Fourier 级数的**收敛意义不同**,**数学分析中 Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.** 这里的收敛是在L^2空间中按范数收敛.

注2 1913年, 鲁津猜测函数 $x(t) \in L^2$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛到 $x(t)$, 直到1966年, L.Carleson 才证明了鲁津的猜测是正确的, 即：对于$\forall x(t) \in L^2$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt) = x(t) \tag{3.4.6}$$

几乎处处成立.

注3 Hilbert 空间中的正交系不仅仅可以由例3.4.11给出的“三角函数系”构成, 我们当然**希望正交系由一些更容易处理的函数系组成**, **比如说多项式.** 在下一节中我们给出的 Legendre 多项式就是有多项式构成的正交列.

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad n \to \infty.$$

这与数分中经典的 Fourier 级数的**收敛意义不同**,**数学分析中 Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.** 这里的收敛是在L^2空间中按范数收敛.

注2 1913年, 鲁津猜测函数 $x(t) \in L^2$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛到 $x(t)$, 直到1966年, L.Carleson 才证明了鲁津的猜测是正确的, 即：对于$\forall x(t) \in L^2$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt) = x(t) \tag{3.4.6}$$

几乎处处成立.

注3 Hilbert 空间中的正交系不仅仅可以由例3.4.11给出的“三角函数系”构成, 我们当然**希望正交系由一些更容易处理的函数系组成, 比如说多项式.** 在下一节中我们给出的 Legendre 多项式就是有多项式构成的正交列.

注4 *在一个 Hilbert 空间中可以有无穷多组正交基, 适当的选择正交基是十分重要的, 不同的问题要选择不同的正交基.*