内蒙古大学 数学科学学院

泛函分析 期末考试试卷（一）参考答案及评分细则

一、（本题满分15分）

叙述距离空间的定义，并证明：若(X,d)是距离空间，令

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

则(X,ρ)也是距离空间。

解: 设X是任一非空集合, 对于X中的任意两点x,y, 均有一实数$d(x,y)$与它对应, 且满足:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$;

(2) $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$;

(3) $d(y,x)=d(x,y)$;

(4) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

则称$d(x,y)$为X中的距离. 定义了距离d 的集合称为距离空间, 记为(X,d). $\cdots$ 5分

证明: 依次验证ρ满足距离的4条: 对于任意$x,y,z\in X$,

(1) 由于$d(x,y)\geqslant 0$, 故$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\geqslant 0$.

(2) $\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0\Leftrightarrow d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

(3) $\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=\rho(y,x)$.

(4) 由于函数$\frac{r}{1+r}=1-\frac{1}{1+r}$在$r\in[0,\infty)$上单调递增且$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$, 故

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leqslant\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}\\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}\\ &\leqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}\ =\ \rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此(X,ρ)也是距离空间. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

二（本题满分15分）

叙述线性赋范空间的定义，并证明如下命题：

设X是线性赋范空间, A是X的闭子集，B是X的自列紧子集，证明$A+B=\{x+$

$y \mid x \in A, y \in B\}$是的闭子集。

解: 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间, 函数$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$满足: 对于任意的$x \in X, y \in X$及$\alpha \in \mathbb{K}$

(1) $\|x\| \geqslant 0$;

(2) $\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$;

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称$\|\cdot\|$是X上的范数. 定义了范数的线性空间称为赋范空间, 记为$(X, \|\cdot\|)$.$\cdots$ 5分

证明：设$\{x_n\} \subset A + B$ 且$\{x_n\}$收敛于$x \in X$. 要证$x \in A + B$. 对于每个$n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n + z_n$, 其中$y_n \in A$, $z_n \in B$. 由于B是自列紧集, 故存在$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_k}\}$收敛于$z \in B$. 又由于

$$y_{n_k} = (y_{n_k} + z_{n_k}) - z_{n_k} = x_{n_k} - z_{n_k},$$

故$\{y_{n_k}\}$ 收敛于$x - z$. 结合A是闭集可知$x - z \in A$. 因此

$$x = (x - z) + z \in A + B.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

三、(本题满分20分)

叙述内积空间的定义，并讨论内积空间和线性赋范空间的关系。请证明你的结论或给出反例。

解：(1) 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间, 如果对于任意$x, y \in X$, 有$\mathbb{K}$ 中的一个数(x, y) 与它们对应, 使得对任意的$x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 满足

(i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ 当且仅当$x = 0$;

(ii $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(iii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(iv) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称$(\cdot, \cdot)$ 是X 上的一个内积, 定义了内积的空间X 称为内积空间.$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2)内积空间X上的内积一定可以诱导一个X上的范数, 换句话说, 内积空间可以成为一个赋范空间; 反过来, 赋范空间中的范数未必能由一个内积诱导, 换句话说, 有赋范空间的范数不可以由内积诱导. 此外, 范数可以由内积诱导的充要条件是满足平行四边形法则. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

(3)设X是内积空间, 则$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$是X上的范数, 且满足平行四边形法则, 即

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in X.$$

证明: 显然$\|x\|$满足范数的前三条正定，严格正及正齐次性. 下面我们只验证三角不等式. 对于任意的$x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\
&\leqslant |(x, x+y)| + |(y, x+y)| \\
&\leqslant \|x\|\|x+y\| + \|y\|\|x+y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)\|x+y\|,
\end{aligned}$$

因此对于任意的$x, y \in X$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

下面证明$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$满足平行四边形法则.

$$\begin{aligned}
& \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\
= \ & (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\
= \ & ((x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)) + ((x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y)) \\
= \ & 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

…………………… 15分

(4) 例如赋范空间$C[0,1]$中的范数不可以由任何内积诱导.

事实上, 取$x = x(t) \equiv 1$, $y = y(t) = t$, $\forall t \in [0,1]$, 于是

$$\|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \|x+y\| = 2,\ \|x-y\| = 1,$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5,\ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

因此$\|\cdot\|$不满足平行四边形法则, 从而范数不可以由任何内积诱导. ……… 20分

四、(本题满分20分)

叙述开映射定理和逆算子定理，并用开映射定理证明逆算子定理。

解: 开映射定理. 设 T 是Banach 空间 X 上到Banach空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T是开映射. ……………………… 5分

逆算子定理. 设T 是从Banach 空间X 上到Banach 空间X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1}是有界的. ……………………… 10分

证明: 由条件知 T^{-1} 存在. 由开映射定理可知, T 是开映射. $B(0,1)$ 是开集, 所以 $TB(0,1)$ 是开集. $0 \in TB(0,1)$, 即 0 是$TB(0,1)$ 的内点, 所以存在$\delta > 0$,使得: $B_1(0,\delta) \subset TB(0,1)$. 于是对于 $\forall\ y \in X_1$, 不妨设 $y \neq 0$, $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in B_1(0,\delta)$, 从而$\frac{\delta y}{2\|y\|} \in TB(0,1)$, 即 $\|T^{-1}\frac{\delta y}{2\|y\|}\| \leq 1$. 于是$\|T^{-1}y\| \leq \frac{2\|y\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leq \frac{2}{\delta}$, 即 T^{-1} 是有界线性算子. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20分

五、(本题满分15分)

叙述正交分解定理，并证明如下命题：

设L_1, L_2是Hilbert空间H的两个相互正交的子空间，$L = L_1 \oplus L_2$，证明L是闭子空间的充要条件是L_1, L_2均为闭子空间。

解: 设H是Hilbert空间, M是H中的闭子空间, 则对于任意的$x \in H$, 存在唯一的$x_0 \in M$及$y \in M^{\perp}$, 使得

$$x = x_0 + y \text{ 并且} \|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

证明: 充分性$\Leftarrow$): 设 $\{x_n\} \subset L,\ x_n \to x \in H\ (n \to \infty)$, 则

$$x_n = y_n + z_n,\ y_n \in L_1,\ z_n \in L_2.$$

对 x 作正交分解:

$$x = y + z\ (y \in L_1, z \in L_1^{\perp}).$$

由于$x_n - x = (y_n - y) + (z_n - z)$且$y_n - y \perp z_n - z$, 故$\|y_n - y\|^2 + \|z_n - z\|^2 = \|x_n - x\|^2 \to 0 (n \to \infty)$, 从而$\{y_n\}$收敛于$y$且$\{z_n\}$收敛于$z$. 由 L_1, L_2 闭可知 $y \in L_1, z \in L_2$, 进而 $x = y + z \in L$. 因此 L 是闭子空间. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

必要性$\Rightarrow$):设 L 为闭子空间, $\{x_n\} \subset L_1, x_n \to x (n \to \infty)$, 则 $x \in L$. 由于对一切 $y \in L_2$, 由内积的连续性我们有

$$(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0,$$

故 $x \in L_2^{\perp}$. 因为 $L = L_1 \oplus L_2$ 且 $x \in L \cap L_2^{\perp}$, 故 $x \in L_1$. 所以 L_1 为闭子空间. 同理可证 L_2 也为闭子空间. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

六、(本题满分15分)

叙述一致有界原理，并用它证明如下命题:

设$\{\eta_n\}$为一数列，若对一切$x = \{\xi_n\} \in l^q (1 < q < \infty)$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \xi_n$收敛,

则$\{\eta_n\}\in l^p$, 其中$p>0$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

解: 设$\{T_\alpha\,|\,\alpha\in I\}$是Banach空间$X$上到赋范空间$X_1$中的有界线性算子族. 如果对于对于任意$x\in X$,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\|<\infty,$$

则$\{\|T_\alpha\|\,|\,\alpha\in I\}$是有界集. ·························· 5分

证明: 令$T_n x=\sum\limits_{k=1}^n \eta_k\xi_k$, $x=\{\xi_k\}\in l^q$. 易证T_n是l^q上的线性算子. 下面证明T_n是有界的且$\|T_n\|=(\sum\limits_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

对于每个$n\in\mathbb{N}$, 对于任意的$x=\{\xi_k\}\in l^q$,

$$\begin{aligned}|T_n x| &= |\sum_{k=1}^n \eta_k\xi_k| \leqslant \sum_{k=1}^n|\eta_k\xi_k|\\ &\leqslant (\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^q)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant (\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}\|x\|,\end{aligned}$$

所以T_n是有界的且$\|T_n\|\leqslant(\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}$.

另一方面, 令$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$, 其中$\xi_k^{(n)}$定义为

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}\frac{|\eta_k|^p}{\eta_k}, & 1\leqslant k\leqslant n \text{ 和}\eta_k\neq 0,\\ 0, & k>n \text{ 或}\eta_k=0,\end{cases}$$

则对于每个$n\in\mathbb{N}$, $\{\xi_k^{(n)}\}\in l^q$. 由于$T_n x_n=\sum_{k=1}^n\eta_k\xi_k^n=\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p$且

$$\begin{aligned}|T_n x_n| &\leqslant \|T_n\|\|x_n\|\\ &= \|T_n\|(\sum_{k=1}^n\frac{|\eta_k|^{qp}}{|\eta_k|^q})^{\frac{1}{q}}\\ &= \|T_n\|(\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

故$\|T_n\|\geqslant(\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}$. ·························· 10分

因此$\|T_n\|=(\sum\limits_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}$. 由于对一切$x=\{\xi_n\}\in l^q(1<q<\infty)$, 级数$\sum_{n=1}^\infty\eta_n\xi_n$收敛, 故$\{T_n x\}$有界. 由一致有界原则可知$\{\|T_n\|\}$有界, 从而存在$M>0$, 使得$\|T_n\|\leqslant M$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 由此可得$\forall n\in\mathbb{N}$, $(\sum_{k=1}^n|\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}=\|T_n\|\leqslant M$. 因此$\sum_{k=1}^\infty|\eta_k|^p\leqslant M^p<\infty$, 即$\{\eta_n\}\in l^p$. ·························· 15分