内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

第四章　有界线性算子

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。
我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法，把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、拓展达到无穷维空间。

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法， 把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、 拓展达到无穷维空间。

证明了：任何一个无穷维可分的 **Hilbert** 空间 都可以表示为“坐标形式”的 l^2，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法，把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、拓展达到无穷维空间。

证明了：任何一个无穷维可分的 **Hilbert** 空间都可以表示为“坐标形式”的 l^2，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.

例如**在线性空间** $L^2[-\pi,\pi]$ **中** 三角函数系：

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法， 把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、 拓展达到无穷维空间。

证明了：任何一个无穷维可分的 **Hilbert** 空间 都可以表示为 **“**坐标形式**”** 的 l^2，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.

例如**在线性空间** $L^2[-\pi,\pi]$ **中** 三角函数系：

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots)$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中**一组标准正交基**

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法， 把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、 拓展达到无穷维空间。

证明了：任何一个无穷维可分的 **Hilbert** 空间 都可以表示为“坐标形式”的 l^2，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.

例如**在线性空间** $L^2[-\pi,\pi]$ **中** 三角函数系：

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots)$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中**一组标准正交基**

于是 $x(t)$ 可以按这个标准正交基展开成 Fourier 级数：

$$x(t)=(x,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt+(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,$$

第四章　有界线性算子

在前一章里，我们建立了内积空间、Hilbert 空间的概念。

我们运用类比、联想、归纳等数学研究方法，把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、拓展达到无穷维空间。

证明了：任何一个无穷维可分的 **Hilbert** 空间 都可以表示为“坐标形式”的 l^2，即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.

例如**在线性空间** $L^2[-\pi,\pi]$ **中** 三角函数系：

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\},(k=1,2,\cdots)$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中**一组标准正交基**

于是 $x(t)$ 可以按这个标准正交基展开成 Fourier 级数：

$$x(t)=(x,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt+(x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,$$

即： $$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）

数学主要研究的对象是函数、运算。

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）

数学主要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）

数学主要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质

许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）

数学主要研究的对象是函数、运算。

微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质

许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**

线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.
进一步我们**把全体有界线性算子看作一个线性空间， 并赋予范数． 线性算子看作赋范空间中的元素**,

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.
进一步我们**把全体有界线性算子看作一个线性空间， 并赋予范数. 线性算子看作赋范空间中的元素**,
线性算子空间是**线性泛函分析研究的主要对象**.

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.
进一步我们**把全体有界线性算子看作一个线性空间， 并赋予范数． 线性算子看作赋范空间中的元素**,
线性算子空间是**线性泛函分析研究的主要对象**.
在新的线性空间框架下,研究线性运算的性质，解决分析、代数、几何中的问题． 在**赋范空间中讨论有界线性算子的性质**, 得到一些很深刻的结论：

在这之前我们关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）
数学主要研究的对象是函数、运算。
微分, 积分都是线性运算, 与 R^n 空间中线性变换A也有很多相同的性质
许多数学问题, 例如:中学解析几何中的**平移和旋转是线性变换,**
线性方程组、微分方程、 积分方程都是**都与特定空间中的线性运算(变换)或者说线性映射相关,**

我们**将把它们称之为线性算子**.

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一.
进一步我们**把全体有界线性算子看作一个线性空间， 并赋予范数. 线性算子看作赋范空间中的元素**,
线性算子空间是**线性泛函分析研究的主要对象**.
在新的线性空间框架下,研究线性运算的性质，解决分析、代数、几何中的问题. 在**赋范空间中讨论有界线性算子的性质**, 得到一些很深刻的结论：

一致有界原则， 逆算子定理， 闭图像定理.

§1 有界线性算子与线性泛函

§1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

§1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

§1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

$$(x+y)' = x' + y', \quad (\alpha x)' = \alpha x',$$

§ 1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

$$(x+y)' = x' + y', \quad (\alpha x)' = \alpha x',$$

积分运算是线性的:

§1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

$$(x+y)' = x' + y', \quad (\alpha x)' = \alpha x',$$

积分运算是线性的:

$$\int (x+y)\mathrm{d}t = \int x\mathrm{d}t + \int y\mathrm{d}t,$$

$$\int \alpha x\mathrm{d}t = \alpha \int x\mathrm{d}t,$$

§ 1 有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

$$(x+y)'=x'+y',\quad (\alpha x)'=\alpha x',$$

积分运算是线性的:

$$\int (x+y)\mathrm{d}t=\int x\mathrm{d}t+\int y\mathrm{d}t,$$

$$\int \alpha x\mathrm{d}t=\alpha\int x\mathrm{d}t,$$

即**满足性质** $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$

§ 1　有界线性算子与线性泛函

一、有界线性算子与线性泛函的定义

我们所熟悉的**微分运算是线性的:**

$$(x+y)'=x'+y',\quad (\alpha x)'=\alpha x',$$

积分运算是线性的:

$$\int(x+y)\mathrm{d}t=\int x\mathrm{d}t+\int y\mathrm{d}t,$$

$$\int \alpha x\mathrm{d}t=\alpha\int x\mathrm{d}t,$$

即**满足性质** $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$

我们**把具有这样性质的运算, 称为线性算子**.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha T x,$$

则称 T 是从 X 中到 X_1 中的 *线性算子*.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T)\subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则称 T 是从 X 中到 X_1 中的 *线性算子*.

$\mathscr{D}(T)$ 称为 T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T)\subsetneqq X$.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T 是从 X 中到 X_1 中的 线性算子.

$\mathscr{D}(T)$ 称为 T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 T **是从 X 上到 X_1 的线性算子**.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T **是从** X **中到** X_1 **中的** 线性算子.

$\mathscr{D}(T)$ 称为 T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 T **是从** X 上到 X_1 **的线性算子**.

注2 若 $X_1 = \mathbb{K}$ (**数域**), $T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}$.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T)\subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则称 T 是从 X 中到 X_1 中的 线性算子.

$\mathscr{D}(T)$ 称为 T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T)\subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T)=X$, 则称 T **是从 X 上到 X_1 的线性算子**.

注2 若 $X_1=\mathbb{K}$ (**数域**), $T:\mathscr{D}(T)\to\mathbb{K}$.

这样的线性算子称为是线性泛函.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T 是从 X 中到 X_1 中的 线性算子.

$\mathscr{D}(T)$ 称为 T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 T **是从 X 上到 X_1 的线性算子.**

注2 若 $X_1 = \mathbb{K}$ (**数域**), $T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}$.

这样的线性算子**称为是线性泛函**.

即**线性泛函 T 是从赋范空间 X 上到数域 $\mathbb{K}$ 的线性算子**.

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T **是从** X **中到** X_1 **中的** *线性算子*.

$\mathscr{D}(T)$ **称为** T **的定义域**.

注1 一般地, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 T **是从** X 上到 X_1 **的线性算子**.

注2 若 $X_1 = \mathbb{K}$ (**数域**), $T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}$.

这样的线性算子**称为是**线性泛函.

即**线性泛函** T **是从赋范空间** X **上到数域** $\mathbb{K}$ **的线性算子**.

当 $\mathbb{K}$ 是实数域, 称为是 **实线性泛函.**

定义 4.1.1 设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{D}(T) \subset X$, T 是从 $\mathscr{D}(T)$ 到 X_1 的**映射**, 满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T **是从** X **中到** X_1 **中的** *线性算子*.

$\mathscr{D}(T)$ **称为** T ***的定义域***.

注1 **一般地**, $\mathscr{D}(T) \subsetneqq X$.

如果 $\mathscr{D}(T) = X$, 则称 T **是从** X 上**到** X_1 **的线性算子**.

注2 若 $X_1 = \mathbb{K}$ (**数域**), $T : \mathscr{D}(T) \to \mathbb{K}$.

这样的线性算子**称为是**线性泛函.

即**线性泛函** T **是从赋范空间** X **上到数域** $\mathbb{K}$ **的线性算子**.

当 $\mathbb{K}$ 是实数域, 称为是 **实线性泛函**.

当 $\mathbb{K}$ 是复数域, 称为是 **复线性泛函**.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设* T *是从* X *到* X_1 *的线性算子,若存在* M, *使得*

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设* T *是从* X *到* X_1 *的线性算子, 若存在* M, *使得*

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

则称 f 是有界线性泛函.

注1 **线性算子(线性泛函)的有界**和 **函数的有界** **意义并不相同**.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

则称 f 是有界线性泛函.

注1 **线性算子(线性泛函)的有界**和 **函数的有界 意义并不相同**.

例如: **在实数空间 $\mathbb{R}$ 中**, $y = Tx = x$ **看作普通的实函数**, 它是**无界函数**.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.
如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

则称 f 是有界线性泛函.

注1 **线性算子(线性泛函)的有界**和 **函数的有界 意义并不相同**.
例如: **在实数空间 $\mathbb{R}$ 中**, $y = Tx = x$ **看作普通的实函数**, 它是**无界函数**.
把 $Tx = x$ 但是把它看作是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子, 则 T 是**有界线性算子**,
(且 $\|T\| \leq 1$)

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

则称 f 是有界线性泛函.

注1 **线性算子(线性泛函)的有界**和 **函数的有界 意义并不相同**.

例如: **在实数空间 $\mathbb{R}$ 中**, $y = Tx = x$ **看作普通的实函数**, 它是**无界函数**.

把 $Tx = x$ 但是把它看作是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子, 则 T 是**有界线性算子**,

(且 $\| T \| \le 1$)

一有界线性算子的有界指的是映射 “放大的倍数” 不超过一个常数.

下面给出**有界线性算子**、 **有界线性泛函**的定义.

定义 4.1.2 *设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 若存在 M, 使得*

$$\|Tx\|_1 \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.1}$$

则称 T 为有界的线性算子.

如果一个线性泛函 f 是有界的, 即

$$|f(x)| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{4.1.2}$$

则称 f 是有界线性泛函.

注1 **线性算子(线性泛函)的有界**和 **函数的有界 意义并不相同**.

例如: **在实数空间 $\mathbb{R}$ 中**, $y = Tx = x$ **看作普通的实函数**, 它是**无界函数**.

把 $Tx = x$ 但是把它看作是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子, 则 T 是**有界线性算子,** **(且 $\| T \| \le 1$)**

一有界线性算子的有界指的是映射 “放大的倍数” 不超过一个常数.

注2 由于内积可以产生范数, 内积空间也是赋范空间, 因此,**有关赋范空间上有界线性算子、有界线性泛函的讨论 在内积空间依然成立**.

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T* ***在*** *x_0* ***点连续****.*

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T : X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T* ***在*** *x_0* ***点连续****.*

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在 x_0 点连续**.

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. **如果 T 在 x_0 点连续, 则 T 在 X 上连续.**

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, 只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续. 为此, 即证: 若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

(请读者自己证明).

定义 4.1.4 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在 x_0 点连续**.

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. **如果 T 在 x_0 点连续, 则 T 在 X 上连续.**

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, **只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续**. 为此, 即证:若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在 x_0 点连续**.*

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$.* ***如果 T 在 x_0 点连续, 则 T 在 X 上连续.***

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, 只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续. 为此, 即证:若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

由条件 $y_n \to y$, 即 $y_n - y \to 0$, 故 $y_n - y + x_0 \to x_0$.

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在** x_0 **点连续**.

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. *如果 T 在 x_0 点连续, 则 T 在 X 上连续.*

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, **只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续**. 为此, 即证:若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

由条件 $y_n \to y$, 即 $y_n - y \to 0$, 故 $y_n - y + x_0 \to x_0$.

于是 $T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$, 由于算子是线性的

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在** x_0 **点连续**.

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T: X \to X_1$. **如果** T **在** x_0 **点连续, 则** T **在** X **上连续.**

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, **只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续**. 为此, 即证: **若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.**

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

由条件 $y_n \to y$, 即 $y_n - y \to 0$, 故 $y_n - y + x_0 \to x_0$.

于是 $T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$, 由于算子是线性的

$$\therefore T(y_n - y) + Tx_0 \to Tx_0.$$

命题 4.1.3 *有界线性算子把有界集映成有界集.*

（请读者自己证明）.

定义 4.1.4 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T : X \to X_1$. 若 $x_n \to x_0$ 时, $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T **在** x_0 **点连续**.*

由于线性算子**具有可加性**, 关于有界线性算子的连续性有下述结论:

定理 4.1.5 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, $T : X \to X_1$. **如果** T **在** x_0 **点连续, 则** T **在** X **上连续.***

证明分析: 要证 T 在 X 上连续, 只要证明对于 X 中的任何一点 y, T 在 y 连续. 为此, 即证: 若 $y_n \to y$, 则 $Ty_n \to Ty$.

证明 设 T 在 x_0 点连续, 即

$$x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

由条件 $y_n \to y$, 即 $y_n - y \to 0$, 故 $y_n - y + x_0 \to x_0$.

于是 $T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$, 由于算子是线性的

$$\therefore T(y_n - y) + Tx_0 \to Tx_0.$$

于是 $T(y_n - y) \to 0$. 即: $Ty_n \to Ty$.

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 *设* X, X_1 *是赋范空间*, T *是从* X *上到* X_1 *中的线性算子, 则* T *是连续的当且仅当* T *是有界的.*

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 “$\Rightarrow$” 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n>0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

"$\Leftarrow$" **"由T 有界 $\Rightarrow$ T 连续". 即证: 若 $x_n \to x$, 则有 $Tx_n \to Tx$.**

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

"$\Leftarrow$" **"由T 有界 $\Rightarrow$ T 连续". 即证: 若 $x_n \to x$, 则有 $Tx_n \to Tx$.**

事实上, 若 $x_n \to x$, 由于 T 有界,

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.

证明 “$\Rightarrow$” 由 T 连续 $\Rightarrow T$ 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n>0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n=\frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\|\to 0$, 于是 $y_n\to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n\to T0=0$. 但 $\|Ty_n\|=\frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\|\geq 1$. 矛盾.

“$\Leftarrow$” **“由T 有界 $\Rightarrow T$ 连续”. 即证: 若 $x_n\to x$, 则有 $Tx_n\to Tx$.**

事实上, 若 $x_n\to x$, 由于 T 有界,

因此, 存在 $M>0$, 使得对于 $\forall x\in X$, 有 $\|Tx\|\leq M\|x\|$.于是

注 **对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.**

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 “$\Rightarrow$” **由 T 连续 $\Rightarrow T$ 有界.**

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

“$\Leftarrow$” **“由T 有界 $\Rightarrow T$ 连续”. 即证: 若 $x_n \to x$, 则有 $Tx_n \to Tx$.**

事实上, 若 $x_n \to x$, 由于 T 有界,

因此, **存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall x \in X$, 有 $\|Tx\| \leq M\|x\|$**.于是

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

注 **对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.**

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 "$\Rightarrow$" **由 T 连续 $\Rightarrow$ T 有界.**

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

"$\Leftarrow$" **"由T 有界 $\Rightarrow$ T 连续". 即证: 若 $x_n \to x$, 则有 $Tx_n \to Tx$.**

事实上, 若 $x_n \to x$, 由于 T 有界,

因此, **存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall x \in X$, 有 $\|Tx\| \leq M\|x\|$.** 于是

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

这表明 T 是连续的.

注 对于线性算子来说, 一点连续意味着点点连续.

定理 4.1.6 *设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 上到 X_1 中的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的.*

证明 "$\Rightarrow$" 由 T 连续 $\Rightarrow T$ 有界.

反证法. (1) 假若 T 无界, 则对于 $\forall n > 0$, $\exists x_n$, 使得

$$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|.$$

(2) 令 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. 可见 $\|y_n\| \to 0$, 于是 $y_n \to 0$.

由于 T 连续, 所以 $Ty_n \to T0 = 0$. 但 $\|Ty_n\| = \frac{1}{n}\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\| \geq 1$. 矛盾.

"$\Leftarrow$" "由T 有界 $\Rightarrow T$ 连续". **即证: 若 $x_n \to x$, 则有 $Tx_n \to Tx$.**

事实上, 若 $x_n \to x$, 由于 T 有界,

因此, 存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall x \in X$, 有 $\|Tx\| \leq M\|x\|$.于是

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

这表明 T 是连续的.

注 线性算子连续等价于有界. 无界线性算子不连续.

二、有界线性算子组成的赋范空间

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间*, $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 *设 X, X_1 是赋范空间, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, 我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$, 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间,* $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, *我们把* $\mathscr{B}(X, X_1)$, *简记为* $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间,* $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, *我们把* $\mathscr{B}(X, X_1)$, *简记为* $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间*, $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, 我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$, 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间,* $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, 我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$, 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

由于

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (M_1 + M_2)\|x\|,$$

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间,* $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, 我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$, 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A+B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

由于

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (M_1 + M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha| M_1 \|x\|.$$

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间*, $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从 X 到 X_1 的有界线性算子.***

如果 $X = X_1$, 我们把 $\mathscr{B}(X, X_1)$, 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

由于

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (M_1 + M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \le |\alpha| M_1 \|x\|.$$

即 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 对加法、数乘运算封闭, 成为一个线性空间.

二、有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看做一个元素, 构成一个新的线性空间, 即由**全体有界线性算子构成的空间**, 从赋范空间的角度研究线性算子的性质.

定义 4.1.7 设 X, X_1 *是赋范空间,* $\mathscr{B}(X, X_1)$ *表示**全体从** X **到** X_1 **的有界线性算子**.*

如果 $X = X_1$, *我们把* $\mathscr{B}(X, X_1)$, *简记为* $\mathscr{B}(X)$.

在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以自然地**定义线性运算,**

即对于任给的 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义:

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

由于

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (M_1 + M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha| M_1 \|x\|.$$

即 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 对加法、数乘运算封闭, 成为一个线性空间.

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M>0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M>0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

$\|T\|$ *称为**线性算子 T 的范数***.

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M>0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

$\|T\|$ *称为***线性算子 T 的范数**.

注

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M.$$

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

*$\|T\|$ 称为**线性算子 T 的范数**.*

注

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M.$$

由 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$, 有 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. 即,

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M>0$, 使得*

$$\|Tx\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

*$\|T\|$ 称为**线性算子 T 的范数**.*

注

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M.$$

由 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\|$, 有 $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$. 即,

$\|T\|$ 是使 $\|Tx\| \le M\|x\|$ 成立的最小的 M, 于是

下面我们**把有界线性算子看成空间中的元素**, 定义**有界线性算子的范数**.

定义 4.1.8 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 即存在 $M > 0$, 使得*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{4.1.3}$$

$\|T\|$ *称为**线性算子 T 的范数**.*

注

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M.$$

由 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$, 有 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. 即,

$\|T\|$ 是使 $\|Tx\| \leq M\|x\|$ 成立的最小的 M, 于是

$$\|T\| = \inf\{M |\ \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}. \tag{4.1.4}$$

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

定理 4.1.9 设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

$$\|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

$$\|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

两边取上确界, 得

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

$$\|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

两边取上确界, 得

$$\sup_{\substack{y\in X\\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

$$\|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

两边取上确界, 得

$$\sup_{\substack{y\in X\\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

即 $\|T\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. 结合上面的不等式有:

定理 4.1.9 *设 T 是从赋范空间 X 上到 X_1 中的有界线性算子, 则*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|. \tag{4.1.5}$$

证明

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \sup_{\substack{x\neq 0\\ \|x\|\le 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

另一方面, 对于任意的 $y \in X$, $y \neq 0$,

$$\|T\frac{y}{\|y\|}\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

两边取上确界, 得

$$\sup_{\substack{y\in X\\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

即 $\|T\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. 结合上面的不等式有:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|.$$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ **是线性空间** $\mathscr{B}(X, X_1)$ **上的范数.**

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0$.

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ **是线性空间** $\mathscr{B}(X, X_1)$ **上的范数.**

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii)**(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

(iii)**(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 还可以定义

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 还可以定义

$$(A \cdot B)(x) = A(Bx), \quad (\text{记为 } AB).$$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0$.

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0$.

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|$.

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 还可以定义

$$(A \cdot B)(x) = A(Bx), \qquad (\text{记为 } AB).$$

显然 AB **也是线性算子, 并且**

$$\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \| \, . \tag{4.1.6}$$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0.$

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0.$

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|.$

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 还可以定义

$$(A \cdot B)(x) = A(Bx), \qquad (\text{记为 } AB).$$

显然 AB **也是线性算子, 并且**

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \| . \tag{4.1.6}$$

这是因为, 对于 $\forall x \in X$,

$$\| ABx \| \leq \| A \| \| Bx \| \leq \| A \| \| B \| \| x \|,$$

注 下面验证 $\| T \|$ 确实满足赋范空间范数的条件.

证明 $\|T\|$ 是线性空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 上的范数.

(i) **(非负)** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 0$.

(ii) **(正定)** $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \quad \forall x \in B\{x \mid \|x\| = 1\} \ \Rightarrow T = 0$.

(iii) **(齐次性)** $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|$.

(iv) **(三角不等式)**

$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$

因此, $(\mathscr{B}(X, X_1), \| \cdot \|)$ 是一个赋范空间. $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的**元素是有界线性算子**.

当 $A, B \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 还可以定义

$$(A \cdot B)(x) = A(Bx), \quad (\text{记为 } AB).$$

显然 AB **也是线性算子, 并且**

$$\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \| \, . \tag{4.1.6}$$

这是因为, 对于 $\forall x \in X$,

$$\| ABx \| \leq \| A \| \, \| Bx \| \leq \| A \| \, \| B \| \, \| x \|,$$

根据算子范数的定义, 有 (4.1.6) 成立.

三、 例子

三、 例子

例 4.1.10 *考虑* n *阶方阵* $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, *对于任意的* $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然, A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然, A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

$$\|Ax\|=(\sum_{i=1}^n|\eta_i|^2)^{1/2}=(\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{1/2}$$

$$\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{1/2}\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|.$$

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然, A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

$$\|Ax\|=(\sum_{i=1}^n|\eta_i|^2)^{1/2}=(\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{1/2}$$

$$\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{1/2}\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|.$$

因此 A **是有界线性算子.**

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然, A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

$$\|Ax\|=(\sum_{i=1}^n|\eta_i|^2)^{1/2}=(\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{1/2}$$

$$\le(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{1/2}\le(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|.$$

因此 A **是有界线性算子.**

一般来说, $\|A\|\neq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}$.

三、 例子

例 4.1.10 考虑 n 阶方阵 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 令

$$Ax=(a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=y, \tag{4.1.7}$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$. 显然, A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子.

$$\|Ax\|=(\sum_{i=1}^n|\eta_i|^2)^{1/2}=(\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{1/2}$$

$$\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^2)^{1/2}\leq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|.$$

因此 A **是有界线性算子.**

一般来说, $\|A\|\neq(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2)^{1/2}$.

进一步的我们有: 定义在 **有限维空间上的线性算子**, **都是有界线性算子**.

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

定理 4.1.11 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

$$\begin{aligned} \| x+y \|_1 &= \| x+y \| + \| T(x+y) \| = \| x+y \| + \| Tx+Ty \| \\ &\leq \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1 . \end{aligned}$$

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

$$\begin{aligned} \| x+y \|_1 &= \| x+y \| + \| T(x+y) \| = \| x+y \| + \| Tx+Ty \| \\ &\le \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1 . \end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上定义的另一个范数.

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

$$\begin{aligned} \| x+y \|_1 &= \| x+y \| + \| T(x+y) \| = \| x+y \| + \| Tx+Ty \| \\ &\leq \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1 . \end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上定义的另一个范数.

(2) 因为 X 是有限维的赋范空间, **根据同一个有限维空间上定义的范数都是等价的,**

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

$$\begin{aligned}\| x+y \|_1 &= \| x+y \| + \| T(x+y) \| = \| x+y \| + \| Tx+Ty \| \\ &\le \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1 .\end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上定义的另一个范数.

(2) 因为 X 是有限维的赋范空间, **根据同一个有限维空间上定义的范数都是等价的,**

于是 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价, 即：存在 $K>0$, 使得对于所有的 $x \in X$ 有

$$\| x \|_1 \le K \| x \| . \tag{4.1.9}$$

定理 4.1.11 *设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 任意一个赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则 T 是有界线性算子.*

证明 (1) 在 X 上定义一个新范数:

$$\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \| . \tag{4.1.8}$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足, 且

$$\begin{aligned} \| x+y \|_1 &= \| x+y \| + \| T(x+y) \| = \| x+y \| + \| Tx+Ty \| \\ &\leq \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1 . \end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上定义的另一个范数.

(2) 因为 X 是有限维的赋范空间, **根据同一个有限维空间上定义的范数都是等价的,**

于是 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价, 即：存在 $K > 0$, 使得对于所有的 $x \in X$ 有

$$\| x \|_1 \leq K \| x \| . \tag{4.1.9}$$

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足:*

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty \quad (q > 1).$$

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q < \infty \quad (q > 1).$$

对于 $\forall x \in l^p \ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1), \ x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q < \infty \quad (q > 1).$$

对于 $\forall x \in l^p\ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1),\ \ x = (\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \leq \| x \|_1 \leq K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足*:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q < \infty \quad (q > 1).$$

对于 $\forall x \in l^p$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $x=(\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_k, \cdots)$, 令

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

定义线性算子: $Tx = y, y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)$,

(3) 根据(4.1.8)式和(4.1.9)式，我们有

$$\| Tx \| \le \| x \|_1 \le K \| x \|,$$

这说明 T 是有界的.

注 定义域是有限维空间的线性算子都是有界的,

在无穷维空间我们考虑

例 4.1.12 *无穷矩阵* (a_{ij}), *满足:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q < \infty \quad (q>1).$$

对于 $\forall x \in l^p$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, $x=(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_k,\cdots)$, 令

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i=1,2,\cdots),$$

定义线性算子: $Tx=y, y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$,

则 T ***是从*** l^p ***到*** l^q ***的有界线性算子.***

事实上,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q &= \sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.
\end{aligned}
$$

事实上,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q=\sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q$$
$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.$$

即

$$\|Tx\|_q=\|y\|_q\leq(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}\|x\|.$$

事实上,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q=\sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.$$

即

$$\|Tx\|_q=\|y\|_q\leq(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}\|x\|.$$

这说明 T **是** $l^q\to l^q$ **的有界线性算子**.

事实上,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q=\sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q$$
$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.$$

即

$$\|Tx\|_q=\|y\|_q\leq(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}\|x\|.$$

这说明 T **是** $l^q\to l^q$ **的有界线性算子**.

例 4.1.13 *设* T *是从* $C[0,1]$ *到实数* $\mathbb{R}$ *的一个映射:*

$$T(x)=x(0)\ \ \forall x\in C[0,1],$$

事实上,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q = \sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k|^q$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\{(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\}^q = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|^q.$$

即

$$\|Tx\|_q = \|y\|_q \leq (\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q)^{1/q}\|x\|.$$

这说明 T **是 $l^q \to l^q$ 的有界线性算子**.

例 4.1.13 设 T 是从 $C[0,1]$ 到实数 $\mathbb{R}$ 的一个映射:

$$T(x) = x(0) \ \ \forall x \in C[0,1],$$

则 T 是一个有界线性泛函.

事实上,

事实上,

$$| T(x) | = | x(0) | \leq \sup\{| x(t) | \,|t \in [0,1]\} = \| x \| \ .$$

事实上,

$$| T(x) |=| x(0) |\leq \sup\{| x(t) | \,|t \in [0,1]\} =\| x \| .$$

所以 $\| T \|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

事实上,

$$| T(x) |=| x(0) |\leq \sup\{| x(t) | \,|t \in [0,1]\} =\| x \| .$$

所以 $\| T \|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 =\| x \|$, 于是, **我们有** $\| T \|= 1$.

事实上,

$$| T(x) |=| x(0) |\leq \sup\{| x(t) | \,|t \in [0,1]\} =\| x \| .$$

所以 $\| T \|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 =\| x \|$, 于是, **我们有** $\| T \|= 1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

事实上,

$$|T(x)|=|x(0)|\leq \sup\{|x(t)|\,|t\in[0,1]\}=\|x\|.$$

所以 $\|T\|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t)\equiv 1\in C[0,1],$$

$T(x_0)=1=\|x\|$, 于是, **我们有** $\|T\|=1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

例 4.1.14 *设 X 是线性赋范空间, 则 X 上的范数 $\|x\|$ 定义了一个 从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函,*

$$f(x)=\|x\|:\quad X\longrightarrow\mathbb{R},$$

事实上,

$$| T(x) |=| x(0) |\leq \sup\{| x(t) | \,|t \in [0,1]\} =\| x \| .$$

所以 $\| T \|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 =\| x \|$, 于是, **我们有** $\| T \|= 1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

例 4.1.14 *设 X 是线性赋范空间, 则 X 上的范数 $\| x \|$ 定义了一个 从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函,*

$$f(x) =\| x \|: \quad X \longrightarrow \mathbb{R},$$

*f **是有界的,但不是线性的**.*

事实上,

$$|T(x)|=|x(0)|\leq \sup\{|x(t)|\,|t\in[0,1]\}=\|x\|.$$

所以 $\|T\|\leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t)\equiv 1\in C[0,1],$$

$T(x_0)=1=\|x\|$, 于是, **我们有** $\|T\|=1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

例 4.1.14 *设 X 是线性赋范空间, 则 X 上的范数 $\|x\|$ 定义了一个 从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函,*

$$f(x)=\|x\|:\quad X\longrightarrow \mathbb{R},$$

*f **是有界的,但不是线性的**.*

f 有界是显然的. 假设 f 是线性的, 设 $x\neq 0$, 则

事实上,

$$|\, T(x) \,|=|\, x(0) \,|\leq \sup\{|\, x(t) \,|\; |t \in [0,1]\} =\|\, x \,\|\, .$$

所以 $\| T \| \leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 = \| x \|$, 于是, **我们有** $\| T \| = 1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

例 4.1.14 *设 X 是线性赋范空间, 则 X 上的范数 $\| x \|$ 定义了一个 从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函,*

$$f(x) = \| x \|: \quad X \longrightarrow \mathbb{R},$$

f 是有界的,但不是线性的.

f 有界是显然的. 假设 f 是线性的, 设 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 = \| 0 \| &= f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \\ &= \| x \| + \| -x \| = 2 \| x \| \, . \end{aligned}$$

事实上,

$$|T(x)| = |x(0)| \leq \sup\{|x(t)|\,|t \in [0,1]\} = \|x\|.$$

所以 $\|T\| \leq 1$. 另一方面, 对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 = \|x\|$, 于是, **我们有** $\|T\| = 1$.

线性泛函: 1. 是线性赋范空间 X 到数域的一个映射, 2. 必须是线性的.

例 4.1.14 *设 X 是线性赋范空间, 则 X 上的范数 $\|x\|$ 定义了一个 从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函,*

$$f(x) = \|x\|: \quad X \longrightarrow \mathbb{R},$$

*f **是有界的,但不是线性的**.*

f 有界是显然的. 假设 f 是线性的, 设 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 = \|0\| &= f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \\ &= \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|. \end{aligned}$$

矛盾. 即范数不是线性泛函.

例 4.1.15 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

例 4.1.15 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \tag{4.1.10}$$

例 4.1.15 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. *对于任意的* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *定义*

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{4.1.10}$$

则 f *是* $\mathbb{R}^n$ *上的有界线性泛函.*

例 4.1.15 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. *对于任意的* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *定义*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

例 4.1.15 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

$$\begin{aligned}f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})&=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\\&=\alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

例 4.1.15 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. *对于任意的* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *定义*

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

$$\begin{aligned}f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})&=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\\&=\alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

(2) 有界性, 可由 Hölder 不等式证出.

例 4.1.15 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i \\ &= \alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

(2) 有界性, 可由 Hölder 不等式证出.

$$\begin{aligned} |\,f(\mathbf{x})\,| &= \left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|\,a_ix_i\,| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n}|\,a_i\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\,x_i\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\,\mathbf{a}\,\|\|\,\mathbf{x}\,\|\,. \end{aligned}$$

例 4.1.15 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i$$

$$=\alpha f(\mathbf{x})+\beta f(\mathbf{y}).$$

(2) 有界性, 可由 Hölder 不等式证出.

$$|f(\mathbf{x})|=|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i|\le\sum_{i=1}^{n}|a_ix_i|$$

$$\le(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x}\|.$$

即 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

例 4.1.15 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. 对于任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \tag{4.1.10}$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

证明 (1) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函.

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

$$= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

(2) 有界性, 可由 Hölder 不等式证出.

$$| f(\mathbf{x}) | =| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i |\leq \sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} | a_i |^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{\frac{1}{2}} =\| \mathbf{a} \|\| \mathbf{x} \| .$$

即 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函.

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函** **一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函** **一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由** $\mathbb{R}^n$ **中的一个元素** $\mathbf{a}$ **确定的.**

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函 一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $\mathbf{a}$ 确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素 $\mathbf{a}$ 正是平面 $f(\mathbf{x}) = 0$ 的法向量**.

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函 一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $\mathbf{a}$ 确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素 $\mathbf{a}$ 正是平面 $f(\mathbf{x}) = 0$ 的法向量**.

例 4.1.16 $y_0(t)$ *是* $[a, b]$ *上的连续函数, 对于任意的* $x \in C[a, b]$, *定义*

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函 一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $\mathbf{a}$ 确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素 $\mathbf{a}$ 正是平面 $f(\mathbf{x})=0$ 的法向量**.

例 4.1.16 $y_0(t)$ *是* $[a,b]$ *上的连续函数, 对于任意的* $x\in C[a,b]$, *定义*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,dt, \tag{4.1.11}$$

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函** **一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由** $\mathbb{R}^n$ **中的一个元素 a 确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素 a 正是平面** $f(\mathbf{x})=0$ **的法向量**.

例 4.1.16 $y_0(t)$ *是* $[a,b]$ *上的连续函数, 对于任意的* $x\in C[a,b]$, *定义*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,dt, \tag{4.1.11}$$

则 f *是* $C[a,b]$ *上的**线性泛函***.

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函** **一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由** $\mathbb{R}^n$ **中的一个元素** $\mathbf{a}$ **确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素** $\mathbf{a}$ **正是平面** $f(\mathbf{x})=0$ **的法向量**.

例 4.1.16 $y_0(t)$ *是* $[a,b]$ *上的连续函数, 对于任意的* $x\in C[a,b]$, *定义*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,dt, \tag{4.1.11}$$

则 f *是* $C[a,b]$ *上的线性泛函.*

$$|f(x)|\le\int_a^b |x(t)y_0(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le\int_a^b |y_0(t)|\max_{a\le t\le b}|x(t)|\mathrm{d}t=(\int_a^b |y_0(t)|\mathrm{d}t)\|x\|,$$

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函 一定可以写成**(4.1.10)**的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $\mathbf{a}$ 确定的.**

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素 $\mathbf{a}$ 正是平面 $f(\mathbf{x})=0$ 的法向量**.

例 4.1.16 $y_0(t)$ *是* $[a,b]$ *上的连续函数, 对于任意的* $x \in C[a,b]$, *定义*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)dt, \tag{4.1.11}$$

则 f *是* $C[a,b]$ *上的**线性泛函***.

$$|f(x)| \le \int_a^b |x(t)y_0(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le \int_a^b |y_0(t)| \max_{a\le t\le b}|x(t)|\mathrm{d}t = (\int_a^b |y_0(t)|\mathrm{d}t)\|x\|,$$

即 f 是 $C[a,b]$ 上的**有界线性泛函**.

注 $\mathbb{R}^n$ 上的**任何有界线性泛函** **一定可以写成(4.1.10)的形式**.

即, $\mathbb{R}^n$ 上的一个有界线性泛函, 是**由** $\mathbb{R}^n$ **中的一个元素** $\mathbf{a}$ **确定的**.

在 $\mathbb{R}^3$ 中可以更清楚地看到, **元素** $\mathbf{a}$ **正是平面** $f(\mathbf{x})=0$ **的法向量**.

例 4.1.16 *$y_0(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 对于任意的 $x\in C[a,b]$, 定义*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y_0(t)\,dt, \tag{4.1.11}$$

*则 f 是 $C[a,b]$ 上的**线性泛函**.*

$$|f(x)|\le\int_a^b |x(t)y_0(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le\int_a^b |y_0(t)|\max_{a\le t\le b}|x(t)|\mathrm{d}t=(\int_a^b |y_0(t)|\mathrm{d}t)\|x\|,$$

即 f 是 $C[a,b]$ 上的**有界线性泛函**.

注 可以证明 $\|f\|=\int_a^b|y_0(t)|\mathrm{d}t$.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)\text{的导数连续}\}$.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)\text{的导数连续}\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)\text{的导数连续}\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.

事实上, 对于 $\sin nt \in C[0,1]$, 我们有:

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t) \text{的导数连续}\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.

事实上, 对于 $\sin nt \in C[0,1]$, 我们有:

$$T(\sin nt) = n\cos nt, \qquad \|x_n\| = 1, \ \ (n \geq 2)$$

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)\text{的导数连续}\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.
事实上, 对于 $\sin nt \in C[0,1]$, 我们有:

$$T(\sin nt) = n \cos nt, \qquad \|x_n\| = 1, \;\; (n \geq 2)$$

但是 $\|Tx_n\| = n \to \infty (n \to \infty)$.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)$的导数连续$\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.
事实上, 对于 $\sin nt \in C[0,1]$, 我们有:

$$T(\sin nt) = n \cos nt, \qquad \|x_n\| = 1, \ \ (n \geq 2)$$

但是 $\|Tx_n\| = n \to \infty (n \to \infty)$.
即 T 是无界的.

不是所有的线性算子都是有界的, 十分重要的**微分算子就是无界算子**.

例 4.1.17 ***(微分算子)*** 设 $X = C[0,1]$,

$$T : D(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $D(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)$的导数连续$\}$.

可以证明: T **是无界的线性算子**.

事实上, 对于 $\sin nt \in C[0,1]$, 我们有:

$$T(\sin nt) = n \cos nt, \qquad \|x_n\| = 1, \quad (n \geq 2)$$

但是 $\|Tx_n\| = n \to \infty (n \to \infty)$.

即 T 是无界的.

注 **微分算子是一类十分重要的无界线性算子**, 它虽然是无界的, **但是闭的线性算子**(闭算子的定义见第三节, 闭的线性算子也**有"类似连续"的很好的性质**).

四、 有界线性算子范数的计算

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\| T \|\leq 1.$

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\| T \| \leq 1.$

证明 (1) 对于任意的 $x \in L[a,b]$ 满足：，

$$\| x \| = \int_a^b | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = 1,$$

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\| T \| \leq 1$.

证明 (1) 对于任意的 $x \in L[a,b]$ 满足：，

$$\| x \| = \int_a^b | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned}\| Tx \| &= \max_{a\leq t\leq b} \left| \int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \max_{a\leq t\leq b} \int_a^t | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = \int_a^b | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = 1,\end{aligned}$$

四、 有界线性算子范数的计算

例 4.1.18 设 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子, 定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\| T \| \leq 1$.

证明 (1) 对于任意的 $x \in L[a,b]$ 满足：,

$$\| x \| = \int_a^b | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned} \| Tx \| &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = \int_a^b | x(\tau) | \,\mathrm{d}\tau = 1, \end{aligned}$$

即 $\| T \| \leq 1$.

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a\leq t\leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau)\mathrm{d}\tau \right| = \max_{a\leq t\leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}\tau = 1.$$

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau) \mathrm{d}\tau \right| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \| = 1$.

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau) \mathrm{d}\tau \right| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \| = 1$.

注 **上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子, 则 $\| T \| = b-a$.** (留做习题.)

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t)=\frac{1}{b-a}\in L[a,b],\quad \| x_0 \|=1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a\leq t\leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau)\mathrm{d}\tau \right| = \max_{a\leq t\leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \|=1$.

注 上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子, 则 $\| T \|=b-a$. (留做习题.)

例 4.1.19 *(积分算子)* 设 $K(t,s)$ 是 $a\leq t\leq b, a\leq s\leq b$ 上的二元连续函数. 令

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau) \mathrm{d}\tau \right| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \| = 1$.

注 **上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子, 则 $\| T \| = b-a$.** （留做习题.）

例 4.1.19 *(积分算子)* 设 $K(t,s)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的二元连续函数. 令

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{4.1.12}$$

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau) \mathrm{d}\tau \right| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \| = 1$.

注 **上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子, 则 $\| T \| = b-a$.**（留做习题.）

例 4.1.19 ***(积分算子)*** 设 $K(t,s)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的二元连续函数. 令

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{4.1.12}$$

则 T ***是*** $C[a,b] \to C[a,b]$ ***的有界线性算子,***

(2) 另一方面, 令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \| x_0 \| = 1,$$

因此

$$\| T \| \geq \| Tx_0 \| = \max_{a\leq t\leq b} \left| \int_a^t x_0(\tau)\mathrm{d}\tau \right| = \max_{a\leq t\leq b} \int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}\tau = 1.$$

于是 $\| T \| = 1.$

注 **上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子, 则 $\| T \| = b-a$.**（留做习题.）

例 4.1.19 *(积分算子)* 设 $K(t,s)$ 是 $a \leq t \leq b, a \leq s \leq b$ 上的二元连续函数. 令

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{4.1.12}$$

则 T *是 $C[a,b] \to C[a,b]$ 的有界线性算子*,

并且 $\| T \| = \max_{a\leq t\leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds$.

(1) 事实上:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\le t\le b} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left(\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s\right)\|x\| = \beta\|x\|,\end{aligned}$$

(1) 事实上:

$$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\le (\max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s)\|x\| = \beta\|x\|,$$

其中

$$\beta = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

(1) 事实上:

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= \max_{a\le t\le b} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left(\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s\right)\|x\| = \beta\|x\|,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,
$$

即 $\|T\| \le \beta$. 因此 T **是有界线性算子**.

(1) 事实上:

$$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\le (\max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s)\|x\| = \beta\|x\|,$$

其中

$$\beta = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

即 $\|T\| \le \beta$. 因此 T **是有界线性算子**.

(2) 另一方面, 由于 $\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s$ 是关于 t的连续函数, 注意到

$$\beta = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

(1) 事实上:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left(\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s\right)\|x\| = \beta\|x\|,\end{aligned}$$

其中

$$\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

即 $\|T\|\le\beta$. 因此 T **是有界线性算子**.

(2) 另一方面, 由于 $\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s$ 是关于 t的连续函数, 注意到

$$\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

故 $\exists t_0\in[a,b]$, 使得

(1) 事实上:

$$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\le (\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s)\|x\| = \beta\|x\|,$$

其中

$$\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

即 $\|T\| \le \beta$. 因此 T **是有界线性算子**.

(2) 另一方面, 由于 $\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s$ 是关于 t的连续函数, 注意到

$$\beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s,$$

故 $\exists t_0 \in [a,b]$, 使得

$$\beta = \int_a^b |K(t_0,s)|\mathrm{d}s.$$

令

$$x_0(s) = \mathrm{sgn} K(t_0, s),$$

则 $x_0(s)$可测, 且 $|x_0(s)| \le 1$.

由 Лузин 定理, 对于 $\forall n$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得

令

$$x_0(s) = \mathrm{sgn} K(t_0, s),$$

则 $x_0(s)$可测，　且　$|x_0(s)| \leq 1.$

由 Лузин 定理, 对于 $\forall n$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得 $|x_n(s)| \leq 1$, 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的可测集 E_n外, $x_n(s) = x_0(s)$,

令
$$x_0(s) = \mathrm{sgn} K(t_0, s),$$

则 $x_0(s)$可测, 且 $|x_0(s)| \le 1.$

由 Лузин 定理, 对于 $\forall n$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得 $|x_n(s)| \le 1$, 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的可测集 E_n外, $x_n(s) = x_0(s)$, 其中 $M = \max\limits_{\substack{a \le t \le b \\ a \le s \le b}} K(t, s)$. 于是

$$\begin{aligned}\beta &= \int_a^b |K(t_0, s)| \mathrm{d}s = \left| \int_a^b K(t_0, s) x_0(s) \mathrm{d}s \right| \\ &\le \left| \int_a^b K(t_0, s) x_n(s) \mathrm{d}s \right| + \left| \int_a^b K(t_0, s)(x_0(s) - x_n(s)) \mathrm{d}s \right| \\ &\le \|T\| \|x_n\| + 2M \mathrm{m} E_n \le \|T\| + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

令

$$x_0(s) = \mathrm{sgn} K(t_0, s),$$

则 $x_0(s)$可测, 且 $|x_0(s)| \leq 1$.

由 Лузин 定理, 对于 $\forall n$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得 $|x_n(s)| \leq 1$, 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的可测集 E_n外, $x_n(s) = x_0(s)$, 其中 $M = \max\limits_{\substack{a\leq t\leq b \\ a\leq s\leq b}} K(t,s)$. 于是

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_a^b |K(t_0,s)|\mathrm{d}s = |\int_a^b K(t_0,s)x_0(s)\mathrm{d}s| \\
&\leq |\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s| + |\int_a^b K(t_0,s)(x_0(s)-x_n(s))\mathrm{d}s| \\
&\leq \|T\|\|x_n\| + 2M\mathrm{m}E_n \leq \|T\| + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$时, 有 $\beta \leq \|T\|$.

令
$$x_0(s) = \operatorname{sgn}K(t_0, s),$$
则 $x_0(s)$可测，且 $|x_0(s)| \le 1$.

由 Л у з и н 定理，对于 $\forall n$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $x_n(s)$, 使得 $|x_n(s)| \le 1$, 且除去测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的可测集 E_n外，$x_n(s) = x_0(s)$, 其中 $M = \max\limits_{\substack{a\le t\le b\\ a\le s\le b}} K(t, s)$. 于是

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_a^b |K(t_0, s)|\mathrm{d}s = \left|\int_a^b K(t_0, s)x_0(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_a^b K(t_0, s)x_n(s)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_a^b K(t_0, s)(x_0(s) - x_n(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\le \|T\|\|x_n\| + 2M\mathrm{m}E_n \le \|T\| + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$时，有 $\beta \le \|T\|$.

所以 $\|T\| = \beta$.