姓 名:__________

学 号:__________

院 系:__________

_____ 级 _____ 班

线

订

装

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: 数学物理方程 试卷: 线上 考试形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院 考试日期: 2020年8月24日 试卷共 6 页

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
标准分	20	25	15	15	10	15	/	/	/	100
得 分							/	/	/	

得分	

一、 (20分) 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x + \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

得分	

二、 (25分) 利用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u = u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin \dfrac{\pi}{l} x, & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

得分	

三、 (15分) 证明初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \lambda u + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_T := (0,l) \times (0,T], \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + u(l,t) = 0, & t \in (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l] \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $\bar{\Omega}_T$ 上满足

$$u(x,t) \le \max\left\{0,\ \sup_{x\in(0,l)} \varphi(x),\ \frac{1}{\lambda} \sup_{(x,t)\in\Omega_T} f(x,t)\right\},$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数.

得分	

四、 (15分) 设 $u=u(x,t)\in C^2([0,l]\times[0,\infty))$ ($l>0$是常数) 满足

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, & x\in(0,l),\ t>0, \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in[0,l]. \end{cases}$$

试证明: 对任意 $t\geq 0$, 都有 $\int_0^l u_t^2+4u_x^2dx=\int_0^l \psi^2+4|\varphi'|^2dx$.

得分	

五、 (10分) 求半平面

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}$$

上的Green函数. [注意: 平面上调和方程的基本解为$\Gamma(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.]

得分	

六、 (15分) 设 $\Omega=\{(x,y):x\in\mathbb{R},\ y>0\}$.

(i) 举例说明: 边值问题

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases} \tag{$\star$}$$

的解不唯一.

(ii) 证明: 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 是 $(\star)$ 的解, 且满足 $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}u(x,y)=0$, 则 $u\equiv 0$ 于 $\bar{\Omega}$.