内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的**可数子集**, 则**在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.**

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的**可数子集**, 则**在 H 中存在标准正交列** $\{e_n\}$, **使得** $\{e_n\}$ **与** $\{x_n\}$ **张成的子空间相同**.

分析: **利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.**

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

分析: 利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

分析: 利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

(2) 记 M_1 是 $\{e_1\}$ 张成的子空间.

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

分析: 利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

(2) 记 M_1 是 $\{e_1\}$ 张成的子空间.

设 x_{n_2} 是 $\{x_n\}$ 中第一个不属于 M_1 的元, 记

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

分析: 利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

(2) 记 M_1 是 $\{e_1\}$ 张成的子空间.

设 x_{n_2} 是 $\{x_n\}$ 中第一个不属于 M_1 的元, 记

$$h_2 = x_{n_2} - (x_{n_2}, e_1)e_1, \tag{3.5.1}$$

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

分析: 利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

(2) 记 M_1 是 $\{e_1\}$ 张成的子空间.

设 x_{n_2} 是 $\{x_n\}$ 中第一个不属于 M_1 的元, 记

$$h_2 = x_{n_2} - (x_{n_2}, e_1)e_1, \tag{3.5.1}$$

则 $h_2 \neq 0$, 且 $(h_2, e_1) = (x_{n_2}, e_1) - (x_{n_2}, e_1) = 0$, - 于是 $h_2 \perp e_1$. 令

§ 5 可分的 Hilbert 空间

一、线性无关组的正交化算法

定理 3.5.1 设 $\{x_n\}$ *是内积空间* H *中的可数子集, 则在* H *中存在标准正交列* $\{e_n\}$, *使得* $\{e_n\}$ *与* $\{x_n\}$ *张成的子空间相同.*

分析: **利用 Gram-Schmidt 正规正交化算法, 找到这一组标准正交列.**

证明 (1) 设 x_{n_1} 是 $\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素, 令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

(2) 记 M_1 是 $\{e_1\}$ 张成的子空间.

设 x_{n_2} 是 $\{x_n\}$ 中第一个不属于 M_1 的元, 记

$$h_2 = x_{n_2} - (x_{n_2}, e_1)e_1, \tag{3.5.1}$$

则 $h_2 \neq 0$, 且 $(h_2, e_1) = (x_{n_2}, e_1) - (x_{n_2}, e_1) = 0$, - 于是 $h_2 \perp e_1$. 令

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}. \tag{3.5.2}$$

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

(3) 记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{n_k}, e_i)e_i, \quad (k = 3, 4, ...) \tag{3.5.3}$$

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_k}, e_i) e_i, \quad (k = 3, 4, \ldots) \tag{3.5.3}$$

则 $h_k \neq 0$, 且 $h_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 令

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_k}, e_i) e_i, \quad (k = 3, 4, \ldots) \tag{3.5.3}$$

则 $h_k \neq 0$, 且 $h_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 令

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{3.5.4}$$

(4) **如果 $\{x_n\}$ 张成的子空间是有穷维的, 则以上做法经过有穷次将停止.**

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_k}, e_i) e_i, \quad (k = 3, 4, ...) \tag{3.5.3}$$

则 $h_k \neq 0$, 且 $h_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 令

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{3.5.4}$$

(4) **如果 $\{x_n\}$ 张成的子空间是有穷维的, 则以上做法经过有穷次将停止.**

如果是**无穷维的**, **则一直可以作下去, 得到标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_k}, e_i) e_i, \quad (k = 3, 4, ...) \tag{3.5.3}$$

则 $h_k \neq 0$, 且 $h_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 令

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{3.5.4}$$

(4) 如果 $\{x_n\}$ 张成的子空间是有穷维的, 则以上做法经过有穷次将停止.

如果是**无穷维的**, **则一直可以作下去, 得到标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(5) 由于对于每一个 k, e_k **可以由** $\{x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}\}$ **线性表示**, 并且**每一个** $\{x_{n_k}\}$ **也可用** $\{e_1, \cdots, e_k\}$ **线性表示**, 所以 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ **张成相同的子空间**.

(3) **记 M_2 是由 $\{e_1, e_2\}$ 张成的子空间.**

继续上面的做法, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{n_k}, e_i)e_i, \quad (k = 3, 4, ...) \tag{3.5.3}$$

则 $h_k \neq 0$, 且 $h_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 令

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{3.5.4}$$

(4) 如果 $\{x_n\}$ 张成的子空间是有穷维的, 则以上做法经过有穷次将停止.

如果是**无穷维的**, **则一直可以作下去, 得到标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(5) 由于对于每一个 k, e_k **可以由** $\{x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}\}$ **线性表示**, 并且**每一个** $\{x_{n_k}\}$ **也可用** $\{e_1, \cdots, e_k\}$ **线性表示**, 所以 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ **张成相同的子空间**.

注: 定理中由线性无关集得到标准正交集的方法 **称为 Gram-Schmidt**正规正交算法.

例 3.5.2 *Legendre* 多项式

例 3.5.2 *Legendre* 多项式

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

例 3.5.2 ***Legendre* 多项式**

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

例 3.5.2 ***Legendre 多项式***

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

例 3.5.2 ***Legendre* 多项式**

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$h_k=x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)e_i, \quad e_k=\frac{h_k}{\|h_k\|}, \quad \cdots\cdots$$

例 3.5.2 *Legendre* 多项式

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$h_k=x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)e_i,\quad e_k=\frac{h_k}{\|h_k\|,},\quad \cdots\cdots$$

我们可以**得到一个由多项式组成的正交列 $\{e_n\}$,**

例 3.5.2 ***Legendre* 多项式**

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$h_k=x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)e_i,\quad e_k=\frac{h_k}{\|h_k\|},\quad \cdots\cdots$$

我们可以**得到一个由多项式组成的正交列 $\{e_n\}$,**
由正交化程序可知多项式 $\{e_n\}$ 的次数正好是 n, 并且

$$span\{e_n\}=span\{x_n\}.$$

例 3.5.2 ***Legendre* 多项式**

在 $L^2[-1,1]$ 空间中，考虑下列可数子集，

$$x_1(t)=1, x_2(t)=t, x_3(t)=t^2, ..., x_{n+1}(t)=t^n, ...$$

显然它们是线性无关的, **根据 Gram-Schmidt 正规正交化算法,**

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$h_k=x_k-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)e_i, \quad e_k=\frac{h_k}{\|h_k\|,}, \quad \cdots\cdots$$

我们可以**得到一个由多项式组成的正交列 $\{e_n\}$,**

由正交化程序可知多项式 $\{e_n\}$ 的次数正好是 n, 并且

$$span\{e_n\}=span\{x_n\}.$$

由于**多项式的全体在 $L^2[-1,1]$ 稠密,** 于是可知 $\overline{span\{e_n\}}=L^2[-1,1]$,

根据正交基的定义 **这样的多项式正交列 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交基**.

根据正交基的定义 **这样的多项式正交列** $\{e_n\}$ **是** $L^2[-1,1]$ **中的正交基**.
通过计 算我们可以得到:

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \text{ 其中 } P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} [(t^2-1)^n]. \tag{3.5.5}$$

$P_n(t)$ **称为是** n **阶的 Legendre 多项式.**

根据正交基的定义 **这样的多项式正交列 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交基**.
通过计 算我们可以得到:

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \text{ 其中 } P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n]. \tag{3.5.5}$$

$P_n(t)$ **称为是 n 阶的 Legendre 多项式.**

通过分部积分等计算可以直接验证:

根据正交基的定义 **这样的多项式正交列 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交基**.

通过计 算我们可以得到：

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \text{ 其中 } P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n]. \tag{3.5.5}$$

$P_n(t)$ **称为是 n 阶的 Legendre 多项式.**

通过分部积分等计算可以直接验证：

$(P_n, P_m) = 0,\ \ n \neq m,\ \ \| e_n \| = 1$, 即

根据正交基的定义 **这样的多项式正交列 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交基**.

通过计 算我们可以得到:

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \quad \text{其中} \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n]. \tag{3.5.5}$$

$P_n(t)$ **称为是 n 阶的 Legendre 多项式.**

通过分部积分等计算可以直接验证:

$(P_n, P_m) = 0, \ \ n \neq m, \ \ \| e_n \| = 1$, 即

它们构成 $L^2[-1,1]$中的一个正交列. 其中

$$P_0(t) = 1 \qquad P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \qquad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t + 3) \qquad P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

......

注1 可以验证 Legendre 多项式是 Legendre 方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{3.5.6}$$

的解.

注1 可以验证 Legendre 多项式是 Legendre 方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{3.5.6}$$

的解.

注2 在 $L^2[a,b]$ 空间,令

$$q_n = \frac{1}{\| p_n \|} p_n, \quad p_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a},$$

则 $\{q_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 空间的正交基.

注1 可以验证 Legendre 多项式是 Legendre 方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{3.5.6}$$

的解.

注2 在 $L^2[a,b]$ 空间,令

$$q_n = \frac{1}{\| p_n \|}p_n, \quad p_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a},$$

则 $\{q_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 空间的正交基.

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基？

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基 ?

这是一个十分重要的问题.

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: **Hilbert** 空间是否一定存在正交基？

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: **Hilbert** 空间是否一定存在正交基 ?

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基？

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

分析: 这里应注意到 **"可分"** , 根据可分的定义, 以及**正交列完备的等价条件**(定理 3.4.10) 来证明.

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列**,

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基？

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

分析: 这里应注意到 **"可分"**, 根据可分的定义, 以及**正交列完备的等价条件**(定理 3.4.10) 来证明.

证明 (1) **设** $\{x_n\}$ **是可分内积空间** H **中的可数稠子集.**

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基 ?

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

分析: 这里应注意到 **"可分"**, 根据可分的定义, 以及**正交列完备的等价条件**(定理 3.4.10) 来证明.

证明 (1) **设** $\{x_n\}$ **是可分内积空间** H **中的可数稠子集.**

由定理3.5.1, 从 $\{x_n\}$ 可**作出标准正交列** $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成同一子空间.

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基？

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

分析: 这里应注意到 **"可分"**, 根据可分的定义, 以及**正交列完备的等价条件**(定理 3.4.10) 来证明.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是可分内积空间 H 中的可数稠子集.**

由定理3.5.1, 从 $\{x_n\}$ 可**作出标准正交列** $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成同一子空间.

(2) 由于 $\{x_n\}$ 稠密, $\{e_n\}$ **张成的子空间在 H 中稠密**. 根据定理 3.4.10, $\{e_n\}$ 是完备的.

二、可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

上述定理表明**一个无穷维的 Hilbert 空间一定包含一个正交列,**

问题: Hilbert 空间是否一定存在正交基？

这是一个十分重要的问题.

我们有以下结论:

定理 3.5.3 *任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.*

分析: 这里应注意到 **"可分"**, 根据可分的定义, 以及**正交列完备的等价条件**(定理 3.4.10) 来证明.

证明 (1) **设 $\{x_n\}$ 是可分内积空间 H 中的可数稠子集.**

由定理3.5.1, 从 $\{x_n\}$ 可**作出标准正交列** $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成同一子空间.

(2) 由于 $\{x_n\}$ 稠密, $\{e_n\}$ **张成的子空间在 H 中稠密**. 根据定理 3.4.10, $\{e_n\}$ 是完备的.

注 定理表明: "相对较小" 的空间可以由具有可数多个元素的正交列张成.

当 内积**空间完备**时, 我们有

当 内积空间完备时, 我们有

定理 3.5.4 设 H *是一个 Hilbert 空间, 则* H *是可分的, 当且仅当* H *中有至多可数的标准正交基* S.

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间***, ***则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N < \infty$***, 则*** H ***等距同构于*** K^n***(***K ***是线性空间的数域);***

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间***, ***则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N < \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** K^n(*K* ***是线性空间的数域);***

若 $N = \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** l^2.

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间***, ***则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N<\infty$***, 则*** H ***等距同构于*** K^n(K ***是线性空间的数域);***

若 $N=\infty$, ***则*** H ***等距同构于*** l^2***.***

证明: (1)

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间***, ***则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N < \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** K^n(*K* ***是线性空间的数域);***

若 $N = \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** l^2.

证明: (1)

"$\Longrightarrow$" 即从 H 可分来证明 H 中有至多可数的标准正交基. (i) **由可分的定义**, 可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的可数稠密子集.

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间, 则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N < \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** K^n(K ***是线性空间的数域);***

若 $N = \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** l^2.

证明: (1)

" $\Longrightarrow$ " 即从 H 可分来证明 H 中有至多可数的标准正交基. (i) **由可分的定义**, 可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的可数稠密子集.

则其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$($N < \infty$ 或 $N = \infty$, 即至多可数个), 使得

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 H ***是一个 Hilbert 空间***, ***则*** H ***是可分的, 当且仅当*** H ***中有至多可数的标准正交基*** S.

如果 S ***中元素的个数*** $N < \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** K^n(K ***是线性空间的数域);***

若 $N = \infty$, ***则*** H ***等距同构于*** l^2.

证明: (1)

" $\Longrightarrow$ " 即从 H 可分来证明 H 中有至多可数的标准正交基. (i) **由可分的定义**, 可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的可数稠密子集.

则其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$($N < \infty$ 或 $N = \infty$, 即至多可数个), 使得

$$span\{y_n\}_{n=1}^{N} = span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3.5.7}$$

当 内积**空间完备**时, 我们有

定理 3.5.4 设 ***H 是一个 Hilbert 空间, 则 H 是可分的, 当且仅当 H 中有至多可数的标准正交基 S.***

如果 S 中元素的个数 $N < \infty$, 则 H 等距同构于 K^n(K 是线性空间的数域);

若 $N = \infty$, 则 H 等距同构于 l^2.

证明: (1)

" $\Longrightarrow$ " 即从 H 可分来证明 H 中有至多可数的标准正交基. (i) **由可分的定义**, 可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的可数稠密子集.

则其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$($N < \infty$ 或 $N = \infty$, 即至多可数个), 使得

$$span\{y_n\}_{n=1}^{N} = span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3.5.7}$$

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数$)$ 是 H 中至多可数的标准正交基.

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数) 是 H 中至多可数的标准正交基.

则集合

$$\{x = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \big| \mathbf{Re}a_n\text{与}\mathbf{Im}a_n\text{是有理数}\} \tag{3.5.9}$$

是 H 中的可数稠密子集.

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数) 是 H 中至多可数的标准正交基.

则集合

$$\{x=\sum_{n=1}^N a_ne_n \Big| \mathbf{Re}a_n\text{与}\mathbf{Im}a_n\text{是有理数}\} \tag{3.5.9}$$

是 H 中的可数稠密子集.

从而 H是可分的.

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N < \infty$ 或 $N = \infty$, 至多可数) 是 H 中至多可数的标准正交基.

则集合

$$\{x = \sum_{n=1}^N a_n e_n \big| \mathbf{Re}a_n\textbf{与}\mathbf{Im}a_n\textbf{是有理数}\} \tag{3.5.9}$$

是 H 中的可数稠密子集.

从而 H是可分的.

(2) 对于**标准正交基** $\{e_n\}_{n=1}^N(N < \infty$ 或 $N = \infty$, 至多可数), **作映射**

(ii) 由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^N$ **可以构造出一个标准正交列** $\{e_n\}_{n=1}^N$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^N} = H. \tag{3.5.8}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ ", 由 H 中有至多可数的标准正交基来证明 H 是可分的.

设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数) 是 H 中至多可数的标准正交基.

则集合

$$\{x=\sum_{n=1}^N a_n e_n \big| \mathbf{Re}a_n\text{与}\mathbf{Im}a_n\text{是有理数}\} \tag{3.5.9}$$

是 H 中的可数稠密子集.

从而 H是可分的.

(2) 对于**标准正交基** $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数), **作映射**

$$T: x \to \{(x,e_n)\}_{n=1}^N \qquad (\forall x\in H). \tag{3.5.10}$$

根据 Parseval 等式, 我们有

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当 $N < \infty$) 或者从 H 到 $l^2(N = \infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外,

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当$N < \infty$) 或者从 H 到 $l^2(N = \infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{N} (x, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{N} (y, e_j)e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x, e_i)\overline{(y, e_i)} \quad (\forall x, y \in H). \tag{3.5.12}$$

因此, T 还保持内积不变(**于是相应的范数也不变**.

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当 $N < \infty$) 或者从 H 到 $l^2(N = \infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{N}(x, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{N}(y, e_j)e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(x, e_i)\overline{(y, e_i)} \quad (\forall x, y \in H). \tag{3.5.12}$$

因此, T 还保持内积不变(**于是相应的范数也不变**.

故当 $N < \infty$ 时, H 等距同构于 K^N;

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当$N < \infty$) 或者从 H 到 $l^2(N = \infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{N}(x, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{N}(y, e_j)e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(x, e_i)\overline{(y, e_i)} \quad (\forall x, y \in H). \tag{3.5.12}$$

因此, T 还保持内积不变(**于是相应的范数也不变**.

故当 $N < \infty$ 时, H 等距同构于 K^N;

而当 $N = \infty$(可数)时, H 等距同构于 l^2.

根据 Parseval 等式, 我们有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left|(x, e_n)\right|^2 \qquad (\forall x \in H). \tag{3.5.11}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当 $N < \infty$) 或者从 H 到 $l^2(N = \infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外,

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{N} (x, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{N} (y, e_j)e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x, e_i)\overline{(y, e_i)} \quad (\forall x, y \in H). \tag{3.5.12}$$

因此, T 还保持内积不变(**于是相应的范数也不变**.

故当 $N < \infty$ 时, H 等距同构于 K^N;

而当 $N = \infty$(可数)时, H 等距同构于 l^2.

注 定理说明, **任何一个无穷维可分的 Hilbert 空间都可以表示为“坐标形式”的 l^2, 即空间中的每个元素都与一组坐标一一对应.**