

 内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主讲 孙炯教授

电话: 0471-4992491 (H) , 13947103671
Emai: masun@imu.edu.cn

第五章 共轭空间和共轭算子

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

例如上一章第三节的例(4.3.4), 在 $C[a, b]$ 中, $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n + 1$ 项的部分和(在0点的值):

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

例如上一章第三节的例(4.3.4), 在 $C[a, b]$ 中, $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n + 1$ 项的部分和(在0点的值):

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s, 0)x(s)ds,$$

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

例如上一章第三节的例(4.3.4), 在 $C[a, b]$ 中, $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n + 1$ 项的部分和(在0点的值):

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s, 0)x(s)ds,$$

每一个 f_n 都是 $C[a, b]$ 上的线性泛函.

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

例如上一章第三节的例(4.3.4), 在 $C[a, b]$ 中, $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n + 1$ 项的部分和(在0点的值):

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s, 0)x(s)ds,$$

每一个 f_n 都是 $C[a, b]$ 上的线性泛函.

即: 在 X 上可以定义许多不同线性泛函.

第五章 共轭空间和共轭算子

对称是自然界中非常重要的几何性质.

在线性代数中我们看到对称矩阵有着很好的性质.

这一章我们要研究我们要研究内积空间（赋范空间）中的对称性，线性算子的对称算子（或者说共轭算子和自共轭算子）.

§ 1 Hahn-Banach定理

$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 在 X 上可以定义线性泛函,

例如上一章第三节的例(4.3.4), 在 $C[a, b]$ 中, $x(t)$ 的 Fourier 级数前 $n + 1$ 项的部分和(在0点的值):

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s, 0)x(s)ds,$$

每一个 f_n 都是 $C[a, b]$ 上的线性泛函.

即: 在 X 上可以定义许多不同线性泛函.

以下的定理说明在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上可以定义“足够多”的线性泛函.

一、Hahn-Banach 定理

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上, 即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,
即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

在 G_1 上定义

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

在 G_1 上定义

$$f_1(x + \alpha x_1) = f(x) + \alpha \beta \quad (x \in G, \alpha \in R), \quad (5.1.1)$$

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

(i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

在 G_1 上定义

$$f_1(x + \alpha x_1) = f(x) + \alpha \beta \quad (x \in G, \alpha \in R), \quad (5.1.1)$$

其中 β 是适当选择的实数, 满足:

一、Hahn-Banach 定理

定理 5.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理)

X 是一个复的赋范空间, $G \subset X$, G 是 X 的子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则 f 可以保持范数不变的延拓到全空间 X 上,

即存在 X 上的有界线性泛函 F , 使得

- (i) 对于 $\forall x \in G$, $F(x) = f(x)$;
- (ii) $\|F\| = \|f\|_G$,

其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线性泛函的范数.

证明思路 首先在实的赋范空间中考虑.

设 $G \neq X$, 任取 $x_1 \in X \setminus G$, 用 G_1 表示由 x_1 和 G 张成的线性子空间, 即

$$G_1 = \{x + \alpha x_1 | x \in G, \alpha \in R\}.$$

在 G_1 上定义

$$f_1(x + \alpha x_1) = f(x) + \alpha \beta \quad (x \in G, \alpha \in R), \quad (5.1.1)$$

其中 β 是适当选择的实数, 满足:

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}. \quad (5.1.2)$$

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

$$\begin{aligned} f(x') + f(x'') &= f(x' + x'') \leq \|f\|_G \|x' + x''\| \\ &\leq \|f\|_G \|x' - x_1\| + \|f\|_G \|x_1 + x''\| \end{aligned}$$

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

$$\begin{aligned} f(x') + f(x'') &= f(x' + x'') \leq \|f\|_G \|x' + x''\| \\ &\leq \|f\|_G \|x' - x_1\| + \|f\|_G \|x_1 + x''\| \end{aligned}$$

于是可推出

$$f(x') - \|f\|_G \|x' - x_1\| \leq \|f\|_G \|x'' + x_1\| - f(x''), \quad \forall x', x'' \in G,$$

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

$$\begin{aligned} f(x') + f(x'') &= f(x' + x'') \leq \|f\|_G \|x' + x''\| \\ &\leq \|f\|_G \|x' - x_1\| + \|f\|_G \|x_1 + x''\| \end{aligned}$$

于是可推出

$$f(x') - \|f\|_G \|x' - x_1\| \leq \|f\|_G \|x'' + x_1\| - f(x''), \quad \forall x', x'' \in G,$$

即:

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\},$$

容易验证, f_1 是 G_1 上的线性泛函.

这样我们把 f 延拓成 G_1 上的线性泛函,

以下我们证明 这个延拓是保范的.

首先这样的 β 是存在的,

事实上对于任意的 $x', x'' \in G$,

$$\begin{aligned} f(x') + f(x'') &= f(x' + x'') \leq \|f\|_G \|x' + x''\| \\ &\leq \|f\|_G \|x' - x_1\| + \|f\|_G \|x_1 + x''\| \end{aligned}$$

于是可推出

$$f(x') - \|f\|_G \|x' - x_1\| \leq \|f\|_G \|x'' + x_1\| - f(x''), \quad \forall x', x'' \in G,$$

即:

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\},$$

这说明满足式 (5.1.2) 的 β 存在.

要证明延拓的保范性，由于**有界线性泛函延拓时范数不会减少**，

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，
根据式(5.1.1)只要证明，

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，
根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，
根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

这是因为在式 (5.1.4) 中换 x 为 $-x$, α 为 $-\alpha$, 就得

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

这是因为在式 (5.1.4) 中换 x 为 $-x$, α 为 $-\alpha$, 就得

$$f(x) + \alpha\beta \geq -\|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.5)$$

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

这是因为在式 (5.1.4) 中换 x 为 $-x$, α 为 $-\alpha$, 就得

$$f(x) + \alpha\beta \geq -\|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.5)$$

把 (5.1.4) 和由它推出的(5.1.5) 结合起来就是(5.1.3).

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

这是因为在式 (5.1.4) 中换 x 为 $-x$, α 为 $-\alpha$, 就得

$$f(x) + \alpha\beta \geq -\|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.5)$$

把 (5.1.4) 和由它推出的(5.1.5) 结合起来就是(5.1.3).

当 $\alpha = 0$ 时(5.1.4)式显然成立.

要证明延拓的保范性，由于有界线性泛函延拓时范数不会减少，根据式(5.1.1)只要证明，

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = |f(x) + \alpha\beta| \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|, \quad (\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty) \quad (5.1.3)$$

要证明式 (5.1.3) 成立，只需证明 $\forall x \in G, -\infty < \alpha < \infty$

$$f(x) + \alpha\beta \leq \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.4)$$

这是因为在式 (5.1.4) 中换 x 为 $-x$, α 为 $-\alpha$, 就得

$$f(x) + \alpha\beta \geq -\|f\|_G \|x + \alpha x_1\|. \quad (5.1.5)$$

把 (5.1.4) 和由它推出的(5.1.5) 结合起来就是(5.1.3).

当 $\alpha = 0$ 时(5.1.4)式显然成立.

当 $\alpha > 0$ 时, 令 $x = \alpha u$ 根据 β 满足 (5.1.2) 式右边的不等式, 我们有

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}$$

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta)$$

$$\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u))$$

$$= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|$$

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}$$

$$|f_1(x + \alpha x_1)| = f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta)$$

$$\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u))$$

$$= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}$$

$$\begin{aligned} |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta) \\ &\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u)) \\ &= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta) \\ &\leq -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G \|u - x_1\|)) = -\alpha(\|f\|_G \|u - x_1\|) \\ &= \|f\|_G \|- \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|f\|_G$ 不变.

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}$$

$$\begin{aligned}
 |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta) \\
 &\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u)) \\
 &= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|
 \end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta) \\
 &\leq -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G \|u - x_1\|)) = -\alpha(\|f\|_G \|u - x_1\|) \\
 &= \|f\|_G \|- \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|
 \end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|f\|_G$ 不变.

令 \mathcal{F} 记 f 的 全体保范延拓, 在 \mathcal{F} 上定义半序关系: $f_1 \leq f_2$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} &\leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\} \\ |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta) \\ &\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u)) \\ &= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta) \\ &\leq -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G \|u - x_1\|)) = -\alpha(\|f\|_G \|u - x_1\|) \\ &= \|f\|_G \|- \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|f\|_G$ 不变.

令 \mathcal{F} 记 f 的 全体保范延拓, 在 \mathcal{F} 上定义半序关系: $f_1 \leq f_2$,

如果 $D(f_1) \subset D(f_2)$, 并且 $f_1(x) = f_2(x)$ 对于任意的 $x \in D(f_1)$.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} &\leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\} \\ |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta) \\ &\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u)) \\ &= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta) \\ &\leq -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G \|u - x_1\|)) = -\alpha(\|f\|_G \|u - x_1\|) \\ &= \|f\|_G \|- \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\| \end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|f\|_G$ 不变.

令 \mathcal{F} 记 f 的 全体保范延拓, 在 \mathcal{F} 上定义半序关系: $f_1 \leq f_2$,

如果 $D(f_1) \subset D(f_2)$, 并且 $f_1(x) = f_2(x)$ 对于任意的 $x \in D(f_1)$.

令 \mathcal{C} 是 \mathcal{F} 中的任何一个全序子集, 可以证明 \mathcal{C} 有上界.

$$\sup_{x \in G} \{f(x) - \|f\|_G \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in G} \{\|f\|_G \|x + x_1\| - f(x)\}$$

$$\begin{aligned}
 |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(\alpha u) + \alpha\beta = \alpha(f(u) + \beta) \\
 &\leq \alpha(f(u) + \|f\|_G \|u + x_1\| - f(u)) \\
 &= \alpha(\|f\|_G \|u + x_1\|) = \|f\|_G \|\alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|
 \end{aligned}$$

当 $\alpha < 0$ 时, 令 $x = -\alpha u$, 根据 β 满足 (5.1.2) 式左边的不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
 |f_1(x + \alpha x_1)| &= f(x) + \alpha\beta = f(-\alpha u) + \alpha\beta = -\alpha(f(u) - \beta) \\
 &\leq -\alpha(f(u) - (f(u) - \|f\|_G \|u - x_1\|)) = -\alpha(\|f\|_G \|u - x_1\|) \\
 &= \|f\|_G \|- \alpha u + \alpha x_1\| = \|f\|_G \|x + \alpha x_1\|
 \end{aligned}$$

这说明 延拓以后的线性泛函保持原来的范数 $\|f\|_G$ 不变.

令 \mathcal{F} 记 f 的 全体保范延拓, 在 \mathcal{F} 上定义半序关系: $f_1 \leq f_2$,

如果 $D(f_1) \subset D(f_2)$, 并且 $f_1(x) = f_2(x)$ 对于任意的 $x \in D(f_1)$.

令 \mathcal{C} 是 \mathcal{F} 中的任何一个全序子集, 可以证明 \mathcal{C} 有上界.

根据 Zorn 引理, 在 \mathcal{F} 中存在极大元. 即 f 可以保范地延拓到全空间上.

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ $(x \in G)$,

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

例 5.1.2 在 R^2 中, 令 $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$, $x = (\xi_1, \xi_2)$. 设 $G = \{(\xi_1, 0)\}$ 是 R^2 中形如 $(\xi, 0)$ 的元素构成的一个线性子空间. 令

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

例 5.1.2 在 R^2 中, 令 $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$, $x = (\xi_1, \xi_2)$. 设 $G = \{(\xi_1, 0)\}$ 是 R^2 中形如 $(\xi, 0)$ 的元素构成的一个线性子空间. 令

$$f(x) = \xi_1 \quad x \in G.$$

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

例 5.1.2 在 R^2 中, 令 $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$, $x = (\xi_1, \xi_2)$. 设 $G = \{(\xi_1, 0)\}$ 是 R^2 中形如 $(\xi, 0)$ 的元素构成的一个线性子空间. 令

$$f(x) = \xi_1 \quad x \in G.$$

f 是 G 上的线性泛函, $\|f\| = 1$.

在复的 Banach 空间, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ($x \in G$),

其中 φ, ψ 分别表示 f 的实部和虚部, $\because f(ix) = if(x)$.

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

$\therefore \varphi(ix) = -\psi(x)$. 即复的线性泛函的实部和虚部有这样的关系。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由以上的讨论,

φ 可以保范地延拓成 X 上的实线性泛函 φ_0 , 令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X).$$

则 $F(x)$ 就是满足定理要求定义在全空间上的线性泛函.

详细的证明请参阅附录...

注1 线性泛函的延拓不是唯一的.

例 5.1.2 在 R^2 中, 令 $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$, $x = (\xi_1, \xi_2)$. 设 $G = \{(\xi_1, 0)\}$ 是 R^2 中形如 $(\xi, 0)$ 的元素构成的一个线性子空间. 令

$$f(x) = \xi_1 \quad x \in G.$$

f 是 G 上的线性泛函, $\|f\| = 1$.

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0), F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0), F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

因为 $F_\alpha(x) = f(x) \quad x \in G, \|f\| = 1$. 所以 $\|F_\alpha\| \geq 1$, 又有

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0)$, $F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

因为 $F_\alpha(x) = f(x) \quad x \in G, \|f\| = 1$. 所以 $\|F_\alpha\| \geq 1$, 又有

$$|F_\alpha(x)| = |\xi_1 + \alpha \xi_2| \leq |\xi_1| + |\alpha||\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| = \|x\|,$$

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0)$, $F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

因为 $F_\alpha(x) = f(x) \quad x \in G, \|f\| = 1$. 所以 $\|F_\alpha\| \geq 1$, 又有

$$|F_\alpha(x)| = |\xi_1 + \alpha \xi_2| \leq |\xi_1| + |\alpha||\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| = \|x\|,$$

即 $\|F_\alpha\| \leq 1$. 所以 $\|F_\alpha\| = 1$.

但是对于不同的 α , F_α 是 f 不同的保范延拓.

注2 在 Hahn-Banach 定理5.1.1 的证明中没有用到范数的如下性质:

“ $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ” .

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0)$, $F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

因为 $F_\alpha(x) = f(x) \quad x \in G, \|f\| = 1$. 所以 $\|F_\alpha\| \geq 1$, 又有

$$|F_\alpha(x)| = |\xi_1 + \alpha \xi_2| \leq |\xi_1| + |\alpha||\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| = \|x\|,$$

即 $\|F_\alpha\| \leq 1$. 所以 $\|F_\alpha\| = 1$.

但是对于不同的 α , F_α 是 f 不同的保范延拓.

注2 在 Hahn-Banach 定理5.1.1 的证明中没有用到范数的如下性质:

“ $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ” .

也就是说定理中假设范数的条件可以改为半范数 $p(x)$, 有关半范数和相应的结论可参阅...

对于 $\forall \alpha \in [-1, 1]$, 定义

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha \xi_2 \quad x = (\xi_1, \xi_2),$$

显然, 当 $x \in G, x = (\xi_1, 0)$, $F_\alpha(x) = \xi_1 = f(x)$.

因为 $F_\alpha(x) = f(x) \quad x \in G, \|f\| = 1$. 所以 $\|F_\alpha\| \geq 1$, 又有

$$|F_\alpha(x)| = |\xi_1 + \alpha \xi_2| \leq |\xi_1| + |\alpha||\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| = \|x\|,$$

即 $\|F_\alpha\| \leq 1$. 所以 $\|F_\alpha\| = 1$.

但是对于不同的 α , F_α 是 f 不同的保范延拓.

注2 在 Hahn-Banach 定理5.1.1 的证明中没有用到范数的如下性质:

$$\text{“} \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0\text{”}.$$

也就是说定理中假设范数的条件可以改为半范数 $p(x)$, 有关半范数和相应的结论可参阅...

注3 Hahn-Banach 定理5.1.1是纯代数的, 虽然它假设了线性空间上有范数或半范数, 但是定理的 表述和证明过程中都没有用到空间的任何拓扑性质 (或极限概念).

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上:

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x_0 + \beta x_0) &= f_0((\alpha + \beta)x_0) = (\alpha + \beta) \|x_0\| \\ &= \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| = \alpha f_0(x_0) + \beta f_0(x_0). \end{aligned}$$

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x_0 + \beta x_0) &= f_0((\alpha + \beta)x_0) = (\alpha + \beta) \|x_0\| \\ &= \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| = \alpha f_0(x_0) + \beta f_0(x_0). \end{aligned}$$

另一方面 $x \in G$ $x = \alpha x_0$,

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.
在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x_0 + \beta x_0) &= f_0((\alpha + \beta)x_0) = (\alpha + \beta) \|x_0\| \\ &= \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| = \alpha f(x_0) + \beta f(x_0). \end{aligned}$$

另一方面 $x \in G$ $x = \alpha x_0$,

$$|f_0(x)| = |f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

二、Hahn-Banach 定理的推论和应用

推论 5.1.3 设 X 赋范空间, 则对于 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$,
必存在 X 上的有界线性泛函 f , 使得: $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 令 $G = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, G 是 X 中的线性子空间.

在 G 上定义:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

(当 $\alpha = 1$ 时, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.)

f_0 是 G 上的线性泛函, 事实上:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x_0 + \beta x_0) &= f_0((\alpha + \beta)x_0) = (\alpha + \beta) \|x_0\| \\ &= \alpha \|x_0\| + \beta \|x_0\| = \alpha f(x_0) + \beta f(x_0). \end{aligned}$$

另一方面 $x \in G$ $x = \alpha x_0$,

$$|f_0(x)| = |f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

所以 $\|f_0\|_G = 1$. f_0 是 G 上定义的有界线性泛函.

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{且} f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函) .

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

注3 如果对于 X 的任何线性泛函 f 都有

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

注3 如果对于 X 的任何线性泛函 f 都有

$$f(x_0) = 0 \quad \forall f \in X^*, \quad (5.1.8)$$

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函
 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

注3 如果对于 X 的任何线性泛函 f 都有

$$f(x_0) = 0 \quad \forall f \in X^*, \quad (5.1.8)$$

则 $x_0 = 0$ (否则存在 f , $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$).

∴ 由定理5.1.1 存在全空间上的有界线性泛函 f , 使得

$$\|f\| = 1, \text{ 且 } f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (5.1.6)$$

注1 $X \neq \emptyset$, 则 X 上一定有非零的线性泛函, 即不只有一个零泛函 $f(x) \equiv 0$.

注2 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在线性泛函 $f(x)$, 使得

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (5.1.7)$$

(这说明有足够的线性泛函).

证明 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 由推论5.1.3, 存在 X 上的线性泛函 f , $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0.$$

∴ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

注3 如果对于 X 的任何线性泛函 f 都有

$$f(x_0) = 0 \quad \forall f \in X^*, \quad (5.1.8)$$

则 $x_0 = 0$ (否则存在 f , $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$).

这是判断 $x = 0$ 的重要手段.

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

显然 f_1 是 G 上的线性泛函, 满足

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

显然 f_1 是 G 上的线性泛函, 满足

$$f_1(x_0) = 1; \quad f_1(x) = 0, \forall x \in G. (\because \alpha = 0).$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

显然 f_1 是 G 上的线性泛函, 满足

$$f_1(x_0) = 1; \quad f_1(x) = 0, \forall x \in G. (\because \alpha = 0).$$

$$\because \|\alpha x_0 + x\| = |\alpha| \|x_0 + \frac{x}{\alpha}\| \geq |\alpha| d. \quad \therefore |f_1(\alpha x_0 + x)| = |\alpha| \leq \frac{1}{d} \|\alpha x_0 + x\|,$$

推论 5.1.4 设 G 是赋范空间 X 的子空间, $x_0 \in X$, 如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f_1(x_0) = 1 \quad f(x) = 0, \forall x \in G. \quad (5.1.9)$$

证明 设 G_1 是由 x_0 及 G 张成的线性子空间, 即:

$$G_1 = \{\alpha x_0 + x, \alpha \in K, x \in G\}.$$

在 G_1 上定义:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha \quad \alpha \in K, \quad x \in G.$$

显然 f_1 是 G 上的线性泛函, 满足

$$f_1(x_0) = 1; \quad f_1(x) = 0, \forall x \in G. (\because \alpha = 0).$$

$$\because \|\alpha x_0 + x\| = |\alpha| \|x_0 + \frac{x}{\alpha}\| \geq |\alpha| d. \quad \therefore |f_1(\alpha x_0 + x)| = |\alpha| \leq \frac{1}{d} \|\alpha x_0 + x\|,$$

即 f_1 是有界线性泛函, 并且, $\|f_1\| \leq \frac{1}{d}$.

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

由定理5.1.1, f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f , 且

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

由定理5.1.1, f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f , 且

$$\|f\| = \frac{1}{d}; f(x_0) = 1; f(x) = 0 (x \in G). \quad (5.1.10)$$

注1 这是一种分离的性质,

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

由定理5.1.1, f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f , 且

$$\|f\| = \frac{1}{d}; f(x_0) = 1; f(x) = 0 (x \in G). \quad (5.1.10)$$

注1 这是一种分离的性质,

$$x_0 \overline{\in} G, d = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

由定理5.1.1, f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f , 且

$$\|f\| = \frac{1}{d}; f(x_0) = 1; f(x) = 0 (x \in G). \quad (5.1.10)$$

注1 这是一种分离的性质,

$$x_0 \overline{\in} G, d = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则可以用线性泛函 f 把 x_0 和 G 分开,

另外, $\because d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0$, 根据下确界的定义 $\exists x_n \in G$, 使得:
 $\|x_n - x_0\| \rightarrow d \quad (n \rightarrow \infty)$.

由于

$$|f_1(x_n - x_0)| \leq \|f_1\|_G \|x_n - x_0\|,$$

于是

$$\|f_1\|_G \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d} (n \rightarrow \infty).$$

即 $\|f_1\|_G \geq \frac{1}{d}$. 我们有

$$\|f_1\|_G = \frac{1}{d}.$$

由定理5.1.1, f_1 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上的线性泛函 f , 且

$$\|f\| = \frac{1}{d}; f(x_0) = 1; f(x) = 0 (x \in G). \quad (5.1.10)$$

注1 这是一种分离的性质,

$$x_0 \overline{\in} G, d = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则可以用线性泛函 f 把 x_0 和 G 分开,

$$f(x) = 0, x \in G; f(x_0) = 1, x_0 \overline{\in} G. \quad \|f\| = \frac{1}{d};$$

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

对于三维空间上的线性泛函,

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

对于三维空间上的线性泛函,

$$f(x) = ax + by + cz$$

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

对于三维空间上的线性泛函,

$$f(x) = ax + by + cz$$

集合 $\{(x, y, z) \mid f(x) = k\}$ 是三维空间中的一个平面, 一般的可以定义:

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

对于三维空间上的线性泛函,

$$f(x) = ax + by + cz$$

集合 $\{(x, y, z) \mid f(x) = k\}$ 是三维空间中的一个平面, 一般的可以定义:

定义 5.1.5 设 X 是一个赋范空间, $f \in X^*$, 称

$$L_f^k = \{x \in X \mid f(x) = k\}$$

注2 如果 G 是闭子空间, $x \in G$, 则

$$d(x, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0.$$

于是存在线性泛函 f ,

$$\|f\| = \frac{1}{d}, \text{ 且 } f(x) = 0, x \in G; f(x) = 1.$$

即线性泛函 f 把这两个闭集分离开来.

对于三维空间上的线性泛函,

$$f(x) = ax + by + cz$$

集合 $\{(x, y, z) \mid f(x) = k\}$ 是三维空间中的一个平面, 一般的可以定义:

定义 5.1.5 设 X 是一个赋范空间, $f \in X^*$, 称

$$L_f^k = \{x \in X \mid f(x) = k\}$$

是 X 中的超平面.

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

证明 由于 $x_0 \in \partial B$, $\|x_0\| = R$, $x_0 \neq 0$,

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

证明 由于 $x_0 \in \partial B$, $\|x_0\| = R$, $x_0 \neq 0$,

根据推论5.1.3, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| = R$.

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

证明 由于 $x_0 \in \partial B$, $\|x_0\| = R$, $x_0 \neq 0$,

根据推论5.1.3, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| = R$.

所以 $x_0 \in L_f^R$. 并且: 当 $x \in \Omega$ 时,

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

证明 由于 $x_0 \in \partial B$, $\|x_0\| = R$, $x_0 \neq 0$,

根据推论5.1.3, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| = R$.

所以 $x_0 \in L_f^R$. 并且: 当 $x \in \Omega$ 时,

$$f(x) \leq \|f\| \|x\| = \|x\| \leq R.$$

设 $\Omega \subset X$, 如果对于任何的 $x \in \Omega$, 有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$, 则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧.

进一步的, 如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$, 则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω .

命题 5.1.6 设 $\overline{B} = \{x \mid \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的球, 则在球面 $\partial B = \{x \mid \|x\| = R\}$ 上的每一点处, 存在支撑球的超平面 L_f^R .

证明 由于 $x_0 \in \partial B$, $\|x_0\| = R$, $x_0 \neq 0$,

根据推论 5.1.3, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\| = R$.

所以 $x_0 \in L_f^R$. 并且: 当 $x \in \Omega$ 时,

$$f(x) \leq \|f\| \|x\| = \|x\| \leq R.$$

即 Ω 在超平面 L_f^R 的一侧. □