1、利用延拓法并结合达朗贝尔公式求解下列波动方程的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & x>0,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x>0 \end{cases}$$

解：令 $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\geq 0)\\ -\varphi(-x) & (x<0)\end{cases}$ $\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\geq 0)\\ -\psi(-x) & (x<0)\end{cases}$

由达朗贝尔公式有：$u(x,t)=\dfrac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi$

则 $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & (x\geq at)\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & (0\leq x<at)\end{cases}$

2、利用分离变量法求解下述问题：$\begin{cases}u_t=u_{xx}+e^{-4t}\sin 2x\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\\ u(x,0)=\sin 2x & 0<x<\pi\end{cases}$

解：设 $u(x,t)=X(x)T(t)$. 先求解 $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\\ u(x,0)=\sin 2x\end{cases}$ 问题.

则有：$T'(t)X(x)=X''(x)T(t)$. $\Rightarrow$ $\dfrac{T'(t)}{T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$，其中$\lambda$为一常数

$\Rightarrow$ $T'(t)+\lambda T(t)=0$

$X''(x)+\lambda X(x)=0$

且满足边界条件：$X(0)=X(\pi)=0$.

$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(\pi)=0.\end{cases}$ 由书上已讨论过，只有$\lambda>0$时为特征值

相应特征函数为 $X_k(x)=B_k\sin kx$，$k=1,2,\cdots$.

将 $\lambda=k^2$ 代入 $T'(t)+\lambda T(t)=0$ 可解得：$T_k(t)=e^{-k^2t}$，$k=1,2,\cdots$

于是我们得到满足齐次方程齐次边界条件特解为 $u_k(x,t)=B_k\sin kx\, e^{-k^2t}$，$k=1,2,\cdots$

因此 由叠加原理知 通解为 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin kx\, e^{-k^2t}$，$k=1,2,\cdots$

若使其满足初始条件，则有：$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin kx=\sin 2x$ $\Rightarrow B_k=\begin{cases}0, & k\neq 2\\ 1, & k=2.\end{cases}$

因此 $u(x,t)=\sin 2x\, e^{-4t}$

若满足非齐次方程，相应的特征函数系为$\{\sin kx\}$，求解 $\begin{cases}u_t=u_{xx}+e^{-4t}\sin 2x\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\\ u(x,0)=0 & ,0<x<\pi.\end{cases}$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$，$f(x,t)=e^{-4t}\sin 2x$，

则有：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n'(t)+u_n(t)n^2)\sin nx-e^{-4t}\sin 2x=0$

初值条件为 $u_n(0)=0$ 即知：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n'(0)\sin(kx))-\sin 2x=0$ 即 $u_n'(0)=\begin{cases}0, & n\neq 2\\ 1, & n=2\end{cases}$

$u_n'(t)+u_n(t)n^2=\begin{cases}0, & n\neq 2\\ e^{-4t}, & n=2\end{cases}$

由此可解得：$u_n(t)=\begin{cases}0, & n\neq 2\\ e^{-n^2t}+\int_0^t e^{-4s}\,ds, & n=2.\end{cases}$

因此 $u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-4t}\sin 2x$

由叠加原理可知，题目所给方程的解为：$u(x,t)=\frac{7}{4}\sin 2x\, e^{-4t}$

3、?

4、设 $l, T>0$，$\Omega_T=(0,l)\times(0,T]$。$c(x,t)$ 是 Ω 上非负函数。

又设 $u\in C^2(\Omega_T)\cap C(\bar{\Omega}_T)$ 满足 $u_t-u_{xx}-u_x+c(x,t)u\leq 0$ 于 Ω_T

证：若 $\max\limits_{\bar{\Omega}_T}u>0$，则 $\max\limits_{\bar{\Omega}_T}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$。

证明：令 $v(x)=u(x)+\varepsilon e^{ax_1}$

则 $v_t-v_{xx}-v_x+c(x,t)v=u_t-u_{xx}-\varepsilon a^2e^{ax_1}-u_x-\varepsilon ae^{ax_1}+c(x,t)u+c(x,t)\varepsilon e^{ax_1}$

$=(u_t-u_{xx}-u_x+cu)+(c(x,t)-a^2-a)\varepsilon e^{ax_1}$

$\leq(c-a^2-a)\varepsilon e^{ax_1}<0$，当 a 选取足够大时。

若 $\exists M_0\in\Omega^0$. s.t $\max\limits_{\bar{\Omega}_T}u=u(M_0)>0$. 记 $d=dist(x,0)$.

则 $\max\limits_{\partial\Omega}v=\max\limits_{\partial\Omega}u+\varepsilon e^{ax_1}\leq\max\limits_{\partial\Omega}u+\varepsilon e^{ad}$，当 ε 足够小时有 $\max\limits_{\partial\Omega}u+\varepsilon e^{ad}\leq u(M_0)\leq v(M_0)\leq\max v$

说明在 Ω 内部可取到 v 的最大值，记为 P。但是 $v_t|_P=v_x|_P=0$，$v_{xx}|_P\leq 0$，$c(x,t)v\geq 0$，$v_t-v_{xx}-v_x+cv\geq 0$ 与前所证矛盾。因此最大值不可在内部取到，即 $\max\limits_{\bar{\Omega}_T}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$。

5. 设 $\Omega\subset R^n$ 是开集，$u\in C^2(\Omega)$ 是调和的。

证：对 $\forall\,\overline{B_r}(x)\subset\Omega$，有 $u(x)=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,ds_y$.

证明：由调和函数基本积分公式知：

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\Gamma\frac{\partial u}{\partial r}ds-\int_{\partial\Omega}u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial r}ds$$

$$=\int_{\partial B_r(x)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial r}ds-\int_{\partial B_r(x)}u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial r}ds$$

由调和函数的性质知 $\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial r}ds=0$. 在 $\partial B_r(x)$ 上 $\Gamma(x,y)=\begin{cases}\frac{-1}{2\pi}\ln r, & n=2.\\ \frac{r^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, & n\geq 3.\end{cases}$

故 $\int_{\partial B_r(x)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial r}ds=0$. 因此 $u(x)=\int_{\partial B_r(x)}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial r}ds$.

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial r}=\begin{cases}\frac{-1}{2\pi r}, & n=2\\ \frac{-1}{\omega_n r^{n-1}}, & n\geq 3\end{cases}\Rightarrow u(x)=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,ds.\ \square$$

6. 设 $B_1(0)$ 是 R^2 中单位开圆盘, $w\in C(\overline{B_1(0)}\setminus\{0\})$.

若 w 在 $B_1(0)\setminus\{0\}$ 内调和, 满足 $w|_{\partial B_1(0)}=0$, 且 $w(x)=o(\log|x|)$, $|x|\to 0$.

则 $w\equiv 0$ 于 $B_1(0)\setminus\{0\}$.

证: 作函数 $w_\varepsilon(M)=\varepsilon\ln|M|$, $|M|$ 是 M 到 $\{0\}$ 的距离.

在 $\partial B_1(0)$ 上, $w_\varepsilon(M)=0$. 在 $B_1(0)\setminus\{0\}$ 内, $w_\varepsilon(M)>0$.

在球 $r=\delta$ 及 $r=1$ 所围的同心球壳 D 内 $w_\varepsilon(M)$ 是一个调和函数.

此处 δ 是一个任意小正数.

对任意给定点 $M^*\in B_1(0)\setminus\{0\}$, 以及 $\varepsilon>0$, 由于 $w(x)=o(\log|x|)$, $|x|\to 0$.

总可找到充分小的 $\delta>0$, 使在球面 $r=\delta$ 上有 $|w|\le w_\varepsilon$.

而在 $\partial B_1(0)$ 上, $w=w_\varepsilon=0$. 于是由极值原理可知, 对 D 中的任意点均有 $|w|\le w_\varepsilon$. 所以对 M^*, 有 $|w(M^*)|\le w_\varepsilon(M^*)$.

令 $\varepsilon\to 0$, 则上式右端趋于 0. 因此左端等于 0. 即 $w(M^*)=0$.

由于 M 是 $B_1(0)\setminus\{0\}$ 内任意一点. 故 $w\equiv 0$ 于 $B_1(0)\setminus\{0\}$.

7. 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界连通开集且满足内球条件.

$\alpha(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上的非负函数. 又设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+u=0 & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}+\alpha(x)u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解. 则 $u\equiv 0$ 于 Ω.

证: 若 u 不恒等于 0 不妨假设 $u>0$. 此时 u 可在 $\overline{\Omega}$ 内某点 P 取到正的最大值. 若 P 在 Ω 内部, 则 $\Delta u\le 0$, $u|_P>0$.

此时 $-\Delta u+u>0$. 与 $-\Delta u+u=0$ 矛盾.

若 P 在 $\partial\Omega$ 上, 则 $\frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_P<0$. ?? $\alpha(x)u\le 0$, 则与 $\frac{\partial u}{\partial\nu}+\alpha(x)u=0$ 矛盾.

同理 $u<0$ 时也会产生矛盾 因此 $u\equiv 0$. □