第零章　绪论

§0.1　从数学分析、线性代数到泛函分析

0.1.1 泛函分析的研究对象和方法

泛函分析是20 世纪30年代从变分法、微分方程、积分方程、函数论以及量子物理等的研究中发展起来的一门数学分支学科。它综合函数论、几何和代数的观点与方法研究无穷维空间上的函数、算子和极限理论，解决分析学中的问题. 泛函分析的产生，使数学的发展进入了一个新的阶段.

泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段，并形成了自己的许多重要分支，例如算子谱理论、巴拿赫代数、拓扑线性空间理论、广义函数论等等；另一方面，它也强有力地推动着其他学科的发展. 它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用。今天，泛函分析的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，成为近代分析的基础之一.

泛函分析是20世纪对数学影响最大的新兴学科之一。泛函分析也是分析系列中最重要, 最困难的一门课程.

泛函分析研究的主要对象是空间和算子. 所谓空间就是集合加上了一些代数、几何结构. 空间中的元素有：

1. 函数（映射）

函数：　$x \in X \to f(x) \in Y$. 进一步：可以考虑从一个空间X 到另一个空间Y 的映射.

2. 算子(运算)

微分、积分都是运算，特别的都是线性运算. 例如：

$$\sin x \xrightarrow{\prime} \cos x, \qquad\qquad \cos x \xrightarrow{\int} \sin x.$$

实际上, 运算也是一种映射：把空间X 中的元素映成空间Y 中的一个元素.

泛函分析研究的主要方法：

由于笛卡尔坐标系的建立, 创立了解析几何, 于是代数问题可以几何化, 几何问题可以代数化. 方程变成了图形, 例如：

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

方程可以看成是一个圆的轨迹. 运动的概念引入数学, 这为微积分的创立做了准备.

我们在本课程中将把这种思想“一般化”：

1.建立新的空间框架.

空间中的元素可以是函数，也可以是算子（运算）. 例如可以是矩阵（线性运算）$A_{n\times n}$： $\mathcal{C}^n \rightarrow \quad \mathcal{C}^n$

$$x(\in \mathcal{C}^n) \qquad \rightarrow Ax \in \mathcal{C}^n$$

2.在新的空间框架下, 研究解决分析、代数、几何中的问题.（把分析中的问题结合几何、代数的方法加以处理.）

在线性代数中，我们研究的是：从n维空间到m 维空间的线性运算. 在泛函分析（线性泛函分析）中，我们将要研究的是无穷维空间中的线性运算.

(1)相同点是：都是线性空间.

(2)不同点是：我们将要研究的空间都是无穷维的.

无穷维空间有什么新的问题? 我们要考虑：

(i)无穷维空间的一些性质

(ii)特别是收敛性的问题.（有限项的加法与无穷级数的区别）

0.1.2 实例

例 0.1.1 $\mathbb{R}^3$(三维实空间)

建立坐标系（正交坐标系）: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,

$$\vec{i}=(1,0,0),\quad \vec{j}=(0,1,0),\quad \vec{k}=(0,0,1).$$

$\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{a}\rightarrow(a_1,a_2,a_3)$. 进一步的可以定义内积：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

其中$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 并且$\vec{a}$ 有如下分解：

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(\vec{a},\vec{i})\vec{i}+(\vec{a},\vec{j})\vec{j}+(\vec{a},\vec{k})\vec{k},$$

其中$a_1=(\vec{a},\vec{i})$ 是$\vec{a}$ 在$\vec{i}$ 上的投影. $a_2=(\vec{a},\vec{j})$ 是$\vec{a}$在$\vec{j}$上的投影. $a_3=(\vec{a},\vec{k})$ 是$\vec{a}$在$\vec{k}$上的投影. 进一步还有：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cdot\cos\theta$$

对于n维欧几里得空间也有类似的结果.

$$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\vec{e_1}\cdots+a_n\vec{e_n}$$

$$\vec{a}=(\vec{a},\vec{e_1})\vec{e_1}+\cdots+(\vec{a},\vec{e_n})\vec{e_n}$$

即把一个向量按坐标做了分解（也就是在坐标上的投影）. 基本原则是把复杂的问题简单化.

例 0.1.2 线性变换A （如何分解）

考虑A 是从$\mathbb{R}^4$ 到$\mathbb{R}^4$ 的对称矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A:\ x\to\ Ax,\qquad Ax=y$$

（它有什么特点？）

(1) A是线性变换

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2$$

(2) 特征值是实的;

(3) 属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) 可以化为对角矩阵. 对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵.

对角化的做法：

(i) 求特征方程$\mid\lambda E-A\mid=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$ 的根,

$\lambda=-3,+1$ 是特征值. 其中$\lambda=+1$ 是三重特征值, $\lambda=-3$ 是单重特征值.

(ii) $\lambda=+1$时,求出其基础解系：

$$\alpha_1=(\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\quad \alpha_2=(\ 1,\ 0,\ 1,\ 0),\quad \alpha_3=(-1,0,\ 0,\ 1).$$

(iii) 该基础解系不正交, 将其单位正交化：

$\beta_1=(\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0)$， $\beta_2=(\ \frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0)$， $\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}})$

当$\lambda=-3$时, 可得：$\beta_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 成为$\mathbb{R}^4$ 中的一组标准正交基. 在这组标准正交基下，矩阵 A 成为对角矩阵。

$$A\sim A_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

令

$$T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)_{4\times 4},$$

则

$$T^{-1}AT=A_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

我们看到在新的坐标系$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$下, 线性变换 A有最简单的标准型.

注 在每一个特征子空间上, 进一步在每一个坐标系生成的一维子空间上, A作用的形式是最简单的(放大、缩小特征值的倍数)

$$A\beta_1=\beta_1,\qquad A\beta_2=\beta_2,\qquad A\beta_3=\beta_3,\qquad A\beta_4=-3\beta_4.$$

对于$\forall \mathtt{x}\in\mathbb{R}^4$, 在正交基$e_1,e_2,e_3,e_4$下,

$$e_1=(1,0,0,0),\quad e_2=(0,1,0,0),\quad e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1),$$

$$\mathtt{x}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4,\qquad\qquad \mathtt{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

在空间构造一组新的正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$, 则

$$\mathtt{x}=(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+a_4\beta_4$$

其中$a_1=(x,\beta_1), a_2=(x,\beta_2), a_3=(x,\beta_3), a_4=(x,\beta_4)$ 是$\mathtt{x}$ 在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 上的投影, 于是

$$\begin{aligned}Ax&=A(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+a_4\beta_4)=a_1A\beta_1+a_2A\beta_2+a_3A\beta_3+a_4A\beta_4\\&=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3-3a_4\beta_4=y=(a_1,a_2,a_3,-3a_4)\end{aligned}$$

矩阵 A 确定了一组正交基 β_1, β_2, β_3, β_4, 对于任何的 $x \in \mathbb{R}^4$, 只要知道 x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 (a_1, a_2, a_3, a_4), 则A作用的方式一目了然. 即：

$$Ax = (a_1, a_2, a_3, -3a_4)$$

注 A 的作用方式是由特征值、特征向量决定的.

设P_1, P_2, P_3, P_4 是在$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影算子, 则

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

在这里$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. 线性变换 A 分解成4个投影变换（算子）的线性组合。

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化.

把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理（划归）.

在泛函分析中, 我们要研究的对象是函数、运算. 特别是微分, 积分运算（算子）, 它们作用的对象是函数. 微分, 积分运算与R^n 空间中线性变换A 相同的是: 都是线性运算, 不同的是微(积)分把一个函数映射成另一个函数. 而A 把一个n 维向量变成n 维向量.

但是函数不能用有限个数刻画, 可能可以用无穷多个数刻画. 我们希望通过“类比和联想”, 把有限维空间处理问题的这种方式推广到更一般的空间（无穷维空间）.

这就要研究以下问题：

（一）无穷维空间的几何结构结构，特别是：

(1) 坐标系 $(e_1, ...e_n, ...)$?

(2) 正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$?

(3) 空间中的元素能不能按坐标分解？

$$\mathtt{x} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + ...$$

其中$a_1 = (x, e_1), a_2 = (x, e_2), a_3 = (x, e_3), a_4 = (x, e_4), ...$

（二）无穷维空间线性算子的结构：

(1) 线性算子的性质（例如有没有对称算子？）

(2) 线性算子 T 能不能有类似的分解？

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4 \quad \text{（有限维）}$$
$$T? = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 + ... \quad \text{（无穷维）}$$

其中$P_1, P_2, P_3, P_4, ...$ 是在$e_1, e_2, e_3, e_4, ...$ 上的投影算子.

例 0.1.3 Taylor展开(函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画) .

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$f(x)\backsim(f(0),\frac{f'(0)}{1!},\frac{f''(0)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots)$$

这和一个向量在n 维空间的展开完全类似, 区别在于$(x^0,x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots)$ 不是"正交系".

例 0.1.4 Fourier级数(我们把它一般化为无穷维Hilbert空间中的函数展开)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

其中$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\ dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\ dx$

$$f(x)\sim(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$$

f可以由这无穷多个数确定.

其坐标系为：$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x$, $e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x$, $\cdots$, $e_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx$, $e_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\cdots$

$(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$ 为函数 f 在这个坐标系下的坐标. 类似于$\mathbb{R}^n$，在这个函数空间$L^2(-\pi,\pi)$上定义内积为：

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\ dx=\begin{cases}0 & n\neq m,\\ 1 & n=m.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\ dx=\begin{cases}0 & n\neq m,\\ 1 & n=m.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\ dx=0$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi}e_i\ e_j\ dx=(e_i,e_j)=\begin{cases}0 & i\neq j,\\ 1 & i=j.\end{cases}$$

所以$\{e_i\}$形成空间中的一组标准正交基.

对照：在$\mathbb{R}^n$中, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

其中$x_1 = (x, e_1), x_2 = (x, e_2), \cdots, x_n = (x, e_n)$,

对于函数 f，我们有：

$$f(x) = a_0e_0 + a_1e_1 + b_1e_2 + \cdots + a_ke_{2k-1} + b_ke_{2k} + \cdots$$

其中：$a_0 = (f, e_0), a_1 = (f, e_1), b_1 = (f, e_2), \cdots, a_k = (f, e_{2k-1}), b_k = (f, e_{2k}), \cdots$

问题：系数是否等于(f, e_i)?

我们有
$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}(f(x), 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi}(f(x), \cos kx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx) \\
b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)
\end{aligned}$$

并且
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\
&= (f(x), e_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \\
&= (f(x), e_0)e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k + \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k^{'})e_k^{'} = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \widetilde{e_k})\widetilde{e_k}(\text{重新编号})
\end{aligned}$$

我们看到：

(1)在函数空间建立了一个正交坐标系.

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k$$

其中系数是$f(x)$和e_k的内积, 即$f(x)$在e_k上的投影.

$$\text{对照：}\quad x=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

二者非常相似，他们之间的区别是什么？

$\mathbb{R}^n$是有限维空间而函数空间是无穷维的. 无穷维求和是一个极限过程.

$$f(x)=(?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(f,e_k)e_k$$

我们需要考虑函数项级数(Fourier级数)是否收敛的问题. 如收敛, 在什么意义下收敛？

$$f(x)=(?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(f,e_k)e_k$$

从数学分析我们知道，如果 $f(x)$ 逐段可微, 则其 Fourier 级数收敛, 且收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（逐点收敛）, 所以我们要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？）, 即要引进极限等概念.

在Fourier级数中, 有Riemamn引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$$

即：$\lim_{n\to\infty}(f(x),e_k)=0,\ \forall f(x)$ 以后我们看到这是 $\{e_k\}$弱收敛到0.

注 于是在泛函分析中要研究

(1) 空间的概念;

(2) 距离,长度,内积的概念；

(3) 收敛性（强，弱，一致收敛等）.

这是泛函分析研究的一些重点.

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）与有限维空间的线性算子相对照：

对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}\Rightarrow$ 特征值 $\Rightarrow$ 特征向量 $\Rightarrow$ 由它的特征向量产生一个正交坐标系. A 在这个正交坐标系成为对角矩阵，不同的对称矩阵可以产生不同的正交系

问题：在Fourier级数展开中，这个正交坐标系$(1,\cos kx,\sin kx,k=0,1,2,...)$是否也可以是一些线性算子(运算)的特征函数？

例 0.1.5 $Sturm-Liouville$问题

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件(分离的边界条件)限制，微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域

注 把$Ty = -y''$看成一种运算, 边界条件是对运算的定义域加以限制, 使之成为一个“对称”（自共轭）算子.

这样$Sturm - Liouville$问题 $Ty = \lambda y$与$Ax = \lambda x$形式上相似, 我们可以猜想：$Sturm - Liouville$ 算子T：有可数多个特征值, 特征值都是实的, 不同特征值对应的特征函数相互正交.

因为要满足边界条件，不是所有的 λ，$Sturm - Liouville$问题都有解. 有解的那些λ，是$Sturm - Liouville$问题的特征值.

(1) 求出通解.

(a) $\lambda > 0$时 $y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\, t + B\sin\sqrt{\lambda}\, t$ 代入边界条件$y(-\pi) = y(\pi)$, 则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

再代入边界条件$y'(-\pi) = y'(\pi)$, 有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

由于$\lambda > 0$, A, B 不同时为零$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. 所以$\lambda_n = n^2$即$\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots$时两个边界条件满足.

(b) 当$\lambda = 0$时, $-y'' = 0$, 求出$x \equiv 1$, 满足边界条件.

(c) 当$\lambda < 0$时, 求出方程的解：$y = Ce^{\pm\sqrt{-\lambda}\, t}$ 不满足周期边界条件.

把$Ty = -y''$看成一种运算, 特征值$\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots.\}$都是实的，对应的特征函数为

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

注1 这正是Fourier展开的坐标系(乘以系数可使之单位化).

注2 把 $Ty=-y''$ 看成一种运算（对称算子,自共轭算子）. 把： $Ty_n=\lambda_n y_n$ 与 $Ay_n=\lambda_n y_n$ 相对比, 我们有

$$A=\lambda_1 P_1+\cdots+\lambda_n P_n \qquad （有限维）$$
$$T=(?)\lambda_1 P_1+\cdots+\lambda_n P_n+\cdots \qquad （无穷维）$$

P_i是其在特征元素上的投影算子, 这是无穷维空间上线性算子的一种分解（谱分解）.

注3 在新的函数空间下,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i$$

$$Tf=T\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)e_i=(?)\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)Te_i=\sum_{i=1}^{\infty}(f,e_i)\lambda_i e_i.(\text{因为}Te_i=\lambda_i e_i).$$

例 0.1.6 Legendra多项式. 考虑Legendra方程

$$\begin{cases}-(1-x^2)y''+2xy'=\lambda y, & (-1<x<1)\\ y(1)<\infty, \\ y(-1)<\infty.\end{cases}$$

方程可以化为

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)y')=\lambda y$$

这是对称的微分算子. 可以求出特征值为

$$\lambda_n=n(n+1),$$

特征函数为

$$y_n=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

且满足

$$\int_{-1}^{1}y_n(x)\ y_m(x)\ dx=0.\ (m\neq n)$$

它们是$L^2[-1,1]$ 上的正交系(对称线性算子的特征函数系). 其中

$$
\begin{aligned}
&y_0(x)=1 && y_1(x)=x\\
&y_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) && y_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
&y_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x+3) && y_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15t)\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

从这看到，和R^n中一样，在无穷维空间也可以有不同的正交系.

从以上6个例子，我们看到：在处理分析提出的问题时我们可以引进几何或者代数的概念，综合运用分析、代数、几何的方法来研究问题解决问题. 通过实例我们希望读者首要要理解为什么要研究泛函分析, 明白泛函分析在做什么, 以及我们将怎么研究和处理这些问题.

我们在本课程中：

(1) 首先要引入空间, 极限这些概念，把函数、算子当成空间中的元素，在空间的框架下，讨论它们的性质.

(2) 研究线性算子(线性运算)的性质，进一步的讨论由线性算子组成的空间的性质. 重要的是通过归纳、类比的办法，把分析、代数中的结果延拓（或者是有条件的延拓）到无穷维空间，努力展现数学的美学结构.

本课程主要讲述线性泛函分析。了解和掌握空间、线性算子以及线性算子空间、线性算子谱分析中的基本概念和基本理论，学会将分析中的具体问题抽象到一种更加纯粹的代数、拓扑的形式中加以研究，综合运用分析、代数、几何手段处理问题的方法. 本课程拟从全新的、现代数学的视点审视和处理数学基础课程的内容和问题。同时为进一步学习近代数学、近代物理、从事数学和应用数学研究打下基础.

本课程主要内容包括以下几个部分：

(1) 距离空间；

(2)赋范空间和Banach空间

(3)内积空间和Hilbert空间；

(4)线性算子和线性泛函；Banach空间、Hilbert空间中线性算子的基本定理；

(5) 共轭空间和共轭算子；

(6)线性算子的谱理论.

前三部分侧重于泛函分析中各种空间等基本概念的引入和基本性质的讨论, 特别是Hilbert空间的几何特征；

第四部分讲述Banach空间、Hilbert空间中的线性算子的基本定理及其应用，即：一致有界原理，开映像定理和闭图像定理；第五部分介绍了Hahn-Banach定理，共轭空间和共轭算子，特别是从Riese引理出发，重点讲述了Hilbert空间的共轭空间，Hilbert空间中的共轭算子和自共轭算子；第六部分介绍了线性算子谱的定义和谱集的性质，重点介绍了紧算子、自共轭有界线性算子谱的基本性质.

学习的重点是：

(i) 最基本的概念（概念的来源和背景）；

(ii) 数学研究的基本方法：划归，类比，归纳，联想；

(iii) 一定的抽象思维的能力； 概念清楚，思维清晰，逻辑推理严谨.

结束语：

1. 要把数学看成一个客观世界的简单化.

“数学决不应成为一门十分费解的科学”.

2. 要从宏观上了解数学，从整体上把握数学的内容; 要从具体的实例中感悟数学; 这样才能培养良好的数学素质.

“我们认为要真正理解泛函分析中的一些重要的概念和理论，灵活运用这一强有力的工具，其唯一的途径就是深入了解它们的来源和背景，注意研究一些重要的、一般性定理的深刻的、具体的含义。不然的话，如果只是从概念到概念，纯形式地理解抽象定理证明的推演，那么学习泛函分析的结果只能是‘如入宝山而空返’，一无所获。”

————张恭庆（中科院院士）