第三章　内积空间与Hilbert空间

线性空间定义了范数之后, 成为赋范空间. 如同有限维的欧氏空间 R^n, 赋范空间中有元素的范数(模), 两个元素之间的距离这些重要的概念. 但是我们知道,“长度”并不是欧氏空间中唯一的可以数量化的几何概念. 例如$x=(x_1,x_2,x_3)$和$y=(y_1,y_2,y_3)$ 是$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量，它们之间的角度可以用它们的内积$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\| x \| \| y \| \cos\theta$ 表示出来, 其中$\| x \|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{(x,x)}$, $\| y \|=\sqrt{(y,y)}$分别是x 和y 的长度（模）. 我们希望把n 维欧氏空间中“角度”、“正交”以及内积这样一些概念也引入线性空间, 建立起内积空间的一整套理论. 也就是说把n维欧氏空间中内积具有的最基本的性质抽象出来，在一般的线性空间中给出内积的定义.

§3.1　内积空间的基本性质

3.1.1 内积空间的定义

在R^2 中可以定义距离、范数、内积这些概念，设$\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in R^2$,其内积定义为

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1a_2+b_1b_2),$$

于是

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|},$$

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Longleftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

定义 3.1.1　H 是数域K 上的线性空间，如果对于任意$x,y\in H$, 有K 中的一个数(x,y) 与它对应, 使得对任意的$x,y\in H,a\in K$, 满足

(1) $(x,x)\geq 0;(x,x)=0$,当且仅当$x=0$;

(2) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(3) $(ax,y)=a(x,y)$;

(4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

则称$(\cdot,\cdot)$是H上的一个内积，定义了内积的空间H 称为是内积空间.

注1 (x,y) 是一个二元函数,对于每一个固定的$y\in H,(x,y)$ 是H 上的一个线性泛函.

注2 $(x,ay)=\overline{(ay,x)}=\overline{a(y,x)}=\overline{a}(x,y)$, 即内积对于后一个变量是共轭线性.

注3 对于实数域上的线性空间，可以定义实的内积空间，其中内积满足的第2条改为 $(x,y)=(y,x)$.

例 3.1.2 对于$x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k \tag{3.1.1}$$

容易验证它是一个内积. 因此$\mathbb{R}^n$ 一个(实的)内积空间.且由这个内积可以定义（范数）：

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k\right|^2)^{\frac{1}{2}}(x\in R^n) \tag{3.1.2}$$

注 在复的n 维向量空间$\mathbb{C}^n$ 中可以类似的定义内积：

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}, \tag{3.1.3}$$

其中$x=(x_1,\cdots,x_n);y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{C}^n$，在这个内积下$\mathbb{C}^n$ 成为一个内积空间.

3.1.2 由内积生成的范数

在内积空间我们希望类似于在R^2 中, 定义范数$\|\mathbf{x}\|$, 且$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. 为验证$\|\mathbf{x}\|$ 满足范数的四个条件, 首先要证明以下的不等式.

定理 3.1.3 (Schwarz不等式)

设H是内积空间,对于$\forall x,y\in H$,有

$$\left|(x,y)\right|\leq(x,x)(y,y) \tag{3.1.4}$$

证明 任取$\lambda\in C$,则对于任意的$x,y\in H$

$$(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+\left|\lambda\right|^2(y,y)\geq 0. \tag{3.1.5}$$

设$y\neq 0$,令$\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$,代入上式,得到

$$(x,x)-2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)}+2\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(x,y)}\geq 0,$$

于是有$(x,y)\geq\frac{\left|(x,y)\right|^2}{(y,y)}$,即$\left|(x,y)\right|^2\leq(x,x)(y,y)$. 当$y=0,(y,y)=0$,不等式显然成立.

注1 其中等号当且仅当x与y线性相关时成立$(x=-\lambda y)$.

注2 结合例3.1.2 可知，Cauchy 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} | x_k || y_k | \leq (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} | y_k |^2)^{\frac{1}{2}}$$

是Schwarz 不等式的特殊情况.

定义 3.1.4 在内积空间H上,对于任意的$x \in H$定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{3.1.6}$$

则$\|\cdot\|$是H上的一个范数.

事实上,(3.1.5)式显然满足范数的条件(i)(ii)和(iii). 对于(iv)三角不等式，由Schwarz 不等式我们有

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) &\leq \|x+y\| \, \|x\| + \|x+y\| \, \|y\| \\ &= \|x+y\| \, (\|x\| + \|y\|), \end{aligned}$$

于是

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \, .$$

即$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$是H上由内积产生的范数.

定理 3.1.5 每个内积空间H按范数$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$成为一个线性赋范空间.

内积空间中定义了范数，由范数又可以定义距离，这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质.

由Schwarz 不等式我们可以得到：

定理 3.1.6 设H是内积空间,则内积(x,y) 是关于x,y 的连续函数. 即当$x_n \to x, y_n \to y$ 时$(x_n,y_n) \to (x,y)$.

证明 由Schwarz不等式

$$\begin{aligned} \left|(x_n,y_n)-(x,y)\right| &\leq \left|(x_n,y_n)-(x_n,y)\right| + \left|(x_n,y)-(x,y)\right| \\ &\leq \|y_n - y\| \, \|x_n\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \, , \end{aligned}$$

因为$\{\|x_n\|\}$ 有界, 所以$(x_n,y_n) \to (x,y)$.

定理 3.1.7 设集合M 在内积空间H中稠密, 若$x_0 \in H$, 且有

$$(x, x_0) = 0, \qquad \forall x \in M$$

则$x_0 = 0$.

证明 由于M 在H中稠密, 存在$x_n \in M(n=1,2,\cdots)$ 使得$x_n \to x_0(n\to\infty)$. 由内积的连续性

$$(x_0,x_0)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x_0)=0,$$

所以$x_0=0$.

3.1.3 内积和相应范数的关系

前面我们由内积引出范数, 下面我们讨论范数和内积的关系.

定理 3.1.8 设H是内积空间, 对于任何的$x,y\in H$,有

(i)平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|x\|^2). \tag{3.1.7}$$

(ii)极化恒定式

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{3.1.8}$$

证明 由范数和内积的关系易得

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y), \qquad (a)$$

$$\|x-y\|^2=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y), \qquad (b)$$

$$\|x+iy\|^2=(x,x)-i(x,y)+i(y,x)+(y,y), \qquad (c)$$

$$\|x-iy\|^2=(x,x)+i(x,y)-i(y,x)+(y,y), \qquad (d)$$

由第一式和第二式相加, 得到平行四边形法则. 由$(a)-(b)+i(c)-i(d)$可得极化恒定式.

注 (i)的几何解释为：平行四边形对角线的平方和等于4条边的平方和；这是内积空间的特征性质. 在有了正交性的概念以后, 如果$x\perp y$, 则$\|x\|^2+\|x\|^2=\|x+y\|^2$ (勾股定理).

因为内积可以定义一个范数, 所以内积空间必定是一个赋范空间, 再由范数诱导出的距离, 它又可以成为一个距离空间. 反之, 人们自然要问, 是否每个线性赋范空间X都能赋以内积(x,y), 使原来的范数总可以表示成为$\sqrt{(x,x)}$. 答案是：一般并非如此, 而是有条件的, X 能赋以内积的充要条件是X 中的范数满足平行四边形法则.

定理 3.1.9 设X 是赋范空间, 如果范数满足平行四边形法则, 则可以在X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数正好是X 中原来的范数.

证明大意 :在实的空间, 对于任意的$x, y \in X$,令

$$(x,y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.1.9}$$

可以直接验证$(\cdot,\cdot)_1$ 满足内积的条件(1)和(2), 证明满足条件(4)要用到范数满足平行四边形法则. 证明满足条件(3)(齐次)可以从整数开始, 然后到有理数, 再加上$(\cdot,\cdot)_1$的连续性, 推出对所有的实数均有$(cx,y)_1 = c(x,y)_1$.

进一步复的赋范空间的内积, 对于任意的$x, y \in X$,令

$$\begin{aligned}(x,y) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2) \\ &= (x,y)_1 + i(x,iy)_1\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

则由$(\cdot,\cdot)_1$的性质, 容易验证$(\cdot,\cdot)$是X上的内积, 且$\sqrt{(x,x)} = \|x\|$.

注 范数是由内积产生的充要条件：平行四边形法则成立. 范数由内积产生, 这个赋范空间即可以看作内积空间. 不是所有的范数均可以由内积产生.

例 3.1.10 在$C[0,1]$中,令$x(t) = 1, y(t) = t$.

则$\|x\| = 1, \|y\| = 1, x + y = 1 + t, \|x+y\| = 2, x - y = 1 - t, \|x-y\| = 1, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$, 但是$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$. $\therefore C[0,1]$ (同样$C[a,b]$)范数不是由内积产生的.

即在空间$C[0,1]$ 上不能定义一个内积, 使它产生的范数为$C[0,1]$ 中原来的范数.

3.1.4 完备的内积空间

空间是否完备是十分重要的.

定义 3.1.11 完备的内积空间称为Hilbert空间.

由定理1.4.7我们可以得到

定义 3.1.12 设H 是一个Hilbert空间，$Y \subset H$ 是的一个线性子空间，那么Y 是一个Hilbert空间当且仅当Y 是闭的.

例 3.1.13 $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)是Hilbert空间.

注 内积空间是一种特殊的赋范空间，从泛函分析发展的历史上看，人们首先注意到的是内积空间而不是赋范空间，内积空间特别是Hilbert 空间是欧氏空间最自然的“推广”，它们具有与欧氏空间十分相近的许多性质，迄今为止仍然是应用最广泛的一类空间. 在内积空间和Hilbert 空间中使用的“几何”概念和术语，与欧儿里得几何中的语言相似，它是由E.Schimidt在1908年引入的。

例 3.1.14　l^2是Hilbert空间. 对任意的$x,y\in l^2, x=(\xi_k), y=(\eta_k)$,定义内积

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k} \tag{3.1.11}$$

由$H\ddot{o}lder$不等式

$$\big|(x,y)\big|\le(\sum_{k=1}^{\infty}\big|\xi_k\big|^2)^{1/2}\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\big|\overline{\eta_k}\big|^2)^{1/2},$$

容易验证(x,y)满足内积的4个条件, 由它产生的范数为

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{\infty}\big|\xi_k\big|^2)^{1/2}. \tag{3.1.12}$$

所以l^2是Hilbert空间.

例 3.1.15　$L^2[a,b]$是Hilbert空间. 对任意的$x,y\in L^2[a,b]$定义

$$(x,y)=\int_b^a x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.13}$$

$$\big|(x,y)\big|\le\Big|\int_b^a x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\Big|\le(\int_b^a\big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t|)^{1/2}(\int_b^a\big|y(t)\big|^2\mathrm{d}t)^{1/2}.$$

(x,y)是$L^2[a,b]$上的内积. 由这个内积产生的范数是

$$\|x\|=\int_b^a\big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t, \tag{3.1.14}$$

所以$L^2[a,b]$是Hilbert空间.

注　不是所有的内积空间都是Hilbert空间.

例 3.1.16　在全体连续函数组成的线性空间X上,定义

$$(x,y)=\int_b^a x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{3.1.15}$$

X是一个内积空间. 由内积产生的范数为

$$\|x\|=\int_b^a\big|x(t)\big|^2\mathrm{d}t. \tag{3.1.16}$$

但X在范数$\|\cdot\|$下不完备(见例1.3.5和例2.1.9). X 是一个内积空间, 但不是Hilbert空间.

注　空间是否完备是由全体Cauchy 列是否都收敛决定的. 由距离空间的完备化定理1.4.13，任何一个内积空间 X都可以完备化（因为它也是一个距离空间），即完备成为一个Hilbert 空间 H，X 等距同构于 H 中的一个稠子集. 在等距同构的意义下，这样的完备化空间是唯一的. 例3.1.16中的空间 X，完备化以后成为$L^2[a,b]$.

§3.2 正交与正交分解

3.2.1 正交的定义

我们引进内积的目的，是希望把 n 维欧氏空间中更多的几何性质"推广"到一般的内积空间. 在实的内积空间中，如果 $x \neq 0$，$y \neq 0$, 由Schwarz 不等式(3.1.4) 我们有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\| x \| \| y \|} \leq 1,$$

于是x 和y 之间的"夹角"可以定义为

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{(x, y)}{\| x \| \| y \|}).$$

在复的内积空间研究元素之间的位置关系（角度）相对比较困难，但是我们可以类似于n 维欧氏空间, 当$(x, y) = 0$ 时，定义元素之间的正交性.

定义 3.2.1 X是内积空间, $x, y \in X$, 如果$(x, y) = 0$, 则称x与y正交, 记为$x \perp y$.

定理 3.2.2 (勾股定理) 设X是内积空间,如果$x, y, z \in X$, $x = y + z$,且$y \perp z$, 则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 . \tag{3.2.1}$$

证明 $\|x\|^2 = (y+z, y+z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$

定义 3.2.3 设X 是内积空间, $M \subset X$, $x \in X$, 如果对于任意的$y \in M$, 有$(x, y) = 0$, 则称x 正交于M, 记为 $x \perp M$.

定义 3.2.4 设X是内积空间, M 和 N 是 X 中的两个子集, 如果对于任意的$x \in M, y \in N$,有$(x, y) = 0$,则称M正交于N,记为$M \perp N$.

3.2.2 正交补集

定义 3.2.5 设X 是内积空间, M 是X 的子集, 所有X 中与M 正交的元素的集合, 称为M 的正交补, 记为$M^{\perp}$.

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

定理 3.2.6 设X 是内积空间, M 是 X 的子集, 那么：

1) $0 \in M^{\perp}$.

2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$，否则 $M \cap M^{\perp} = \{\emptyset\}$.

3) $\{0\}^{\perp}=X$, $X^{\perp}=\{0\}$.

4) 如果 $M\supset B(a,r)$, 其中 $B(a,r)$ 是以 $x\in X$ 为中心，以 r 为半径的开球，那么 $M^{\perp}=\{0\}$. 特别的，如果 M 是一个非空的开集，则 $M^{\perp}=\{0\}$.

5) 如果 $N\subset M$, 那么 $M^{\perp}\subset N^{\perp}$.

6) $M\subset (M^{\perp})^{\perp}$.

证明留给读者.

定理 3.2.7 设X是内积空间, M 是 X 的任意子集,则$M^{\perp}$ 是X 中的闭子空间.

证明 任取$x\in M^{\perp},y\in M^{\perp},\alpha,\beta\in K$,则对于任意的$z\in M$

$$(\alpha x+\beta y,z)=0,$$

因此$\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$,即$M^{\perp}$是$H$的子空间.

另一方面,如果$x_n\in M^{\perp}(n=1,2,\cdots),x_n\to x_0(n\to\infty)$,则对于任意的$z\in M$,由内积的连续性

$$(x,z)=(\lim_{n\to\infty}x_n,z)=\lim_{n\to\infty}(x_n,z)=0$$

因此$x\in M^{\perp}$,所以$M^{\perp}$是闭子空间.

注 M 是 X 的子集, M 不一定是子空间.

我们对正交补集作进一步的研究.

定理 3.2.8 设 M 是内积空间 X 的一个线性子空间. 那么 $x\in M^{\perp}$ 当且仅当 对于任意的 $y\in M$ 都有 $\|x-y\|\geq\|x\|$.

证明 "$\Longrightarrow$" 由于 $x\in M^{\perp}$ 和 $y\in M$，由定理3.2.2 有

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\geq\|x\|^2 .$$

"$\Longleftarrow$" 对于任意的 $y\in M$ 和 $\alpha\in\mathbb{K}$, 因为 M 是一个线性子空间，$\therefore\ \alpha y\in M$, 由条件 $x\in X$ 有, $\|x-\alpha y\|^2\geq\|x\|^2$. 根据内积的定义

$$\|x-\alpha y\|=\|x\|^2-\overline{\alpha}(x,y)-\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2,$$

于是

$$0\leq-\overline{\alpha}(x,y)-\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2 .$$

令

$$\beta=\begin{cases}\dfrac{|\,(x,y)\,|}{(y,x)}, & (y,x)\neq 0;\\ 1, & (y,x)=0,\end{cases}$$

于是 $\beta(y,x)=|\,(x,y)\,|$. 取$\alpha=t\beta$, 其中 $t\in\mathbb{R}$ 且$t>0$. 我们有

$$-t\,|\,(x,y)\,|-t\,|\,(x,y)\,|+t^2\parallel y\parallel^2\geq 0$$

即对于任意的 $t>0$，有 $|\,(x,y)\,|\leq\frac{1}{2}t\parallel y\parallel^2$, 因此

$$|\,(x,y)\,|\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}t\parallel y\parallel^2=0,$$

所以 $|\,(x,y)\,|=0$, 即 $x\in M^\perp$.

3.2.3 最佳逼近

在定义1.3.12中，我们定义了一点 x 到一个集合 A 的距离$d(x,A)$：

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)|\ \omega\in A\}.$$

当 A 是闭集时，存在点 $y\in A$, 使得：

$$\parallel x-y\parallel=d(x,A).$$

即 y 是与集合最接近的点，即最佳逼近点. 在一般的情况下，这样的点是否存在，存在的话是否唯一，是一个在理论上和应用上都十分重要的问题.

在Hilbert 空间情况则变得相对比较简单.

定义 3.2.9 一个赋范空间称为是严格凸的，如果对于任意的 x, y, $x\neq y$，并且 $\parallel x\parallel=\parallel y\parallel=1$，都有

$$\parallel\alpha x+\beta y\parallel<1\quad(\forall\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1)$$

定理 3.2.10 内积空间是严格凸的赋范空间.

证明 对于任给的$0<\lambda<1, x,y\in X$, $\because x\neq y$, $\therefore\parallel x-y\parallel=\alpha>0$且$\|x\|=\|y\|=1, x\neq y$.由Schwarz不等式,我们有

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2&=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)Re(x,y)\\&\quad+(1-\lambda)^2\|y\|^2<[\lambda+(1-\lambda)]^2=1.\end{aligned}$$

即内积空间是严格凸的.

注1 不是所有的赋范空间都是严格凸的，$C[a,b]$ 就不是严格凸的.

注2 由严格凸的定义可以证明，在严格凸的赋范空间中，不可能有两个最佳逼近点. Hilbert 空间是严格凸的，于是我们有：

定理 3.2.11 设M 是Hilbert空间 H 中非空闭的凸集, 则对于任意的$x \in H$, 存在唯一的$x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf \|x - y\|. \tag{3.2.3}$$

证明 不妨假定M 是H 的真子集, 并且$x \overline{\in} M$. 记$\alpha = \inf\limits_{x \in M}\{\|x - y\|\}$. 于是存在$\{x_n\} \subset M$, 使得

$$\|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

由于M是凸集.对于任意的自然数m, n

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in M,$$

因此

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq a.$$

由平行四边形法则

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|^2 =& 2\|x_m - x\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 - 4\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2 \\ \leq& 2\|x_m - x\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 - 4\alpha^2,\end{aligned}$$

当 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\|^2 \to 0$, 即$\{x_n\}$ 是 M 中的 *Cauchy* 列, 由于是 H Hilbert空间, M 是闭的, 于是存在 $x_0 \in M$, 使得 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 由于范数是连续的, 有 $\|x - x_0\| = \alpha$.

下面证明唯一性. 假设存在$y_0 \in M$ 并且 $\|x - y_0\| = \alpha$，那么因为M 是凸的，$\frac{x_0 + y_0}{2} \in M$，所以$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$. 把平行四边形法则应用到$x - x_0$ 和$x - y_0$, 我们有

$$\| (x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2 = 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2$$

整理得

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4 \| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

即$x_0 = y_0$, 唯一性得证.

注1 定理3.2.11 说明，当 M 是Hilbert空间 H中的非空的闭的凸集，$x \in H$，则存在唯一确定的、到集合 M 最近的点 y.

注2 在有限维空间，即使 M 不是凸集，这样的点 y仍然存在，使用与定理证明类似的方法，读者可以自己加以证明（注意到有限维空间中有界闭集是列紧的，可以找到一个收敛的子列）. 但是在这种情况下，这样的点可能是不唯一的. 例如 M 是平面上的一个圆周，x 是圆的中心，那么点 x 到集合 M 最近的点 y可以是圆周上的任意一点.

注3 在无穷维空间，有界闭集不一定是列紧的，这样的点 y 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能. 即：在一般的无穷维的Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 M，最佳逼近点 y 可能不存在. 可参阅汪林“泛函分析中的反例”P.52页.

注4 当 M 是真的闭子空间时,读者可把定理的结论与第二章第四节的$Riesz$引理相对照比较： $x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x-y \| \geq \| x \|$，即 $d(x,M) \geq \| x \| \because 0 \in M$ ，$\therefore d(x,M) = \| x \|$. 也就是说，在Hilbert 空间中，$Riesz$ 引理中的ε 可以为 0.

3.2.4 Hilbert空间的正交分解

三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和，使问题的处理变得更加简单. 我们把这一想法推广到一般的Hilbert 空间. 我们可以得到以下定理

定理 3.2.12 (正交分解定理)

设H 是Hilbert 空间, M 是H 中的闭子空间, 则对于任意的$x \in H$, 存在唯一的$x_0 \in M$ 及$y \in M^{\perp}$, 使得

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.4}$$

并且

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 . \tag{3.2.5}$$

证明 因为M 是Hilbert 空间H 的闭子空间（凸集）, 于是由定理3.2.11 对于任意的$x \in H$, 存在$x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x,M) = \inf \|x - y\| .$$

令 $y = x - x_0$,对于任意$z \in M$,有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

由定理3.2.8可知 $y \in M^{\perp}$.

唯一性. 如果还有 $x = x_0' + y'$, 其中 $x_0' \in M$, $y' \in M^\perp$.则 $x_0' - x_0 = y' - y$, 因为 $y' - y \in M \cap M^\perp = \{0\}$, 所以 $y' = y$, 且 $x_0' = x$.

由于$x_0 \in M$ 和$y \in M^\perp$, 根据定理3.2.2, 可证式(3.2.5)成立.

注1　M是H的闭的线性子空间, $\forall x \in H, x = x_0 + y, x_0 \in M, y \in M^\perp$. x_0称为 x 在 M 上的投影, $(x - x_0) \perp M$. 即 $H = M \oplus M^\perp$, 其中 $\oplus$ 表示两个子空间的正交直接和.

注2　一般的Banach 空间, M 是闭子空间, 如果存在闭子空间 N,使得 $H = M \oplus N$, 则称子空间 M 在 H中可补. 定理说明Hilbert 空间的任何闭子空间都是可补的.

注3　c_0(极限为零的序列)是 l^∞ 中的闭子空间, 但在 l^∞ 中不可补. 即Banach 空间中可以存在不可补的子空间.

注4　实际上可以证明如果Banach 空间X 的每一个闭子空间都可补, 则 X 同构于一个Hilbert 空间. 即正交分解定理是Hilbert 空间的特征性质.

定理 3.2.13　设 X_0 是Hilbert 空间 H 中的一个闭的线性子空间，则 ${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

证明　由定理3.2.6 我们有 $x_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$. 反之，假设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 由定理3.2.12, $x = x_0 + y$, 其中 $x_0 \in X_0$, $y \in {X_0}^\perp$. 因为 $x_0 \in X_0$, $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 有 $(x, y) = 0 = (x_0, y)$. 于是

$$0 = (x, y) = (x_0 + y, y) = (x_0, y) + (y, y) = \| y \| .$$

由 $y = 0$，得$x = x_0 \in X_0$. 因此 ${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

由定理3.2.13和定理3.2.6容易证明以下命题

命题 3.2.14　设 X_0 是Hilbert 空间 H 中的一个线性子空间，那么 ${X_0}^{\perp\perp} = \overline{X_0}$.

证明留给读者.

§3.3　正交系和正交基

元素的正交性在内积空间和Hilbert 空间扮演着十分重要的脚色. 在 n 维欧氏空间，选定 n个相互正交的向量 $e_1, e_2, ..., e_n$，则形成 n 维空间中的一组正交基，也就是说在空间中建立了一组坐标系，空间中的任何一个元素都可以由这组坐标的线性组合表示出来.

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_i=(x,e_i)$, $i=1,2,...,n$, 并且向量的长度

$$\| x \|=\sum_{i=1}^{n} |\ (x,e_i)\ |^2$$

在一般的内积空间也可以引进类似的引入正交基、投影、坐标分解这些十分重要的概念，建立起一套完整的空间坐标理论.

3.3.1 内积空间中的正交系

定义 3.3.1 设$\{x_a\}, a\in I$是内积空间 X 中的子集, 如果当 $a\neq\beta$ 时 $(x_a,x_\beta)=0$, 则称$\{x_a\}_{a\in I}$ 是 X 中的一个正交系. 若$\|x_a\|=1,\forall a\in I$ 称 $\{x_a\}$ 是一个标准正交系.

在内积空间中，正交集是线性无关的;

定理 3.3.2 设 $\{e_1,...,e_k\}$ 是内积空间 X 中的正交集，则 $\{e_1,...,e_k\}$ 是线性无关的. 如果 X是 k 维的，则任何的 $x\in X$ 都可以表示为

$$x=\sum_{n=1}^{k}(x,e_n)e_n.$$

证明 对于 $\{e_1,...,e_k\}$ 考虑方程

$$\alpha_1e_1+...+\alpha_ke_k=0,$$

两边都对 e_m, $m=1,...,k$ 作内积得

$$0=(\sum_{n=1}^{k}\alpha_ne_n,e_i)=\sum_{n=1}^{k}\alpha_n(e_n,e_m)=\alpha_m(e_m,e_m)=\alpha_m.$$

这说明 $\{e_1,...,e_k\}$ 是线性无关的.

如果 X是 k 维的，由于 $\{e_1,...,e_k\}$ 是线性无关的，那么对于任何的 $x\in X$ 都可以表示为 $\{e_1,...,e_k\}$的线性组合. 即：$x=\sum_{n=1}^{k}\lambda_ne_n$. 两边对 e_m, $m=1,...k$ 作内积，有

$$(x,e_m)=(\sum_{n=1}^{k}\lambda_ne_n,e_m)=\sum_{n=1}^{k}\lambda_n(e_n,e_m)=\lambda_m$$

注1 在无穷维空间，由线性无关集的定义（它的任意非空有限子集是线性无关的）, 类似地可以证明其中的正交集是线性无关的.

注2 从定理的证明中可以看到，如果空间中的一个元素 x 能表示成一个正交集 $\{e_1,...,e_k\}$ 的线性组合，则 e_n 前的系数 $\alpha_n=(x,e_n)$. 这显示出正交集比一般的线性无关集在元素的分解上的方便之处，这也是我们更关注正交分解的重要原因.

3.3.2 正交投影

定理 3.3.3　设$\{e_n\}$ 是内积空间X 中的标准正交系, $x \in X, a_1, \cdots, a_n$ 是n 个数, 当且仅当$a_k = (x, e_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$ 时

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$$

取得最小值.

证明　由于

$$(x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, e_i) = (x, e_i) - (x, e_i) = 0(i = 1, 2, \cdots, n),$$

应用勾股定理,有

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|^2 &= \|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + \sum_{k=1}^{n}((x, e_k) - a_k)e_k\|^2 \\ &\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{n}((x, e_k) - a_k)e_k\|^2 \\ &= \|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left|(x, e_k) - a_k\right|^2.\end{aligned}$$

所以当且仅当$a_k = (x, e_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$时,$\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k\|$取最小值.

注1　从定理的证明中可以看到 $x - \sum\limits_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$和由$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$张成的子空间 M 正交.

注2　称 $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$ 为 x在 M 上的投影, x 到 M 的距离为$\|x - x_0\|$.

3.3.3 正交基

定义 3.3.4　$\{x_a\}_{a \in I}$ 是 X 中的正交系, 如果包含它的最小闭子空间是全空间 X, 则 $\{x_a\}, a \in I$ 称是 X 的正交基.

显然我们有

例 3.3.5　在空间R^n中

$$e_k = (0, 0, \cdots\cdots 0, 1, 0, \cdots, 0) \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

是 R^n 中的标准正交基.

例 3.3.6 l^2中

$$e_n=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots)\qquad (n=1,2,\cdots)$$

是 l^2 的标准正交基.

事实上由 l^2中定义的内积（见例3.1.14），容易验证 $\{e_n\}$ 是 l^2中的标准正交系. 并且对于$x\in H, x=(\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots)$,令$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$,

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=(\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k e_k,\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k e_k)^{1/2}\\&=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2)^{1/2}\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

即x 可以由 $\{e_n\}$ 的线性组合逼近, $\therefore H$ 包含在由 $\{e_n\}$ 张成的最小闭子空间中. 这就证明了$\{e_n\}$ 是一个标准正交基.

例 3.3.7 $x(t)$ 是$[-\pi,\pi]$ 上连续可微的函数，且 $x(-\pi)=x(\pi)$. 在数学分析中我们知道, $x(t)$ 可以展开成它的Fourier 级数, 而且这个Fourier 级数一致收敛到$x(t)$. 即

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt \tag{3.3.1}$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t, a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t.$$

在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中，通过直接的积分计算我们有以下命题：

命题 3.3.8 在线性空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx,$$

则三角函数系：

$$e_n=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\},(k=1,2,\cdots) \tag{3.3.2}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中实的标准正交集（事实上它们是一组标准正交基）.

注 同样容易验证，$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\ \mid n=\pm1,\pm2,...\}$ 也是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的另一个标准正交集.

定义 3.3.9 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间X 中的标准正交系, 对于$x \in X$, 我们称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 为x 关于$\{e_n\}$ 的Fourier 级数, (x, e_n) 称为x 关于$\{e_n\}$ 的Fourier 系数.

例4的Fourier 展开的系数为：

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}});$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt);$$

于是例4中 $x(t)$的Fourier 展开可以写成：

$$x(t) = (f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt + (f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \tag{3.3.3}$$

即：

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k. \tag{3.3.4}$$

我们知道在数学分析中Fourier 级数的收敛是按点收敛. 下面我们在内积空间中讨论, 在什么情况下, 式4中 $x(t)$ 的Fourier 级数收敛, 如果收敛, 是在什么意义下收敛? 它的Fourier 级数是否收敛到 $x(t)$?

§3.4 Bessel 不等式和正交列的完备性

3.4.1 Bessel 不等式

一般来说$\{x_a\}_{a\in I}$可能是不可数集. 以下我们仅讨论由可数多个元素组成的正交系, 即可数正交列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定理 3.4.1 （Bessel 不等式）设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交列,则对于任意的$x \in X$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2 \tag{3.4.1}$$

证明 由于对于任意的 n

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\| = (x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k, x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k)$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \geq 0$$

则$\sum\limits_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \leq \|x\|^2$,令$n\to\infty$,命题得证. □

注1 与正交列相对应的Fourier 系数是平方可和的，并且其和小于或等于$\|x\|^2$.

注2 由(3.3.4)式知,对于任意的$x\in X$, $(x,e_n)\to 0(n\to\infty)$.以后我们可以看到, 如果$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是内积空间X中的正交列,则e_n弱收敛到$0(e_n \xrightarrow{\omega} 0)$.

推论 3.4.2 （Riemann-Lebesgue 引理）

设 $x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt dt = 0 \tag{3.4.2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt dt = 0 \tag{3.4.3}$$

证明 根据命题3.3.8 $\{\sin nt\}$, $\{\cos nt\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的正交列，从Bessel 不等式可知 $x(t)$ 的Fourier 系数趋近于零，则上面的命题可证.

注 当 $x(t)$ 是连续函数时，这就是数学分析中Fourier 级数部分的Riemann 引理.

由Bessel 不等式可以证明以下推论

推论 3.4.3 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$ 是内积空间X中的标准正交系. 则对于每个$x\in X$, x 关于这个标准正交系的Fourier 系数 $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$ 最多有可数个不为零.

证明留给读者.

定理 3.4.4 设 H 是一个Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 H 中的标准正交列, $\{\alpha_n\}$ 是一个数列，则级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2<\infty$. 并且在上述条件下，

$$\|\ \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\ \|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^2 .$$

证明 “$\Longrightarrow$”假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛, 记$x=\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛. 那么对于任意的$m\in\mathbb{N}$, 注意到内积的连续性我么有

$$(x,e_m) = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, e_m) = (\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m) = \alpha_m$$

（因为 k 最终要大于 m.）因此由Bessel 不等式

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mid (x, e_n) \mid^2 \leq \| x \|^2 < \infty.$$

“$\Longleftarrow$”假设 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 < \infty$，对于任意的 $k \in \mathbb{N}$，令 $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$，对于任意的 $j, k \in \mathbb{N}$, $j > k$, 由于 $\{e_n\}$ 是正交列，

$$\| x_k - x_j \|^2 = \| \Sigma_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \Sigma_{n=1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

由于 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2$ 收敛，上式说明 $\{x_k\}$ 是 H 中的Cauchy 列, 因此收敛. 进一步地由范数的连续性，我们有

$$\| \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \|^2 = \lim_{k \to \infty} \| \Sigma_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 = \lim_{k \to \infty} \Sigma_{n=1}^{k} \mid \alpha_n \mid^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \alpha_n \mid^2 .$$

□

上述定理可以表示为

推论 3.4.5 在Hilbert 空间 H 中，级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$.

推论 3.4.6 设 H 是一个Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 H 中的正交列，则对于任意的 $x \in H$，x 的Fourier 级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ 都收敛.

3.4.2 正交列的完备性

自然地，我们要问级数 $\Sigma_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ 是否收敛到 x？一般来说答案是否定的.

例 3.4.7 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中，$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正交列，$x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$，但是

$$(x, e_1) e_1 + (x, e_2) e_2 \neq x.$$

例 3.4.8 设 $\{e_n\}$ 是Hilbert 空间 H 中的标准正交列，令 $S = \{e_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$， S 是 H 中的有无穷多个元素组成的标准正交列，但是对于$x = e_1$，无论如何选择 α_{2n}， $x \neq \Sigma_{n=1}^{\infty} (\alpha_{2n}, e_{2n}) e_{2n}$，.

事实上，如果 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} (x_{2n}, e_{2n}) e_{2n}$，那么对所有的 m

$$\begin{aligned} 0 =& (e_1, e_{2m}) = (\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) \\ &= \lim_{k \to \infty} (\Sigma_{n=1}^{k} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2m}) = e_{2m}, \end{aligned}$$

因此 $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n} = 0$，矛盾.

这说明即使无穷多个元素组成的标准正交列，x 关于这个正交系的Fourier 级数, 虽然收敛，但仍然可能不收敛到 x，原因是这个正交列不完备.

我们先给出完备的定义

定义 3.4.9 设X是内积空间,$\{e_n\}$是X中的标准正交列, $x \in X$, 如果：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, e_k)\right|^2 = \|x\|, \tag{3.4.4}$$

称x关于$\{e_n\}$的Parseval 等式成立. 如果对于任意的$x \in H$, Parseval 等式成立, 则称 $\{e_n\}$ 是完备的.

注 下面我们证明在Hilbert 空间，x 关于 $\{e_n\}$ 的Fourier 级数收敛到x，当且仅当x 关于$\{e_n\}$ 的Parseval 等式成立.

定理 3.4.10 设 $\{e_n\}$ 是Hilbert 空间H 中的一个标准正交列, 那么下列的叙述是等价的.

1) $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$,（即 $\{e_n\}$ 在 H 中稠密，或者说 $\{e_n\}$ 是完全的）;

2) 对所有的 $x \in H$，$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$,（即 x 的Fourier 级数收敛到 x）;

3) $\overline{Span}\{e_n\} = H$,（即 $\{e_n\}$ 是H 中的一个标准正交基）;

4) 对所有的 $x \in H$，$\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(x, e_k)\right|^2$,（即 $\{e_n\}$ 是完备的，即对于任意的$x \in H$, Parseval 等式成立）.

证明 (1)⇒(2) 设 $x \in H$, 令 $y = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$. 对于任何的 $m \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}(y, e_m) &= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n, e_m) \\ &= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)(e_n, e_m) \\ &= (x, e_m) - (x, e_m) = 0\end{aligned}$$

由于$\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$，我们有 $y = 0$, 即$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$，(2)成立.

(2)⇒(3) 因为对于任何的 $x \in H$, $x = \lim_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n \in H$, 所以 $x \in \overline{Span}\{e_n\}$, 即 $\overline{Span}\{e_n\} = H$.

(3)⇒(1) 假设 $y \in \{e_n\}^{\perp}$，那么 $(y, e_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$，即 $e_n \in y^{\perp}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$，由定理3.2.11知 $\{y\}^{\perp}$ 是一个闭子空间，所以 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$，由条件 $\overline{Span}\{e_n\} = H$，即 $\{y\}^{\perp} = H$，于是 $(y, y) = 0$，所以 $y = 0$

以上的证明说明命题(1)到(3)是等价的.

(2)⇒(4) 由于对所有的 $x \in H$，$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$，于是

$$\| x \|^2 = \| \Sigma_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_n \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| \Sigma_{k=1}^{n}(x, e_k)e_n \|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} \mid (x, e_k) \mid^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \mid (x, e_k) \mid^2 .$$

因此 $\{e_n\}$ 是完备的.

(4)⇒(1) 假设 $y \in \{e_n\}^{\perp}$，那么 $(y, e_n) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$，所以 $e_n \in \{y\}^{\perp} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 根据定理3.2.11 $\{y\}^{\perp}$ 是X 中的闭子空间，我们有 $\overline{Span}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$，即 $\{y\}^{\perp} = H$. 于是$y \in \{y\}^{\perp}$，$\therefore (y, y) = 0$, 因此 $y = 0$. 命题(1)成立. □

注1　我们看到，当 $\{e_n\}$ 是正交基时，Bessel 不等式中的“小于等于号”成为等号，即成为Parseval 等式. 如果 $\{e_n\}$ 不是正交基，则Bessel 不等式是严格的不等式.

注2　在无穷维空间，确定一组元素是否正交相对较为容易，但是要确定一组正交系是否是空间的正交基相对较为困难.

3.4.3 例

定理 3.4.11　三角函数系：

$$e_n = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}, (k = 1, 2, \cdots)$$

是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基.

证明　$\{e_n\}$ 是标准正交系已在命题3.3.8中证明. 根据定理3.4.10 我们只要证明 $\{e_n\}$ 在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密. 由定理2.2.5 及定理后的注可知：连续函数在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密。即：对于任意的 $x \in L^2[-\pi, \pi]$ 及 $\varepsilon > 0$, 都存在周期为 2π 的连续函数 $y(t)$，使得 $\| x(t) - y(t) \|_{L^2} < \frac{1}{2}$. 对于这个连续函数 $y(t)$ 和 $\varepsilon > 0$, 根据Weierstrass 第二逼近定理，存在 三角多项式在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛到 $y(t)$，即存在

$$T(t) = \alpha_0 + \Sigma_{k=1}^{m}\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt,$$

使得 $\| y(t) - T(t) \|_{L^2} < \frac{1}{2}$. 于是 $\| x(t) - T(t) \|_{L^2} \leq \| x - y \| + \| y - T \| < \varepsilon$. 即全体三角多项式在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中稠密. 也就是说 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基. □

注1　这样对于函数 $x(t) \in L^2[-\pi, \pi]$，都有

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \tag{3.4.5}$$

但这里的相等，是在 L^2 空间中“积分意义下的平方平均”收敛，即：

$$\int_0^{2\pi} |x(t) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt)|^2 \mathrm{d}t \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.4.6}$$

这与数学分析里经典的Fourier 级数的收敛意义是不同的，经典意义下Fourier 级数的收敛是指逐点收敛.

注2 1913年鲁津猜测函数 $x(t) \in L^2$ 的Fourier 级数几乎处处收敛到 $x(t)$，直到1966年L.Carleson 才证明了鲁津的猜测是正确的，即：对于任何的 $x(t) \in L^2$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt) = x(t) \tag{3.4.7}$$

几乎处处成立.

例 3.4.12 Legendre 多项式

Hilbert 空间中的正交系不仅仅可以由上例中给出的“三角函数系”构成，我们当然希望正交系由一些更容易处理的函数系组成，比如说多项式. 容易看到

$$x_0(t) = 1, x_1(t) = t, x_2(t) = t^2, ..., x_n(t) = t^n, ...$$

是线性无关的，根据Gram-Schmidt 正规正交化算法，

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$h_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_i, e_i) e_i, \qquad e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|},$$

$$\cdots\cdots$$

我们可以得到一个由多项式组成的正交列 $\{e_n\}$，由正交化程序可知多项式 $\{e_n\}$ 的次数正好是 n，并且

$$Span\{e_n\} = Span\{x_n\}.$$

由于多项式的全体在 $L^2[-1,1]$ 稠密，于是可知 $Span\{e_n\} = L^2[-1,1]$，根据定理3.4.10，这样的多项式正交列 $\{e_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交基.

通过计算我们可以得到：

$$P_0(t) = 1 \qquad\qquad P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \qquad\qquad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t + 3) \qquad\qquad P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

$$\cdots\cdots$$

一般的可以有

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \quad 其中 \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} [(t^2-1)^n]. \tag{3.4.8}$$

$P_n(t)$ 称为是 n 阶的Legendre 多项式.

通过分部积分等计算可以直接验证 $(P_n, P_m) = 0, \quad n \neq m$，$\| P_n \| = 1$，构成 $L^2[-1,1]$中的一个正交列.

注1　可以验证Legendre 多项式是Legendre 方程

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n \tag{3.4.9}$$

的解.

注2　在 $L^2[a,b]$ 空间，令

$$q_n = \frac{1}{\| p_n \|} p_n, \quad p_n(t) = P_n(s), \quad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a},$$

则 q_n 是 $L^2[a,b]$ 空间的正交基.

注3　在一个Hilbert 空间中可以有无穷多组正交基，适当的选择正交基是十分重要的，所选择的正交基适当，所研究问题近似解的收敛速度才能令人满意.

§3.5　可分的Hilbert 空间

3.5.1　线性无关组的正交化

定理 3.5.1　设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与$\{x_n\}$ 张成的子空间相同.

证明　设 x_{n_1}是$\{x_n\}$ 中的第一个不等于零的元素,令

$$e_1 = \frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|}.$$

记 M_1是$\{e_1\}$ 张成的子空间, 设 x_{n_2}是$\{x_n\}$中第一个不属于 M_1 的元,记

$$h_2 = x_{n_2} - (x_{n_2}, e_1)e_1. \tag{3.5.1}$$

则 $h_2 \neq 0$, 且由于 $(h_2, e_1) = (x_{n_2}, e_1) - (x_{n_2}, e_1) = 0, h_2 \perp e_1$. 令

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}. \tag{3.5.2}$$

记 M_2是由 $\{e_1,e_2\}$ 张成的子空间. 继续上面的做法, $\cdots$, 我们有

$$h_k = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1}(x_{n_i}, e_i)e_i, \tag{3.5.3}$$

则$h_k \neq 0$,且$h_k \perp e_i(i=1,2,\cdots,k-1)$.令

$$e_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{3.5.4}$$

如果 $\{x_n\}$ 张成的子空间是有穷维的,则以上做法经过有穷次将停止.如果是无穷维的, 则一直可以作下去,得到标准正交列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由于对于每一个 k, e_k 可以由 $\{x_{n_1},\cdots,x_{n_k}\}$ 线性表示, 并且每一个$\{x_{n_k}\}$ 可用 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 线性表示, 所以 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成相同的子空间. □

定理中由线性无关集得到标准正交集的方法称为Gram-Schmidt正规正交算法.

3.5.2 可分的Hilbert 空间与 l^2 等距同构

以上定理说明一个无穷维的Hilbert 空间一定包含一个正交列，但是Hilbert 空间是否一定存在正交基？这是一个十分重要的问题，一般来说答案是否定的. 但是我们可以有以下结论：

定理 3.5.2 任何可分的内积空间, 存在完备的标准正交列.

证明 设 $\{x_n\}$ 是可分内积空间 H 中的可数稠子集. 由定理3.5.1 从 $\{x_n\}$ 可作出标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成同一子空间. 由于$\{x_n\}$ 稠密, $\{e_n\}$ 张成的子空间在H 中稠密. 根据定理3.4.10, $\{e_n\}$是完备的. □

注 定理说明“相对较小”的空间可以由具有可数多个元素的正交列张成。

当内积空间完备时，我们有

定理 3.5.3 设H 是一个Hilbert 空间, 则 H 是可分的, 当且仅当 H 中有至多可数的标准正交基 S.

如果S 中元素的个数$N < \infty$, 则H 等距同构于K^n(K 是线性空间的数域), 若$N=\infty$, 则H 等距同构于l^2.

证明 ” $\Longrightarrow$ ” 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的可数稠密子集, 那么其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$($N<\infty$或$N=\infty$, 至多可数), 使得

$$span\{y_n\}_{n=1}^{N} = span\{x_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3.5.5}$$

再由定理3.5.1, 由 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ 可以构造出一个标准正交列 $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, 且

$$\overline{span\{e_n\}_{n=1}^{N}} = \overline{span\{y_n\}_{n=1}^{N}} = H. \tag{3.5.6}$$

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 H 的标准正交基.

" $\Longleftarrow$ " 设 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数)是 H 中至多可数的标准正交基, 则集合

$$\{x=\sum_{n=1}^{N}a_ne_n\big|Rea_n\text{与}Ima_n\text{是有理数}\} \tag{3.5.7}$$

是H中的可数稠密子集, 从而 H是可分的.

对于标准正交 $\{e_n\}_{n=1}^N(N<\infty$ 或 $N=\infty$, 至多可数), 做映射

$$T:x\to\{(x,e_n)\}_{n-1}^{\infty} \qquad (\forall x\in H). \tag{3.5.8}$$

根据Parseval 等式我们有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{N}\big|(x,e_n)\big|^2 \qquad (\forall x\in H). \tag{3.5.9}$$

即 T 是从 H 到 K^n(当$N<\infty$) 或者从 H 到 $l^2(N=\infty)$ 的一对一在上的线性同构. 另外

$$\begin{aligned}(x,y)&=(\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)e_i,\sum_{j=1}^{N}(y,e_j)e_j)\\&=\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}(\forall x,y\in H).\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

因此 T 还保持内积不变(于是相应的范数也不变). 于是当 $N<\infty$ 时, H 等距同构于 K^n; 而当 $N=\infty$(可数)时, H 等距同构于 l^2. □

注 定理说明,任何一个无穷维可分的Hilbert 空间都可以表示为"坐标形式"的 l^2.

习题 3

1. 设$e_i\in X,\|e_i\|=1(i\in N),a^2=\sum\limits_{i\neq j}\big|(e_i,e_j)^2\big|<\infty,.x=\{\lambda_i\}\in l^2$,则

$$(1-a)\|x\|_2^2\le\|\sum\lambda_ie_i\|^2\le(1+a)\|x\|_2^2.$$

2. 设$\{H_n\}(n=1,2,\cdots)$为一列内积空间.令

$$H=\{\{x_n\}|x_n\in H_n,\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\}.$$

对于$\{x_n\},\{y_n\}\in H$.定义

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}\quad(\alpha,\beta\in K).$$

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n).$$

证明H是内积空间,并且当每一个H_n都是$Hilbert$空间时,H是$Hilbert$空间.

3. 设H是内积空间,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是H中向量,它们满足条件

$$(x_\mu,x_\gamma)=\begin{cases}0,\text{当}\mu\neq\gamma.\\1,\text{当}\mu=\gamma.\end{cases}$$

证明$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一组线性独立向量.

4. 设E_n是n维线性空间.$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E_n的一组基.证明$E_n\times E_n$上复值函数(x,y)成为E_n上内积的充要条件是存在$n\times n$阶正定方阵$A=(a_{kj})$,使得

$$(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}x_k\overline{y_j}.$$

其中$x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k,y=\sum\limits_{k=1}^{n}y_ke_k$.

5. 试证$\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt\}$构成$L^2[0,2\pi]$的正交基.但不是$L^2[-\pi,\pi]$的正交基.

6. 设$\{x_n\},\{y_n\}$为内积空间H中的点列,$x_n\to x$且$y_n\to y$.证明$(x_n,y_n)\to(x,y)$.

7. 设$\{x_n\}$为内积空间H中点列.$\|x_n\|\to\|x\|$.且$(x_n,y)\to(x,y)(y\in H)$,证明：$x_n\to x$.

8. 设H为内积空间,E为H的稠密集,证明若$x\perp E$,则$x=0$.

9. 设$M=\{x|x=\{x_n\}\in l^2,x_{2n}=0,n=1,2,\cdots\}$,证明$M$是$l^2$的闭子空间,且求出$M^\perp$.

10. 设$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为内积空间H中的正规正交系,证明：对于任一$x\in H,x$在$SpanE$上的投影存在且为$\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$.

11. 在$L^2[a,b]$中,令$S=\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

    (1)若$|b-a|\leq1$.求证$S^\perp=\{0\}$;

    (2)若$\big|b-a\big|>1$.求证$S^\perp\neq\{0\}$.

12. M 是H 的闭线性子空间, $\{e_n\}$ 与$\{e'_n\}$ 分别是M 与$M^\perp$ 的标准正交基. 证明$\{e_n\}\cup\{e'_n\}$构成H 的标准正交基.

13. 在$C[-1,1]=X$中.令

    (1)$M_1=\{f\in X|f(x)=0,\forall x<0\}$;

    (2)$M_2=\{f\in X|f(0)=0\}$.

    计算M_1,M_2在X中关于内积$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$的正交补.

14. 设H是$Hilbert$空间.$\{e_n\}$是它的标准正交集,证明

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \|x\|\,\|y\|, \quad \forall x,y\in H.$$

15. 设H是$Hilbert$空间,$\{x_n\}\subset H$,满足$\sum\|x_n\|<\infty$.证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$在$H$中收敛.

16. 设H表示闭单位圆上解析函数全体.定义内积

$$(f,g)=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)\overline{g(z)}}{z}\mathrm{d}z, \forall f,g\in H.$$

证明$\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\}_{n=0}^{\infty}$是$H$的一个标准正交基.

17. 设$\{e_\alpha\}(\alpha\in I)$是内积空间$H$中的标准正交系. 证明对于每个$x\in H$, x 关于这个标准正交系的Fourier 系数 $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in I\}$中最多有可数个不为零

18. 若$\{x_j\}$是内积空间X的序列,使得级数$\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$ 收敛.证明$\{S_n\}$是一个$Cauchy$序列.这里$S_n=x_1+\cdots+x_n$.

19. 设$A=\{e_k\}$是内积空间X中的标准正交系.证明对$\forall x,y\in X$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(x,e_k)(y,e_k)\right| \le \|x\|\|y\|.$$

20. 证明在可分内积空间中, 任一正规正交集最多为一可数集.

21. 若H 是内积空间, $M,N\subset H$, 则

(1) 若$M\perp N$, 则$M\subset N^{\perp}, N\subset M^{\perp}$;

(2) $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

22. 设H 为Hilbert 空间, $\{e_k\},\{e_k'\}$ 是H 中的两个正规正交基, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<1$. 证明如果$\{e_k\},\{e_k'\}$ 中之一是完备的, 则另一个也是完备的.

23. 设H 为Hilbert 空间, $\{x_n\}$ 是H 中的正交集, 则下列条件等价：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y)$ $(\forall y\in H)$ 收敛;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ 收敛.

24. 设H 为Hilbert 空间, 若$E\subset H$ 是线性子空间并且对于任意的$x\in H$, x 在E 上的投影存在, 则E 是闭的.

25. 设M,N 是内积空间H 的子空间, $M\perp N$, $L=M\oplus N$, 证明L 是闭子空间的充分必要条件是M,N 均为闭子空间. 充分性部分假定H 完备.

26. 若内积空间X 是实的, 则$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ 蕴含着$x\perp y$, 但若X是复空间时, $x\perp y$未必成立. 举例说明之.

27. 对于内积空间H, 下述条件等价：

(1) $x \perp y$;

(2) $\|x+\alpha y\| \geqslant \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(3) $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

28. 设$\{x_1, x_2, x_3\}$ 是内积空间X 中的线性独立集, 假定$\{x_1, x_2\}$ 满足$(x_i, x_j) = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant 2$. 定义$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3\|.$$

证明当$\alpha_i = (x_3, x_i)$, $i = 1, 2$ 时, f 取得最小值.

29. 设x, y 是复内积空间X 中的两个非零向量, 则

(1) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当y 是x 的正倍数;

(2) $\|x-y\| = |\|x\| - \|y\||$ 当且仅当y 是x 的倍数;

(3) 给定$z \in X, \|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ 当且仅当存在$\alpha \in [0,1]$, 使得$z = \alpha x + (1-\alpha) y$.

30. 若$\{u_n\}$ 是内积空间X 中的正规正交序列, 则对$\forall x \in X, (u_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

31. 设X 为内积空间, $x, y \in X$, 假定$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \|x\|, \forall \lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. 证明$x = y$. 若$X$ 是赋范空间但不是内积空间时, 情况又如何?

32. 赋范线性空间X 被称作是一致凸的, 若X 中的任何满足$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \|x_n + y_n\| \to 2$ 的序列$\{x_n\}, \{y_n\}$ 有$\|x_n - y_n\| \to 0$. 证明任何内积空间都是一致凸的.