泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

§ 2 开集和连续映射

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ **空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了**

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$**、**

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$**、**

开集、闭集这些概念.

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ **空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了**

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$、

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$、

开集、闭集这些概念.

我们看到开球和闭球这两个概念仅仅用到距离这个概念,

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ **空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了**

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$、

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$、

开集、闭集这些概念.

我们看到开球和闭球这两个概念仅仅用到距离这个概念,

于是在一般的距离空间中, 我们也同样可以引入开集、闭集等一系列概念,

建立起相应的拓扑结构.

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$、

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$、

开集、闭集这些概念.

我们看到开球和闭球这两个概念仅仅用到距离这个概念，

于是在一般的距离空间中, 我们也同样可以引入开集、闭集等一系列概念,

建立起相应的拓扑结构.

并且在这样的拓扑结构下, 类似于实数集上定义连续函数一样，我们可类似定义距离空间上的连续映射.

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$、

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$、

开集、闭集这些概念.

我们看到开球和闭球这两个概念仅仅用到距离这个概念，

于是在一般的距离空间中, 我们也同样可以引入开集、闭集等一系列概念,

建立起相应的拓扑结构.

并且在这样的拓扑结构下, 类似于实数集上定义连续函数一样，我们可类似定义距离空间上的连续映射.

注： topologe: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.

§ 2 开集和连续映射

在 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 空间中引入了距离(欧氏距离), 就有了

开球$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$、

闭球$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \le r\}$、

开集、闭集这些概念.

我们看到开球和闭球这两个概念仅仅用到距离这个概念,

于是在一般的距离空间中, 我们也同样可以引入开集、闭集等一系列概念,

建立起相应的拓扑结构.

并且在这样的拓扑结构下, 类似于实数集上定义连续函数一样，我们可类似定义距离空间上的连续映射.

注： **topologe: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.**

– **THE CONCISE OXFORD DICTIONARY**

一、开球、闭球

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X, d) 是一个距离空间, $r > 0$, 集合

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的***开球(Open ball)***;

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的***开球(Open ball)***;

集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的**开球(Open ball)**;
集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**闭球(Closed ball)**;

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的**开球(Open ball)**;

集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**闭球(Closed ball)**;

集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)=r\} \tag{1.2.3}$$

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的***开球(Open ball)***;
集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的***闭球(Closed ball)***;
集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)=r\} \tag{1.2.3}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的***球面(Sphere)***.

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X, d) 是一个距离空间, $r > 0$, 集合

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的**开球(Open ball)**;
集合

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**闭球(Closed ball)**;
集合

$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\} \tag{1.2.3}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**球面(Sphere)**.

注1 在$\mathbb{R}$中：开球 $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的**开球(Open ball)**;

集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**闭球(Closed ball)**;

集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)=r\} \tag{1.2.3}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的**球面(Sphere)**.

注1 在$\mathbb{R}$中：开球 $B(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)$.

在 $\mathbb{R}^2$中： $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}<r\}$,

一、开球、闭球

定义 1.2.1 设 (X,d) 是一个距离空间, $r>0$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\} \tag{1.2.1}$$

称为以 x_0 为中心, r 为半径的***开球(Open ball)***;

集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\} \tag{1.2.2}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的***闭球(Closed ball)***;

集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)=r\} \tag{1.2.3}$$

称为以 r_0 为中心, r 为半径的***球面(Sphere)***.

注1 在$\mathbb{R}$中：开球 $B(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)$.

在 $\mathbb{R}^2$中： $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}<r\}$,

其中 $x=(x_1,x_2)$,$x_0=(x_1^0,x_2^0)$.

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

但 $S(x_0, 1) = D \backslash \{x_0\}$.

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的"开球"、"闭球"、"球面"这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

但 $S(x_0, 1) = D \backslash \{x_0\}$.

距离空间中开球的例子

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

但 $S(x_0, 1) = D \backslash \{x_0\}$.

距离空间中开球的例子

例 1.2.2 *在* $C[0,T]$ *中*, $x_0 \in C[0,T]$,

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

但 $S(x_0, 1) = D\backslash\{x_0\}$.

距离空间中开球的例子

例 1.2.2 *在 $C[0,T]$ 中, $x_0 \in C[0,T]$,*

开球 $B(x_0, \frac{1}{2})$ ***表示****定义在 $[0,T]$ 区间上, 满足*

注2 从 Euclidean 几何中延伸使用的“开球”、“闭球”、“球面”这些概念, 不一定具有在 $\mathbb{R}^3$ 中球体的几何直观.

例如, 在离散空间 D 中(见第一章§1 例 1.1.9),

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$,

而 $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$,

但 $S(x_0, 1) = D \backslash \{x_0\}$.

距离空间中开球的例子

例 1.2.2 *在* $C[0,T]$ *中*, $x_0 \in C[0,T]$,

开球 $B(x_0, \frac{1}{2})$ ***表示****定义在* $[0,T]$ *区间上, 满足*

$$|x(t) - x_0(t)| < \frac{1}{2}, \forall t \in [0,T]$$

的全体连续函数. 见下图.

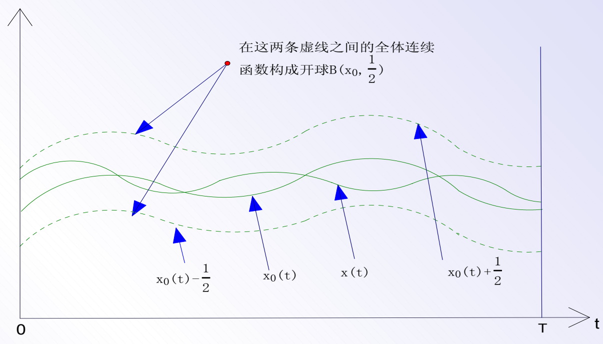

Figure 1.2.1: 开球1

例 1.2.3 设 X 是 $[0, T]$ 上全体连续函数组成的距离空间, 距离定义为

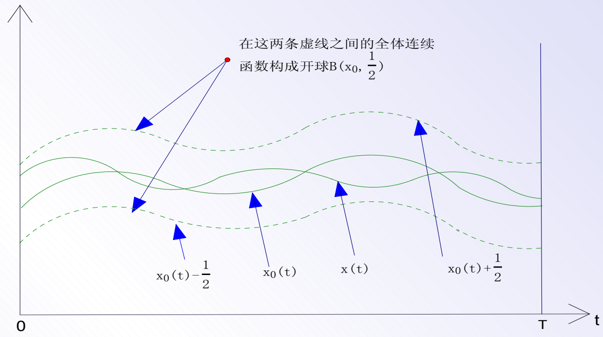

Figure 1.2.1: 开球1

例 1.2.3 设 X 是 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的距离空间, 距离定义为

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}.$$

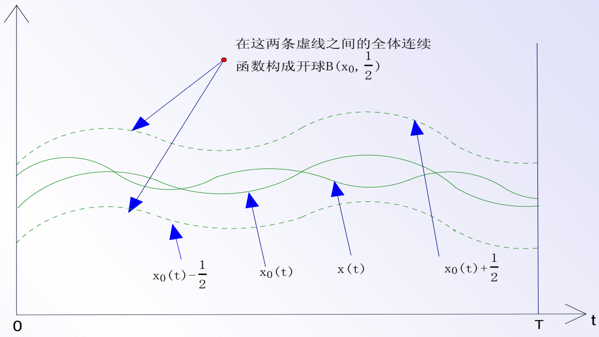

Figure 1.2.1: 开球1

例 1.2.3 设 X 是 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的距离空间, 距离定义为

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}.$$

对于 $x_0\in X$, **开球** $B(x_0,\frac{1}{2})$ **表示** 定义在 $[0,T]$ 区间上, 满足条件

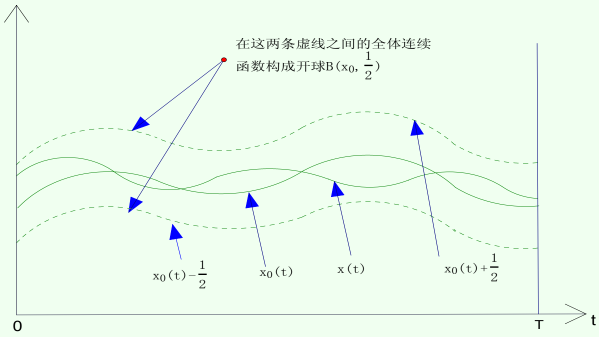

Figure 1.2.1: 开球1

例 1.2.3 *设 X 是 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的距离空间, 距离定义为*

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2}.$$

*对于 $x_0\in X$, **开球** $B(x_0,\frac{1}{2})$ **表示** 定义在 $[0,T]$ 区间上, 满足条件*

$$\{\int_0^T \mid x(t)-x_0(t)\mid^2 dt\}^{1/2}<\frac{1}{2}$$

的全体连续函数.

此“开球”中的函数与例1.2.2“开球”中的函数大不一样, 我们可将该开球中极少的几个函数在下面图示出来,见图 1.2.2 .

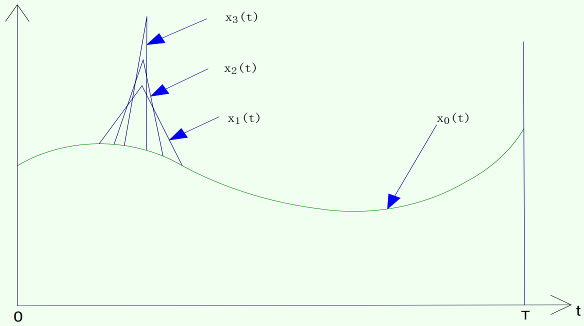

Figure 1.2.2: 开球2

注：上述两例表明： 对于开球和闭球, 一定要结合具体的距离空间来考虑.

此“开球”中的函数与例1.2.2“开球”中的函数大不一样, 我们可将该开球中极少的几个函数在下面图示出来,见图 1.2.2 .

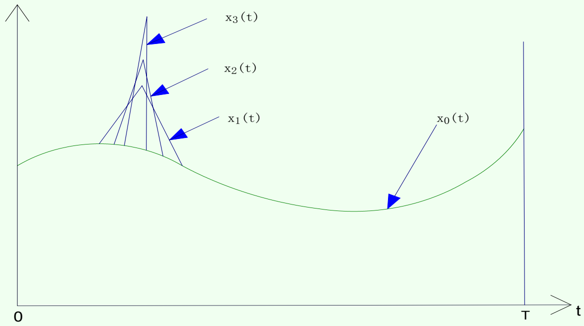

Figure 1.2.2: 开球2

注: 上述两例表明: 对于开球和闭球, 一定要结合具体的距离空间来考虑.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X *是一个距离空间.* $A \subset X$,

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,

二、内点、开集、邻域、等价的距离

(可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景)

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,

若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,

对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,

则称 x 为 G 的**内点**.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是***有界集***.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,
则称 x 为 G 的***内点***.

定义 1.2.6 *(开集)* 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 *X 是一个距离空间. $A \subset X$,*
*若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.*

定义 1.2.5 设 *X 是一个距离空间, $G \subset X$,*
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,
*则称 x 为 G 的**内点**.*

定义 1.2.6 *(开集)* 设 *X 是一个距离空间, $G \subset X$,*
*若 G 的每一个点都是内点, 则称G是一个**开集**.*

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,
则称 x 为 G 的**内点**.

定义 1.2.6 (开集) 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
若 G 的每一个点都是内点, 则称G是一个**开集**.
对于 $x \in X$, 包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个**邻域**.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,
则称 x 为 G 的**内点**.

定义 1.2.6 (开集) 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
若 G 的每一个点都是内点, 则称G是一个**开集**.
对于 $x \in X$, 包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个**邻域**.

例 1.2.7 开球 $B(x_0, r)$ 是一个开集.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X 是一个距离空间. $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$, 则称 A 是**有界集**.

定义 1.2.5 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, 若存在开球 $B(x_0, r)$, 使得 $B(x_0, r) \subset G$,
则称 x 为 G 的**内点**.

定义 1.2.6 (开集) 设 X 是一个距离空间, $G \subset X$,
若 G 的每一个点都是内点, 则称G是一个**开集**.
对于 $x \in X$, 包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个**邻域**.

例 1.2.7 开球 $B(x_0, r)$ 是一个开集.

分析： 要证 $B(x_0, r)$ 是开集, 即要证明它中的每一个点都是内点.

二、内点、开集、邻域、等价的距离

（可以把$\mathbb{R}^2$ 空间中的类似概念作为其来源和背景）

定义 1.2.4 X *是一个距离空间.* $A \subset X$,
若存在开球 $B(x_0, r)$, *使得* $A \subset B(x_0, r)$, *则称* A *是**有界集**.*

定义 1.2.5 *设* X *是一个距离空间,* $G \subset X$,
对于 $x_0 \in G$, *若存在开球* $B(x_0, r)$, *使得* $B(x_0, r) \subset G$,
则称 x *为* G *的**内点**.*

定义 1.2.6 *(开集) 设* X *是一个距离空间,* $G \subset X$,
若 G *的每一个点都是内点, 则称*G*是一个**开集**.*
对于 $x \in X$, *包含* x *的任何一个开集称为* x *的一个**邻域**.*

例 1.2.7 *开球* $B(x_0, r)$ *是一个开集.*

分析： 要证 $B(x_0, r)$ 是开集, 即要证明它中的每一个点都是内点.
即, $B(x_0, r)$ 中的每一点都存在开球包含在 $B(x_0, r)$ 中.

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

取 $0 < r_1 \le r - d(x_0, x_1)$,

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

取 $0 < r_1 \le r - d(x_0, x_1)$,

我们**要证明** $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

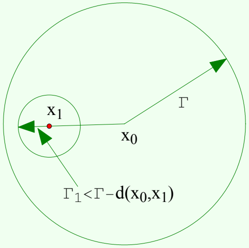

Figure 1.2.3: 内点

事实上, $\forall x \in B(x_1, r_1), \Longrightarrow d(x_1, x) < r_1$.

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

取 $0 < r_1 \le r - d(x_0, x_1)$,

我们**要证明** $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

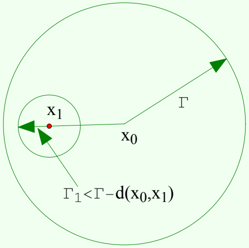

Figure 1.2.3: 内点

事实上, $\forall x \in B(x_1, r_1)$, $\Longrightarrow d(x_1, x) < r_1$.

由距离的三角不等式, 有

$$
\begin{aligned}
d(x_0, x) &\le d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \\
&\le d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r.
\end{aligned}
$$

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

取 $0 < r_1 \le r - d(x_0, x_1)$,

我们**要证明** $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

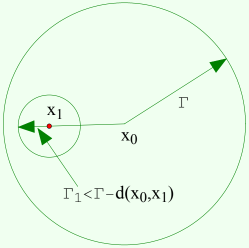

Figure 1.2.3: 内点

事实上, $\forall x \in B(x_1, r_1)$, $\Longrightarrow d(x_1, x) < r_1$.

由距离的三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\le d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \\ &\le d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r. \end{aligned}$$

所以 $x \in B(x_0, r)$, 即 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

证明 $\forall x_1 \in B(x_0, r)$, 由开球的定义 $d(x_0, x_1) < r$.

取 $0 < r_1 \leq r - d(x_0, x_1)$,

我们**要证明** $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

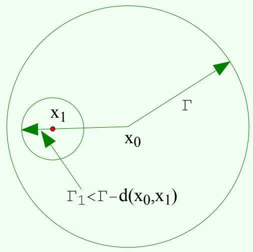

Figure 1.2.3: 内点

事实上, $\forall x \in B(x_1, r_1), \implies d(x_1, x) < r_1$.

由距离的三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r_1 \\ &\leq d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r. \end{aligned}$$

所以 $x \in B(x_0, r)$, 即 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

故 $B(x_0, r)$ 是开集.

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注2 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设* X *是距离空间,* X *中的开集具有以下性质*

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注2 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注2 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注2 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ **是开集.**

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ **是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

注1 **开球是开集，开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设* X *是距离空间,* X *中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ **是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

$\because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ **存在开球** $B(x, r)$, 使得 $\mathbf{B(x,r)} \subset G_{\alpha_0} \subset \mathbf{G}$.

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ **是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

$\because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ **存在开球** $B(x, r)$, 使得 $\mathbf{B(x,r)} \subset G_{\alpha_0} \subset \mathbf{G}$.

$\Longrightarrow G$ 开.

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ **是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

$\because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ **存在开球** $B(x, r)$, 使得 $\mathbf{B(x,r)} \subset G_{\alpha_0} \subset$ $\mathbf{G}$.

$\Longrightarrow G$ 开.

(3) 设 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$, 其中 G_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是开集, **要证明** G **是开集.**

注1 **开球是开集, 开集并不一定是开球.**

注2 **称** $B(x_0, r)$ **为** x_0 **的球形邻域.**

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明,** $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ **是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

$\because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ **存在开球** $B(x, r)$, 使得 $\mathbf{B(x,r)} \subset G_{\alpha_0} \subset$ $\mathbf{G}$.

$\Longrightarrow G$ 开.

(3) 设 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$, 其中 G_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是开集, **要证明** G **是开集.**

(利用开集的定义来证明).

注1 开球是开集, 开集并不一定是开球.

注2 称 $B(x_0, r)$ 为 x_0 的球形邻域.

定理 1.2.8 *设 X 是距离空间, X 中的开集具有以下性质*

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

(2) G_α 是开集, 其中$\alpha \in I$. **要证明, $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集.**

$\forall x \in G$, $\exists \alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$.

$\because G_{\alpha_0}$ 开 $\Rightarrow$ **存在开球** $B(x, r)$, 使得 $\mathbf{B(x,r)} \subset G_{\alpha_0} \subset \mathbf{G}$.

$\Longrightarrow G$ 开.

(3) 设 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$, 其中 G_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是开集, **要证明 G 是开集.**

(利用开集的定义来证明).

$\forall x \in G$, 则 $x \in G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$.

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x, r_k) \subset G_k$,

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x, r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

由 G_k 开, 则 存在 $B(x, r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x, r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)} \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = \mathbf{G}$. 所以 G 开. $\square$

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x,r_k)\subset G_k$,

取 $r=\min\{r_k\}$, 于是

$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)}\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=\mathbf{G}$. 所以 G 开. □

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x, r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)} \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = \mathbf{G}$. 所以 G 开. □

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

由 G_k 开, 则 存在 $B(x,r_k)\subset G_k$,

取 $r=\min\{r_k\}$, 于是

$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)}\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=\mathbf{G}$. 所以 G 开. $\square$

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

....

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注 2. 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathscr{J}$ 满足上述三个性质, 我们则把它们称为开集,

由 G_k 开, 则 存在 $B(x,r_k)\subset G_k$,

取 $r=\min\{r_k\}$, 于是

$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)}\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=\mathbf{G}$. 所以 G 开. □

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注 2. 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathcal{J}$ 满足上述三个性质, 我们则把它们称为开集,

或者说 $\mathcal{J}$ 是 X 中的一个拓扑, $(X,\mathcal{J})$ 成为一个拓扑空间.

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x,r_k)\subset G_k$,

取 $r=\min\{r_k\}$, 于是

$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)}\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=\mathbf{G}$. 所以 G 开. $\square$

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

……………………………………………………

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注 2. 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathcal{J}$ 满足上述三个性质, 我们则把它们称为开集,

或者说 $\mathcal{J}$ 是 X 中的一个拓扑, $(X,\mathcal{J})$ 成为一个拓扑空间.

即开集决定了空间的拓扑性质.

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x,r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

$B(x,r) \subset B(x,r_k) \subset G_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)} \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = \mathbf{G}$. 所以 G 开. □

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

....

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注 2. 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathscr{J}$ 满足上述三个性质, 我们则把它们称为开集,

或者说 $\mathscr{J}$ 是 X 中的一个拓扑, $(X, \mathscr{J})$ 成为一个拓扑空间.

即开集决定了空间的拓扑性质.

注： topologe: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.

由 G_k 开, 则 **存在** $B(x, r_k) \subset G_k$,

取 $r = \min\{r_k\}$, 于是

$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k(k = 1, 2, \cdots, n)$,

即 $\mathbf{B(x,r)} \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = \mathbf{G}$. 所以 G 开. $\square$

注1 定理的证明中, 可以不用距离的概念, 仅使用开集的概念.

....

(1)全空间与空集是开集,

(2)任意多个 开集的并集是开集,

(3)任意有限多个 开集的交集是开集.

注 2. 如果一个集合 X 中有一个子集族 $\mathcal{J}$ 满足上述三个性质, 我们则把它们称为开集,

或者说 $\mathcal{J}$ 是 X 中的一个拓扑, $(X, \mathcal{J})$ 成为一个拓扑空间.

即开集决定了空间的拓扑性质.

注: topologe: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.

– THE CONCISE OXFORD DICTIONARY

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有

$$C_1 d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le C_2 d_1(x, y),$$

定义 1.2.9 设(X,d_1), (X,d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1>0$, $C_2>0$, 使得对于 $\forall x,y$ 都有

$C_1d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C_2d_1(x,y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称*距离 d_1, d_2 是等价的*, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有
$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

定义 1.2.9 设(X,d_1), (X,d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1>0$, $C_2>0$, 使得对于 $\forall x,y$ 都有
$C_1 d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C_2 d_1(x,y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x,y)=\mid x_1-y_1\mid+\mid x_2-y_2\mid, \tag{1.2.4}$$

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) *是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有*
$C_1 d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le C_2 d_1(x, y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 *在$\mathbb{R}^2$, 定义距离*

$$d_1(x, y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x, y) = (\mid x_1 - y_1 \mid^2 + \mid x_2 - y_2 \mid^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称*距离 d_1, d_2 是等价的*, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有 $C_1 d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le C_2 d_1(x, y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x, y) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x, y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{| x_1 - y_1 |, | x_2 - y_2 |\}, \tag{1.2.6}$$

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) *是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在*$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *使得对于 $\forall x, y$ 都有*
$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 *在*$\mathbb{R}^2$, *定义距离*

$$d_1(x, y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x, y) = (\mid x_1 - y_1 \mid^2 + \mid x_2 - y_2 \mid^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}, \tag{1.2.6}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ 有:

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有 $C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x, y) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x, y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{| x_1 - y_1 |, | x_2 - y_2 |\}, \tag{1.2.6}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ 有:

(1) $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$,

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有 $C_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le C_2 d_1(x,y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x,y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x,y) = (\mid x_1 - y_1 \mid^2 + \mid x_2 - y_2 \mid^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}, \tag{1.2.6}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ 有:

(1) $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y)$,

(2) $d_2(x,y) \le \sqrt{2} d_\infty(x,y)$,

定义 1.2.9 设(X,d_1), (X,d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称距离 d_1, d_2 是等价的, 如果存在$C_1>0$, $C_2>0$, 使得对于 $\forall x,y$ 都有

$C_1d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C_2d_1(x,y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x,y)=\mid x_1-y_1\mid+\mid x_2-y_2\mid, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x,y)=(\mid x_1-y_1\mid^2+\mid x_2-y_2\mid^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\mid x_1-y_1\mid,\mid x_2-y_2\mid\}, \tag{1.2.6}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对 $\forall x,y\in\mathbb{R}^2$ 有:

(1) $d_\infty(x,y)\le d_2(x,y)\le d_1(x,y)$,

(2) $d_2(x,y)\le\sqrt{2}d_\infty(x,y)$,

(3) $d_1(x,y)\le\sqrt{2}d_2(x,y)\le 2d_\infty(x,y)$.

定义 1.2.9 设(X, d_1), (X, d_2) 是定义在同一个集合 X 上两个距离空间, 称**距离 d_1, d_2 是等价的**, 如果存在$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对于 $\forall x, y$ 都有
$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$,

注 事实上，距离 d_1, d_2 是等价的, 如果它们产生的开集族 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 相同.

例 1.2.10 在$\mathbb{R}^2$, 定义距离

$$d_1(x,y) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |, \tag{1.2.4}$$

$$d_2(x,y) = (| x_1 - y_1 |^2 + | x_2 - y_2 |^2)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{| x_1 - y_1 |, | x_2 - y_2 |\}, \tag{1.2.6}$$

则 d_1, d_2, d_∞ 在 $\mathbb{R}^2$ 中是等价的. 这是因为对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ 有:

(1) $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$,

(2) $d_2(x,y) \leq \sqrt{2} d_\infty(x,y)$,

(3) $d_1(x,y) \leq \sqrt{2} d_2(x,y) \leq 2 d_\infty(x,y)$.

注 **结果可推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.**

三、连续映射

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T:\ X \to X_1$ 是一个映射, $x_0 \in X$.

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T: X \to X_1$ 是一个映射, $x_0 \in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T: X \to X_1$ 是一个映射, $x_0 \in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0)) < \varepsilon,$$

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T: X \to X_1$ 是一个映射, $x_0 \in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0)) < \varepsilon,$$

则称 T **在** x_0 **点连续.**

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数，可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X, d), (X_1, d_1) 是距离空间, $T:\ X \to X_1$ 是一个映射, $x_0 \in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon,$$

则称 T **在** x_0 **点连续.**

换成邻域的语言，即对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数, 可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T:\ X\to X_1$ 是一个映射, $x_0\in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $d(x,x_0)<\delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon,$$

则称 T **在** x_0 **点连续.**

换成邻域的语言, 即对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $TB(x_0,\delta)\subset B(T(x)_0,\varepsilon)$.

三、连续映射

类似于实数空间中的连续函数，可在距离空间上定义连续映射.

定义 1.2.11 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间, $T:\ X\to X_1$ 是一个映射, $x_0\in X$. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $d(x,x_0)<\delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon,$$

则称 T 在 x_0 点连续.

换成邻域的语言，即对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $TB(x_0,\delta)\subset B(T(x)_0,\varepsilon)$.

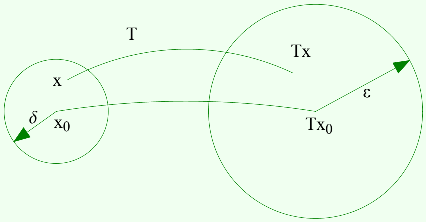

Figure 1.2.4: 连续映射

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 **T 在 X 上连续**. 特殊地, 若

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在** X **上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在** X **上连续.** 特殊地, 若

$$d(x,y) = d_1(T(x),T(y)), \forall x,y \in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y) = d_1(T(x),T(y)), \forall x,y \in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T: X \to X_1$ $(T(X) = X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y) = d_1(T(x), T(y)), \forall x, y \in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T: X \to X_1$ $(T(X) = X_1)$, **则称** X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 **T 在 X 上连续.** 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射,*

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, **则称** X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X,d) 中的开集.*

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, $S_1\subset X_1$ 是开的, $S\subset X$ 是它的原象.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y) = d_1(T(x),T(y)), \forall x,y \in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T: X \to X_1$ $(T(X) = X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X,d) 中的开集.*

证明 “$\Longrightarrow$” 假设 T 是连续的, $S_1 \subset X_1$ 是开的, $S \subset X$ 是它的原象. 要证明S 是开的

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X,d) 中的开集.*

证明 “$\Longrightarrow$” 假设 T 是连续的, $S_1\subset X_1$ 是开的, $S\subset X$ 是它的原象.

要证明S 是开的

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在** X **上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X,d) 中的开集.*

证明 “$\Longrightarrow$” 假设 T 是连续的, $S_1\subset X_1$ 是开的, $S\subset X$ 是它的原象.

要证明S 是开的

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

一个邻域包含在 S 中的含义是: T 把 这个邻域映到 S_1 中.

若 T 在 X 中的每一点都连续则称 T **在 X 上连续**. 特殊地, 若

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X. \tag{1.2.7}$$

则称T 是等距映射.

注1 等距映射是1-1的连续映射, 但不一定是映上的(满射).

注2 若 X, X_1 上存在一个等距在上的映射 $T:X\to X_1$ $(T(X)=X_1)$, 则称 X_1 和 X 等距.

注3 等距的两个空间, 在等距的意义下可认为是同一空间.

有了开集的概念, 我们可以把连续映射（定义 1.2.11 ）用开集来描述.

定理 1.2.12 *设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原象仍然是 (X,d) 中的开集.*

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, $S_1\subset X_1$ 是开的, $S\subset X$ 是它的原象.

要证明S 是开的

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

一个邻域包含在 S 中的含义是: T 把 这个邻域映到 S_1 中.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

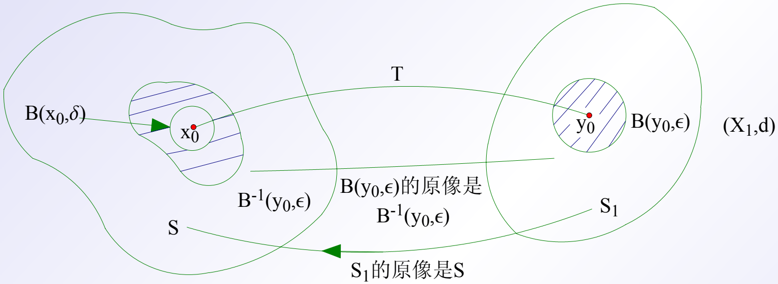

Figure 1.2.5: 原像

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

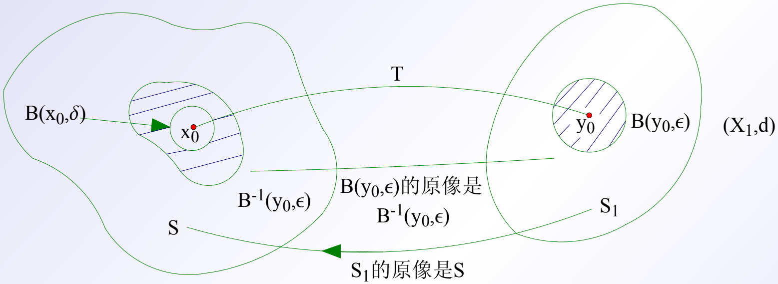

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

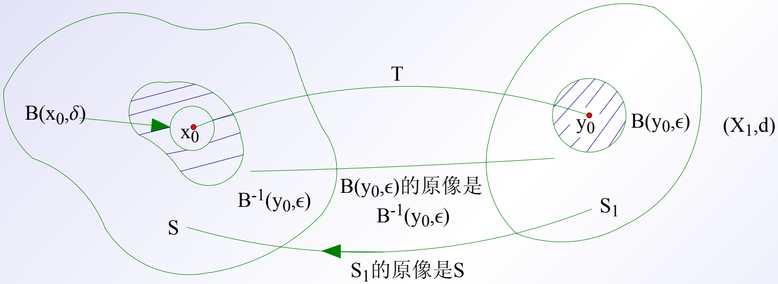

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

由 T **是连续的**, 则对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 且 $TB(x_0,\delta)\subset B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

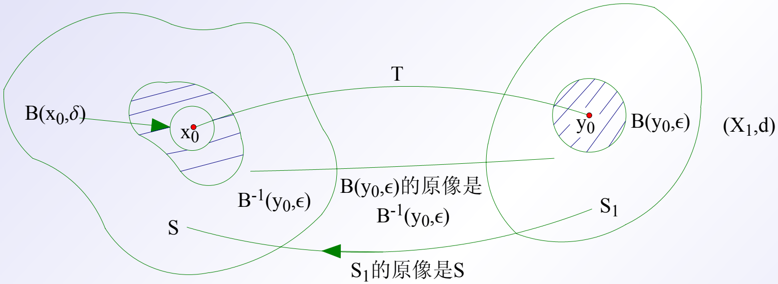

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

由 T **是连续的**, 则对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 且 $TB(x_0,\delta)\subset B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

于**是** $B(x_0,\delta)\subset S$, 即 x_0 是一个内点,

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

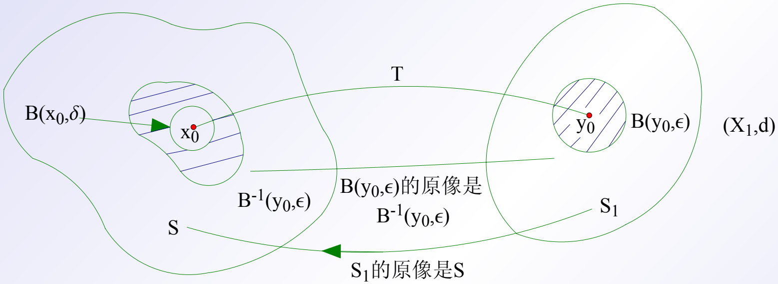

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

由 T **是连续的**, 则对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 且 $TB(x_0,\delta)\subset B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

于**是** $B(x_0,\delta)\subset S$, 即 x_0 是一个内点,

由 x_0 任意, 可知 S 是开集.

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$（这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

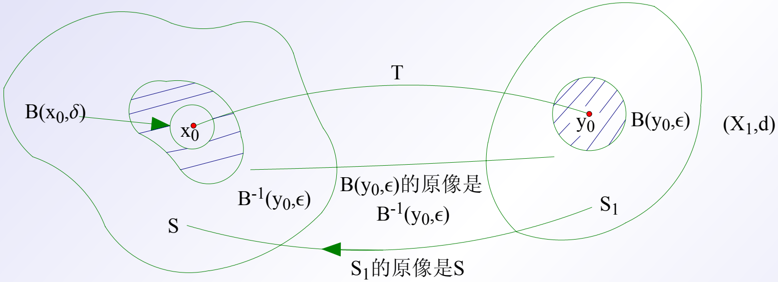

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

由 T **是连续的**, 则对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 且 $TB(x_0,\delta)\subset B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

于**是** $B(x_0,\delta)\subset S$, 即 x_0 是一个内点,

由 x_0 任意, 可知 S 是开集.

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

一个邻域包含在 S 中的含义是: T 把 这个邻域映到 S_1 中.

如果 $S=\emptyset$, 显然成立.

设 $S\neq\emptyset$, 对于 $\forall x_0\in S$, 令 $y_0=Tx_0$ （这是因为 S 是 S_1 的原像（关于 T））.

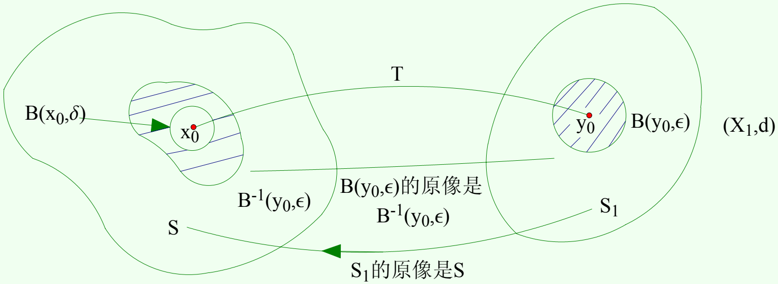

Figure 1.2.5: 原像

因为 S_1 是开的, 于是存在 $B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

由 T **是连续的**, 则对上述 ε, 存在 $\delta>0$, 且 $TB(x_0,\delta)\subset B(y_0,\varepsilon)\subset S_1$.

于**是** $B(x_0,\delta)\subset S$, 即 x_0 是一个内点,

由 x_0 任意, 可知 S 是开集.

利用开集的定义来证明: 对任何 $\forall x_0\in S$, 存在 x_0 的一个邻域包含在 S 中.

一个邻域包含在 S 中的含义是: T 把 这个邻域映到 S_1 中.

“$\Longleftarrow$” 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

“$\Longleftarrow$” 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

“$\Longleftarrow$” 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(证明 T 是连续的. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

因此 N 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$,

“$\Longleftarrow$” 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(证明 T 是连续的. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

因此 N 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$,

即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, 所以 T 在 x_0 连续.

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

因此 N 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$,

即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, 所以 T 在 x_0 连续.

由于 x_0 是任意的, 则 T 在 X 上连续. $\square$

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(证明 T 是连续的. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

因此 N 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$,

即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, 所以 T 在 x_0 连续.

由于 x_0 是任意的, 则 T 在 X 上连续. $\square$

注1 **定理的证明可不用 ε, δ 涉及距离的术语, 仅使用邻域、开集这些拓扑的概念就能证明.**

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ 是开的, 且 $x_0 \in N$,

因此 N 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$,

即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, 所以 T 在 x_0 连续.

由于 x_0 是任意的, 则 T 在 X 上连续. $\square$

注1 **定理的证明可不用 ε, δ 涉及距离的术语, 仅使用邻域、开集这些拓扑的概念就能证明.**

注2 **即连续映射是一个拓扑概念, 可把此定理作为拓扑空间中连续函数的定义.**

"$\Longleftarrow$" 假设 X_1 中任何开集的原象仍是 X 中的开集,

(**证明 T 是连续的**. 即证 T 在 X 中每一点都连续, 我们利用连续的定义1.2.11来证明.)

对于 $\forall x_0 \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, $B(Tx_0, \varepsilon)$ 在 X_1 中是开的.

于是由条件它的原象 $N = B^{-1}(Tx_0, \varepsilon)$ **是开的, 且** $x_0 \in N$,

因此 N **包含一个** x_0 **的** δ **邻域** $B(x_0, \delta)$,

即 $TB(x_0, \delta) \subset B(Tx_0, \varepsilon)$, 所以 T 在 x_0 连续.

由于 x_0 是任意的, 则 T 在 X 上连续. □

注1 **定理的证明可不用** ε, δ **涉及距离的术语, 仅使用邻域、开集这些拓扑的概念就能证明.**

注2 **即连续映射是一个拓扑概念, 可把此定理作为拓扑空间中连续函数的定义.**

注3 **易推知: 两个连续函数的复合函数也是连续的.**

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

定理 1.2.13 *设 T 是从距离空间 (X, d) 到 (X_1, d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有*

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

说明: 若 T 连续, 则极限运算可以和 T 交换顺序.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, 且 $\lim x_n = x_0$. **要证明**

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n) = T(x_0)$$

.

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

说明：若 T 连续, 则极限运算可以和 T 交换顺序.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, 且 $\lim x_n = x_0$. **要证明**

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n) = T(x_0)$$

.

由 T 连续, 则对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

.

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

说明: 若 T 连续, 则极限运算可以和 T 交换顺序.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, 且 $\lim x_n = x_0$. **要证明**

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n) = T(x_0)$$

.

由 T 连续, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

.

因为 $\lim x_n = x_0$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时 $d(x_n, x_0) < \delta$,

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

说明：若 T 连续, 则极限运算可以和 T 交换顺序.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 T 是连续的, 且 $\lim x_n = x_0$. **要证明**

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n) = T(x_0)$$

.

由 T 连续, 则对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$$

.

因为 $\lim x_n = x_0$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时 $d(x_n,x_0) < \delta$,

于是 $d_1(T(x_n),T(x_0)) < \varepsilon$,

定理 1.2.13 设 T 是从距离空间 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射, T 在x_0 点是连续的当且仅当 对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{1.2.8}$$

说明: 若 T 连续, 则极限运算可以和 T 交换顺序.

证明 “$\Longrightarrow$” 假设 T 是连续的, 且 $\lim x_n = x_0$. **要证明**

$$\lim T(x_n) = T(\lim x_n) = T(x_0)$$

.

由 T 连续, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x,x_0) < \delta$ 时, 有

$$d_1(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$$

.

因为 $\lim x_n = x_0$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时 $d(x_n,x_0) < \delta$,

于是 $\quad d_1(T(x_n),T(x_0)) < \varepsilon$,

即 $\lim T(x_n) = T(x_0) = T(\lim x_n)$.

“$\Longleftarrow$” 若由 $x_n \to x_0(n \to \infty)$ 可推出 $T(x_n) \to T(x_0)$.

"$\Longleftarrow$" **若由 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 可推出 $T(x_n) \to T(x_0)$.**

要证明 T 在 x_0 点连续.

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

“$\Longleftarrow$” 若由 $x_n \to x_0(n\to\infty)$ 可推出 $T(x_n)\to T(x_0)$.

要证明 T 在 x_0 点连续.

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对于任何的 $\delta>0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta,x_0)<\delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta),T(x_0))\geq\varepsilon_0$$

.

取 $\delta=1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$, 对应的有 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$, 满足 $d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$,

"$\Longleftarrow$" 若由 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 可推出 $T(x_n) \to T(x_0)$.

要证明 T 在 x_0 点连续.

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, **对应的有** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $$d_1(T(x_n), T(x_0) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

“$\Longleftarrow$” **若由** $x_n \to x_0 (n\to\infty)$ **可推出** $T(x_n)\to T(x_0)$.

要证明 T **在** x_0 **点连续.**

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对于任何的 $\delta>0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0)<\delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, **对应的有** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $\quad d_1(T(x_n), T(x_0) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$

即 $x_n \to x_0(n\to\infty)$, 但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$,

"$\Longleftarrow$" 若由 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 可推出 $T(x_n) \to T(x_0)$.

要证明 T 在 x_0 点连续.

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, 对应的有 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $\quad d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$

即 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$,

这与条件矛盾. $\square$

"$\Longleftarrow$" **若由** $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ **可推出** $T(x_n) \to T(x_0)$.

要证明 T 在 x_0 点连续.

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, **对应的有** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $\quad d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

即 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$,

这与条件矛盾. $\square$

例 1.2.14 设 $X = C[a, b]$, 令$T(x) = \int_a^b x(t)\,dt$,

“$\Longleftarrow$” **若由** $x_n \to x_0(n \to \infty)$ **可推出** $T(x_n) \to T(x_0)$.

要证明 T **在** x_0 **点连续.**

反证法. 假若不然， T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, **对应的有** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $\quad d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

即 $x_n \to x_0(n \to \infty)$, 但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$,

这与条件矛盾. □

例 1.2.14 设 $X = C[a, b]$, 令$T(x) = \int_a^b x(t)\,dt$,

则 T *是从* $C[a, b]$ *到* $\mathbb{R}$ *的映射. 由于*

"$\Longleftarrow$" **若由** $x_n \to x_0(n \to \infty)$ **可推出** $T(x_n) \to T(x_0)$.

要证明 T **在** x_0 **点连续.**

反证法. 假若不然, T 在 x_0 点不连续. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任何的 $\delta > 0$, 都存在一个 x_δ, 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$, 但是

$$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$$

.

取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, **对应的有** $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$,

但是 $\quad d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$

即 $x_n \to x_0(n \to \infty)$, 但是 $T(x_n)$ 不趋近于$T(x_0)$,

这与条件矛盾. $\square$

例 1.2.14 设 $X = C[a, b]$, 令$T(x) = \int_a^b x(t)\,dt$,

则 T 是从 $C[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 由于

$$\left| \int_a^b x(t)\,dt - \int_a^b y(t)\,dt \right| \leq \int_a^b | x(t) - y(t) |\, dt \leq | b - a |\, d(x, y),$$

所以 T **是连续的**.

所以 T **是连续的**.

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列,

所以 T **是连续的**.

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列,

由定理 1.2.13有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

所以 T **是连续的**.

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列,

由定理 1.2.13有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)=\int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

另一方面**注意到** $\{x_n(t)\}$ **在** $C[a,b]$ **的收敛是一致收敛**,

所以 T **是连续的**.

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列,

由定理 1.2.13有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

另一方面**注意到** $\{x_n(t)\}$ **在** $C[a,b]$ **的收敛是一致收敛,**

即当 $\{x_n(t)\}$ **一致收敛时, 积分和极限可以交换顺序.**

所以 T **是连续的**.

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$中的收敛序列,

由定理 1.2.13有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)=\int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

另一方面**注意到** $\{x_n(t)\}$ **在** $C[a,b]$ **的收敛是一致收敛,**

即当 $\{x_n(t)\}$ **一致收敛时, 积分和极限可以交换顺序.**

这是数学分析中熟知的结论. $\square$