内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§3 闭集 可分性 列紧性

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 X *是距离空间, 一个集合* $A \subset X$ *称为是**闭的**,*

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容: 闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 X *是距离空间*, 一个集合 $A \subset X$ *称为是* ***闭的***, *若它的补集* $A^c = X \setminus A$ *是开的.*

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 *X 是距离空间, 一个集合 $A \subset X$ 称为是**闭的**, 若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开的.*

定理 1.3.2 *X 是一个距离空间,*

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 X *是距离空间, 一个集合* $A \subset X$ *称为是* ***闭的***, *若它的补集* $A^c = X \setminus A$ *是开的.*

定理 1.3.2 X *是一个距离空间,*

则 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ *和* $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ *是闭集.*

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 X *是距离空间, 一个集合* $A \subset X$ *称为是**闭的**,*
若它的补集 $A^c = X \setminus A$ *是开的.*

定理 1.3.2 X *是一个距离空间,*
则 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \le r\}$ *和* $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ *是闭集.*

分析: **根据闭集的定义, 只要证明它们的补集是开集即可, 用开集的定义来证明.**

证明 (1) **设** $y \in \overline{B}(x_0, r)^c$, 则 $d(y, x_0) = \alpha > r$.

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 *X 是距离空间, 一个集合 $A \subset X$ 称为是**闭的**, 若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开的.*

定理 1.3.2 *X 是一个距离空间, 则 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \le r\}$ 和 $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ 是闭集.*

分析: **根据闭集的定义, 只要证明它们的补集是开集即可, 用开集的定义来证明.**

证明 (1) **设** $y \in \overline{B}(x_0, r)^c$, 则 $d(y, x_0) = \alpha > r$.

令 $\beta = \alpha - r > 0$, 对于 $\forall z \in B(y, \beta)$, 有

§3 闭集 可分性 列紧性

一、距离空间的闭集

内容：闭集的定义及性质.

(1) 利用开集研究闭集;

(2) 从点集结构上研究闭集.

定义 1.3.1 X 是距离空间, 一个集合 $A \subset X$ 称为是***闭的***, 若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开的.

定理 1.3.2 X 是一个距离空间, 则 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ 和 $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ 是闭集.

分析: **根据闭集的定义, 只要证明它们的补集是开集即可, 用开集的定义来证明.**

证明 (1) **设** $y \in \overline{B}(x_0, r)^c$, 则 $d(y, x_0) = \alpha > r$.

令 $\beta = \alpha - r > 0$, 对于 $\forall z \in B(y, \beta)$, 有

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

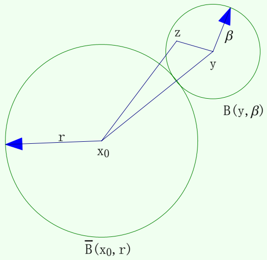


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

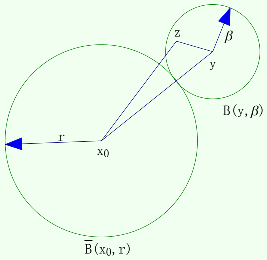


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

(见图1.3.1). 故 $B(y, \beta) \subset \overline{B}(x_0, r)^c$. 即 $\overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的,

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

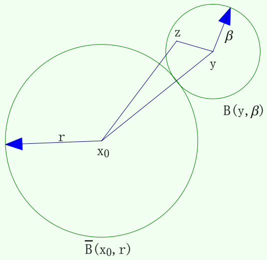


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

(见图1.3.1). 故 $B(y, \beta) \subset \overline{B}(x_0, r)^c$. 即 $\overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的, 于是 $\overline{B}(x_0, r)$ 是闭集.

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

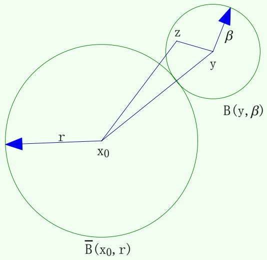


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

(见图1.3.1). 故 $B(y, \beta) \subset \overline{B}(x_0, r)^c$. 即 $\overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的, 于是 $\overline{B}(x_0, r)$ 是闭集.

(2) 由$S(x_0, r)^c = B(x_0, r) \cup \overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的(**据任意多个开集的并集是开集**),

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

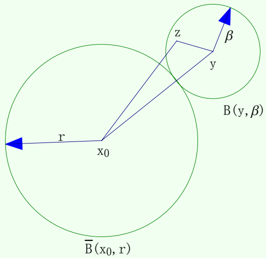


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

(见图1.3.1). 故 $B(y, \beta) \subset \overline{B}(x_0, r)^c$. 即 $\overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的,
于是 $\overline{B}(x_0, r)$ 是闭集.
(2) 由$S(x_0, r)^c = B(x_0, r) \cup \overline{B}(x_0, r)^c$ 是开的(据任意多个开集的并集是开集),
因此 $S(x_0, r)$ 是闭集. □
记 $\mathcal{F}$ 为距离空间 (X, d) 中全体闭集.

$$d(x_0,z) \geq d(y,x_0) - d(y,z) = \alpha - d(y,z) > \alpha - \beta = r.$$

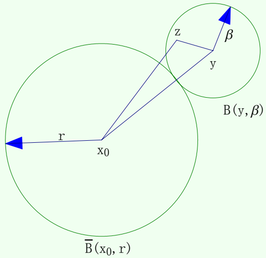


Figure 1.3.1: 开集的补集是闭集

(见图1.3.1). 故 $B(y,\beta) \subset \overline{B}(x_0,r)^c$. 即 $\overline{B}(x_0,r)^c$ 是开的,

于是 $\overline{B}(x_0,r)$ 是闭集.

(2) 由$S(x_0,r)^c = B(x_0,r) \cup \overline{B}(x_0,r)^c$ 是开的(**据任意多个开集的并集是开集**),

因此 $S(x_0,r)$ 是闭集. □

记 $\mathcal{F}$ 为距离空间 (X,d) 中全体闭集.

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

定理 1.3.3 设 (X,d) *是距离空间, 则*

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

定理 1.3.3 设 (X, d) *是距离空间, 则*

(1)全空间与空集是闭集,

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

定理 1.3.3 设 (X,d) *是距离空间, 则*

(1)全空间与空集是闭集,

(2)任意多个闭集的交是闭集,

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

定理 1.3.3 设 (X, d) *是距离空间, 则*

(1)全空间与空集是闭集,

(2)任意多个闭集的 交是闭集,

(3)有限多个闭集的 并是闭集.

利用关于补集的 De Morgan 公式, 结合定理1.2.8(**开集的性质, 决定空间拓扑结构的三条性质**), 得

定理 1.3.3 设 (X, d) *是距离空间, 则*

(1)全空间与空集是闭集,

(2)任意多个闭集的 交是闭集,

(3)有限多个闭集的 并是闭集.

请读者自己证明

二、闭集的结构

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$.*

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, 球 $B(x, \varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x *为* A *的**接触点**.*

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$.*

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, 球 $B(x, \varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

*则称 x 为 A 的**接触点**.*

注 A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x*为* A *的****接触点***.

注 A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

定义 1.3.5 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x *为* A *的* ***接触点***.

注 A 中的点一定是 A 的接触点, A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

定义 1.3.5 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中不同于* x *的点, 即*

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x*为* A *的**接触点***.

注 A 中的点一定是 A 的接触点, A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

定义 1.3.5 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中不同于* x *的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.2}$$

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x *为* A *的**接触点**.*

注 A 中的点一定是 A 的接触点, A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

定义 1.3.5 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.

如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中不同于* x *的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.2}$$

则称 x *为* A *的**聚点**.*

二、闭集的结构

闭集的结构相对比较复杂, 这从 Cantor 集是闭集可以反映出来. 下面从点集的结构上进一步研究闭集.

定义 1.3.4 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.1}$$

则称 x *为* A *的**接触点***.

注 A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A.

定义 1.3.5 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, $x \in X$.
如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, *球* $B(x, \varepsilon)$ *中都包含* A *中不同于* x *的点, 即*

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{1.3.2}$$

则称 x *为* A *的**聚点***.

注 聚点一定是接触点, 反过来不一定.

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组, 定义

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组, 定义

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

例 1.3.6 设 $X(n)$ *为全体由* 0 *和* 1 *组成的* n *维有序数组, 定义*

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集,

例 1.3.6 设 $X(n)$ *为全体由* 0 *和* 1 *组成的* n *维有序数组, 定义*

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集, 由 $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.6 设 $X(n)$ *为全体由* 0 *和* 1 *组成的* n *维有序数组, 定义*

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集, 由 $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.7 设 $X = C[0,T]$, $A = \{x(t)|x(0) = 0,$ *且* $|\, x(t)\,| < 1(0 \le t \le T)\}$ *(见图1.3.2),*

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组, 定义

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集, 由 $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.7 设 $X = C[0,T]$, $A = \{x(t)|x(0) = 0, \text{且} \mid x(t) \mid < 1(0 \le t \le T)\}$ (见图1.3.2),

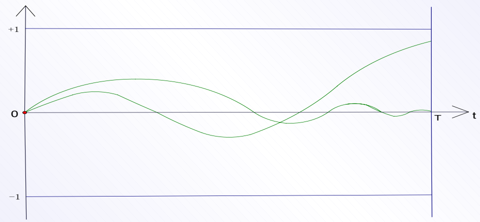


Figure 1.3.2: 聚点

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组, 定义

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集, 由 $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.7 设 $X = C[0,T]$, $A = \{x(t)|x(0)=0, \text{且} \mid x(t) \mid < 1(0 \le t \le T)\}$ (见图1.3.2),

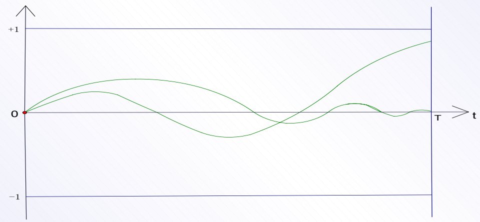


Figure 1.3.2: 聚点

我们注意到 $x_0(t) \equiv 1$ 不是 A 的接触点.

例 1.3.6 设 $X(n)$ 为全体由 0 和 1 组成的 n 维有序数组, 定义

$$d(x,y) = x\text{和}y\text{中取值不同的个数}.$$

可以验证设 $X(n)$ 是一个距离空间. A 是距离空间 (X,d) 中的任意点集, 由 $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, 因此 A 的每个接触点都在 A 中.

例 1.3.7 设 $X = C[0,T]$, $A = \{x(t)|x(0) = 0,\text{且} \mid x(t) \mid < 1(0 \leq t \leq T)\}$ (见图1.3.2),

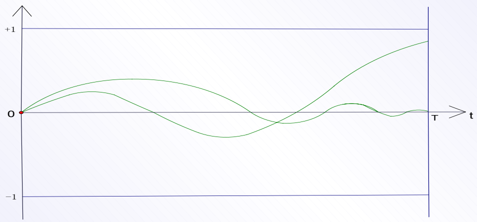


Figure 1.3.2: 聚点

我们注意到 $x_0(t) \equiv 1$ 不是 A 的接触点.

因为对于所有的 $x \in A$, $d(x_0,x) \geq 1$.

例 1.3.8 X *表由* $[0,T]$ *上全体连续函数组成的集合, 距离*

例 1.3.8 X 表由 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的集合, 距离

$$d_2(x,y) = \{\int_0^T \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2},$$

例 1.3.8 X 表由 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的集合, 距离

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

例 1.3.8 X *表由* $[0,T]$ *上全体连续函数组成的集合, 距离*

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

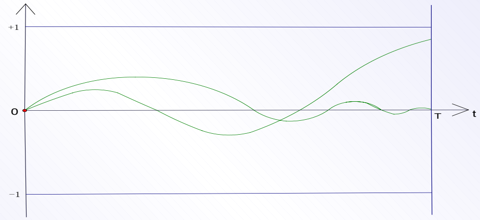
$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid < 1(0\leq t\leq T)\}$ (见图1.3.2),

例 1.3.8 X 表由 $[0, T]$ 上全体连续函数组成的集合, 距离

$$d_2(x, y) = \{\int_0^T \mid x(t) - y(t) \mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A = \{x(t) | x(0) = 0,$ 且 $\mid x(t) \mid < 1 (0 \leq t \leq T)\}$ (见图1.3.2),

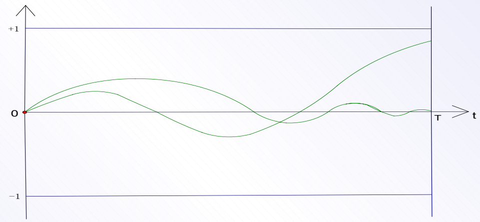


例 1.3.8 X *表由* $[0,T]$ *上全体连续函数组成的集合, 距离*

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid< 1(0\le t\le T)\}$ (见图1.3.2),



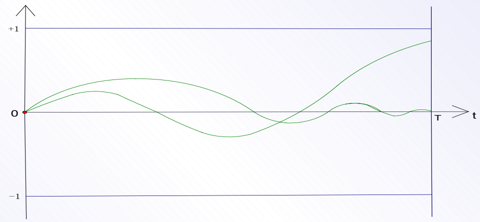
则可以证明 $x_0\equiv 1$ 是 A 的接触点.

例 1.3.8 X *表由* $[0,T]$ *上全体连续函数组成的集合, 距离*

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid<1(0\leq t\leq T)\}$ (见图1.3.2),



则可以证明 $x_0\equiv 1$ 是 A 的接触点.

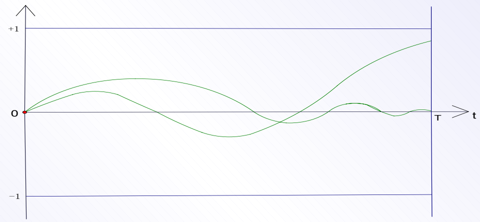
如果对于 $\forall\varepsilon>0$, 球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

例 1.3.8 X *表由* $[0,T]$ *上全体连续函数组成的集合, 距离*

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid<1(0\le t\le T)\}$ (见图1.3.2),



则可以证明 $x_0\equiv 1$ 是 A 的接触点.

如果对于 $\forall\varepsilon>0$, 球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

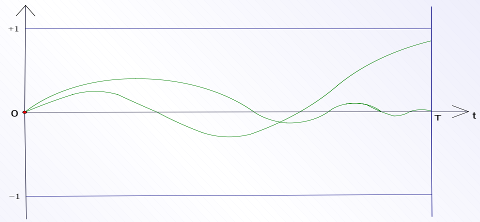
$$B(x,\varepsilon)\cap A\ne\emptyset\quad(\forall\varepsilon>0),$$

例 1.3.8 X 表由 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的集合, 距离

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T \mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid<1(0\le t\le T)\}$ (见图1.3.2),



则可以证明 $x_0\equiv 1$ 是 A 的接触点.

如果对于 $\forall\varepsilon>0$, 球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

$$B(x,\varepsilon)\cap A\ne\emptyset\quad(\forall\varepsilon>0),$$

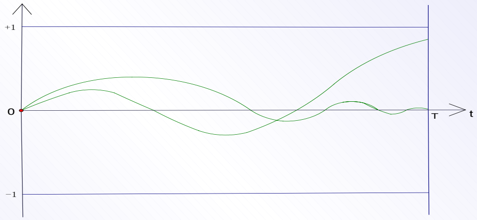
则称 x为 A 的接触点

例 1.3.8 X 表由 $[0,T]$ 上全体连续函数组成的集合, 距离

$$d_2(x,y)=\{\int_0^T\mid x(t)-y(t)\mid^2 dt\}^{1/2},$$

A 如同上例所定义,

$A=\{x(t)|x(0)=0,$ 且 $\mid x(t)\mid<1(0\leq t\leq T)\}$ (见图1.3.2),



则可以证明 $x_0\equiv 1$ 是 A 的接触点.

如果对于 $\forall\varepsilon>0$, 球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中的点, 即

$$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\quad(\forall\varepsilon>0),$$

则称 x为 A 的接触点

注 上面的两个例子说明一个点是否是一个集合的接触点和 空间的距离有关.

用接触点来定义闭集.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包**, 记为* $\overline{A}$.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, A 的接触点的全体称为 A 的**闭包**, 记为 $\overline{A}$.*

注: $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点, $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设X 是距离空间, $A \subset X$, A 是闭集 当且仅当 $A = \overline{A}$.*

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注：$\because A$ 中的点一定是 A 的接触点，$A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设* X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 "$\Longleftarrow$" "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集". 只要证明 A^c 是开的.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注：$\because A$ 中的点一定是 A 的接触点，$A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 " $\Longleftarrow$ " "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集". 只要证明 A^c 是开的.
令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注： $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点， $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 " $\Longleftarrow$ " "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集" . 只要证明 A^c 是开的.

令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的* ***闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注：$\because A$ 中的点一定是 A 的接触点，$A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 ” $\Longleftarrow$ ” “ 由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集” . 只要证明 A^c 是开的.
令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.
$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,
$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, A 的接触点的全体称为 A 的***闭包***, 记为 $\overline{A}$.*

注: $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点, $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设 X 是距离空间, $A \subset X$, A 是闭集 当且仅当 $A = \overline{A}$.*

证明 " $\Longleftarrow$ " "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集". 只要证明 A^c 是开的.

令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,

$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.

" $\Longrightarrow$ " "A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$".

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, A 的接触点的全体称为 A 的**闭包**, 记为 $\overline{A}$.*

注：$\because A$ 中的点一定是 A 的接触点，$A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设X 是距离空间, $A \subset X$, A 是闭集 当且仅当 $A = \overline{A}$.*

证明 ” $\Longleftarrow$ ” “ 由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集” . 只要证明 A^c 是开的.
令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.
$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,
$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.
” $\Longrightarrow$ ” “A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$” .
由于 $A \subset \overline{A}$, 只需证明 $\overline{A} \subset A$.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注: $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点, $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 "$\Longleftarrow$" "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集". 只要证明 A^c 是开的.
令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.
$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,
$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.
"$\Longrightarrow$" "A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$".
由于 $A \subset \overline{A}$, 只需证明 $\overline{A} \subset A$.
令 $x \in \overline{A}$, 假若 $x \overline{\in} A$, 即 x 属于开集 A^c(这是由于 A 是闭集),

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注： $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点， $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 "$\Longleftarrow$" "**由** $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ **是闭集**". **只要证明** A^c **是开的.**

令 $x \in A^c$, **由** $A = \overline{A}$, **因此** x **不是** A **的接触点.**

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,

$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.

"$\Longrightarrow$" "**A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$**".

由于 $A \subset \overline{A}$, **只需证明** $\overline{A} \subset A$.

令 $x \in \overline{A}$, **假若** $x \overline{\in} A$, 即 x 属于**开集** A^c(**这是由于** A **是闭集**),

于是存在 $\varepsilon_0 > 0, B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, 这和 $x \in \overline{A}$ 矛盾. $\square$

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 *X 是一个距离空间, $A \subset X$, A 的接触点的全体称为 A 的**闭包**, 记为 $\overline{A}$.*

注: $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点, $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设X 是距离空间, $A \subset X$, A 是闭集 当且仅当 $A = \overline{A}$.*

证明 "$\Longleftarrow$" "由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集". 只要证明 A^c 是开的.

令 $x \in A^c$, 由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,

$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.

"$\Longrightarrow$" "A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$".

由于 $A \subset \overline{A}$, 只需证明 $\overline{A} \subset A$.

令 $x \in \overline{A}$, 假若 $x \overline{\in} A$, 即 x 属于开集 A^c(这是由于 A 是闭集),

于是存在 $\varepsilon_0 > 0, B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, 这和 $x \in \overline{A}$ 矛盾. $\square$

注意: 证明过程中用到了接触点、开集、闭集、闭包的定义.

用接触点来定义闭集.

定义 1.3.9 X *是一个距离空间*, $A \subset X$, A *的接触点的全体称为* A *的**闭包***, *记为* $\overline{A}$.

注： $\because A$ 中的点一定是 A 的接触点， $A \subset \overline{A}$.

定理 1.3.10 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$, A *是闭集 当且仅当* $A = \overline{A}$.

证明 " $\Longleftarrow$ " **" 由 $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ 是闭集"** . **只要证明 A^c 是开的.**
令 $x \in A^c$, **由 $A = \overline{A}$, 因此 x 不是 A 的接触点.**
$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$,
$\therefore B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开的, 即 A是闭集.
" $\Longrightarrow$ " **"A 是闭集 $\Longrightarrow A = \overline{A}$"** .
由于 $A \subset \overline{A}$, **只需证明** $\overline{A} \subset A$.
令 $x \in \overline{A}$, **假若** $x \overline{\in} A$, 即 x 属于开集 A^c(**这是由于 A 是闭集**),
于是存在 $\varepsilon_0 > 0, B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, 这和 $x \in \overline{A}$ 矛盾. □

注意： **证明过程中用到了接触点、开集、闭集、闭包的定义.**

定理 1.3.11 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$,

定理 1.3.11 设X 是距离空间, $A \subset X$,
A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\} \subset A$ 的极限属于 A.

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 “$\Longrightarrow$” 设 A 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0 \in A$.

定理 1.3.11 *设*X *是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" **设** A **是闭的**, **且** $\{x_n\} \subset A$ **收敛**, $\lim x_n = x_0$, **要证明** $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" **设 A 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0 \in A$.**

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 **是 A 的接触点**.

定理 1.3.11 *设* X *是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" **设** A **是闭的**, **且** $\{x_n\} \subset A$ **收敛**, $\lim x_n = x_0$, **要证明** $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 **是** A **的接触点**.
$\therefore x_0 \in \overline{A}$.

定理 1.3.11 *设* X *是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" **设** A **是闭的**, **且** $\{x_n\} \subset A$ **收敛**, $\lim x_n = x_0$, **要证明** $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 **是** A **的接触点**.
$\therefore x_0 \in \overline{A}$.

由 A **是闭集**, 即： $A = \overline{A}$, 所以 $x_0 \in A$.

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" 设 A 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 **是 A 的接触点**.
$\therefore x_0 \in \overline{A}$.
由 A **是闭集**, 即： $A = \overline{A}$, 所以 $x_0 \in A$.
"$\Longleftarrow$" 假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.

定理 1.3.11 设X 是距离空间, $A \subset X$,
A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\} \subset A$ 的极限属于 A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" 设 A 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, 可知: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 是 A 的接触点.
$\therefore x_0 \in \overline{A}$.
由 A 是闭集, 即： $A = \overline{A}$, 所以 $x_0 \in A$.

"$\Longleftarrow$" 假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.

根据定理1.3.10, 只要证明 $A = \overline{A}$, 即由 $x_0 \in \overline{A}$ 推出 $x_0 \in A$.

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" 设 A 是闭的, 且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, 可知: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 是 A 的接触点.

$\therefore x_0 \in \overline{A}$.

由 A 是闭集, 即： $A = \overline{A}$, 所以 $x_0 \in A$.

"$\Longleftarrow$" 假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.

根据定理1.3.10, 只要证明 $A = \overline{A}$, 即由 $x_0 \in \overline{A}$ 推出 $x_0 \in A$.

令 $x_0 \in \overline{A}$, 根据闭包的定义, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 在 $B(x_0, 1/n) \cap A$ 中至少存在一点 x_n.

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A\subset X$,

A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\}\subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" 设 A 是闭的, 且 $\{x_n\}\subset A$ 收敛, $\lim x_n=x_0$, 要证明 $x_0\in A$.

由 $x_0=\lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall\varepsilon>0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n,x_0)<\varepsilon$,

即 $x_n\in B(x_0,\varepsilon)$. 这表明 x_0 **是** A **的接触点**.

$\therefore x_0\in\overline{A}$.

由 A **是闭集**, 即： $A=\overline{A}$, 所以 $x_0\in A$.

"$\Longleftarrow$" 假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.

根据定理1.3.10, 只要证明 $A=\overline{A}$, 即由 $x_0\in\overline{A}$ 推出 $x_0\in A$.

令 $x_0\in\overline{A}$, **根据闭包的定义**, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 在 $B(x_0,1/n)\cap A$ 中至少存在一点 x_n.

显然 $\lim x_n=x_0$,

定理 1.3.11 *设X 是距离空间*, $A \subset X$,
A *是闭集当且仅当* A *中收敛点列* $\{x_n\} \subset A$ *的极限属于* A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" 设 A 是闭的，且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛，$\lim x_n = x_0$，要证明 $x_0 \in A$.

由 $x_0 = \lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$,
即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$. 这表明 x_0 **是** A **的接触点**.
$\therefore x_0 \in \overline{A}$.
由 A **是闭集**, 即： $A = \overline{A}$, 所以 $x_0 \in A$.

"$\Longleftarrow$" 假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.

根据定理1.3.10, 只要证明 $A = \overline{A}$, 即由 $x_0 \in \overline{A}$ 推出 $x_0 \in A$.

令 $x_0 \in \overline{A}$, **根据闭包的定义**, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 在 $B(x_0, 1/n) \cap A$ 中至少存在一点 x_n.
显然 $\lim x_n = x_0$,
由已知, 得 $x_0 \in A$.

定理 1.3.11 *设X 是距离空间, $A\subset X$,*
A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\}\subset A$ 的极限属于 A.

注 闭集可以的理解为：在闭集里极限运算是封闭的。

证明 "$\Longrightarrow$" **设 A 是闭的, 且 $\{x_n\}\subset A$ 收敛, $\lim x_n = x_0$, 要证明 $x_0\in A$.**

由 $x_0=\lim x_n$, **可知:** 对于 $\forall\varepsilon>0$, 都有 x_n （n 充分大）满足 $d(x_n,x_0)<\varepsilon$,
即 $x_n\in B(x_0,\varepsilon)$. 这表明 x_0 **是 A 的接触点**.
$\therefore x_0\in\overline{A}$.
由 A 是闭集, 即: $A=\overline{A}$, 所以 $x_0\in A$.

"$\Longleftarrow$" **假定每个收敛点列的极限都属于 A, 要证 A 是闭集.**

根据定理1.3.10, 只要证明 $A=\overline{A}$, 即由 $x_0\in\overline{A}$ 推出 $x_0\in A$.

令 $x_0\in\overline{A}$, **根据闭包的定义**, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 在 $B(x_0,1/n)\cap A$ 中至少存在一点 x_n.
显然 $\lim x_n=x_0$,
由已知, 得 $x_0\in A$.
即 A 包括了 A 的所有接触点, 因此 A 是闭的. $\square$

定义 1.3.12 *(点到集合的距离)* 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$.

定义 1.3.12 *(点到集合的距离)* 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$. 称

$$d(x, A) = \inf \{d(x, \omega) | \omega \in A\} \tag{1.3.3}$$

定义 1.3.12 *(点到集合的距离)* 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$. 称

$$d(x, A) = \inf \{d(x, \omega) | \omega \in A\} \tag{1.3.3}$$

为点 x 到 集合 A 的距离.

定义 1.3.12 *(点到集合的距离)* 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$. 称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) | \omega \in A\} \tag{1.3.3}$$

为点 x 到 集合 A 的距离.

注 由定理1.3.10、1.3.11 可以证明

$$\overline{A} = \{x | d(x, A) = 0\} \tag{1.3.4}$$

定义 1.3.12 *(点到集合的距离)* 设 X 是一个距离空间, $A \subset X$, $x \in X$. 称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) | \omega \in A\} \tag{1.3.3}$$

为点 x 到 集合 A 的距离.

注 由定理1.3.10、1.3.11 可以证明

$$\overline{A} = \{x | d(x, A) = 0\} \tag{1.3.4}$$

且 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.（留做习题）

三、可分的距离空间

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，

任何一个实数都可以用有理数列来逼近.

我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* 设 A, B 是距离空间 X 中的点集,

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,
如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述：

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述：
$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $y \in B$, 使 得 $d(x, y) < \varepsilon$.

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述:
$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $y \in B$, 使 得 $d(x, y) < \varepsilon$.
即 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近.

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的，有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集，如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述：
$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $y \in B$, 使 得 $d(x, y) < \varepsilon$.
即 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近.
注意：定义并没有要求 $B \subset A$.

例 1.3.14 *$A = [0, 1]$, B 是 $[0, 1]$ 中全体有理数.*

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.

重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集,*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述：
$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $y \in B$, 使 得 $d(x, y) < \varepsilon$.
即 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近.
注意：定义并没有要求 $B \subset A$.

例 1.3.14 *$A = [0, 1]$, B 是 $[0, 1]$ 中全体有理数.*
$\overline{B} = [0, 1]$, $\overline{B} \supset A$.

三、可分的距离空间

实数空间中，有理数是稠密的， 有理数是可数的，
任何一个实数都可以用有理数列来逼近.
我们希望把这样的性质“类比”的推广到一般的空间中.
重点：稠密集，由其定义可分距离空间；判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.3.13 *(稠密集)* *设 A, B 是距离空间 X 中的点集，*
*如果 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.*

$\varepsilon - \delta$ 语言描述：
$\forall x \in A$及$\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $y \in B$, 使 得 $d(x, y) < \varepsilon$.
即 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近.
注意：定义并没有要求 $B \subset A$.

例 1.3.14 *$A = [0, 1]$, B 是 $[0, 1]$ 中全体有理数.*
$\overline{B} = [0, 1]$, $\overline{B} \supset A$.
所以 B 在 A 中稠密, 这里 $B \subset A$ 且 $B \neq A$.

例 1.3.15 *如果* A *是* $[0,1]$ *中全体无理数*, B *是* $[0,1]$ *中的全体有理数*,

例 1.3.15 *如果* A *是* $[0,1]$ *中全体无理数*, B *是* $[0,1]$ *中的全体有理数*, *我们有* $\overline{B} \supset A$,

例 1.3.15 *如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 我们有 $\overline{B} \supset A$, 即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.*

例 1.3.15 如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间)* 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.

例 1.3.15 如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间)* 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.
对于子集 $A \subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

例 1.3.15 *如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数,*
我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间) 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.*
对于子集 $A \subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

由定义有:

例 1.3.15 *如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 我们有 $\overline{B}\supset A$,*
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B\cap A=\emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间) 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.*
对于子集 $A\subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

由定义有:

命题 1.3.17 *距离空间 (X,d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$:*

例 1.3.15 *如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数,
我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.*

定义 1.3.16 *(可分距离空间)* 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.
对于子集 $A \subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

由定义有:

命题 1.3.17 *距离空间 (X,d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$:
对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x \in X$, 至少存在一个 x_n, 使得 $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

例 1.3.15 如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间)* 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.
对于子集 $A \subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

由定义有:

命题 1.3.17 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$:
对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x \in X$, 至少存在一个 x_n, 使得 $d(x_n, x) < \varepsilon$.

注 上述表明可分距离空间中的任意一点可通过一个可数集来近似逼近.

例 1.3.15 如果 A 是 $[0,1]$ 中全体无理数, B 是 $[0,1]$ 中的全体有理数,
我们有 $\overline{B} \supset A$,
即 B 在 A 中稠密, 但是 $B \cap A = \emptyset$.

定义 1.3.16 *(可分距离空间)* 设 X 是距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密子集, 则称 X是可分的.
对于子集 $A \subset X$, 如果X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

由定义有:

命题 1.3.17 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$:
对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x \in X$, 至少存在一个 x_n, 使得 $d(x_n, x) < \varepsilon$.

注 上述表明可分距离空间中的任意一点可通过一个可数集来近似逼近.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ 是可分的.

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$是可分的.

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集，且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近, 多项式用有理多项式来逼近,

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: **只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.**

由命题1.3.17, **找到的** $\{x_n(t)\}$ **应满足**:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ **和** $\forall \varepsilon > 0$, **至少存在一个** $x_n(t)$, **使得**

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: **连续函数用多项式来逼近**, **多项式用有理多项式来逼近**,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近, 多项式用有理多项式来逼近,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

证明 (1) **由 Weierstrass 定理, 对于** $\forall x(t) \in C[a,b]$,

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ 是可分的.

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$是可分的.

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近, 多项式用有理多项式来逼近,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

证明 (1) 由 Weierstrass 定理, 对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$,

存在多项式 $P_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集， 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t)\in C[a,b]$ 和 $\forall\varepsilon>0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n,x)<\varepsilon\ (\forall t\in[a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近， 多项式用有理多项式来逼近,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

证明 (1) **由 Weierstrass 定理, 对于** $\forall x(t)\in C[a,b]$,

存在多项式 $P_n(t)$ **一致收敛到** $x(t)$.

即对于 $\forall x(t)\in C[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists P_n(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$.

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ *是可分的.*

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$*是可分的.*

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近, 多项式用有理多项式来逼近,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

证明 (1) 由 Weierstrass 定理, 对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$,

存在多项式 $P_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

即对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.

其中 $a_i \in R (i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

例 1.3.18 $\mathbb{R}^n$ 是可分的.

$\mathbb{R}^n$ 中的有理点(各个坐标都是有理数)是可数集，且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

例 1.3.19 $C[a,b]$是可分的.

分析: 只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可.

由命题1.3.17, 找到的 $\{x_n(t)\}$ 应满足:

对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个 $x_n(t)$, 使得

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ (\forall t \in [a,b])$$

.

证明思路: 连续函数用多项式来逼近，多项式用有理多项式来逼近,

全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $C[a,b]$ 可分.

证明 (1) **由 Weierstrass 定理, 对于** $\forall x(t) \in C[a,b]$,

存在多项式 $P_n(t)$ **一致收敛到** $x(t)$.

即对于 $\forall x(t) \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$.

其中 $a_i \in R(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$| P_n(t) - x_n(t) | < \varepsilon \quad (\forall t \in [a,b]).$$

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. □

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. □

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^\infty$, $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid$.

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$, 其中 $r_0,\cdots,r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}\in l^\infty$, $d(x,y)=\sup_k\mid\xi_k-\eta_k\mid$.

d **是** l^∞ **上的一个距离.**

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$, 其中 $r_0,\cdots,r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. □

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}\in l^\infty$, $d(x,y)=\sup_k\mid\xi_k-\eta_k\mid$.

d **是 l^∞ 上的一个距离**.

(2) 设 $x=\{\xi_k\}$, 其中$\xi_k=0$, 或者是1. 这样的 x 的**全体记为** A.

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$, 其中 $r_0,\cdots,r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 l^∞ *是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}\in l^\infty$, $d(x,y)=\sup_k\mid\xi_k-\eta_k\mid$.

d **是** l^∞ **上的一个距离**.

(2) 设 $x=\{\xi_k\}$, 其中$\xi_k=0$, 或者是1. 这样的 x 的**全体记为** A.

显然 A **的势是连续统** (二进位制小数对应 $[0,1]$ 上的全体实数).

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^\infty$, $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid$.

d **是** l^∞ **上的一个距离**.

(2) 设 $x = \{\xi_k\}$, 其中$\xi_k = 0$, 或者是1. 这样的 x 的**全体记为** A.

显然 A **的势是连续统** (二进位制小数对应 $[0,1]$ 上的全体实数).

$\forall x, y \in A$, $x \neq y$, **则** $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid = 1$.

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^\infty$, $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid$.

d **是 l^∞ 上的一个距离**.

(2) 设 $x = \{\xi_k\}$, 其中$\xi_k = 0$, 或者是1. 这样的 x 的**全体记为** A.

显然 A **的势是连续统** (二进位制小数对应 $[0,1]$ 上的全体实数).

$\forall x, y \in A$, $x \neq y$, **则** $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid = 1$.

(3) 假若l^∞ 可分, 则存在可数的稠密子集 E,

(2) 而 $P_n(t)$又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近,

这里 $P_n^r(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$, 其中 $r_0, \cdots, r_n$ 是有理数.

$\because \{P_n^r(t)\}$ 是可数的, $\therefore C[a,b]$是可分的. $\square$

例 1.3.20 *l^∞ 是不可分的.*

分析: **用反证法来证明.**

证明:(1) l^∞={全体有界的实数列}.

$x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^\infty$, $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid$.

d **是** l^∞ **上的一个距离**.

(2) 设 $x = \{\xi_k\}$, 其中$\xi_k = 0$, 或者是1. 这样的 x 的**全体记为** A.

显然 A **的势是连续统** (二进位制小数对应 $[0,1]$ 上的全体实数).

$\forall x, y \in A$, $x \neq y$, **则** $d(x,y) = \sup_k \mid \xi_k - \eta_k \mid = 1$.

(3) 假若l^∞ 可分, 则存在可数的稠密子集 E,

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^{\infty} \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^{\infty} \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$,
于是 $A \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,

于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,

于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得

$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,
于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,
所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得
$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.
这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. $\square$ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$,

于是 $A \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得

$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.

这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. $\square$ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,
于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,
所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得
$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.
这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. □ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

分析: s 是全体实数列组成的集合, 其上距离:

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$,

于是 $A \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得

$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.

这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. □ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

分析: s 是全体实数列组成的集合, 其上距离:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,
于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,
所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得
$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.
这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. $\square$ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

分析: s **是全体实数列组成的集合, 其上距离:**

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

要找出 s 中的可数稠密子集.

对于 $\forall x\in E$, 作开球 $B(x,\frac{1}{3})$, 则 $l^\infty\subset\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{1}{3})$,

于是 $A\subset\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,

所以至少存在两个不同的元素 $x,y\in A$, 使得

$x,y\in B(x_0,\frac{1}{3})$, 这里 $x_0\in E$.

这与 $d(x,y)=1$ 矛盾, 故不可分. □ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

分析: s 是全体实数列组成的集合, 其上距离:

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

要找出 s 中的可数稠密子集.

证明 (1) 令 $s_0=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\}$, 其中 $r_k(k=1,2,\cdots)$ 是有理数,

对于 $\forall x \in E$, 作开球 $B(x, \frac{1}{3})$, 则 $l^\infty \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$,
于是 $A \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{3})$. 由于 A 是不可数集,
所以至少存在两个不同的元素 $x, y \in A$, 使得
$x, y \in B(x_0, \frac{1}{3})$, 这里 $x_0 \in E$.
这与 $d(x, y) = 1$ 矛盾, 故不可分. □ 下面的例子说明, 距离空间是否可分, 与空间上距离的定义密切相关.

例 1.3.21 *空间s 可分.*

分析: s **是全体实数列组成的集合, 其上距离**:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k - \eta_k\ |}{1+ |\ \xi_k - \eta_k\ |}.$$

要找出 s 中的可数稠密子集.

证明 (1) 令 $s_0 = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots)\}$, 其中 $r_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是有理数,
所以 s_0 是可数集.

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

对于每一个 $\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$, 存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$, 其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数. 令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots),$$

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

对于每一个 $\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$, 存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$, 其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数. 令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots),$$

则 $x_n \to x$, 且 $x_n \in s_0$. 所以 s 可分.

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

对于每一个 $\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$, 存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$, 其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数. 令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots),$$

则 $x_n \to x$, 且 $x_n \in s_0$. 所以 s 可分.

注 l^∞ 是全体有界的实数列, 做为集合 l^∞ 是 s 的一个子集合.

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

对于每一个 $\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$, 存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$, 其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数. 令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots),$$

则 $x_n \to x$, 且 $x_n \in s_0$. 所以 s 可分.

注 l^∞ **是全体有界的实数列, 做为集合** l^∞ **是** s **的一个子集合.**

但作为距离空间 l^∞ 不可分, 而 s 可分.

(2)下面证明 s_0 是 s 的稠子集,

由稠密集的定义来证明(命题1.3.17)

对任意的 $x \in S$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$,

由于 s 中的收敛是按坐标收敛,

对于每一个 $\xi_j(j = 1, 2, \cdots)$, 存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j(n \to \infty)$, 其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数. 令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots),$$

则 $x_n \to x$, 且 $x_n \in s_0$. 所以 s 可分.

注 l^∞ 是全体有界的实数列, 做为集合 l^∞ 是 s 的一个子集合.

但作为距离空间 l^∞ 不可分, 而 s 可分.

其原因在于两个距离空间中距离定义的方式不同.

四、列紧的距离空间

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理）,

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理），

完全有界.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理），

完全有界.

下面, 我们主要考虑序列紧（列紧, 自列紧）.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理）,

完全有界.

下面, 我们主要考虑序列紧（列紧, 自列紧）.

在数学分析中, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理我们知道,

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理），

完全有界.

下面, 我们主要考虑序列紧（列紧, 自列紧）.

在数学分析中, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理我们知道,

实数域中每个有界的无穷点集至少有一个聚点,

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理）,

完全有界.

下面, 我们主要考虑序列紧（列紧, 自列紧）.

在数学分析中, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理我们知道,

实数域中每个有界的无穷点集至少有一个聚点,

下面将在一般的距离空间上研究这种性质.

四、列紧的距离空间

在数学分析中，闭区间上的连续函数有着很好的性质.

闭区间满足有限覆盖定理.

进一步的，平面上的有界闭集也有这样的性质.

我们把具有这样性质的集合，抽象为紧集（紧空间）.

紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义：

序列紧(Weierstrass定理),

Borel 紧（有限覆盖定理）,

完全有界.

下面, 我们主要考虑序列紧（列紧, 自列紧）.

在数学分析中, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理我们知道,

实数域中每个有界的无穷点集至少有一个聚点,

下面将在一般的距离空间上研究这种性质.

定义 1.3.22 设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.

定义 1.3.22 设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的*每一个无穷点列都有一个收敛的子列*, 则称为 A 是列紧的集合.

*闭的列紧集*称为是*自列紧集*.

定义 1.3.22 设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的*每一个无穷点列都有一个收敛的子列*, 则称为 A 是列紧的集合.

*闭的列紧集*称为是*自列紧集*.

距离空间** X **称为是列紧的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.

注1 列紧集的子集是列紧的.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.

因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

定义 1.3.22 设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的*每一个无穷点列都有一个收敛的子列*, 则称为 A 是列紧的集合.

*闭的列紧集*称为是*自列紧集*.

***距离空间 X 称为是列紧**的*, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.

因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

注3 列紧的空间是完备的. 事实上，对于 Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个 Cauchy 列收敛.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.

因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

注3 列紧的空间是完备的. 事实上，对于 Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个 Cauchy 列收敛.

定理 1.3.23 *设 X 是一个距离空间, $A \subset X$ 是列紧集的,*

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间** X **称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.
例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.
因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

注3 列紧的空间是完备的. 事实上，对于 Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个 Cauchy 列收敛.

定理 1.3.23 *设 X 是一个距离空间, $A \subset X$ 是列紧集的,*
则 A 是有界集.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.

例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.

因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

注3 列紧的空间是完备的. 事实上，对于 Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个 Cauchy 列收敛.

定理 1.3.23 *设 X 是一个距离空间, $A \subset X$ 是列紧集的,*

则 A 是有界集.

证明 假设 A 是无界的.

定义 1.3.22 *设 A 是距离空间 X 中的一个子集， 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称为 A 是列紧的集合.*

闭的列紧集称为是自列紧集.

***距离空间 X 称为是列紧**的, 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列.*

注1 列紧集的子集是列紧的.

注2 根据定义，一个集合A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中.
例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的, 但不是自列紧的.
因为 $\{\frac{1}{n}\}$ 没有一个子列它的极限在 $(0,1]$ 中.

注3 列紧的空间是完备的. 事实上，对于 Cauchy 列来说，有一个子列收敛，则这个 Cauchy 列收敛.

定理 1.3.23 *设 X 是一个距离空间, $A \subset X$ 是列紧集的,*
则 A 是有界集.

证明 假设 A 是无界的.
于是可从 A 中选取一个点列 $\{y_n\}$, 使得 $d(y_n, a) > n$, 其中 a 是 X 中的一个点.

由于这个点列的任何子列都是无界的.

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. $\square$

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. $\square$

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的.**

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的.**

请同学们举出例子.

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. $\square$

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的**.

请同学们举出例子.

定理 1.3.24 *设 f 是定义在列紧的距离空间 (X, d) 上的实值连续函数,*

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的**.

请同学们举出例子.

定理 1.3.24 *设 f 是定义在列紧的距离空间 (X,d) 上的实值连续函数, 则 f 是有界的, 即:*

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.5}$$

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.6}$$

是有限的. 进一步, 存在点 x_{max} 和点 x_{min} 使得

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的.**

请同学们举出例子.

定理 1.3.24 *设 f 是定义在列紧的距离空间 (X, d) 上的实值连续函数, 则 f 是有界的, 即:*

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.5}$$

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.6}$$

是有限的. 进一步, 存在点 x_{max} 和点 x_{min} 使得

$$f(x_{max}) = M, \quad f(x_{min}) = m$$

.

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的.**

请同学们举出例子.

定理 1.3.24 *设 f 是定义在列紧的距离空间 (X,d) 上的实值连续函数, 则 f 是有界的, 即:*

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.5}$$

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.3.6}$$

是有限的. 进一步, 存在点 x_{max} 和点 x_{min} 使得

$$f(x_{max}) = M, \quad f(x_{min}) = m$$

.

证明的方法与数学分析中证明闭区间上连续函数性质的方法类似,

由于这个点列的任何子列都是无界的.

所以这个点列没有收敛的子列,（因为收敛的点列是有界的）.

这与 A 是列紧相矛盾, 所以 A 有界. □

注1 自列紧集是有界闭集.

注2 **在一般的距离空间中, 有界的闭集不一定是列紧的.**

请同学们举出例子.

定理 1.3.24 *设 f 是定义在列紧的距离空间 (X,d) 上的实值连续函数, 则 f 是有界的, 即:*

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in X\} \tag{1.3.5}$$

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in X\} \tag{1.3.6}$$

是有限的. 进一步, 存在点 x_{max} 和点 x_{min} 使得

$$f(x_{max})=M,\quad f(x_{min})=m$$

.

证明的方法与数学分析中证明闭区间上连续函数性质的方法类似，

请同学们给出证明.

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 *$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集是列紧集, 例如闭区间 $[a,b]$ 是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理) $C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K > 0$, 使得对于每一点 $t \in [a,b]$ 及一切 $x \in A$,

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K>0$, 使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|\, x(t)\, |\leq K, \tag{1.3.7}$$

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K>0$, 使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|\ x(t)\ |\leq K, \tag{1.3.7}$$

并且对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\ t_1-t_2\ |<\delta$ 时,

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K>0$, 使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|\ x(t)\ |\le K, \tag{1.3.7}$$

并且对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\ t_1-t_2\ |<\delta$ 时,

$$|\ x(t_1)-x(t_2)\ |<\varepsilon \qquad (\forall\ x\in\ A). \tag{1.3.8}$$

证明参见附录.

例 1.3.27 $A=\{x(t)\in C^1[a,b]\mid |\ x(t)\ |\le M, |\ x'(t)\ |\le M_1\}$,

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K>0$, 使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|x(t)|\leq K, \tag{1.3.7}$$

并且对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon \quad (\forall\, x\in A). \tag{1.3.8}$$

证明参见附录.

例 1.3.27 $A=\{x(t)\in C^1[a,b]\mid |x(t)|\leq M, |x'(t)|\leq M_1\}$,
则A*是*$C[a,b]$*中的列紧集.*

下面研究在具体空间中什么样的集合是列紧的.

例 1.3.25 $\mathbb{R}^n$ *中有界闭集是列紧集, 例如闭区间* $[a,b]$ *是紧集.*

定理 1.3.26 *(Arzelà 定理)* $C[a,b]$ *中的子集* A *是列紧的当且仅当* A *中的函数是一致有界和等度连续的.*

即存在 $K>0$, 使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|\, x(t)\,| \le K, \tag{1.3.7}$$

并且对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\, t_1-t_2\,|<\delta$ 时,

$$|\, x(t_1)-x(t_2)\,| < \varepsilon \qquad (\forall\, x\in\ A). \tag{1.3.8}$$

证明参见附录.

例 1.3.27 $A=\{x(t)\in C^1[a,b]\mid |\, x(t)\,|\le M, |\, x'(t)\,|\le M_1\}$,
则A*是*$C[a,b]$*中的列紧集.*

($C^1[a,b]$ 是在$[a,b]$中全体连续可微的函数).

一致有界: 集合中的条件已满足.

一致有界： 集合中的条件已满足.

等度连续： 可以由中值定理得到，

一致有界：集合中的条件已满足.

等度连续：可以由中值定理得到，

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a, b]$,存在 $\theta \in (0, 1)$,使得

一致有界: 集合中的条件已满足.

等度连续: 可以由中值定理得到,

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$\mid x(t_1) - x(t_2) \mid \leq \mid x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) \mid \leq M_2 \mid t_2 - t_1 \mid .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

一致有界：集合中的条件已满足.

等度连续：可以由中值定理得到，

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 \, | t_2 - t_1 | \, .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 （*l^p 空间的列紧集*）

一致有界：集合中的条件已满足.

等度连续：可以由中值定理得到，

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 \, | t_2 - t_1 | \, .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 （l^p *空间的列紧集*）

设$A \subset l^p$ $p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

一致有界： 集合中的条件已满足.
等度连续： 可以由中值定理得到，
$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 | t_2 - t_1 | .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 *（l^p 空间的列紧集）*
设$A \subset l^p$ $p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

(1)A **一致有界：**

一致有界： 集合中的条件已满足.

等度连续： 可以由中值定理得到，

$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 | t_2 - t_1 | .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 *（l^p 空间的列紧集）*

设$A \subset l^p$ $p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

(1)A **一致有界：**

$$\exists M > 0,\ \text{对于}\ \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A,\quad \text{有}\ (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < M.$$

一致有界：集合中的条件已满足.
等度连续：可以由中值定理得到,
$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 | t_2 - t_1 | .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 *（l^p 空间的列紧集）*
设$A \subset l^p$ $p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

(1)A **一致有界**：

$$\exists M > 0, \text{ 对于 } \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A, \quad \text{有 } (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < M.$$

(2)A **等度收敛**：

一致有界：集合中的条件已满足.
等度连续：可以由中值定理得到，
$\forall x \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$,存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$| x(t_1) - x(t_2) | \leq | x'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2) | \leq M_2 | t_2 - t_1 | .$$

所以A中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧.

定理 1.3.28 *（l^p 空间的列紧集）*
设$A \subset l^p$ $p \geq 1$, A 是列紧的，当且仅当以下条件成立：

(1)A 一致有界：

$$\exists M > 0, \text{ 对于 } \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A, \quad \text{有 } (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < M.$$

(2)A 等度收敛：

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N, \ \forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...) \in A, \quad \text{有 } (\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

证明参阅附录.