内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲　孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），　13947103671
Email：masun@imu.edu.cn

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容：

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容：

(1) **赋范空间中的级数;**

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容：

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容：

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

§ 5 赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

§ 5 赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \,, \tag{2.5.1}$$

§ 5　赋范空间的进一步性质

内容：

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{2.5.1}$$

其中 $x_k \in X$.

§ 5 赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots\,, \tag{2.5.1}$$

其中 $x_k \in X$.

若级数的前 n **项和数列** $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ **收敛**, 即存在 $x \in X$, 使得

§ 5 赋范空间的进一步性质

内容：

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{2.5.1}$$

其中 $x_k \in X$.

若级数的前 n 项和数列 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 收敛, 即存在 $x \in X$, 使得

$$S_n \to x(n \to \infty) \; (\|S_n - x\| \to 0),$$

§ 5 赋范空间的进一步性质

内容:

(1) 赋范空间中的级数;

(2) 赋范空间中的商空间;

(3) 赋范空间中的乘积空间.

一、赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots, \tag{2.5.1}$$

其中 $x_k \in X$.

若级数的前 n 项和数列 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 收敛, 即存在 $x \in X$, 使得

$$S_n \to x (n \to \infty) \ (\|S_n - x\| \to 0),$$

则**称 x 是级数的和**, 记为 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_n$.

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

(1) 如果 X *完备, 且级数*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛,

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

(1) 如果 X *完备, 且级数*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛,

则级数 (2.5.1)*收敛, 且*

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

(1) 如果 X *完备, 且级数*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛,

则级数 (2.5.1)*收敛, 且*

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.5.3}$$

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

(1) 如果 X 完备, 且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛,

则级数 (2.5.1)收敛, 且

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.5.3}$$

(2) 反之, 在赋范空间 X 中, 若任何的 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, 可以推出 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛,

定理 2.5.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ *是赋范空间.*

(1) 如果 X 完备, 且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛,

则级数 (2.5.1)收敛, 且

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.5.3}$$

(2) 反之, 在赋范空间 X 中, 若任何的 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, 可以推出 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛,

则 X 是 $Banach$ 空间.

证明分析: (1) 这一结论类似于"绝对收敛推出一致收敛".

证明分析: (1) 这一结论**类似于 "绝对收敛推出一致收敛"**.

要证明 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

证明分析: (1) **这一结论类似于"绝对收敛推出一致收敛".**

要证明 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

对任意自然数 p, 考虑

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|.$$

证明分析: (1) 这一结论类似于 "绝对收敛推出一致收敛".

要证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

对任意自然数 p, 考虑

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \le \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|.$$

注意到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 因而 S_n 是一个 Cauchy 列.

证明分析: (1) 这一结论类似于 “绝对收敛推出一致收敛”.

要证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

对任意自然数 p, 考虑

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|.$$

注意到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 因而 S_n 是一个 Cauchy 列.

由 X 完备, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

由于 $\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$, 由范数的连续性, 有

证明分析: (1) 这一结论类似于 "绝对收敛推出一致收敛".

要证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

对任意自然数 p, 考虑

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|.$$

注意到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 因而 S_n 是一个 Cauchy 列.

由 X 完备, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

由于 $\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$, 由范数的连续性, 有

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\| == \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

证明分析: (1) 这一结论**类似于 “绝对收敛推出一致收敛”**.

要证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即证明 前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 因 X 完备, 只需证明 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列.

对任意自然数 p, 考虑

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|.$$

注意到级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛, 因而 S_n 是一个 Cauchy 列.

由 X 完备, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

由于 $\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$, 由范数的连续性, 有

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\| == \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

(2) 反之, 要证明 X 完备,

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$,

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$,

则有 $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$,

则有 $x_n \to x\ (n \to \infty)$.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是对$\forall \varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$,

则有 $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是对$\forall \varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon = \frac{1}{2^n}.$$

因此, 我们可以找出 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$,

则有 $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是对$\forall \varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon = \frac{1}{2^n}.$$

因此, 我们可以找出 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

(2) 反之, 要证明 X 完备,

只需证明 X 中的任意的 **Cauchy 列** $\{x_n\}$ 都收敛.

我们**只要找到** $\{x_n\}$ **的一个子列** $\{x_{n_k}\}$**, 使得** $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$,

则有 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是对$\forall \varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon = \frac{1}{2^n}.$$

因此, 我们可以找出 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k = x_{n_k}$ 收敛.

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k = x_{n_k}$ 收敛.

设 $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$.

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k = x_{n_k}$ 收敛.

设 $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$.

由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N,$ 当 $n, m \geq N$ 时,

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k = x_{n_k}$ 收敛.

设 $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$.

由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

于是由条件, 级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k = x_{n_k}$ 收敛.

设 $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$.

由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

因此, 对于充分大的 k,

$$\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon.$$

于是由条件, 级数

$$x_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}) \tag{2.5.4}$$

$$=x_{n_1}+(x_{n_2}-x_{n_1})+\cdots+(x_{n_k}-x_{n_{k-1}})+\cdots$$

收敛.

即前 k 项的和 $S_k=x_{n_k}$ 收敛.

设 $x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$.

由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n,m\geq N$ 时,

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

因此, 对于充分大的 k,

$$\|x_n-x_{n_k}\|<\varepsilon.$$

令 $k\to\infty$, 由范数连续, 我们有: $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$, 所以 X 是完备的. $\square$

二、赋范空间的商空间

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设* M *是* X *的线性子空间.* $\forall x_1, x_2 \in X$, ***如果*** $x_1 - x_2 \in M$, *则* ***称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, *记为* $x_1 \sim x_2$.

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间.* $\forall x_1, x_2 \in X$, ***如果*** $x_1 - x_2 \in M$, ***则称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, *记为* $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设* M *是* X *的线性子空间.* $\forall x_1, x_2 \in X$, ***如果*** $x_1 - x_2 \in M$, ***则称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, *记为* $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间.* $\forall x_1, x_2 \in X$, ***如果*** $x_1 - x_2 \in M$, ***则称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, *记为* $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则**称** x_1 **和** x_2 **关于** M **等价**, 记为 $x_1 \sim x_2$.*

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间.* $\forall x_1, x_2 \in X$, *如果* $x_1 - x_2 \in M$, *则**称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, *记为* $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, **如果** $x_1 - x_2 \in M$, 则**称** x_1 **和** x_2 **关于** M **等价**, 记为 $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

$$y - x = -(x - y) \in M,$$

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价, 记为 $x_1 \sim x_2$.*

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

$$y - x = -(x - y) \in M,$$

所以 $y \sim x$.

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价, 记为 $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

$$y - x = -(x - y) \in M,$$

所以 $y \sim x$.

(iii) **传递性.**

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, *如果* $x_1 - x_2 \in M$, 则***称*** x_1 ***和*** x_2 ***关于*** M ***等价***, 记为 $x_1 \sim x_2$.

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

$$y - x = -(x - y) \in M,$$

所以 $y \sim x$.

(iii) **传递性.**

$x \sim y$, $y \sim z$ 可推出 $x \sim z$. 事实上,

二、赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间 –商空间.

定义 2.5.2 *设 M 是 X 的线性子空间. $\forall x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价, 记为 $x_1 \sim x_2$.*

注 等价关系具有下述性质:

(i) 自反性.

因 $x - x = 0 \in M$, 所以 $x \sim x$.

(ii) **对称性.**

因 $x \sim y$, $x - y \in M$, 又 M 是子空间, 则

$$y - x = -(x - y) \in M,$$

所以 $y \sim x$.

(iii) **传递性.**

$x \sim y$, $y \sim z$ 可推出 $x \sim z$. 事实上,

$$x - z = x - y + y - z \in M.$$

例 2.5.3 在 $L^p(E)$ 中, 设

$$M = \{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

例 2.5.3 *在 $L^p(E)$ 中, 设*

$$M = \{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M 是子空间.

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价

例 2.5.3 *在 $L^p(E)$ 中, 设*

$$M=\{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M 是子空间.

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价
这里等价的含义为： x_1 和 x_2 在几乎处处意义下相等.

例 2.5.3 *在 $L^p(E)$ 中, 设*

$$M=\{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M *是子空间.*

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价
这里等价的含义为: x_1 和 x_2 在几乎处处意义下相等.

定义 2.5.4 *商空间: X/M (关于 M 的商空间)*

例 2.5.3 *在 $L^p(E)$ 中, 设*

$$M=\{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M *是子空间.*

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价
这里等价的含义为: x_1 和 x_2 在几乎处处意义下相等.

定义 2.5.4 *商空间: X/M (关于 M 的商空间)*

设 M 是 X 的一个子空间, $x_1 - x_2 \in M$, 称 x_1 和 x_2 等价.

例 2.5.3 *在* $L^p(E)$ *中, 设*

$$M = \{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M *是子空间.*

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价
这里等价的含义为: x_1 和 x_2 在几乎处处意义下相等.

定义 2.5.4 *商空间:* X/M *(关于* M *的商空间)*

设 M *是* X *的一个子空间,* $x_1 - x_2 \in M$, *称* x_1 *和* x_2 *等价.*
对于 $x \in X$, *我们把与* x *等价的全体元素记为* $\widetilde{x}$ *(即以* x *为 代表的等价类),*
则

例 2.5.3 *在* $L^p(E)$ *中，设*

$$M=\{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}.$$

M *是子空间.*

对于 $x_1, x_2 \in L^p$, 如果 $x_1 - x_2 \in M$, 则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价
这里等价的含义为： x_1 和 x_2 在几乎处处意义下相等.

定义 2.5.4 *商空间：X/M (关于 M 的商空间)*

设 M 是 X 的一个子空间, $x_1 - x_2 \in M$, 称 x_1 和 x_2 等价.
对于 $x \in X$, 我们把与 x 等价的全体元素记为 $\widetilde{x}$ (即以 x 为 代表的等价类),
则

$$\widetilde{X}=\{X\text{中元素的等价类全体}\}=\{\widetilde{x}|x\in X\}.$$

在 $\widetilde{X}$ 中定义

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.

则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.

则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.

$\widetilde{X}$ 称为是 X **关于** M **的商空间, 记为** $\widetilde{X}=X/M$**.**

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x} = \widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.

则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.

$\widetilde{X}$ 称为是 X **关于** M **的商空间, 记为** $\widetilde{X} = X/M$**.**

定义 2.5.5 *设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间.* ***在商空间 $\widetilde{X} = X/M$ 中可以定义范数***

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.

则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.

$\widetilde{X}$ 称为是 X **关于** M **的商空间, 记为** $\widetilde{X}=X/M$**.**

定义 2.5.5 *设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间.* ***在商空间 $\widetilde{X}=X/M$ 中可以定义范数***

$$\|\widetilde{x}\|=\inf_{y\in\widetilde{x}}\{\|y\|\}. \tag{2.5.5}$$

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.

则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.

$\widetilde{X}$ 称为是 X **关于** M **的商空间, 记为** $\widetilde{X}=X/M$**.**

定义 2.5.5 *设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间.* ***在商空间*** $\widetilde{X}=X/M$ ***中可以定义范数***

$$\|\widetilde{x}\|=\inf_{y\in\widetilde{x}}\{\|y\|\}. \tag{2.5.5}$$

可以验证 $\|\widetilde{x}\|$ 满足范数的正定、齐次和三角不等式, $\widetilde{X}$ 是赋范空间.

在 $\widetilde{X}$ 中定义

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{x+y},$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{\alpha x},$$

这样的定义不依赖于代表元的选取.
则 $\widetilde{X}$ 是一个线性空间.
$\widetilde{X}$ 称为是 X **关于** M **的商空间, 记为** $\widetilde{X}=X/M$**.**

定义 2.5.5 *设 X 是赋范空间, M 是 X 的闭子空间.* ***在商空间 $\widetilde{X}=X/M$ 中可以定义范数***

$$\|\widetilde{x}\|=\inf_{y\in\widetilde{x}}\{\|y\|\}. \tag{2.5.5}$$

可以验证 $\|\widetilde{x}\|$ 满足范数的正定、齐次和三角不等式, $\widetilde{X}$ 是赋范空间.
称之为赋范空间 X 关于闭子空间 M 的赋范商空间.
商空间是一个很抽象的概念, 我们从下面这一最简单的例子, 来体会商空间的真正含义.

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

例 2.5.6 ***复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.***

将 $x \sim y$ 定义为 $x - y \in \mathbb{R}$.

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ *定义为* $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

例 2.5.6 ***复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.***

将 $x \sim y$ *定义为* $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$**,** 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im} x = \mathrm{Im} y$.

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ *定义为* $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$**,** 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y$.
在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ **上定义范数:**

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ *定义为* $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$**,** 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y$.

在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 上定义范数:

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathrm{Im}|x|.$$

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ *定义为* $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$**,** 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im} x = \mathrm{Im} y$.

在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ **上定义范数:**

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathrm{Im}|x|.$$

$(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \| \widetilde{x} \|)$ 为赋范商空间,

例 2.5.6 ***复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.***

将 $x \sim y$ 定义为 $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$, 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y$.
在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 上定义范数:

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathrm{Im}|x|.$$

$(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \| \widetilde{x} \|)$ 为赋范商空间,
其 $\widetilde{x}$ 的范数就是 x 虚部的绝对值.

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ 定义为 $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$**,** 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y$.
在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ **上定义范数:**

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathrm{Im}|x|.$$

$(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \| \widetilde{x} \|)$ 为赋范商空间,
其 $\widetilde{x}$ 的范数就是 x 虚部的绝对值.
于是,

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\text{全体纯虚数}\},$$

例 2.5.6 *复数平面 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个闭子空间.*

将 $x \sim y$ 定义为 $x - y \in \mathbb{R}$.

考虑商空间

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}.$$

对于 $y \in \widetilde{x}$, 即 $y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说 y **和** x **的虚部相同**, $\mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y$.
在商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 上定义范数:

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathrm{Im}|x|.$$

$(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \| \widetilde{x} \|)$ 为赋范商空间,
其 $\widetilde{x}$ 的范数就是 x 虚部的绝对值.
于是,

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\text{全体纯虚数}\},$$

且

$$\widetilde{0} = \{\text{全体实数}\},$$

例 2.5.7 $X=\{E$上所有 p 次可积的函数$.\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

例 2.5.7 $X=\{E\text{上所有 } p \text{ 次可积的函数}.\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

其中 M 是 E 上全体几乎处处为零的可测函数.

例 2.5.7 $X=\{E$上所有 p 次可积的函数.$\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

其中 M 是 E 上全体几乎处处为零的可测函数.

$\widetilde{0}=\{E$上全体几乎处处为零的可测函数$\}$.

例 2.5.7 $X=\{E$上所有 p 次可积的函数.$\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

其中 M 是 E 上全体几乎处处为零的可测函数.

$\widetilde{0}=\{E$上全体几乎处处为零的可测函数$\}$.

注：商空间“可以看作是”X 中把子空间 M 所具有的性质忽略不计（把 M看作0元素），“得到”的空间（商空间）.

定理 2.5.8 设 X 是 $Banach$ 空间, M 是 X 的闭子空间, 则赋范空间 X 关于 M的 商空间 X/M 是 $Banach$ 空间.

例 2.5.7 $X=\{E$上所有 p 次可积的函数.$\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

其中 M 是 E 上全体几乎处处为零的可测函数.
$\widetilde{0}=\{E$上全体几乎处处为零的可测函数$\}$.

注：商空间“可以看作是”X 中把子空间 M 所具有的性质忽略不计（把M看作0元素），“得到”的空间（商空间）.

定理 2.5.8 设 X 是 $Banach$ 空间, M 是 X 的闭子空间, 则赋范空间 X 关于M的 商空间 X/M 是 $Banach$ 空间.

分析: 只要证明商空间中的任一Cauchy 列收敛, 为此只需找到它的一个子列收敛即可.

例 2.5.7 $X=\{E$上所有 p 次可积的函数.$\}$

$$L^p(E)=X/M, \tag{2.5.6}$$

其中 M 是 E 上全体几乎处处为零的可测函数.

$\widetilde{0}=\{E$上全体几乎处处为零的可测函数$\}$.

注：商空间“可以看作是”X 中把子空间 M 所具有的性质忽略不计（把 M看作0元素），“得到”的空间（商空间）.

定理 2.5.8 设 X 是 *Banach* 空间, M 是 X 的闭子空间, 则赋范空间 X 关于 M的 商空间 X/M 是 *Banach* 空间.

分析: 只要证明商空间中的任一Cauchy 列收敛, 为此只需找到它的一个子列收敛即可.

证明 设 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 X/M 中的 Cauchy 序列.

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

从而由 X/M 中范数定义（$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y\in\widetilde{x}} \|y\|$），

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

从而由 X/M 中范数定义（$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y\in\widetilde{x}} \|y\|$）,

存在 $z_k \in M$, $u_k \in \widetilde{u}_k, u_{k+1} \in \widetilde{u}_{k+1}$,使得

$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

记 $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$.

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

从而由 X/M 中范数定义（$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y\in\widetilde{x}} \|y\|$）,

存在 $z_k \in M$, $u_k \in \widetilde{u}_k, u_{k+1} \in \widetilde{u}_{k+1}$,使得

$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

记 $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$.

$\because X$ 完备, 由定理2.5.1知存在 $v \in X$,使得$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = v$.

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

从而由 X/M 中范数定义（$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y\in\widetilde{x}} \|y\|$）,

存在 $z_k \in M$, $u_k \in \widetilde{u}_k, u_{k+1} \in \widetilde{u}_{k+1}$,使得

$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

记 $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$.

$\because X$ 完备, 由定理2.5.1知存在 $v \in X$,使得$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = v$.

令 $\widetilde{u} = \widetilde{v} + \widetilde{u}_1$, 下面证明 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{u}$.

取 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$, 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 n_k 单调增加. 为方便起见，记 $\widetilde{u_k} = \widetilde{x_{n_k}}$, 则 $\{\widetilde{u}_k\}$ 是 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.

从而由 X/M 中范数定义（$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y\in\widetilde{x}} \|y\|$）,

存在 $z_k \in M$, $u_k \in \widetilde{u}_k, u_{k+1} \in \widetilde{u}_{k+1}$,使得

$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

记 $v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$.

$\because X$ 完备, 由定理2.5.1知存在 $v \in X$,使得$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = v$.

令 $\widetilde{u} = \widetilde{v} + \widetilde{u}_1$, 下面证明 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{u}$.

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

注意到：$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

注意到：$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,

$$\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{v} - \widetilde{u}_1 + \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j}\|$$

$$\leq \|u_{k+1} - v - u_1 + \sum_{j=1}^{k} z_j\| = \|\sum_{j=1}^{k} v_j - v\| \to 0.$$

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

注意到：$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,

$$\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{v} - \widetilde{u}_1 + \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j}\|$$

$$\leq \|u_{k+1} - v - u_1 + \sum_{j=1}^{k} z_j\| = \|\sum_{j=1}^{k} v_j - v\| \to 0.$$

于是$\widetilde{u}_k \to \widetilde{u}$, 即$\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{u}$,

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

注意到：$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,

$$\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{v} - \widetilde{u}_1 + \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j}\|$$

$$\leq \|u_{k+1} - v - u_1 + \sum_{j=1}^{k} z_j\| = \|\sum_{j=1}^{k} v_j - v\| \to 0.$$

于是$\widetilde{u}_k \to \widetilde{u}$, 即$\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{u}$,

$\{\widetilde{x}_n\}$ 为Cauchy序列, 其中有子列$\{\widetilde{x}_{n_k}\}$ 收敛, 故 $\{\widetilde{x}_n\}$ 收敛.

实际上由$z_j \in M$, 则$\forall k \geq 1, \sum_{j=1}^{k} z_j \in M, \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j} = \widetilde{0}$,

注意到：$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,

$$\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{v} - \widetilde{u}_1 + \widetilde{\sum_{j=1}^{k} z_j}\|$$

$$\leq \|u_{k+1} - v - u_1 + \sum_{j=1}^{k} z_j\| = \|\sum_{j=1}^{k} v_j - v\| \to 0.$$

于是$\widetilde{u}_k \to \widetilde{u}$, 即$\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{u}$,

$\{\widetilde{x}_n\}$ 为Cauchy序列, 其中有子列$\{\widetilde{x}_{n_k}\}$ 收敛, 故 $\{\widetilde{x}_n\}$ 收敛.

并且 $\widetilde{x}_n \to \widetilde{u}$, 从而$X/M$完备. $\square$

三、赋范空间的乘积空间

三、赋范空间的乘积空间

二维、三维、多维空间的“推广”.

三、赋范空间的乘积空间

二维、三维、多维空间的“推广”.

定义 2.5.9 设$(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \leq i \leq n$*是一组线性赋范空间*, 令

三、赋范空间的乘积空间

二维、三维、多维空间的“推广”.

定义 2.5.9 设$(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$*是一组线性赋范空间, 令*

$$X = \{x = (x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, 1 \le i \le n\}, \tag{2.5.7}$$

记为 $X = \prod_{i=1}^{n} X_i, X$ *中元素按坐标定义线性运算, 则* X *是线性空间, 称为* $(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$ *的乘积空间.*

三、赋范空间的乘积空间

二维、三维、多维空间的“推广”.

定义 2.5.9 设$(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$是一组线性赋范空间, 令

$$X = \{x = (x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, 1 \le i \le n\}, \tag{2.5.7}$$

记为 $X = \prod_{i=1}^n X_i, X$ 中元素按坐标定义线性运算, 则 X 是线性空间, 称为 $(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$ 的乘积空间.

若定义

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p)^{1/p}, \ \ 1 \le p < \infty, \\ \|x\|_\infty &= \sup_{1 \le i \le n} \|x_i\|_i, \ \ p = \infty, \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

则$(X, \|\cdot\|_p)$是线性赋范空间.

三、赋范空间的乘积空间

二维、三维、多维空间的“推广”.

定义 2.5.9 设$(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$是一组线性赋范空间, 令

$$X = \{x = (x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, 1 \le i \le n\}, \tag{2.5.7}$$

记为 $X = \prod_{i=1}^n X_i$, X 中元素按坐标定义线性运算, 则 X 是线性空间, 称为 $(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \le i \le n$ 的乘积空间.

若定义

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \|x_i\|_i, \quad p = \infty, \tag{2.5.8}$$

则$(X, \|\cdot\|_p)$是线性赋范空间.

定理 2.5.10 设X_i, X如上,则 X 是线性赋范空间, X是完备的当且仅当每个$X_i (1 \le i \le n)$ 完备.

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的, 即：其中所有的Cauchy 收敛.

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,
即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

证明 "$\Longrightarrow$" 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,
即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,
即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则
$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i < \varepsilon. \tag{2.5.9}$$

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i < \varepsilon. \tag{2.5.9}$$

这说明$\{x_i^{(k)}\}$ $(k \geq 1)$是X_i中的Cauchy序列.

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i < \varepsilon. \tag{2.5.9}$$

这说明$\{x_i^{(k)}\}$ $(k \geq 1)$是X_i中的Cauchy序列.

由X_i的完备性, $\{x_i^{(k)}\}$ 收敛. 不妨设 $\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0$ 这里$x_i \in X_i (1 \leq i \leq n)$.

记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall\varepsilon>0,\exists k_0$,使得 $s,k\geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i^{(s)}-x_i^{(k)}\|_i^p=\|x^{(s)}-x^{(k)}\|_p^p<\varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)}-x_i^{(k)}\|_i<\varepsilon. \tag{2.5.9}$$

这说明$\{x_i^{(k)}\}$ $(k\geq 1)$是X_i中的Cauchy序列.

由X_i的完备性, $\{x_i^{(k)}\}$ 收敛. 不妨设 $\|x_i^{(k)}-x_i\|\to 0$ 这里$x_i\in X_i(1\leq i\leq n)$.

记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

在(2.5.9)式中固定 $k\geq k_0$, 令$s\to\infty$,则有

证明 "$\Longrightarrow$" 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i < \varepsilon. \tag{2.5.9}$$

这说明$\{x_i^{(k)}\}$ $(k \geq 1)$是X_i中的Cauchy序列.

由X_i的完备性, $\{x_i^{(k)}\}$ 收敛. 不妨设 $\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0$ 这里$x_i \in X_i (1 \leq i \leq n)$.

记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

在(2.5.9)式中固定 $k \geq k_0$, 令$s \to \infty$,则有

$$\|x_i - x_i^{(k)}\|_i \leq \varepsilon. \tag{2.5.10}$$

证明 “$\Longrightarrow$” 设每个X_i是完备的, 要证明乘积空间 是完备的,

即：其中所有的Cauchy 收敛.

设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 是X中的Cauchy序列, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$,使得 $s, k \geq k_0$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i 有,

$$\|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i < \varepsilon. \tag{2.5.9}$$

这说明$\{x_i^{(k)}\}$ $(k \geq 1)$是X_i中的Cauchy序列.

由X_i的完备性, $\{x_i^{(k)}\}$ 收敛. 不妨设 $\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0$ 这里$x_i \in X_i (1 \leq i \leq n)$.

记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

在(2.5.9)式中固定 $k \geq k_0$, 令$s \to \infty$,则有

$$\|x_i - x_i^{(k)}\|_i \leq \varepsilon. \tag{2.5.10}$$

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon (1 \leq p < \infty).$$

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon (1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon(1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

"$\Longrightarrow$" 设X完备, 我们要证明每个 X_i 完备.

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)}-x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon (1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

"$\Longrightarrow$" 设X完备, 我们要证明每个 X_i 完备.

注意

$$E_i = \{(\underbrace{0,\cdots,0}, x_i, 0,\cdots,0) | x_i \in X_i\}$$

是X的线性子空间并且E_i与X_i等距同构.

$$\|(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0)\|_p = \|x_i\|_p, \forall x_i \in X_i$$

于是剩下只需证明E_i 是X的闭子空间.

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon (1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

"$\Longrightarrow$" 设X完备, 我们要证明每个 X_i 完备.

注意

$$E_i = \{(\underbrace{0, \cdots, 0}, x_i, 0, \cdots, 0) | x_i \in X_i\}$$

是X的线性子空间并且E_i与X_i等距同构.

$$\|(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)\|_p = \|x_i\|_p, \forall x_i \in X_i$$

于是剩下只需证明E_i 是X的闭子空间.

设$x^{(k)} = (0, \cdots, 0, x_i^{(k)}, 0, \cdots, 0) \in E_i, x^{(k)} \to x$, 我们要证明 $x \in E_i$

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon(1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

"$\Longrightarrow$" 设X完备, 我们要证明每个 X_i 完备.

注意

$$E_i = \{(\underbrace{0, \cdots, 0}, x_i, 0, \cdots, 0) | x_i \in X_i\}$$

是X的线性子空间并且E_i与X_i等距同构.

$$\|(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)\|_p = \|x_i\|_p, \forall x_i \in X_i$$

于是剩下只需证明E_i 是X的闭子空间.

设$x^{(k)} = (0, \cdots, 0, x_i^{(k)}, 0, \cdots, 0) \in E_i, x^{(k)} \to x$, 我们要证明 $x \in E_i$

不妨设$x = (x_1, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i \in X_i(1 \leq i \leq n))$.

不妨设对于每个i, 当$k \geq k_0$时(2.5.10)式均成立, 则

$$\|x^{(k)} - x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\varepsilon (1 \leq p < \infty).$$

即$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 故$X$完备.

“$\Longrightarrow$” 设X完备, 我们要证明每个 X_i 完备.

注意

$$E_i = \{(\underbrace{0, \cdots, 0}, x_i, 0, \cdots, 0) | x_i \in X_i\}$$

是X的线性子空间并且E_i与X_i等距同构.

$$\|(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)\|_p = \|x_i\|_p, \forall x_i \in X_i$$

于是剩下只需证明E_i 是X的闭子空间.

设$x^{(k)} = (0, \cdots, 0, x_i^{(k)}, 0, \cdots, 0) \in E_i, x^{(k)} \to x$, 我们要证明 $x \in E_i$

不妨设$x = (x_1, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i \in X_i (1 \leq i \leq n))$.

由于

$$\|x^{(k)} - x\|_p^p = \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p + \sum_{j \neq i} \|x_j\|_j^p \to 0.$$

意味着 $j \neq i$时, $x_j = 0$，同时$\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0.$

由于

$$\|x^{(k)}-x\|_p^p = \|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p + \sum_{j\neq i} \|x_j\|_j^p \to 0.$$

意味着 $j \neq i$时, $x_j = 0$，同时$\|x_i^{(k)} - x_i\| \to 0.$

这说明$x_i \in E_i, \ \therefore E_i$闭.

由于

$$\|x^{(k)}-x\|_p^p=\|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p+\sum_{j\neq i}\|x_j\|_j^p\to 0.$$

意味着 $j\neq i$时, $x_j=0$，同时$\|x_i^{(k)}-x_i\|\to 0.$

这说明$x_i\in E_i,\ \therefore E_i$闭.

$(p=\infty$的情况可类似证明$).$