内蒙古大学数学科学学院

# 泛函分析

## Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

# §2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

# § 2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

# §2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

希望把 $n$ 维欧氏空间中更多的几何性质“推广”到一般的内积空间.

# § 2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

希望把 $n$ 维欧氏空间中更多的几何性质“推广”到一般的内积空间.

在**实的内积空间**中, 如果 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 由 Schwarz 不等式,

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

# § 2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

**希望把 $n$ 维欧氏空间中更多的几何性质“推广”到一般的内积空间**.

在**实的内积空间**中, 如果 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 由 Schwarz 不等式,

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

我们有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\| x \|\| y \|} \leq 1,$$

# §2 正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

**希望把 $n$ 维欧氏空间中更多的几何性质“推广”到一般的内积空间**.

在**实的内积空间**中, 如果 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 由 Schwarz 不等式,

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

我们有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\| x \|\| y \|} \leq 1,$$

于是 $x$ 和 $y$ 之间的 **“夹角” 可以定义**为

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{(x, y)}{\| x \|\| y \|}).$$

# § 2　正交与正交分解

## 一、 正交的定义

引进内积的 **目的**:

**希望把 $n$ 维欧氏空间中更多的几何性质“推广”到一般的内积空间**.

在**实的内积空间**中, 如果 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 由 Schwarz 不等式,

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

我们有

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{\| x \| \| y \|} \leq 1,$$

于是 $x$ 和 $y$ 之间的 **“夹角” 可以定义**为

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(x, y)}{\| x \| \| y \|}\right).$$

在**复（实的）的内积空间**

我们**可以类似于 $n$ 维欧氏空间**, 当 $(x, y) = 0$ 时, 定义元素$x$, $y$之间**正交**.

**定义 3.2.1** $X$ *是内积空间*, $x, y \in X$, *如果* $(x, y) = 0$, *则称* $x$ ***与*** $y$ ***正交***, *记为* $x \perp y$.

**定义 3.2.1** $X$ 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 $x$ **与** $y$ **正交**, 记为 $x \perp y$.

**定理 3.2.2** *(勾股定理)* 设 $X$ 是内积空间, 如果 $x, y, z \in X$, $x = y + z$, 且 $y \perp z$, 则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \tag{3.2.1}$$

**证明** $\|x\|^2 = (y+z, y+z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2.$

**定义 3.2.1** $X$ *是内积空间*, $x, y \in X$, *如果* $(x, y) = 0$, *则称* $x$ ***与*** $y$ ***正交***, *记为* $x \perp y$.

**定理 3.2.2** *(勾股定理) 设* $X$ *是内积空间, 如果* $x, y, z \in X$, $x = y + z$, *且* $y \perp z$, *则*

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \tag{3.2.1}$$

**证明** $\|x\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2.$

**元素正交于集合的概念:**

**定义 3.2.1** $X$ *是内积空间*, $x, y \in X$, *如果* $(x, y) = 0$, *则称* $x$ ***与*** $y$ ***正交***, *记为* $x \perp y$.

**定理 3.2.2** ***(勾股定理)*** *设* $X$ *是内积空间, 如果* $x, y, z \in X$, $x = y + z$, *且* $y \perp z$, *则*

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 . \tag{3.2.1}$$

**证明** $\|x\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$

**元素正交于集合的概念:**

**定义 3.2.3** *设*$X$ *是内积空间*, $M \subset X$, $x \in X$, *如果对于任意的* $y \in M$, *有* $(x, y) = 0$, *则称* $x$ ***正交于*** $M$, *记为* $x \perp M$.

**定义 3.2.1** $X$ 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 $x$ **与** $y$ **正交**, 记为 $x \perp y$.

**定理 3.2.2** *(勾股定理)* 设 $X$ 是内积空间, 如果 $x, y, z \in X$, $x = y + z$, 且 $y \perp z$, 则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 . \tag{3.2.1}$$

**证明** $\|x\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$

**元素正交于集合的概念:**

**定义 3.2.3** 设$X$ 是内积空间, $M \subset X$, $x \in X$, 如果对于任意的 $y \in M$, 有 $(x, y) = 0$, 则称 $x$ **正交于** $M$, 记为 $x \perp M$.

**集合与集合正交的概念:**

**定义 3.2.1** $X$ 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 $x$ **与** $y$ **正交**, 记为 $x \perp y$.

**定理 3.2.2** *(勾股定理)* 设 $X$ 是内积空间, 如果 $x, y, z \in X$, $x = y + z$, 且 $y \perp z$, 则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 . \tag{3.2.1}$$

**证明** $\|x\|^2 = (y + z, y + z) = (y, y) + (z, y) + (y, z) + (z, z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$

**元素正交于集合的概念:**

**定义 3.2.3** 设$X$ 是内积空间, $M \subset X$, $x \in X$, 如果对于任意的 $y \in M$, 有 $(x, y) = 0$, 则称 $x$ **正交于** $M$, 记为 $x \perp M$.

**集合与集合正交的概念:**

**定义 3.2.4** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 和 $N$ 是 $X$ 中的两个子集, 如果对于任意的 $x \in M, y \in N$, 有 $(x, y) = 0$, 则称 $M$ **正交于** $N$, 记为 $M \perp N$.

## 二、正交补集

## 二、正交补集

**集合的正交补集:**

## 二、正交补集

**集合的正交补集:**

**定义 3.2.5** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$ **的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.

## 二、正交补集

### 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$ **的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

# 二、正交补集

## 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$ **的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

## 二、正交补集

### 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为* $M$ ***的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

## 二、正交补集

**集合的正交补集:**

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$* ***的正交补****, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

(1) $0 \in M^{\perp}$.

## 二、正交补集

**集合的正交补集:**

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$* ***的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

(1) $0 \in M^{\perp}$.

(2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

## 二、正交补集

### 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$* ***的正交补***, *记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

(1) $0 \in M^{\perp}$.

(2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

(3) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$.

## 二、正交补集

**集合的正交补集:**

**定义 3.2.5** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$ **的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么

(1) $0 \in M^{\perp}$.

(2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

(3) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$.

(4) 如果 $M \supset B(a, r)$, 其中 $B(a, r)$ 是以 $x \in X$ 为中心, 以 $r$ 为半径的开球, 那么 $M^{\perp} = \{0\}$. 特别地, 如果 $M$ 是一个非空的开集, 则 $M^{\perp} = \{0\}$.

## 二、正交补集

### 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$* ***的正交补****, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

(1) $0 \in M^{\perp}$.

(2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

(3) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$.

(4) 如果 $M \supset B(a, r)$, 其中 $B(a, r)$ 是以 $x \in X$ 为中心, 以 $r$ 为半径的开球, 那么 $M^{\perp} = \{0\}$. 特别地, 如果 $M$ 是一个非空的开集, 则 $M^{\perp} = \{0\}$.

(5) 如果 $N \subset M$, 那么 $M^{\perp} \subset N^{\perp}$.

## 二、正交补集

### 集合的正交补集:

**定义 3.2.5** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 所有 $X$ 中与 $M$ 正交的元素的集合, 称为 $M$ **的正交补**, 记为 $M^{\perp}$.*

$$M^{\perp} = \{y \in X \big| (x, y) = 0, \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

由定义可以证明

**定理 3.2.6** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 那么*

(1) $0 \in M^{\perp}$.

(2) 如果$0 \in M$, 那么 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, 否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

(3) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$.

(4) 如果 $M \supset B(a, r)$, 其中 $B(a, r)$ 是以 $x \in X$ 为中心, 以 $r$ 为半径的开球, 那么 $M^{\perp} = \{0\}$. 特别地, 如果 $M$ 是一个非空的开集, 则 $M^{\perp} = \{0\}$.

(5) 如果 $N \subset M$, 那么 $M^{\perp} \subset N^{\perp}$.

(6) $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. 请读者自己证明.

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

**定理 3.2.7** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.*

**分析**: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**定理 3.2.7** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.*

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**定理 3.2.7** *设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.*

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n = 1, 2, \cdots), x_n \to x \ (n \to \infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n\to\infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**即验证 $(x,z)=0$, 对于任意 $z \in M$**

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n = 1, 2, \cdots), x_n \to x \ (n \to \infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**即验证 $(x, z) = 0$, 对于任意 $z \in M$**

**证明** (1) **证明是子空间**.

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: 先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,

再证明它是闭的.

即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n\to\infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,

即验证 $(x,z)=0$, 对于任意 $z \in M$

**证明** (1) 证明是子空间.

任取 $x \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}, \alpha, \beta \in K$,

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n = 1, 2, \cdots), x_n \to x \ (n \to \infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**即验证 $(x, z) = 0$, 对于任意 $z \in M$**

**证明** (1) **证明是子空间**.

任取 $x \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}, \alpha, \beta \in K$,

则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n\to\infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**即验证 $(x,z)=0$, 对于任意 $z \in M$**

**证明** (1) **证明是子空间**.

任取 $x \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}, \alpha, \beta \in K$,

则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0,$$

因此 $\alpha x+\beta y \in M^{\perp}$, 即 $M^{\perp}$ 是 $H$ 的子空间.

(2) **证明是闭的**.

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

**分析**: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n \to \infty)$, 都有 $x \in M^{\perp}$,**

**即验证 $(x, z)=0$, 对于任意 $z \in M$**

**证明** (1) **证明是子空间**.

任取 $x \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}, \alpha, \beta \in K$,

则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)=0,$$

因此 $\alpha x+\beta y \in M^{\perp}$, 即 $M^{\perp}$ 是 $H$ 的子空间.

(2) **证明是闭的**.

如果 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n \to \infty)$,

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^\perp$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^\perp$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何 $x_n \in M^\perp (n = 1, 2, \cdots), x_n \to x \ (n \to \infty)$, 都有 $x \in M^\perp$,**

**即验证 $(x, z) = 0$, 对于任意 $z \in M$**

**证明** (1) **证明是子空间**.

任取 $x \in M^\perp, y \in M^\perp, \alpha, \beta \in K$,

则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

因此 $\alpha x + \beta y \in M^\perp$, 即 $M^\perp$ 是 $H$ 的子空间.

(2) **证明是闭的**.

如果 $x_n \in M^\perp (n = 1, 2, \cdots), x_n \to x \ (n \to \infty)$,

则对于任意的 $z \in M$, **由内积的连续性**

**定理 3.2.7** 设 $X$ 是内积空间, $M$ 是 $X$ 的任意子集, 则 $M^{\perp}$ 是 $X$ 中的闭子空间.

分析: **先证明 $M^{\perp}$ 是子空间,**

**再证明它是闭的.**

**即证明对任何** $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n \to \infty)$, **都有** $x \in M^{\perp}$,

**即验证** $(x,z)=0$, **对于任意** $z \in M$

**证明** (1) **证明是子空间**.

任取 $x \in M^{\perp}, y \in M^{\perp}, \alpha, \beta \in K$,

则对于任意的 $z \in M$,

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0,$$

因此 $\alpha x+\beta y \in M^{\perp}$, 即 $M^{\perp}$ 是 $H$ 的子空间.

(2) **证明是闭的**.

如果 $x_n \in M^{\perp}(n=1,2,\cdots), x_n \to x\ (n \to \infty)$,

则对于任意的 $z \in M$, **由内积的连续性**

$$(x,z)=(\lim_{n\to\infty} x_n, z)=\lim_{n\to\infty}(x_n,z)=0$$

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间..**

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间..**

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间.**.

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

**定理 3.2.8** *设 $M$ 是内积空间 $X$ 的一个线性子空间. 那么* $x \in M^{\perp}$ ***当且仅当对于任意的*** $y \in M$ ***都有*** $\| x - y \| \geq \| x \|$ .

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间.**.

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

**定理 3.2.8** *设* $M$ *是内积空间* $X$ *的一个线性子空间. 那么* $x \in M^{\perp}$ ***当且仅当对于任意的*** $y \in M$ ***都有*** $\| x - y \| \geq \| x \|$ .

**证明** "$\Longrightarrow$" 因 $x \in M^{\perp}$, $y \in M$, 由定理3.2.2, 有

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间..**

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

**定理 3.2.8** *设* $M$ *是内积空间* $X$ *的一个线性子空间. 那么* $x \in M^{\perp}$ ***当且仅当对于任意的*** $y \in M$ ***都有*** $\| x - y \| \geq \| x \|$ .

**证明** “$\Longrightarrow$” 因 $x \in M^{\perp}$, $y \in M$, 由定理3.2.2, 有

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \| x \|^2 .$$

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集**, $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间**..

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

**定理 3.2.8** *设* $M$ *是内积空间* $X$ *的一个线性子空间. 那么* $x \in M^{\perp}$ ***当且仅当对于任意的*** $y \in M$ ***都有*** $\| x - y \| \geq \| x \|$ .

**证明** "$\Longrightarrow$" 因 $x \in M^{\perp}$, $y \in M$, 由定理3.2.2, 有

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \| x \|^2 .$$

"$\Longleftarrow$" 对任意 $y \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 因 $M$ **是一个线性子空间**, $\therefore \alpha y \in M$, 由条件 $x \in X$ 有, $\| x - \alpha y \|^2 \geq \| x \|^2$. **根据内积的定义**

$$\| x - \alpha y \| = \| x \|^2 - \overline{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + | \alpha |^2 \| y \|^2,$$

因此 $x \in M^{\perp}$, 所以$M^{\perp}$是闭子空间.

**注** $M$ **是** $X$ **的子集,** $M$ **不一定是子空间， 但是** $M^{\perp}$**子空间..**

我们对 **正交补集作进一步的研究**.

**定理 3.2.8** *设* $M$ *是内积空间* $X$ *的一个线性子空间. 那么* $x \in M^{\perp}$ ***当且仅当对于任意的*** $y \in M$ ***都有*** $\| x - y \| \geq \| x \|$ .

**证明** “$\Longrightarrow$” 因 $x \in M^{\perp}$, $y \in M$, 由定理3.2.2, 有

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \| x \|^2 .$$

“$\Longleftarrow$” 对任意 $y \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 因 $M$ **是一个线性子空间,** $\therefore \alpha y \in M$**,** 由条件 $x \in X$ 有, $\| x - \alpha y \|^2 \geq \| x \|^2$. **根据内积的定义**

$$\| x - \alpha y \| = \| x \|^2 - \overline{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + | \alpha |^2 \| y \|^2,$$

于是

$$0 \leq -\overline{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + | \alpha |^2 \| y \|^2 .$$

$$0 \leq -\overline{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + |\ \alpha\ |^2 \parallel y \parallel^2 .$$

令

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\ (x, y)\ |}{(y, x)}, & (y, x) \neq 0; \\ 1, & (y, x) = 0, \end{cases}$$

于是 $\beta(y, x) =|\ (x, y)\ |$. **取** $\alpha = t\beta$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$. 我们有

$$0 \leq -\overline{\alpha}(x,y) - \alpha(y,x) + |\ \alpha\ |^2 \parallel y \parallel^2 .$$

令

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\ (x,y)\ |}{(y,x)}, & (y,x) \neq 0; \\ 1, & (y,x) = 0, \end{cases}$$

于是 $\beta(y,x) = |\ (x,y)\ |$. **取** $\alpha = t\beta$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$. 我们有

$$-t\ |\ (x,y)\ | - t\ |\ (x,y)\ | + t^2 \parallel y \parallel^2 \geq 0$$

即对于任意的 $t > 0$, 有 $|\ (x,y)\ | \leq \frac{1}{2} t \parallel y \parallel^2$, 因此

$$0 \leq -\overline{\alpha}(x,y) - \alpha(y,x) + |\ \alpha\ |^2 \parallel y \parallel^2 .$$

令

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\ (x,y)\ |}{(y,x)}, & (y,x) \neq 0; \\ 1, & (y,x) = 0, \end{cases}$$

于是 $\beta(y,x) = |\ (x,y)\ |$. **取** $\alpha = t\beta$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$. 我们有

$$-t\ |\ (x,y)\ | - t\ |\ (x,y)\ | + t^2 \parallel y \parallel^2 \geq 0$$

即对于任意的 $t > 0$, 有 $|\ (x,y)\ | \leq \frac{1}{2} t \parallel y \parallel^2$, 因此

$$|\ (x,y)\ | \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2} t \parallel y \parallel^2 = 0,$$

$$0 \le -\overline{\alpha}(x,y) - \alpha(y,x) + |\ \alpha\ |^2 \parallel y \parallel^2 .$$

令

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\ (x,y)\ |}{(y,x)}, & (y,x) \neq 0; \\ 1, & (y,x) = 0, \end{cases}$$

于是 $\beta(y,x) = |\ (x,y)\ |$. **取** $\alpha = t\beta$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$. 我们有

$$-t\ |\ (x,y)\ | - t\ |\ (x,y)\ | + t^2 \parallel y \parallel^2 \ge 0$$

即对于任意的 $t > 0$, 有 $|\ (x,y)\ | \le \frac{1}{2} t \parallel y \parallel^2$, 因此

$$|\ (x,y)\ | \le \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2} t \parallel y \parallel^2 = 0,$$

所以 $|\ (x,y)\ | = 0$, 即 $x \in M^{\perp}$.

# 三、最佳逼近

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合** $A$ **的距离** $d(x,A)$:

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)|\,\omega\in A\}.$$

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合** $A$ **的距离** $d(x, A)$:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, \omega) |\ \omega \in A\}.$$

**当 $A$ 是闭集时, 存在点 $y \in A$, 使得:**

$$\| x - y \| = d(x, A).$$

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合** $A$ **的距离** $d(x,A)$:

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)|\,\omega\in A\}.$$

**当 $A$ 是闭集时, 存在点 $y\in A$, 使得**:

$$\parallel x-y\parallel=d(x,A).$$

即 $y$ 是与集合最接近的点, 即**最佳逼近点**.

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合 $A$ 的距离** $d(x,A)$:

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)|\ \omega\in A\}.$$

**当 $A$ 是闭集时, 存在点 $y\in A$, 使得:**

$$\| x-y \|= d(x,A).$$

即 $y$ 是与集合最接近的点, 即**最佳逼近点**.
**在一般的情况下, 这样的点是否存在, 存在的话是否唯一, 是一个在理论上和应用上都十分重要的问题.**

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合 $A$ 的距离** $d(x, A)$:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, \omega) |\, \omega \in A\}.$$

**当 $A$ 是闭集时, 存在点 $y \in A$, 使得:**

$$\| x - y \| = d(x, A).$$

即 $y$ 是与集合最接近的点, 即**最佳逼近点**.

**在一般的情况下, 这样的点是否存在, 存在的话是否唯一, 是一个在理论上和应用上都十分重要的问题.**

**在 Hilbert 空间 情况则变得相对比较简单.**

## 三、最佳逼近

前面, 我们定义了一点 $x$ **到一个集合** $A$ **的距离** $d(x,A)$:

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)|\ \omega\in A\}.$$

**当 $A$ 是闭集时, 存在点 $y\in A$, 使得:**

$$\parallel x-y\parallel=d(x,A).$$

即 $y$ 是与集合最接近的点, 即**最佳逼近点**.

**在一般的情况下, 这样的点是否存在, 存在的话是否唯一, 是一个在理论上和应用上都十分重要的问题.**

**在 Hilbert 空间 情况则变得相对比较简单.**

**定义 3.2.9** *一个赋范空间称为是**严格凸的**, 如果对于任意的 $x$, $y$, $x\neq y$, 并且 $\parallel x\parallel=\parallel y\parallel=1$, 都有*

$$\parallel\alpha x+\beta y\parallel<1\quad(\forall\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1)$$

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**证明** 任给 $0 < \lambda < 1$, $x \neq y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. 且 $x \neq y$, ， 我们有:

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: 利用严格凸赋范空间的定义来证明.

**证明** 任给 $0 < \lambda < 1, x \neq y \in X, \|x\| = \|y\| = 1.$ 且 $x \neq y,$ ， 我们有:

$(1) x = -y$ , (2) $\forall \alpha, \ x \neq \alpha y$ 两种情况. 当$x = -y$,

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

**分析**: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**证明** 任给 $0 < \lambda < 1$, $x \neq y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. 且 $x \neq y$, ， 我们有:

(1)$x = -y$ , (2) $\forall \alpha$, $x \neq \alpha y$ 两种情况. 当$x = -y$,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|2\lambda x - x\| = \mid 2\lambda - 1 \mid \|x\| = \mid 2\lambda - 1 \mid < 1.$$

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**证明** 任给 $0<\lambda<1$, $x\neq y\in X$, $\|x\|=\|y\|=1$. 且 $x\neq y$, ， 我们有:

(1)$x=-y$ , (2) $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 两种情况. 当$x=-y$,

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|2\lambda x-x\|=|\ 2\lambda-1\ |\ \|x\|=|\ 2\lambda-1\ |<1.$$

当 $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 时， **Schwarz 不等式中的不等号严格成立**

$$\big|(x,y)\big|^2<(x,x)(y,y)$$

,

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: 利用严格凸赋范空间的定义来证明.

**证明** 任给 $0 < \lambda < 1$, $x \neq y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$. 且 $x \neq y$, ， 我们有:

(1)$x = -y$ , (2) $\forall \alpha$, $x \neq \alpha y$ 两种情况. 当$x = -y$,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|2\lambda x - x\| = \mid 2\lambda - 1 \mid \|x\| = \mid 2\lambda - 1 \mid < 1.$$

当 $\forall \alpha$, $x \neq \alpha y$ 时， Schwarz 不等式中的不等号严格成立

$$\left|(x, y)\right|^2 < (x, x)(y, y)$$

注意到 $\Re(x, y) \leq |\Re(x, y)| \leq |(x, y)| < \| x \| \| y \| = 1$, 我们有

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: 利用严格凸赋范空间的定义来证明.

**证明** 任给 $0<\lambda<1, x\neq y\in X, \|x\|=\|y\|=1.$ 且 $x\neq y,$ ， 我们有:

$(1) x=-y$ , (2) $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 两种情况. 当$x=-y$,

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|2\lambda x-x\|=|\,2\lambda-1\,|\,\|x\|=|\,2\lambda-1\,|<1.$$

当 $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 时， Schwarz 不等式中的不等号严格成立

$$\big|(x,y)\big|^2<(x,x)(y,y)$$

注意到 $\Re(x,y)\leq|\Re(x,y)|\leq|(x,y)|<\|\,x\,\|\|\,y\,\|=1,$ 我们有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)Re(x,y)+(1-\lambda)^2\|y\|^2$$

$$=\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\Re(x,y)+(1-\lambda)^2<[\lambda+(1-\lambda)]^2=1.$$

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

**分析**: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**证明** 任给 $0 < \lambda < 1, x \neq y \in X, \|x\| = \|y\| = 1.$ 且 $x \neq y,$， 我们有:

(1)$x = -y$ , (2) $\forall \alpha,\ x \neq \alpha y$ 两种情况. 当$x = -y$,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = \|2\lambda x - x\| =| 2\lambda - 1 \mid \|x\| =| 2\lambda - 1 |< 1.$$

当 $\forall \alpha,\ x \neq \alpha y$ 时, Schwarz 不等式中的不等号严格成立

$$\big|(x, y)\big|^2 < (x, x)(y, y)$$

注意到 $\Re(x, y) \leq |\Re(x, y)| \leq |(x, y)| < \| x \| \| y \| = 1$, 我们有

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)Re(x, y) + (1-\lambda)^2 \|y\|^2$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)\Re(x, y) + (1-\lambda)^2 < [\lambda + (1-\lambda)]^2 = 1.$$

即内积空间是严格凸的.

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

**分析**: **利用严格凸赋范空间的定义来证明.**

**证明** 任给 $0<\lambda<1$, $x\neq y\in X$, $\|x\|=\|y\|=1$. 且 $x\neq y$, ， 我们有:

$(1)x=-y$ , (2) $\forall\alpha$, $x\neq\alpha y$ 两种情况. 当$x=-y$,

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|2\lambda x-x\|=\mid 2\lambda-1\mid\|x\|=\mid 2\lambda-1\mid<1.$$

当 $\forall\alpha$, $x\neq\alpha y$ 时， **Schwarz 不等式中的不等号严格成立**

$$\left|(x,y)\right|^2<(x,x)(y,y)$$

注意到 $\Re(x,y)\leq|\Re(x,y)|\leq|(x,y)|<\|x\|\|y\|=1$, 我们有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)Re(x,y)+(1-\lambda)^2\|y\|^2$$

$$=\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\Re(x,y)+(1-\lambda)^2<[\lambda+(1-\lambda)]^2=1.$$

即内积空间是严格凸的.

**注1** **不是所有的赋范空间都是严格凸的, 例如 $C[a,b]$ 就不是严格凸的.**

**定理 3.2.10** *内积空间是严格凸的赋范空间.*

分析: 利用严格凸赋范空间的定义来证明.

**证明** 任给 $0<\lambda<1$, $x\neq y\in X$, $\|x\|=\|y\|=1$. 且 $x\neq y$, , 我们有:

(1)$x=-y$ , (2) $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 两种情况. 当$x=-y$,

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|2\lambda x-x\|=|\ 2\lambda-1\ |\ \|x\|=|\ 2\lambda-1\ |<1.$$

当 $\forall\alpha,\ x\neq\alpha y$ 时, Schwarz 不等式中的不等号严格成立

$$\left|(x,y)\right|^2<(x,x)(y,y)$$

注意到 $\Re(x,y)\leq|\Re(x,y)|\leq|(x,y)|<\|\ x\ \|\|\ y\ \|=1$, 我们有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(1-\lambda)Re(x,y)+(1-\lambda)^2\|y\|^2$$

$$=\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)\Re(x,y)+(1-\lambda)^2<[\lambda+(1-\lambda)]^2=1.$$

即内积空间是严格凸的.

注1 不是所有的赋范空间都是严格凸的, 例如 $C[a,b]$ 就不是严格凸的.

注2 由严格凸的定义可以证明, 在严格凸的赋范空间中, 不可能有两个最佳逼近点.

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有：

**定理 3.2.11** *设 $M$ 是 Hilbert空间 $H$ 中非空闭的凸集, 则对于任意的 $x \in H$, 存在唯一的 $x_0 \in M$, 使得*

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) 证明存在性.

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

**定理 3.2.11** 设 $M$ 是 *Hilbert*空间 $H$ 中**非空闭的凸集**, 则对于任意的 $x \in H$, **存在唯一的** $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) 证明存在性.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x \overline{\in} M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y \in M}\{\|x - y\|\}$.

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

**定理 3.2.11** *设 $M$ 是 Hilbert空间 $H$ 中非空闭的凸集, 则对于任意的 $x \in H$, 存在唯一的 $x_0 \in M$, 使得*

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) 证明存在性.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x\overline{\in}M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y\in M}\{\|x - y\|\}$.

(1) 于是存在 $\{x_n\} \subset M$, 使得

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有：

**定理 3.2.11** 设 $M$ 是 *Hilbert空间* $H$ 中**非空闭的凸集**, 则对于任意的 $x \in H$, **存在唯一的** $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) **证明存在性**.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x \overline{\in} M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y \in M}\{\|x - y\|\}$.

(1) 于是**存在** $\{x_n\} \subset M$, **使得**

$$\|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

**定理 3.2.11** 设 $M$ 是 *Hilbert空间* $H$ 中**非空闭的凸集**, 则对于任意的 $x \in H$, ***存在唯一的*** $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) **证明存在性**.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x \overline{\in} M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y \in M}\{\|x - y\|\}$.

(1) 于是**存在** $\{x_n\} \subset M$, **使得**

$$\|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

(2) **由于** $M$ **是凸集**. 对于任意的自然数 $m, n$, 有:

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

**定理 3.2.11** 设 $M$ 是 *Hilbert空间* $H$ 中**非空闭的凸集**, 则对于任意的 $x \in H$, **存在唯一的** $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) **证明存在性**.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x \bar{\in} M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y \in M}\{\|x - y\|\}$.

(1) 于是**存在** $\{x_n\} \subset M$, **使得**

$$\|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

(2) **由于** $M$ **是凸集**. 对于任意的自然数 $m, n$, 有:

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in M,$$

Hilbert 空间是严格凸的, 于是我们有:

**定理 3.2.11** 设 $M$ 是 *Hilbert*空间 $H$ 中**非空闭的凸集**, 则对于任意的 $x \in H$, ***存在唯一的*** $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

**证明** (i) **证明存在性**.

不妨假定 $M$ 是 $H$ 的真子集, 并且 $x \overline{\in} M$. 记 $\alpha = \inf\limits_{y \in M}\{\|x - y\|\}$.

(1) 于是**存在** $\{x_n\} \subset M$, **使得**

$$\|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

(2) **由于** $M$ **是凸集**. 对于任意的自然数 $m, n$, 有:

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in M,$$

因此

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha.$$

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$$\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|\geq \alpha. \quad \|x_n-x\|\to\alpha \qquad (n\to\infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2))$

$$\|x_m-x_n\|^2=2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\alpha^2,$$

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\|^2 \to 0$,

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\|^2 \to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** $Cauchy$ **列**.

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\|^2 \to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** $Cauchy$ **列**.

(5) **由于** $H$ **是 Hilbert空间**, $M$ **是闭的,**

$$\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|\geq\alpha.\quad \|x_n-x\|\to\alpha\qquad (n\to\infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2))$

$$\|x_m-x_n\|^2=2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m,n\to\infty$ 时, $\|x_m-x_n\|^2\to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** *Cauchy* **列**.

(5) **由于** $H$ **是 Hilbert空间**, $M$ **是闭的,**

于是存在 $x_0\in M$, 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

$$\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n-x\| \to \alpha \qquad (n\to\infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2))$

$$\|x_m-x_n\|^2 = 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m,n\to\infty$ 时, $\|x_m-x_n\|^2\to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** $Cauchy$ **列**.

(5) **由于** $H$ **是 Hilbert空间**, $M$ **是闭的**,

于是存在 $x_0\in M$, 使得 $x_n\to x_0 (n\to\infty)$.

**由于** $\|x_n-x\|\to\alpha$, **且范数是连续的**, 有 $\|x_0-x\|=\alpha$.

(2) **唯一性, 用反证法**. **假设存在** $y_0\in M$, **且** $\|x-y_0\|=\alpha$.

$$\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m - x\|^2 + 2\,\|x - x_n\|^2 - 4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m, n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\|^2 \to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** $Cauchy$ **列**.

(5) **由于** $H$ **是 Hilbert空间**, $M$ **是闭的,**

于是存在 $x_0 \in M$, 使得 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

**由于** $\|x_n - x\| \to \alpha$**, 且范数是连续的**, 有 $\|x_0 - x\| = \alpha$.

(2) **唯一性, 用反证法**. **假设存在** $y_0 \in M$**, 且** $\|x - y_0\| = \alpha$**.**

于是**由** $M$ **是凸的,** $\frac{x_0 + y_0}{2} \in M$**,** 所以 $\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$.

$$\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\| \geq \alpha. \quad \|x_n - x\| \to \alpha \qquad (n\to\infty)$$

(3) **由平行四边形法则** $(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2))$

$$\|x_m-x_n\|^2 = 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

$$\leq 2\,\|x_m-x\|^2+2\,\|x-x_n\|^2-4\alpha^2,$$

(4) $\therefore$当 $m,n\to\infty$ 时, $\|x_m-x_n\|^2\to 0$,

即 $\{x_n\}$ **是** $M$ **中的** *Cauchy* **列**.

(5) **由于** $H$ **是 Hilbert空间**, $M$ **是闭的,**

于是存在 $x_0\in M$, 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

**由于** $\|x_n-x\|\to\alpha$**, 且范数是连续的**, 有 $\|x_0-x\|=\alpha$.

(2) **唯一性, 用反证法**. **假设存在** $y_0\in M$**, 且** $\|x-y_0\|=\alpha$**.**

于是**由** $M$ **是凸的,** $\frac{x_0+y_0}{2}\in M$**,** 所以 $\| x-\frac{1}{2}(x_0+y_0)\,\| \geq \alpha$.

$$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$$

把平行四边形法则应用到 $x - x_0$ 和 $x - y_0$, 我们有

$$\|(x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2$$
$$= 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2$$

$$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$$

把**平行四边形法则应用到** $x - x_0$ **和** $x - y_0$, 我们有

$$\|(x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2$$
$$= 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2$$

整理得

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4 \| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

$$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$$

把**平行四边形法则应用到** $x - x_0$ **和** $x - y_0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\|(x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2 \\ &= 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2\end{aligned}$$

整理得

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4 \| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

即 $x_0 = y_0$, 唯一性得证.

**注1** 定理3.2.11 说明, 当 $M$ 是 **Hilbert 空间** $H$ 中的 **非空的闭的凸集**, $x \in H$, 则**存在唯一**确定的, **到集合** $M$ **最近的点** $x_0$.

$$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$$

把平行四边形法则应用到 $x - x_0$ 和 $x - y_0$, 我们有

$$\|(x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2$$
$$= 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2$$

整理得

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4 \| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

即 $x_0 = y_0$, 唯一性得证.

**注1** 定理3.2.11 说明, 当 $M$ 是 **Hilbert 空间** $H$ 中的 **非空的闭的凸集**, $x \in H$, 则**存在唯一**确定的, **到集合 $M$ 最近的点** $x_0$.

**注2** **在有限维空间, 即使 $M$ 不是 凸集(仅仅是非空闭集), 这样的点 $x_0$ 仍然存在,**

$$\| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \| \geq \alpha$$

把**平行四边形法则应用到** $x - x_0$ **和** $x - y_0$, 我们有

$$\begin{aligned} &\|(x - x_0) + (x - y_0) \|^2 + \| (x - x_0) - (x - y_0) \|^2 \\ &= 2 \| x - x_0 \|^2 + 2 \| x - y_0 \|^2 \end{aligned}$$

整理得

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 4 \| x - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0.$$

即 $x_0 = y_0$, 唯一性得证.

**注1** 定理3.2.11 说明, 当 $M$ 是 **Hilbert 空间** $H$ 中的 **非空的闭的凸集**, $x \in H$, 则**存在唯一**确定的, **到集合** $M$ **最近的点** $x_0$.

**注2** **在有限维空间, 即使** $M$ **不是 凸集(仅仅是非空闭集), 这样的点** $x_0$ **仍然存在,**

证明的方法与这个定理证明的方法类似. （注意到有限维空间中有界闭集是列紧的,可以找到一个收敛的子列）.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$，最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$， 最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页**.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

注3 **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$， 最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页**.

注4 **当 $M$ 是真的闭子空间时**, 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$，最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页.**

**注4** **当 $M$ 是真的闭子空间时,** 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

$x\in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y\in M$ 都有 $\| x-y \|\geq\| x \|$ . 即 $d(x,M)\geq\| x \|$

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$，最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页**.

**注4** **当 $M$ 是真的闭子空间时**, 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

$x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ . 即 $d(x, M) \geq \| x \|$

$\because 0 \in M \therefore d(x, M) = \| x \|$ . 也就是说,

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$， 最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页**.

**注4** **当 $M$ 是真的闭子空间时,** 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

$x \in M^{\perp}$ **当且仅当 对任意的** $y \in M$ **都有** $\| x-y \| \geq \| x \|$ . 即 $d(x,M) \geq \| x \|$

$\because 0 \in M \therefore d(x,M) = \| x \|$ . 也就是说,

在 Hilbert 空间中， $Riesz$ 引理中的" $> 1-\varepsilon$" 可以为 " $= 1$".

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$， 最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林“泛函分析中的反例”p.52 页**.

**注4** **当 $M$ 是真的闭子空间时**, 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

$x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x-y \| \geq \| x \|$ . 即 $d(x, M) \geq \| x \|$

$\because 0 \in M \therefore d(x, M) = \| x \|$ . 也就是说,

在 Hilbert 空间中, $Riesz$ 引理中的" $> 1-\varepsilon$" 可以为 " $= 1$".

$Riesz$ 引理: $X_0 \subset X$, 且 $X_0$ 是 $X$ 的闭的真子空间, 则
对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $\|x_0\| = 1$, 且对于 $\forall x \in X_0$, $\|x - x_0\| > 1 - \varepsilon$.

但是在这种情况下, 这样的点**可能是不唯一**的.

例如 $M$ 是平面上的一个圆周, $x$ 是圆的中心, 那么 $x$ 到集合 $M$ 最近的点 $y$ 不是唯一的, 可以是圆周上的任意一点.

**注3** **在无穷维空间, 有界闭集不一定是列紧的, 这样的点 $y$ 的存在性的证明就变得更加困难或者不可能.**

**即：在一般的无穷维的 Banach 空间，对于非空的闭的凸子集 $M$，最佳逼近点 $y$ 可能不存在.**

**可参阅汪林"泛函分析中的反例"p.52 页.**

**注4** **当 $M$ 是真的闭子空间时,** 可把定理的结论与第二章第三节的 $Riesz$ 引理（2.3.12）相对照比较.

$x\in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y\in M$ 都有 $\| x-y \|\geq\| x \|$ . 即 $d(x,M)\geq\| x \|$

$\because 0\in M \therefore d(x,M)=\| x \|$ . 也就是说，

在 Hilbert 空间中，$Riesz$ 引理中的"$>1-\varepsilon$" 可以为 "$=1$".

$Riesz$ 引理: $X_0\subset X$, 且 $X_0$ 是 $X$ 的闭的真子空间, 则
对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in X$, 使得 $\|x_0\|=1$, 且对于 $\forall x\in X_0$, $\|x-x_0\|>1-\varepsilon$.
取 $x_0$ 正交于 $M$ 即可.

# 四、Hilbert空间的正交分解

## 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

# 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

我们可以得到以下定理:

## 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

我们可以得到以下定理:

**定理 3.2.12** *(正交分解定理)* 设 $H$ 是 *Hilbert* 空间, $M$ 是 $H$ 中的***闭子空间***, *则对于任意的* $x \in H$, *存在**唯一的*** $x_0 \in M$ *及* $y \in M^{\perp}$, *使得*

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.4}$$

*并且*

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 . \tag{3.2.5}$$

## 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

我们可以得到以下定理:

**定理 3.2.12** *(正交分解定理)* 设 $H$ 是 *Hilbert* 空间, $M$ 是 $H$ 中的***闭子空间***, *则对于任意的* $x \in H$, *存在**唯一的*** $x_0 \in M$ *及* $y \in M^\perp$, *使得*

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.4}$$

*并且*

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 . \tag{3.2.5}$$

**证明** (i) **存在性**

## 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

我们可以得到以下定理:

**定理 3.2.12** *(正交分解定理)* 设 $H$ 是 Hilbert 空间, $M$ 是 $H$ 中的***闭子空间***, 则对于任意的 $x \in H$, 存在***唯一的*** $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.4}$$

*并且*

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 . \tag{3.2.5}$$

**证明** (i) **存在性**

(1) 因为 $M$ 是 Hilbert 空间 $H$ 的**闭子空间(凸集)**, 因此由定理3.2.11, 对于任意的 $x \in H$, 存在 $x_0 \in M$, 使得

## 四、Hilbert空间的正交分解

**三维欧氏空间可以分解为三个一维子空间的正交和, 使问题的处理变得更加简单.**

**目标: 把这一想法推广到一般的 Hilbert 空间.**

我们可以得到以下定理:

**定理 3.2.12** *(正交分解定理) 设 $H$ 是 Hilbert 空间, $M$ 是 $H$ 中的**闭子空间**, 则对于任意的 $x \in H$, 存在**唯一的** $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得*

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.4}$$

*并且*

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 . \tag{3.2.5}$$

**证明** (i) **存在性**

(1) 因为 $M$ 是 Hilbert 空间 $H$ 的**闭子空间（凸集）**, 因此由定理3.2.11, 对于任意的 $x \in H$, 存在 $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf_{y \in M} \{\|x - y\|\}$$

.

(2) **令** $y = x - x_0$, **下面要证明** $y \in M^{\perp}$.

(2) 令 $y = x - x_0$, **下面要证明** $y \in M^{\perp}$.

**(利用上面的结论（定理3.2.8）来证明：设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ .)**

(2) **令** $y = x - x_0$, **下面要证明** $y \in M^{\perp}$.

**(利用上面的结论（定理3.2.8）来证明：设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ .)**

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^{\perp}$.

**于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得 $x = x_0 + y$.**

(2) 令 $y = x - x_0$, 下面要证明 $y \in M^{\perp}$.

(利用上面的结论 (定理3.2.8) 来证明: 设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$.)

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^{\perp}$.

于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得 $x = x_0 + y$.

(ii) 唯一性, 用反证法来证明.

(2) **令** $y = x - x_0$, **下面要证明** $y \in M^{\perp}$.

**(利用上面的结论（定理3.2.8）来证明：设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间．则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ .)**

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^{\perp}$.

**于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得 $x = x_0 + y$.**

(ii) **唯一性, 用反证法来证明.**

如果还有 $x = x'_0 + y'$, 其中 $x'_0 \in M$, $y' \in M^{\perp}$.

(2) 令 $y = x - x_0$, 下面要证明 $y \in M^{\perp}$.

(利用上面的结论 (定理3.2.8) 来证明: 设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ .)

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^{\perp}$.

于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$, 使得 $x = x_0 + y$.

(ii) 唯一性, 用反证法来证明.

如果还有 $x = x_0' + y'$, 其中 $x_0' \in M$, $y' \in M^{\perp}$.

则 $x_0' - x_0 = y' - y$.

(2) **令** $y = x - x_0$, **下面要证明** $y \in M^\perp$.

**(利用上面的结论 (定理3.2.8) 来证明: 设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^\perp$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$ .)**

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^\perp$.

**于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^\perp$, 使得 $x = x_0 + y$.**

(ii) **唯一性, 用反证法来证明.**

如果还有 $x = x_0' + y'$, 其中 $x_0' \in M$, $y' \in M^\perp$.

则 $x_0' - x_0 = y' - y$.

因为 $y' - y \in M \cap M^\perp = \{0\}$, 所以 $y' = y$, 且 $x_0' = x$.

(2) 令 $y = x - x_0$, 下面要证明 $y \in M^\perp$.

(利用上面的结论 (定理3.2.8) 来证明: 设 $M$ 是内积空间 $X$ 的线性子空间. 则 $x \in M^\perp$ 当且仅当 对任意的 $y \in M$ 都有 $\| x - y \| \geq \| x \|$.)

对于任意 $z \in M$, 有

$$\| y - z \| = \| x - (x_0 + z) \| \geq \| x - x_0 \| = \| y \| .$$

因此 $y \in M^\perp$.

于是我们证明了存在 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^\perp$, 使得 $x = x_0 + y$.

(ii) 唯一性, 用反证法来证明.

如果还有 $x = x_0' + y'$, 其中 $x_0' \in M$, $y' \in M^\perp$.

则 $x_0' - x_0 = y' - y$.

因为 $y' - y \in M \cap M^\perp = \{0\}$, 所以 $y' = y$, 且 $x_0' = x$.

(3) 由于 $x_0 \in M$ 和 $y \in M^\perp$, 根据勾股定理3.2.2, 可知

$$\| x \|^2 = \| x_0 \|^2 + \| y \|^2 .$$

成立.

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad 这里 x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 **$x$ 在 $M$ 上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. 即

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 **$x$ 在 $M$ 上的投影,** $(x - x_0) \perp M$. 即

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 **$x$ 在 $M$ 上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. 即

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注2** **一般的 Banach 空间, $M$ 是闭子空间, 如果存在闭子空间 $N$, 使得 $H = M \oplus N$,** 则**称子空间 $M$ 在 $H$ 中可补**.

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 $x$ **在 $M$ 上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. 即

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注2 一般的 Banach 空间, $M$ 是闭子空间, 如果存在闭子空间 $N$, 使得 $H = M \oplus N$,** 则**称子空间 $M$ 在 $H$ 中可补**.

本定理表明 **Hilbert 空间的任何闭子空间都是可补的** .

**注3** **Banach 空间中可以存在不可补的子空间.** 例如:

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ **称为** $x$ **在** $M$ **上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. **即**

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注2** **一般的 Banach 空间**, $M$ **是闭子空间, 如果存在闭子空间** $N$, **使得** $H = M \oplus N$, **则称子空间** $M$ **在** $H$**中可补**.

本定理表明 **Hilbert 空间的任何闭子空间都是可补的** .

**注3** **Banach 空间中可以存在不可补的子空间.** 例如:

$c_0$(极限为零的序列) 是 $l^\infty$ 中的闭子空间, 但在 $l^\infty$ 中不可补.

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad 这里 x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 $x$ **在 $M$ 上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. 即

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注2** **一般的 Banach 空间, $M$ 是闭子空间, 如果存在闭子空间 $N$, 使得 $H = M \oplus N$**, 则**称子空间 $M$ 在 $H$ 中可补**.

本定理表明 **Hilbert 空间的任何闭子空间都是可补的** .

**注3** **Banach 空间中可以存在不可补的子空间.** 例如:

$c_0$(极限为零的序列) 是 $l^\infty$ 中的闭子空间, 但在 $l^\infty$ 中不可补.

**注4** **实际上可以证明如果 Banach 空间 $X$ 的每一个闭子空间都可补, 则 $X$ 同构于一个 Hilbert 空间.**

**注1** $M$ 是 $H$ 的**闭的线性子空间**, $\forall x \in H$,

$$x = x_0 + y, \quad \text{这里} x_0 \in M, \quad y \in M^{\perp}.$$

$x_0$ 称为 $x$ **在 $M$ 上的投影**, $(x - x_0) \perp M$. 即

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

其中 $\oplus$ 表示**两个子空间的正交直接和**.

**注2** **一般的 Banach 空间, $M$ 是闭子空间, 如果存在闭子空间 $N$, 使得 $H = M \oplus N$,** 则**称子空间 $M$ 在 $H$ 中可补**.

本定理表明 **Hilbert 空间的任何闭子空间都是可补的** .

**注3** **Banach 空间中可以存在不可补的子空间.** 例如:

$c_0$(极限为零的序列) 是 $l^{\infty}$ 中的闭子空间, 但在 $l^{\infty}$ 中不可补.

**注4** **实际上可以证明如果 Banach 空间 $X$ 的每一个闭子空间都可补, 则 $X$ 同构于一个 Hilbert 空间.**

**可见:正交分解定理是 Hilbert 空间的特征性质.**

**定理 3.2.13** 设$X_0$是$Hilbert$空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则$X_0^{\perp\perp} = X_0$.

分析: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset X_0^{\perp\perp}$, 下面只需证明 $X_0^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**定理 3.2.13** 设$X_0$是*Hilbert*空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则$X_0^{\perp\perp} = X_0$.

分析: 由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^\perp)^\perp$), 我们有 $X_0 \subset X_0^{\perp\perp}$, 下面只需证明 $X_0^{\perp\perp} \subset X_0$.

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset X_0^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in X_0^{\perp\perp}$, 要证明 $x \in X_0$.

**定理 3.2.13** 设$X_0$是*Hilbert*空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 **由正交分解定理**

**定理 3.2.13** 设$X_0$是*Hilbert*空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 由正交分解定理

$$x = x_0 + y, \quad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in {X_0}^{\perp}.$$

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则$X_0^{\perp\perp} = X_0$.

分析: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset X_0^{\perp\perp}$, 下面只需证明 $X_0^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset X_0^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in X_0^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 由正交分解定理

$$x = x_0 + y, \quad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in X_0^{\perp}.$$

(**下面将证明** $y = 0$)

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

分析: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 **由正交分解定理**

$$x = x_0 + y, \quad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in {X_0}^{\perp}.$$

(**下面将证明** $y = 0$)

首先: 由 $y \in {X_0}^{\perp}$, $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 我们有$(x, y) = 0$. 于是

**定理 3.2.13** 设$X_0$是*Hilbert*空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

分析: 由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 要证明 $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 由正交分解定理

$$x = x_0 + y, \qquad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in {X_0}^{\perp}.$$

(下面将证明 $y = 0$)

首先: 由 $y \in {X_0}^{\perp}$, $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 我们有$(x, y) = 0$. 于是

$$0 = (x, y) = (x_0 + y, y) = (x_0, y) + (y, y). \tag{3.2.6}$$

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 **由正交分解定理**

$$x = x_0 + y, \quad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in {X_0}^{\perp}.$$

(**下面将证明** $y = 0$)

首先: 由 $y \in {X_0}^{\perp}$, $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 我们有$(x, y) = 0$. 于是

$$0 = (x, y) = (x_0 + y, y) = (x_0, y) + (y, y). \tag{3.2.6}$$

因为 $x_0 \in X_0$, $y \in {X_0}^{\perp}$, 故 $(x_0, y) = 0$.于是 (3.2.6) 即为 $\| y \| = 0$.

**定理 3.2.13** 设$X_0$是Hilbert空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: 由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 ${X_0}^{\perp\perp} \subset X_0$.

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset {X_0}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 要证明 $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 由正交分解定理

$$x = x_0 + y, \quad \text{其中} x_0 \in X_0, \quad y \in {X_0}^{\perp}.$$

(下面将证明 $y = 0$)

首先: 由 $y \in {X_0}^{\perp}$, $x \in {X_0}^{\perp\perp}$, 我们有$(x, y) = 0$. 于是

$$0 = (x, y) = (x_0 + y, y) = (x_0, y) + (y, y). \tag{3.2.6}$$

因为 $x_0 \in X_0$, $y \in {X_0}^{\perp}$, 故 $(x_0, y) = 0$.于是 (3.2.6) 即为 $\| y \| = 0$.

故 $y = 0$, 从而 $x = x_0 \in X_0$. 因此 ${X_0}^{\perp\perp} = X_0$.

由上述定理和定理3.2.6容易证得:

**定理 3.2.13** 设$X_0$是*Hilbert*空间$H$ 中的一个闭的线性子空间, 则$X_0{}^{\perp\perp} = X_0$.

**分析**: **由定理3.2.6($X$是内积空间, $M$ 是 $X$ 的子集, 则 $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$), 我们有 $X_0 \subset X_0{}^{\perp\perp}$, 下面只需证明 $X_0{}^{\perp\perp} \subset X_0$.**

**证明** (1) 显然 $X_0 \subset X_0{}^{\perp\perp}$.

(2) 设 $x \in X_0{}^{\perp\perp}$, **要证明** $x \in X_0$.

注意到 $X_0^{\perp}$ 是闭子空间(根据定理3.2.11). 于是 由正交分解定理

$$x = x_0 + y, \qquad 其中 x_0 \in X_0, \quad y \in X_0{}^{\perp}.$$

(**下面将证明** $y = 0$)

首先: 由 $y \in X_0{}^{\perp}$, $x \in X_0{}^{\perp\perp}$, 我们有$(x, y) = 0$. 于是

$$0 = (x, y) = (x_0 + y, y) = (x_0, y) + (y, y). \tag{3.2.6}$$

因为 $x_0 \in X_0$, $y \in X_0{}^{\perp}$, 故 $(x_0, y) = 0$.于是 (3.2.6) 即为 $\| y \| = 0$.

故 $y = 0$, 从而 $x = x_0 \in X_0$. 因此 $X_0{}^{\perp\perp} = X_0$.

由上述定理和定理3.2.6容易证得:

**命题 3.2.14** ***设 $X_0$ 是 Hilbert 空间 $H$ 中的一个线性子空间, 那么 $X_0{}^{\perp\perp} = \overline{X_0}$.***