泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

第六章　线性算子的谱理论

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式,**

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置，谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式，**
反映了线性算子有没有逆算子，

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式，**
反映了线性算子有没有逆算子，
在什么范围中有逆算子，逆算子是否连续等一系列问题.

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式,**
反映了线性算子有没有逆算子,
在什么范围中有逆算子, 逆算子是否连续等一系列问题.

对于**有限维空间** X 上的线性算子 A, A 的**谱点就是特征值**,

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式,**
反映了线性算子有没有逆算子,
在什么范围中有逆算子, 逆算子是否连续等一系列问题.

对于**有限维空间** X 上的线性算子 A, A 的**谱点就是特征值,**
空间 X 按这些特征值可以分解成若干个关于这个算子的不变子空间,

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式,**
反映了线性算子有没有逆算子,
在什么范围中有逆算子, 逆算子是否连续等一系列问题.

对于**有限维空间** X 上的线性算子 A, A 的**谱点就是特征值,**
空间 X 按这些特征值可以分解成若干个关于这个算子的不变子空间,
特征值 刻画了有限维空间上线性算子的基本性质.

第六章　线性算子的谱理论

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置, 谱理论对于 **了解和刻画线性算子**是十分重要的.

线性算子的谱从本质上**刻画了线性算子的作用方式，**
反映了线性算子有没有逆算子，
在什么范围中有逆算子，逆算子是否连续等一系列问题.

对于**有限维空间** X 上的线性算子 A, A 的**谱点就是特征值，**
空间 X 按这些特征值可以分解成若干个关于这个算子的不变子空间,
特征值 刻画了有限维空间上线性算子的基本性质.

在**无穷维空间** 我们也试图按照线性算子谱的性质把空间加以分解.

§ 1　谱集和正则点集

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

§ 1　谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

§ 1　谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能:

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能:

(1) $T_\lambda x = 0$ **有非零解**, 即 λ 是 T 的**特征值**;

§ 1　谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能:

(1) $T_\lambda x = 0$ **有非零解**, 即 λ 是 T 的特征值;

(2) $T_\lambda x = 0$ **无非零解**, 即 λ 是 T 的正则点.

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能:

(1) $T_\lambda x = 0$ **有非零解**, 即 λ 是 T 的特征值;

(2) $T_\lambda x = 0$ **无非零解**, 即 λ 是 T 的正则点.

但在**无穷维空间**, 情况要复杂得多.

§ 1 谱集和正则点集

我们研究线性算子的谱理论,

首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$,其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子.

λ 取什么值时 T_λ 有**逆算子**,

当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的**性质如何** 等问题是**谱理论所关心的基本问题**.

在**有限维空间**,

对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能:

(1) $T_\lambda x = 0$ **有非零解**, 即 λ 是 T 的**特征值**;

(2) $T_\lambda x = 0$ **无非零解**, 即 λ 是 T 的正则点.

但在**无穷维空间**, 情况要复杂得多.

以下根据 λ 的分类, 给出**谱点** 和**正则点**的定义:

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子. λ 称为 T 的***正则点***,

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.

λ 称为 T 的***正则点***,

如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中***稠密***,

并且 $\lambda I - T$ 有***连续的逆算子***.

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.

λ 称为 T 的***正则点***,

如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中***稠密***,

并且 $\lambda I - T$ 有***连续的逆算子***.

这样的 λ 的全体称为 T 的***正则点集***, 记为 $\rho(T)$,

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.

λ 称为 T 的***正则点***,

如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中***稠密***,

并且 $\lambda I - T$ 有***连续的逆算子***.

这样的 λ 的全体称为 T 的***正则点集***, 记为 $\rho(T)$,

有时把***逆算子*** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的***预解式***.

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.
λ 称为 T 的**正则点**,
如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中**稠密**,
并且 $\lambda I - T$ 有**连续的逆算子**.
这样的 λ 的全体称为 T 的**正则点集**, 记为 $\rho(T)$,
有时把**逆算子** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的**预解式**.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$,

定义 6.1.1 设 X 是复的 $Banach$ 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.
λ 称为 T 的***正则点***,
如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中***稠密***,
并且 $\lambda I - T$ 有***连续的逆算子***.
这样的 λ 的全体称为 T 的***正则点集***, 记为 $\rho(T)$,
有时把***逆算子*** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的***预解式***.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$,
若 $\lambda \in \sigma(T)$, 称 λ 为 T 的**谱点**.

定义 6.1.1 设 X 是复的 Banach 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T)\subset X$ 到 X 的线性算子.
λ 称为 T 的***正则点***,
如果 $\lambda I-T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 X 中***稠密***,
并且 $\lambda I-T$ 有***连续的逆算子***.
这样的 λ 的全体称为 T 的**正则点集**, 记为 $\rho(T)$,
有时把***逆算子*** $(\lambda I-T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的***预解式***.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$,
若 $\lambda\in\sigma(T)$, 称 λ 为 T 的**谱点**.

注1 在这个定义中, 未要求 T 是有界线性算子, $\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间.

定义 6.1.1 *设 X 是复的 Banach 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.*
*λ 称为 T 的**正则点**,*
*如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中**稠密**,*
*并且 $\lambda I - T$ 有**连续的逆算子**.*
*这样的 λ 的全体称为 T 的**正则点集**, 记为 $\rho(T)$,*
*有时把**逆算子** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的**预解式**.*

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$,
若 $\lambda \in \sigma(T)$, 称 λ 为 T 的**谱点**.

注1 在这个定义中, 未要求 T 是有界线性算子, $\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间.

注2 进一步我们还可以对 T 的谱集合做进一步的分类:

定义 6.1.1 设 X 是复的 *Banach* 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.
λ 称为 T 的**正则点**,
如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中**稠密**,
并且 $\lambda I - T$ 有**连续的逆算子**.
这样的 λ 的全体称为 T 的**正则点集**, 记为 $\rho(T)$,
有时把**逆算子** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的**预解式**.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$,
若 $\lambda \in \sigma(T)$, 称 λ 为 T 的**谱点**.

注1 在这个定义中, 未要求 T 是有界线性算子, $\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间.

注2 进一步我们还可以对 T 的谱集合做进一步的分类:
(1) λ 称为 T 的**点谱**, 如果 $\lambda I - T$ 不是一一的.

定义 6.1.1 设 X 是复的 *Banach* 空间, T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子.
λ 称为 T 的**正则点**,
如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中**稠密**,
并且 $\lambda I - T$ 有**连续的逆算子**.
这样的 λ 的全体称为 T 的**正则点集**, 记为 $\rho(T)$,
有时把**逆算子** $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的**预解式**.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$,
若 $\lambda \in \sigma(T)$, 称 λ 为 T 的**谱点**.

注1 在这个定义中, 未要求 T 是有界线性算子, $\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间.

注2 进一步我们还可以对 T 的谱集合做进一步的分类:
(1) λ 称为 T 的**点谱**, 如果 $\lambda I - T$ 不是一一的.
点谱的全体记为 $\sigma_p(T)$;

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,

$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,

$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

(2) λ 称为 T 的连续谱, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(2) λ 称为 T 的连续谱, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,

$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的剩余谱,

(2) λ 称为 T 的连续谱, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的剩余谱,

如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,

$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,

如果 $\lambda I - T$ 是一一的,

但是 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中不稠密.

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密,

但是它的逆算子是不连续的.

连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,

如果 $\lambda I-T$ 是一一的,

但是 $\lambda I-T$ 的值域在 X 中不稠密.

剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$.

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,
$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密,
但是它的逆算子是不连续的.
连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,
如果 $\lambda I-T$ 是一一的,
但是 $\lambda I-T$ 的值域在 X 中不稠密.
剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$.
显然, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 是互不相交的集合,

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,
$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,
但是它的逆算子是不连续的.
连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,
如果 $\lambda I - T$ 是一一的,
但是 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中不稠密.
剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$.
显然, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 是互不相交的集合,
并且

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{6.1.1}$$

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的,
$\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密,
但是它的逆算子是不连续的.
连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,
如果 $\lambda I - T$ 是一一的,
但是 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中不稠密.
剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$.
显然, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 是互不相交的集合,
并且

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{6.1.1}$$

注3 显然 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 的充要条件是 $T_\lambda x = 0$ 有非零解.

(2) λ 称为 T 的**连续谱**, 如果 $\lambda I-T$ 是一一的,
$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密,
但是它的逆算子是不连续的.
连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$;

(3) λ 称为 T 的**剩余谱**,
如果 $\lambda I-T$ 是一一的,
但是 $\lambda I-T$ 的值域在 X 中不稠密.
剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$.
显然, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 是互不相交的集合,
并且

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T). \tag{6.1.1}$$

注3 显然 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 的充要条件是 $T_\lambda x=0$ 有非零解.
λ 称为 T 的**特征值**,

x 称为对应的**特征元素**,

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

例 6.1.2 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$, $T : H \to H$, $y = Tx$,

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

例 6.1.2 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$, $T : H \to H$, $y = Tx$,

其中

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

例 6.1.2 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$, $T: H \to H$, $y = Tx$,

其中

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

可以证明, $\mathcal{D}(T) = H, \mathcal{R}(T) \subset H$,

x 称为对应的**特征元素**,

T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**,

它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素.

T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**.

注4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathcal{D}(T) \subset X$,

这在无穷维空间是要十分注意的, 我们有以下例子:

例 6.1.2 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$, $T : H \to H$, $y = Tx$,

其中

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

可以证明, $\mathcal{D}(T) = H, \mathcal{R}(T) \subset H$,

当 $x(t) = e^{iwt}$ 时,

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} e^{iw\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{1+iw} e^{iwt}, \tag{6.1.2}$$

即如果 T 作用在 $x(t) = e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值,

即如果 T 作用在 $x(t) = e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t) = e^{iwt} \notin L^2(-\infty, \infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是对应的特征元素,

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值,
$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素,
则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证明 反证法.

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值,
$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素,
则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性无关**的.

证明 **反证法.**

假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的,

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值,

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素,

则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证明 反证法.

假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的,

设 x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素,

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素, 则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证明 **反证法.**

假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的,

设 x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素,

即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}.$$

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上，得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$，

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值，

事实上，$x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值，
$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素，
则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性无关**的.

证明 **反证法.**
假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的，
设 x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素，
即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是特征元素，

即如果 T 作用在 $x(t)=e^{iwt}$ 上, 得到 $\frac{1}{1+iw}x(t)$,

但是这并不意味着 $\frac{1}{1+iw}$ 是 T 的特征值,

事实上, $x(t)=e^{iwt}\notin L^2(-\infty,\infty)$.

可以证明 $\frac{1}{1+iw}$ 是算子T的连续谱.

命题 6.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值,
$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素,
则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性无关**的.

证明 反证法.

假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的,

设 x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素,

即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是特征元素,

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i(i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. □

于是

$$0=(\lambda_m I-T)x_m=\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m-1)$, $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 是线性无关的, 推出 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$ 与 $x_m\neq 0$ 矛盾. $\square$

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. $\square$

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. $\square$

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. $\square$

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,
那么对于 $\forall\lambda \in \rho(T)$, $(\lambda I - T)^{-1}$ *是一个定义在全空间上的**有界线性算子**.*

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 由于 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界的,

于是

$$0=(\lambda_m I-T)x_m=\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m-1)$, $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$ 与 $x_m\neq 0$ 矛盾. $\square$

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T)\subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,
*那么对于 $\forall\lambda\in\rho(T)$, $(\lambda I-T)^{-1}$ 是一个定义在全空间上的**有界线性算子**.*

证明 $\lambda\in\rho(T)$, 由于 $(\lambda I-T)^{-1}$ 是有界的,
故存在一个正数 $m>0$, 使得

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. □

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,
那么对于 $\forall \lambda \in \rho(T)$, $(\lambda I - T)^{-1}$ *是一个定义在全空间上的**有界线性算子**.*

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 由于 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界的,
故存在一个正数 $m > 0$, 使得

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant m \|x\|, \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{6.1.3}$$

于是

$$0 = (\lambda_m I - T)x_m = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ 与 $x_m \neq 0$ 矛盾. □

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,
*那么对于 $\forall \lambda \in \rho(T)$, $(\lambda I - T)^{-1}$ 是一个定义在全空间上的**有界线性算子**.*

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 由于 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界的,
故存在一个正数 $m > 0$, 使得

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant m\|x\|, \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{6.1.3}$$

对于 $\forall y \in X$, 由于 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中稠,

于是

$$0=(\lambda_m I-T)x_m=\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m-1)$, $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 是线性无关的,
推出 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$ 与 $x_m\neq 0$ 矛盾. □

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时, 有以下结论:

定理 6.1.4 设 X 是 *Banach 空间*,
T 是从 $\mathcal{D}(T)\subset X$ 到 X 的*闭线性算子*,
那么对于 $\forall\lambda\in\rho(T)$, $(\lambda I-T)^{-1}$ *是一个定义在全空间上的**有界线性算子**.*

证明 $\lambda\in\rho(T)$, 由于 $(\lambda I-T)^{-1}$ 是有界的,
故存在一个正数 $m>0$, 使得

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant m\,\|x\|\,,\ \ \forall x\in\mathcal{D}(T). \tag{6.1.3}$$

对于 $\forall y\in X$, 由于 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 X 中稠,

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

存在 $\{x_n\}$,
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)x_n=y, \tag{6.1.4}$$
由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x\in\mathcal{D}(T),(\lambda I-T)x=y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$. $\square$

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. $\square$

注 于是当 T 是闭线性算子时,

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. □

注 于是当 T 是闭线性算子时,

$\lambda \in \rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. □

注 于是当 T 是闭线性算子时,

$\lambda \in \rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

例 6.1.5 设 X 是*有限维的 Banach 空间,*

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. □

注 于是当 T 是闭线性算子时,

$\lambda \in \rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

例 6.1.5 设 X 是*有限维的 Banach 空间,*

T 是从 X 到 X 的线性算子,

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)x_n=y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x\in X$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x\in\mathcal{D}(T),(\lambda I-T)x=y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$. □

注 于是当 T 是闭线性算子时,

$\lambda\in\rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$ 且 $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{B}(X)$.

例 6.1.5 设 X 是*有限维的 Banach 空间*,

T 是从 X 到 X 的线性算子,

因为

$$\dim(\mathcal{N}(\lambda I-T))+\dim(\mathcal{R}(\lambda I-T))=\dim X,$$

存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - T)x_n = y, \tag{6.1.4}$$

由(6.1.3)知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列,

由于 X 是Banach空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

由于 T 是闭算子, 结合(6.1.4) 我们有 $x \in \mathcal{D}(T), (\lambda I - T)x = y$,

即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. $\square$

注 于是当 T 是闭线性算子时,

$\lambda \in \rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

例 6.1.5 设 X 是*有限维的 Banach 空间,*

T 是从 X 到 X 的线性算子,

因为

$$\dim(\mathcal{N}(\lambda I - T)) + \dim(\mathcal{R}(\lambda I - T)) = \dim X,$$

其中 dim 表示空间的维数,

因此 $\lambda I-T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$,

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

$\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

$\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

如果 (t_{ij}) 表示 T 在 X 的一组基下的相应的矩阵,

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

$\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

如果 (t_{ij}) 表示 T 在 X 的一组基下的相应的矩阵,

则

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \big| \det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}) = 0\}. \tag{6.1.5}$$

因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

$\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

如果 (t_{ij}) 表示 T 在 X 的一组基下的相应的矩阵,

则

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \big| \det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}) = 0\}. \tag{6.1.5}$$

例 6.1.6 在 Hilbert 空间 $H = l^2[1, \infty)$ 上,

因此 $\lambda I-T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$,

因此 T 的剩余谱是空集.

如果 $\lambda I-T$ 是一一的, $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在,

因为有限维空间上的线性算子是连续的,

这说明 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱,

$\sigma_p(T)=\sigma(T)$.

如果 (t_{ij}) 表示 T 在 X 的一组基下的相应的矩阵,

则

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\det(\lambda\delta_{ij}-t_{ij})=0\}. \tag{6.1.5}$$

例 6.1.6 在 *Hilbert* 空间 $H=l^2[1,\infty)$ 上,

我们定义右移算子 $T:l^2\to l^2$,

$$T:(x_1,x_2,\cdots)\to(0,x_1,x_2,\cdots),$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$.

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$.

由于

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$.

由于

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2,$$

我们有 $\|T\| = 1$.

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$.

由于

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2,$$

我们有 $\|T\|=1$.

因为 $Tx=0$ 意味着 $x=0$, 即 0 不是特征值.

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$.

由于

$$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2,$$

我们有 $\|T\|=1$.

因为 $Tx=0$ 意味着 $x=0$, 即 0 不是特征值.

显然 T 的值域 $\mathcal{R}(T)=\{y=\{y_i\}\mid y_1=0\}$ 在 H 中不稠, 于是 $0\in\sigma_r(T)$.

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$.

由于

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2,$$

我们有 $\|T\| = 1$.

因为 $Tx = 0$ 意味着 $x = 0$, 即 0 不是特征值.

显然 T 的值域 $\mathcal{R}(T) = \{y = \{y_i\} \mid y_1 = 0\}$ 在 H 中不稠, 于是 $0 \in \sigma_r(T)$.

注 **上例说明在无穷维空间, 线性算子可以有不是特征值的谱点.**