内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

§2 共轭空间

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

§ 2　共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

这是我们本章研究的重要对象.

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

下面我们给出共轭空间的概念.

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.
X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.
这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

下面我们给出共轭空间的概念.

定理 5.2.1 *设 X 是赋范空间, 记*

$$X^* = \mathcal{B}(X, K). \tag{5.2.1}$$

称 X^* 为 X 的共轭空间.

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

下面我们给出共轭空间的概念.

定理 5.2.1 *设 X 是赋范空间, 记*

$$X^* = \mathcal{B}(X, K). \tag{5.2.1}$$

称 X^* 为 X 的共轭空间.

X 的共轭空间是 X 上全体有界线性泛函构成的赋范空间.

§2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.
X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.
这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

下面我们给出共轭空间的概念.

定理 5.2.1 *设 X 是赋范空间, 记*

$$X^* = \mathcal{B}(X, K). \tag{5.2.1}$$

称 X^* 为 X 的共轭空间.
X 的共轭空间是 X 上全体有界线性泛函构成的赋范空间.

注 由于K是完备的, X^*是$Banach$空间(定理4.2.7). 即：X^*是X上全体有界线性泛函, X^*是$Banach$空间,

§ 2 共轭空间

上一节，我们说明了一个空间 X 上有“足够多”的线性泛函.

X 上的全体线性泛函组成了一个新的赋范空间，这个空间从另一个侧面反映了赋范空间 X 的许多本质性质.

这是我们本章研究的重要对象.

一、共轭空间的概念

下面我们给出共轭空间的概念.

定理 5.2.1 *设 X 是赋范空间, 记*

$$X^* = \mathcal{B}(X, K). \tag{5.2.1}$$

称 X^* 为 X 的共轭空间.

X 的共轭空间是 X 上全体有界线性泛函构成的赋范空间.

注 由于K是完备的, X^*是$Banach$空间(定理4.2.7). 即：X^*是X上全体有界线性泛函, X^*是$Banach$空间,

这不要求 X 是 $Banach$ 空间.

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

定理 5.2.2 f *是* $L^p[a,b]$ *上的有界线性泛函, 则存在唯一的* $y(t) \in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, *使得*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

定理 5.2.2 f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y(t) \in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且 $\|f\| = \|y\|_q = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

定理 5.2.2 f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y(t) \in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且 $\|f\| = \|y\|_q = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于 $\forall y \in L^q[a,b]$, (5.2.1) 式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1<p<\infty)$

定理 5.2.2 *f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的* $y(t)\in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, *使得*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且 $\|f\|=\|y\|_q=(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于 $\forall y\in L^q[a,b]$, (5.2.1) *式定义了* $L^p[a,b]$ *上的一个有界线性泛函.*

注 这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素1-1对应.

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1<p<\infty)$

定理 5.2.2 *f是$L^p[a,b]$上的有界线性泛函, 则存在唯一的* $y(t)\in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, *使得*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且$\|f\|=\|y\|_q=(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于$\forall y\in L^q[a,b]$, (5.2.1) *式定义了* $L^p[a,b]$ *上的一个有界线性泛函.*

注 这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素1-1对应.

证明 (一) 对于 $y\in L^q[a,b]$ 定义

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

定理 5.2.2 *f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y(t) \in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 使得*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且 $\|f\| = \|y\|_q = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于 $\forall y \in L^q[a,b]$, (5.2.1) 式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.

注 这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素1-1对应.

证明 (一) 对于 $y \in L^q[a,b]$ 定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

其中: $x \in L^p[a,b]$, $f(x)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的一个线性泛函, 且

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1 < p < \infty)$

定理 5.2.2 *f是$L^p[a,b]$上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y(t) \in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 使得*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且$\|f\| = \|y\|_q = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于$\forall y \in L^q[a,b]$, (5.2.1) 式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.

注 这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素1-1对应.

证明 (一) 对于 $y \in L^q[a,b]$ 定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

其中: $x \in L^p[a,b]$, $f(x)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的一个线性泛函, 且

$$|f(x)| = |\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t| \le (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|y\|_q\|x\|,$$

下面我们给出一些有界线 性泛函的具体表示形式.

二、$L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1<p<\infty)$

定理 5.2.2 *f是$L^p[a,b]$上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y(t)\in L^q[a,b]$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, 使得*

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

且$\|f\|=\|y\|_q=(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$.

反之, 对于$\forall y\in L^q[a,b],(5.2.1)$ *式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函.*

注 这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素1-1对应.

证明 (一) 对于 $y\in L^q[a,b]$ 定义

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

其中：$x\in L^p[a,b]$, $f(x)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的一个线性泛函, 且

$$|f(x)|=|\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t|\le(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}=\|y\|_q\|x\|,$$

$\therefore f$ 有界, 且$\|f\|\le\|y\|_q$.

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从分析线性泛函 $f(x)$ 入手, 先让它作用在最简单的函数上, 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从分析线性泛函 $f(x)$ 入手, 先让它作用在最简单的函数上, 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(1)$\forall s \in [a,b]$, 设

$$x_s(t) = \begin{cases} 1, & a \le t \le s, \\ 0, & s < t \le b, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从分析线性泛函 $f(x)$ 入手, 先让它作用在最简单的函数上, 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(1)$\forall s\in[a,b]$, 设

$$x_s(t)=\begin{cases}1, & a\le t\le s,\\ 0, & s<t\le b,\end{cases}\tag{5.2.3}$$

$x_s(t)$ 是 $L^p[a,b]$中的元素(最简单的函数), 线性泛函 $f(x)$可以作用在它上, 且 $f(x_s)$ 是s的函数. 令$g(s)=f(x_s)$.

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得：

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从**分析线性泛函 $f(x)$ 入手， 先让它作用在最简单的函数上，** 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(1)$\forall s\in[a,b]$, 设

$$x_s(t)=\begin{cases}1, & a\le t\le s,\\ 0, & s<t\le b,\end{cases}\tag{5.2.3}$$

$x_s(t)$ 是 $L^p[a,b]$中的元素(最简单的函数)，线性泛函 $f(x)$可以作用在它上，且 $f(x_s)$ 是s的函数. 令$g(s)=f(x_s)$.

(i)下面证明 $g(s)$ 是绝对连续的.

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从分析线性泛函 $f(x)$ 入手, 先让它作用在最简单的函数上, 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(1)$\forall s\in[a,b]$, 设

$$x_s(t)=\begin{cases}1, & a\le t\le s,\\ 0, & s<t\le b,\end{cases} \tag{5.2.3}$$

$x_s(t)$ 是 $L^p[a,b]$中的元素(最简单的函数), 线性泛函 $f(x)$可以作用在它上, 且 $f(x_s)$ 是s的函数. 令$g(s)=f(x_s)$.

(i)下面证明 $g(s)$ 是绝对连续的.

设$\delta_k=[s_k,t_k](k=1,2,\cdots,n)$是一些包含在$[a,b]$中且 没有公共内点的区间, 记 $\varepsilon_k=\operatorname{sgn}(g(t_k)-g(s_k))$, 则

(二) 已知 $f(x)$是$L^p[a,b]$上 的一个线性泛函, 我们试图要给出相应的 $y(t)$,使得:

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

问题的难点在于如何找到这样的 $y(t)$? 我们从分析线性泛函 $f(x)$ 入手, 先让它作用在最简单的函数上, 看看能不能找到这样的 $y(t)$.

(1)$\forall s\in[a,b]$, 设

$$x_s(t)=\begin{cases}1, & a\le t\le s,\\ 0, & s<t\le b,\end{cases} \tag{5.2.3}$$

$x_s(t)$ 是 $L^p[a,b]$中的元素(最简单的函数), 线性泛函 $f(x)$可以作用在它上, 且 $f(x_s)$ 是s的函数. 令$g(s)=f(x_s)$.

(i)下面证明 $g(s)$ 是绝对连续的.

设$\delta_k=[s_k,t_k](k=1,2,\cdots,n)$是一些包含在$[a,b]$中且 没有公共内点的区间, 记 $\varepsilon_k=\operatorname{sgn}(g(t_k)-g(s_k))$, 则

$$\sum_{k=1}^n|g(t_k)-g(s_k)|=\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(g(t_k)-g(s_k))=\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(f(x_{t_k})-f(x_{s_k}))$$

$$f(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (x_{t_k} - x_{s_k}) \leq \|f\| \| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (x_{t_k} - x_{s_k}) \|_{L_p} = \|f\| (\sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_k} \mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\| (\sum_{k=1}^{n} m\delta_k)^{1/p}.$$

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k}) \le \|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p} = \|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n} m\delta_k \to 0$时,

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\le\|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\leq\|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即： $g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\leq \|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即：$g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\leq\|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即: $g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$x_a(t)=\begin{cases}1, & t=a,\\ 0, & a<t\leq b.\end{cases}$$

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\le\|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即： $g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$x_a(t)=\begin{cases}1, & t=a,\\ 0, & a<t\le b.\end{cases}$$

$x_a(t)=0(a,e),\therefore f(x_a(t))=g(a)=0.$

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\le\|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即：$g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$x_a(t)=\begin{cases}1, & t=a,\\ 0, & a<t\le b.\end{cases}$$

$x_a(t)=0(a,e),\therefore f(x_a(t))=g(a)=0.$

$$\therefore g(s)=g(a)+\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t.$$

即

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\le \|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即：$g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$x_a(t)=\begin{cases}1, & t=a,\\ 0, & a<t\le b.\end{cases}$$

$x_a(t)=0(a,e),\therefore f(x_a(t))=g(a)=0.$

$$\therefore g(s)=g(a)+\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t.$$

即

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.4}$$

$$f(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\leq \|f\|\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(x_{t_k}-x_{s_k})\|_{L_p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}\int_{\delta_k}\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\sum_{k=1}^{n}m\delta_k)^{1/p}.$$

于是当$\sum\limits_{k=1}^{n}m\delta_k\to 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(s_k)|\to 0.$$

即：$g(s)$在$[a,b]$上绝对连续. $\therefore g(s)$几乎处处可以求导, $g'(s)$可积,

令 $y(s)=g'(s)$. 由于

$$x_a(t)=\begin{cases}1, & t=a,\\ 0, & a<t\leq b.\end{cases}$$

$x_a(t)=0(a,e),\therefore f(x_a(t))=g(a)=0.$

$$\therefore g(s)=g(a)+\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t.$$

即

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.4}$$

即对于最简单的函数 $x_s(t)$，找到了这样的 $y(t)$.

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s) = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 以下证明当$x(t)$是有界可测函数时,

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 以下证明当$x(t)$是有界可测函数时,

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s) = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 以下证明当$x(t)$是有界可测函数时,

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

成立. 事实上我们可以选取一致有界的阶梯函数列 $\{x_n(t)\}, \{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛到 $x(t)$. 因为

下面我们证明：对简单函数、有界可测函数、进而对所 L^p 中的函数 $x(t)$

$$f(x_s)=\int_a^s y(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x_s(t)y(t)\mathrm{d}t$$

都成立.

(2)由$f(x)$的线性性质, 容易推出, 对所有的阶梯函数都有

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 以下证明当$x(t)$是有界可测函数时,

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

成立. 事实上我们可以选取一致有界的阶梯函数列 $\{x_n(t)\},\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛到 $x(t)$. 因为

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{5.2.5}$$

由$Lebesgn$控制收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

由于 f 是连续的，在(5.2.5)式中令 $n \to \infty$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

由于 f 是连续的，在(5.2.5)式中令 $n \to \infty$, 我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

由于 f 是连续的，在(5.2.5)式中令 $n \to \infty$, 我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.6}$$

(4)证明 $y(t) \in L^q[a,b]$. 对于任意的自然数N, 令

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}$$
$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} |x_n(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

由于 f 是连续的，在(5.2.5)式中令 $n\to\infty$, 我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.6}$$

(4)证明 $y(t)\in L^q[a,b]$. 对于任意的自然数N, 令

$$y_N(t) = \begin{cases} |y(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}y(t), & |y(t)|\le N, \\ 0, & |y(t)|>N. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\| = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty}|x_n(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

由于 f 是连续的，在(5.2.5)式中令 $n\to\infty$, 我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.6}$$

(4)证明 $y(t)\in L^q[a,b]$. 对于任意的自然数N, 令

$$y_N(t) = \begin{cases} |y(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}y(t), & |y(t)|\le N, \\ 0, & |y(t)|>N. \end{cases}$$

$y_N(t)\in L^p$, 且 $y_N(t)$ 是有界可测函数, 由(3)知

$$f(y_N) = \int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} |y_N(t)|^q \mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

$$f(y_N)=\int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N}|y_N(t)|^q\mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中 $E_N=\{t|y_N(t)|\le N\}$. 注意到

$$\begin{aligned}|f(y_N)|&\le\|f\|\|y_N\|_p=\|f\|(\int_{E_N}|y_N(t)|^p)^{1/p}\mathrm{d}t\\&=\|f\|((\int_{E_N}|y(t)|^{q-1})^p\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\int_{E_N}|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/p}\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$$f(y_N) = \int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} |y_N(t)|^q \mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中 $E_N = \{t | y_N(t)| \leq N\}$. 注意到

$$\begin{aligned} |f(y_N)| &\leq \|f\| \|y_N\|_p = \|f\| (\int_{E_N} |y_N(t)|^p)^{1/p} \mathrm{d}t \\ &= \|f\| ((\int_{E_N} |y(t)|^{q-1})^p \mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\| (\int_{E_N} |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/p} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

比较(5.2.7)($f(y_N) = \int_{E_N} |y_N(t)|^q \mathrm{d}t$)和(5.2.8)两式得到

$$f(y_N) = \int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} |y_N(t)|^q \mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中 $E_N = \{t | y_N(t)| \le N\}$. 注意到

$$\begin{aligned} |f(y_N)| &\le \|f\| \|y_N\|_p = \|f\| (\int_{E_N} |y_N(t)|^p)^{1/p} \mathrm{d}t \\ &= \|f\|((\int_{E_N} |y(t)|^{q-1})^p \mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\|(\int_{E_N} |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/p} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

比较(5.2.7)($f(y_N) = \int_{E_N} |y_N(t)|^q \mathrm{d}t$)和(5.2.8)两式得到

$$(\int_{E_N} |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} \le \|f\| \tag{5.2.9}$$

$$f(y_N) = \int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_{E_N} |y_N(t)|^q\mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中 $E_N = \{t||y_N(t)| \le N\}$. 注意到

$$\begin{aligned} |f(y_N)| &\le \|f\|\|y_N\|_p = \|f\|(\int_{E_N} |y_N(t)|^p)^{1/p}\mathrm{d}t \\ &= \|f\|((\int_{E_N} |y(t)|^{q-1})^p\mathrm{d}t)^{1/p} = \|f\|(\int_{E_N} |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/p} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

比较(5.2.7)($f(y_N) = \int_{E_N} |y_N(t)|^q\mathrm{d}t$)和(5.2.8)两式得到

$$(\int_{E_N} |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q} \le \|f\| \tag{5.2.9}$$

令 $N \to \infty$, 我们得到

$$(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q} \le \|f\|, \tag{5.2.10}$$

$$f(y_N)=\int_a^b y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N} y_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N}|y_N(t)|^q\mathrm{d}t, \tag{5.2.7}$$

其中 $E_N=\{t|y_N(t)|\le N\}$. 注意到

$$\begin{aligned}|f(y_N)| &\le \|f\|\|y_N\|_p=\|f\|(\int_{E_N}|y_N(t)|^p)^{1/p}\mathrm{d}t\\ &=\|f\|((\int_{E_N}|y(t)|^{q-1})^p\mathrm{d}t)^{1/p}=\|f\|(\int_{E_N}|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/p}\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

比较(5.2.7)($f(y_N)=\int_{E_N}|y_N(t)|^q\mathrm{d}t$)和(5.2.8)两式得到

$$(\int_{E_N}|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}\le\|f\| \tag{5.2.9}$$

令 $N\to\infty$, 我们得到

$$(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}\le\|f\|, \tag{5.2.10}$$

即$y(t)\in L^q$.

(5)证明公式 $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ 对任意的 $x\in L^p$成立.

(5)**证明公式** $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ **对任意的** $x\in L^p$**成立**.

对于$\forall x\in L^p$, 存在有界可测函数列 $x_n(t)$ 使得

$$(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\to 0(n\to\infty).$$

(5)**证明公式** $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ **对任意的** $x\in L^p$**成立.**

对于$\forall x\in L^p$, 存在有界可测函数列 $x_n(t)$ 使得

$$(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\to 0(n\to\infty).$$

$\because$ $x_n(t)$有界, 由(3)可知:

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.11}$$

(5)**证明公式** $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ **对任意的** $x\in L^p$**成立**.

对于$\forall x\in L^p$, 存在有界可测函数列 $x_n(t)$ 使得

$$(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\to 0(n\to\infty).$$

$\because x_n(t)$有界, 由(3)可知:

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.11}$$

由(4)知 $y(t)\in L^q$. 结合(一)我们有: $\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t$ 定义了一个有界（连续）线性泛函.

(5)**证明公式** $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ **对任意的** $x\in L^p$**成立**.

对于$\forall x\in L^p$, 存在有界可测函数列 $x_n(t)$ 使得

$$\left(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\to 0(n\to\infty).$$

$\because x_n(t)$有界, 由(3)可知:

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.11}$$

由(4)知 $y(t)\in L^q$. 结合(一)我们有: $\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t$ 定义了一个有界（连续）线性泛函.

在(5.2.11)式两边，令 $n\to\infty$, 我们得到

(5)**证明公式** $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ **对任意的** $x\in L^p$**成立**.

对于$\forall x\in L^p$, 存在有界可测函数列 $x_n(t)$ 使得

$$\left(\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\to 0(n\to\infty).$$

$\because x_n(t)$有界, 由(3)可知:

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.11}$$

由(4)知 $y(t)\in L^q$. 结合(一)我们有: $\int_a^b x_n(t)y(t)\mathrm{d}t$ 定义了一个有界（连续）线性泛函.

在(5.2.11)式两边，令 $n\to\infty$, 我们得到

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{5.2.12}$$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 $H\ddot{o}lder$ 不等式,

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \leq \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \le \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \le (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \le \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

(三)唯一性. 如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \leq \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

(三)唯一性. 如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y_2(t)\mathrm{d}t$$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 *Hölder* 不等式,

$$|f(x)| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \le \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

(三)唯一性. 如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore \int_a^b x(t)(y_1(t) - y_2(t))\mathrm{d}t = 0, \forall x \in L^p.$$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 $H\ddot{o}lder$ 不等式,

$$|f(x)| \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \leq \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

(三)唯一性. 如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore \int_a^b x(t)(y_1(t) - y_2(t))\mathrm{d}t = 0, \forall x \in L^p.$$

即$y(t) - y_1(t)$ 对应一个零泛函（f_1）, 于是$\|f_1\| = \|y_1 - y_2\| = 0. \therefore y_1 = y_2.$

注1 $X = L^p[a,b]$, 则$X^* = L^q[a,b]$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1.$

对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 由(5.2.12) 式和 $Hölder$ 不等式,

$$|f(x)| \leq (\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} \cdot (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q} = \|x\|\|y\|. \tag{5.2.13}$$

$\therefore \|f\| \leq \|y\|$, 结合(5.2.10)式, 我们有

$$\|f\| = \|y\| = (\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{5.2.14}$$

(三)唯一性. 如果存在$y_1(t), y_2(t)$使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_1(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore \int_a^b x(t)(y_1(t) - y_2(t))\mathrm{d}t = 0, \forall x \in L^p.$$

即$y(t) - y_1(t)$ 对应一个零泛函（f_1），于是$\|f_1\| = \|y_1 - y_2\| = 0. \therefore y_1 = y_2.$

注1 $X = L^p[a,b]$, 则$X^* = L^q[a,b]$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1.$

即 $\forall f \in X^*, \exists y \in L^q$, 使得 $f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$, f和q 一一对应.

在等距同构的意义下, $(L^p[a,b])^*$ 和 $L^q[a,b]$ 相等.

在等距同构的意义下, $(L^p[a,b])^*$ 和 $L^q[a,b]$ 相等.

注2 当$p=2$时, $X=L^2, X^*=L^2$. X 是它的共轭空间X^*一样.

在等距同构的意义下, $(L^p[a,b])^*$ 和 $L^q[a,b]$ 相等.

注2 当$p=2$时, $X=L^2, X^*=L^2$. X 是它的共轭空间X^*一样.

注3 当$p=1$时， $X=L[a,b]$. 可以类似的证明. $X^*=L^\infty[a,b](p=1, q=\infty)$.

在等距同构的意义下, $(L^p[a,b])^*$ 和 $L^q[a,b]$ 相等.

注2 当$p=2$时, $X=L^2, X^*=L^2$. X 是它的共轭空间X^*一样.

注3 当$p=1$时， $X=L[a,b]$. 可以类似的证明. $X^*=L^\infty[a,b](p=1, q=\infty)$.

注4 对于离散的情况,类似的我们有 $(l^p)^*=l^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

三、C[a,b]的共轭空间

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \quad x\in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t) \quad x \in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\| = \bigvee_a^b(v)$，其中$\bigvee_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \quad x\in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\|=\bigvee_a^b(v)$，其中$\bigvee_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之，$[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $v(t)$，由(5.2.15)式定义了 $C[a,b]$上 的一个有界线性泛函.

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \quad x\in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\|=\bigvee_a^b(v)$，其中$\bigvee_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之，$[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $v(t)$，由(5.2.15)式定义了 $C[a,b]$上 的一个有界线性泛函.

证明 首先要找出这样的 $v(t)$.

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \quad x\in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\|=\bigvee_a^b(v)$，其中$\bigvee_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之，$[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $v(t)$，由(5.2.15)式定义了 $C[a,b]$上 的一个有界线性泛函.

证明 首先要找出这样的 $v(t)$.

对于每一个 $s\in[a,b]$，χ_s 表示子区间 $[a,s]$ 上的特征函数，即:

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t) \quad x \in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\| = \bigvee\limits_a^b(v)$，其中$\bigvee\limits_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之，$[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $v(t)$，由(5.2.15)式定义了 $C[a,b]$上 的一个有界线性泛函.

证明 首先要找出这样的 $v(t)$.

对于每一个 $s \in [a,b]$，χ_s 表示子区间 $[a,s]$ 上的特征函数，即:

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & a \le t \le s, \\ 0, & s < t \le b. \end{cases}$$

三、C[a,b]的共轭空间

定理 5.2.3 设f是$C[a,b]$上的有界线性泛函，则存在$[a,b]$上的有界变差函数$v(t)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \quad x\in C[a,b], \tag{5.2.15}$$

并且 $\|f\|=\bigvee_a^b(v)$，其中$\bigvee_a^b(v)$是$v(t)$在$[a,b]$上的全变差.

反之，$[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $v(t)$，由(5.2.15)式定义了 $C[a,b]$上 的一个有界线性泛函.

证明 首先要找出这样的 $v(t)$.

对于每一个 $s\in[a,b]$，χ_s 表示子区间 $[a,s]$ 上的特征函数，即:

$$\chi_s(t)=\begin{cases}1, & a\le t\le s,\\ 0, & s<t\le b.\end{cases}$$

$\chi_s\in L^\infty[a,b]$，但是它不属于 $C[a,b]$，f 不能作用到它们上

因为$C[a,b]$ 是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

因为$C[a,b]$ 是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

$$v(s)=F(\chi_s)\quad(s\in[a,b]).\tag{5.2.16}$$

因为$C[a,b]$ 是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

$$v(s)=F(\chi_s)\quad (s\in[a,b]). \tag{5.2.16}$$

我们证明 $v(s)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 对 $[a,b]$ 做分划

因为$C[a,b]$ 是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

$$v(s)=F(\chi_s) \quad (s\in[a,b]). \tag{5.2.16}$$

我们证明 $v(s)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 对 $[a,b]$ 做分划

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

因为$C[a,b]$ 是$l^{\infty}[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^{\infty}[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

$$v(s)=F(\chi_s)\quad (s\in[a,b]). \tag{5.2.16}$$

我们证明 $v(s)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 对 $[a,b]$ 做分划

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

令

$$\varepsilon_k=\operatorname{sgn}(v(t_k)-v(t_{k-1}))\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

则

因为$C[a,b]$ 是$l^\infty[a,b]$的子空间,由$Hahn-Banach$定理, 可以把f保范延拓到$L^\infty[a,b]$上, 设F是这样的延拓.F 可以作用在$\chi_s(t)$ 上. 记

$$v(s)=F(\chi_s)\quad (s\in[a,b]). \tag{5.2.16}$$

我们证明 $v(s)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 对 $[a,b]$ 做分划

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

令

$$\varepsilon_k=\operatorname{sgn}(v(t_k)-v(t_{k-1}))\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

则

$$\sum_{k=1}^n|v(t_k)-v(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(v(t_k)-v(t_{k-1}))$$

$$=\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(F(\chi_{t_k})-F(\chi_{t_{k-1}}))=F(\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(\chi_{t_k}-\chi_{t_{k-1}}))$$

$$\le\|F\|\,\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k(\chi_{t_k}-\chi_{t_{k-1}})\|.$$

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \leq \|f\|, \tag{5.2.17}$$

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \le \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee\limits_{a}^{b} \le \|f\|$.

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \le \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee\limits_{a}^{b} \le \|f\|$.

对于任给的 $x \in C[a,b]$, 令

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \leq \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee_a^b \leq \|f\|$.

对于任给的 $x \in C[a,b]$, 令

$$y(s) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(\chi_{t_k}(s) - \chi_{t_{k-1}}(s)) \quad (s \in [a,b]),$$

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \leq \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee\limits_{a}^{b} \leq \|f\|$.

对于任给的 $x \in C[a,b]$, 令

$$y(s) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(\chi_{t_k}(s) - \chi_{t_{k-1}}(s)) \quad (s \in [a,b]),$$

由（5.2.16）式$(v(s) = F(\chi_s))$, 结合 F 是线性的, 我们有

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \leq \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee\limits_a^b \leq \|f\|$.

对于任给的 $x \in C[a,b]$, 令

$$y(s) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(\chi_{t_k}(s) - \chi_{t_{k-1}}(s)) \quad (s \in [a,b]),$$

由（5.2.16）式$(v(s) = F(\chi_s))$, 结合 F 是线性的, 我们有

$$F(y) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(v(t_k) - v(t_{k-1})).$$

由于 $\|F\| = \|f\|$, $\|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\| = 1$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| \le \|f\|, \tag{5.2.17}$$

即$v(s)$ 是有界变差函数, 并且 $\bigvee\limits_{a}^{b} \le \|f\|$.

对于任给的 $x \in C[a,b]$, 令

$$y(s) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(\chi_{t_k}(s) - \chi_{t_{k-1}}(s)) \quad (s \in [a,b]),$$

由（5.2.16）式($v(s) = F(\chi_s)$) , 结合 F 是线性的, 我们有

$$F(y) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(v(t_k) - v(t_{k-1})).$$

另外 $x(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} x(s)(\chi_{t_k}(s) - \chi_{t_{k-1}}(s))$.

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y - x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$,

记 $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y - x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$, 于是根据 $Riemann - Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x) = \int_a^b x(t) dv(t).$$

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y - x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$, 于是根据 $Riemann - Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x \in C[a, b]$, $F(x) = f(x)$, 故 $(5.2.15)$ 式成立.

记 $\delta=\max\limits_{1\leq k\leq n}|t_k-t_{k-1}|$, 当$\delta\to 0$时, $\|y-x\|\to 0$, 且由F 的连续性, $F(y)\to F(x)$,

于是根据 $Riemann-Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x\in C[a,b]$, $F(x)=f(x)$, 故 $(5.2.15)$ 式成立.

另一方面, 由 $Riemann-Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x\in C[a,b]$,

记 $\delta = \max\limits_{1\leq k\leq n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y - x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$, 于是根据 $Riemann - Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x \in C[a, b]$, $F(x) = f(x)$, 故 (5.2.15) 式成立.

另一方面, 由 $Riemann - Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x \in C[a, b]$,

$$|f(x)| = |\int_a^b x(t)dv(t)| \leq \|x\| \bigvee_a^b(v).$$

记 $\delta=\max\limits_{1\le k\le n}|t_k-t_{k-1}|$, 当$\delta\to 0$时, $\|y-x\|\to 0$, 且由F 的连续性, $F(y)\to F(x)$,

于是根据 $Riemann-Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x\in C[a,b]$, $F(x)=f(x)$, 故 (5.2.15) 式成立.

另一方面, 由 $Riemann-Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x\in C[a,b]$,

$$|f(x)|=|\int_a^b x(t)dv(t)|\le \|x\|\bigvee_a^b(v).$$

因此$\|f\|\le\bigvee\limits_a^b(v)$. 从而$\|f\|=\bigvee\limits_a^b(v)$.

记 $\delta=\max\limits_{1\le k\le n}|t_k-t_{k-1}|$, 当$\delta\to 0$时, $\|y-x\|\to 0$, 且由F 的连续性, $F(y)\to F(x)$, 于是根据 $Riemann-Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x\in C[a,b]$, $F(x)=f(x)$, 故 (5.2.15) 式成立.

另一方面, 由 $Riemann-Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x\in C[a,b]$,

$$|f(x)|=|\int_a^b x(t)dv(t)|\le\|x\|\bigvee_a^b(v).$$

因此$\|f\|\le\bigvee\limits_a^b(v)$. 从而$\|f\|=\bigvee\limits_a^b(v)$.

反之, 如果$v(t)$是$[a,b]$上的有界变差函数, 由$Riemann-Steiltjes$积分的性质, (5.2.15)式 定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y-x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$, 于是根据 $Riemann - Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x \in C[a,b]$, $F(x) = f(x)$, 故 $(5.2.15)$ 式成立.

另一方面, 由 $Riemann - Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x \in C[a,b]$,

$$|f(x)| = |\int_a^b x(t)dv(t)| \le \|x\| \bigvee_a^b (v).$$

因此$\|f\| \le \bigvee\limits_a^b (v)$. 从而$\|f\| = \bigvee\limits_a^b (v)$.

反之, 如果$v(t)$是$[a,b]$上的有界变差函数, 由$Riemann - Steiltjes$积分的性质, $(5.2.15)$式 定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

注 如果我们规定$v(a) = 0$,且$v(t+0) = v(t)$ $(a < t < b)$, 则由线性泛函f确定的$v(t)$是唯一确定的.

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$, 当$\delta \to 0$时, $\|y - x\| \to 0$, 且由F 的连续性, $F(y) \to F(x)$, 于是根据 $Riemann - Steiltjes$ 积分的定义

$$F(x) = \int_a^b x(t)dv(t).$$

因为 $x \in C[a,b]$, $F(x) = f(x)$, 故 (5.2.15) 式成立.

另一方面, 由 $Riemann - Steiltjes$ 积分的性质, 对于每一个 $x \in C[a,b]$,

$$|f(x)| = |\int_a^b x(t)dv(t)| \le \|x\| \bigvee_a^b(v).$$

因此$\|f\| \le \bigvee\limits_a^b(v)$. 从而$\|f\| = \bigvee\limits_a^b(v)$.

反之, 如果$v(t)$是$[a,b]$上的有界变差函数, 由$Riemann - Steiltjes$积分的性质, (5.2.15)式 定义了$C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

注 如果我们规定$v(a) = 0$,且$v(t+0) = v(t)$ $(a < t < b)$, 则由线性泛函f确定的$v(t)$是唯一确定的.

即$C[a,b]$上的线性泛函f与$V[a,b]$中的元素$v(t)$一一对应, $(C[a,b])^* = V[a,b]$.