内蒙古大学 数学科学学院

泛函分析 期中考试试卷（一）参考答案及评分细则

一、(本题满分15分)

1. 叙述范数的定义;
2. 叙述两个范数等价的定义;
3. 举出两个等价范数的例子(不需证明).

解: 1. 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间, 函数$\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$满足: 对于任意的$x\in X, y\in X$及$\alpha\in\mathbb{K}$

(1) $\|x\|\geqslant 0$;

(2) $\|x\|=0$当且仅当$x=0$;

(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;

(4) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

则称$\|\cdot\|$是X上的范数. ······························ 5分

2. 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间X上的两个范数, 如果存在$a>0$, $b>0$使得

$$a\|\cdot\|_1\leq\|\cdot\|_2\leq b\|\cdot\|_1,$$

则称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的. ······························ 10分

3. 例如: $\mathbb{R}^n$中的所有范数均等价. 可以定义对于每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|;$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|\xi_k|.$$

则$\mathbb{R}^n$中$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$等价, $\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_\infty$等价. ······························ 15 分

二、(本题满分15分)

设(X,d)是距离空间, $\{x_n\}$是X中的Cauchy 列, $\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子列，并且$x_{n_k}\to x_0$. 证明：$x_n\to x_0$.

证明: 对于$\forall \varepsilon > 0$. 由于$\{x_n\}$是Cauchy列, 故存在N_1, 当$m, n > N_1$时,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由于$x_{n_k} \to x_0$, 故存在K, 当$k > K$时,

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N = \max\{N_1, K\} + 1$, 当$n > N$时, 有$n_N \geq N > N_1$, 所以

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此$x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

三、(本题满分15分)

设$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间, X_0是X中的稠密子集, 证明对于每一个$x \in X$, 存在$\{x_n\} \subset X_0$, 使得$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, 并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

证明: 对于任意$x \in X$, 因为X_0是X中的稠密子集, 故存在$x_1 \in X_0$使$\|x - x_1\| < 1/2^3$, 此时$\|x_1\| = \|x - (x - x_1)\| \leq \|x\| + \|x - x_1\| < \|x\| + 1/2^3$. 对于$x - x_1 \in X$, 再由于$X_0$是$X$中的稠密子集, 故存在$x_2 \in X_0$使$\|x - x_1 - x_2\| < 1/2^4$, 此时

$$\begin{aligned}
\|x_2\| &= \|(x - x_1) - (x - x_1 - x_2)\| \\
&\leq \|x - x_1\| + \|x - x_1 - x_2\| \\
&< 1/2^3 + 1/2^4 < 1/2^2.
\end{aligned}$$

若$x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$已确定, 则对于$x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \in X$, 因为$X_0$是$X$中的稠密子集, 故存在$x_n \in X_0$使$\|x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k - x_n\| < 1/2^{n+2}$, 此时由$\|x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\| < 1/2^{n+1}$可得

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &= \|(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k) - (x - \sum_{k=1}^{n} x_k)\| \\
&\leq \|x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\| + \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| \\
&< 1/2^{n+1} + 1/2^{n+2} < 1/2^n.
\end{aligned}$$

这样我们就得到序列$\{x_n\} \subset X_0$满足

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < 1/2^{n+2}; \tag{1}$$

$$\|x_1\| < \|x\| + 1/2^3; \tag{2}$$

$$\|x_n\| < 1/2^n \ (n \geq 2). \tag{3}$$

对于(1)式令$n \to \infty$得$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. 由(2)和(3)得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \|x\| + 1 < \infty$. ·· 15分

四、(本题满分15分)

设X是内积空间, $x, y \in X$都是非零元, 证明

x 与y正交$\Leftrightarrow$ 对于任意的数α, $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$.

证明: $\Leftarrow$) 对于任意的数α, 由于x 与y正交, 故$(x, y) = (y, x) = 0$. 由此可得

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y\|^2 &= (x + \alpha y, x + \alpha y) \\ &= (x, x) + \alpha \cdot (y, x) + \overline{\alpha} \cdot (x, y) + |\alpha|^2 (y, y) \\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

同理计算可得$\|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2$. 因此$\|x + \alpha y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2$, 故$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$. ································· 7分

$\Rightarrow$) 对于任意的数α, 由$\|x + \alpha y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2$可计算得

$$\alpha \cdot (y, x) + \overline{\alpha} \cdot (x, y) = 0.$$

取$\alpha = (x, y)$, 则$|(x, y)|^2 = 0$, 从而$(x, y) = 0$. 因此x 与y正交. ··············· 15分

五、(本题满分20分)

1. 叙述距离空间中完备的定义;
2. 证明$C[a, b]$ 是完备的距离空间.

解: 1. 如果距离空间中的每个Cauchy列均收敛, 则称距离空间是完备的.

······························ 5分

证明: 2. 设$\{x_n\}$是$C[a, b]$中的Cauchy列, 其中$x_n = x_n(t)$. 我们分以下三步来证明.

(i) 由于$\{x_n(t)\}$ 是$C[a, b]$ 中的Cauchy 列, 故对于$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当$n, m \geq N$ 时,

$$d(x_n, x_m) = \max_{a \leq t \leq b} | x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon,$$

从而 $\forall t\in[a,b]$, $|\ x_n(t)-x_m(t)\ |<\varepsilon\ \ (n,m\geq N)$. 因此$\{x_n(t)\}$ 是$\mathbb{R}$ 中的一个Cauchy 数列. 由$\mathbb{R}$ 的完备性可知存在$x(t)$, 使得

$$x_n(t)\to x(t)\quad (n\to\infty).$$

(ii) 下面证$x(t)\in C[a,b]$.
当$n,m\geq N$ 时,

$$|\ x_n(t)-x_m(t)\ |<\varepsilon,\ \forall t\in[a,b].$$

对于固定的 t, 令$m\to\infty$, 有

$$|\ x_n(t)-x(t)\ |\leq\varepsilon\ (n\geq N),\ \forall t\in[a,b],$$

即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到$x(t)$. 因此$x(t)$连续, 即$x(t)\in C[a,b]$.

(iii) 当$n\geq N$时

$$|\ x_n(t)-x(t)\ |\leq\varepsilon,\ \forall t\in[a,b],$$

所以

$$\max_{a\leq t\leq b}|\ x_n(t)-x(t)\ |\leq\varepsilon,$$

即 $d(x_n,x)\leq\varepsilon\ (n\geq N)$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. ………………………… 20分

六、(本题满分20分)

(1)叙述$C[a,b]$中列紧的充要条件.

(2)令$h(t)\in C[0,1]$, $g_n(t)=\int_0^1\cos^3(t+nu)h(u)\mathrm{d}u$, 证明$\{g_n(t)\}$有一个收敛的子列.

解: (1) $C[a,b]$ 中的子集A 是列紧的当且仅当A 中的函数是一致有界和等度连续的. 即存在 $K>0$, 使得对于每一点$t\in[a,b]$及一切$x\in A$,

$$|\ x(t)\ |\leq K,$$

并且对于任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$|\ t_1-t_2\ |<\delta$ 时,

$$|\ x(t_1)-x(t_2)\ |<\varepsilon\qquad(\forall\ x\in\ A).$$

……………………………… 5分

证明: (2) 令$A=\{g_n(t)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. 根据数学分析中含参变量积分的连续性定理可得$A\subset C[0,1]$. 下面证明$A$是$C[0,1]$中的列紧集.

首先证明A是一致有界的. 由于$h(t)\in C[0,1]$, 故存在$K>0$使得对于任意的$t\in[0,1]$, $|h(t)|<K$. 由此可知对于$\forall n\in\mathbb{N}$, 对于任意的$\forall t\in[0,1]$,

$$|g_n(t)|\le\int_0^1|\cos^3(t+nu)h(u)|\mathrm{d}u\le K.$$

然后证明A是等度连续的. 对于任意的$\varepsilon>0$, 取$\delta=\frac{\varepsilon}{3K}>0$, 当$|\ t_1-t_2\ |<\delta$时, 对于$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& |g_n(t_1)-g_n(t_2)| \\
= & \ |\int_0^1(\cos^3(t_1+nu)-\cos^3(t_2+nu))h(u)\mathrm{d}u| \\
\le & \int_0^1|\cos^3(t_1+nu)-\cos^3(t_2+nu)|\cdot K\mathrm{d}u \\
= & \ K\int_0^1|3\cos^2(\xi)\sin(\xi)|\cdot|t_1+nu-(t_2+nu)|\mathrm{d}u(\text{ 其中}\xi\text{介于}t_1+nu\text{与}t_2+nu\text{之间}) \\
\le & \ 3K|t_1-t_2|\ =\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

由(1)可知A 是列紧的, 从而$\{g_n(t)\}$有收敛的子列. ··············· 20 分