内蒙古大学数学科学学院

泛函分析

Functional Analysis

主 讲 孙 炯 教 授

电话： 0471-4992491（H）， 13947103671
Emai： masun@imu.edu.cn

§2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

§ 2　有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

§ 2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

§ 2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

因此, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 也是距离空间.

§ 2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

因此, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 也是距离空间.

显然在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中**可以讨论算子列按范数的收敛性**.

§ 2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

因此, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 也是距离空间.

显然在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中**可以讨论算子列按范数的收敛性**.

定义 4.2.1 设 $A_n,\ A \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 如果 $\|A_n - A\| \to 0\ (n \to \infty)$, 则***称有界线性算子 A_n 按范数收敛到有界线性算子 A.***

§ 2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

因此, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 也是距离空间.

显然在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以讨论算子列按范数的收敛性.

定义 4.2.1 设 A_n, $A \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 如果 $\|A_n - A\| \to 0 \ (n \to \infty)$, *则称有界线性算子 A_n 按范数收敛到有界线性算子 A.*

定理 4.2.2 *空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中 算子列按范数收敛 等价于 线性算子列在 X 中的单位球面 S 上一致收敛.*

§2 有界线性算子空间的收敛与完备性

一、有界线性算子空间中的收敛性

由算子 的范数 $\|\cdot\|$ 可以**诱导出距离**:

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\|.$$

因此, $\mathscr{B}(X, X_1)$ 也是距离空间.

显然在 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中可以讨论算子列按范数的收敛性.

定义 4.2.1 设 $A_n,\ A \in \mathscr{B}(X, X_1)$, 如果 $\|A_n - A\| \to 0\ (n \to \infty)$, 则*称有界线性算子 A_n 按范数收敛到有界线性算子 A.*

定理 4.2.2 *空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中 算子列按范数收敛 等价于 线性算子列在 X 中的单位球面 S 上一致收敛.*

证明 必要性. **即证明:** $\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| \to 0$ **(收敛的速度与 x 无关, $x \in S$.)**

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0(n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \le \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与**x**无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0(n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \le \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \ge N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0$.

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon$.

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **(收敛的速度与x无关)** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon.$

即 A_n **按范数收敛**到 A.

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与 x 无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon.$

即 A_n **按范数收敛**到 A.

注 **线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛等价于在有界集上一致收敛.**

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_n x - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon.$

即 A_n 按范数收敛到 A.

注 线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛等价于在有界集上一致收敛.

事实上, 设 $M \subset X$ 是有界集, 则对于任何 $x \in M$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$, 于是

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \le \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0(n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明** $\|A_nx - Ax\| \to 0$ **（收敛的速度与x无关）** $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0.$

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \ge N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_nx - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_nx - Ax\| \le \varepsilon.$

即 A_n 按范数收敛到 A.

注 线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛等价于在有界集上一致收敛.

事实上, 设 $M \subset X$ 是有界集, 则对于任何 $x \in M$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$, 于是

$$\|A_n(\frac{x}{\|x\|}) - A(\frac{x}{\|x\|})\| < \varepsilon \ \ (n\text{充分大}),$$

即

事实上, 对于任何 $x \in S, \|x\| = 1$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

充分性. **即证明 $\|A_n x - Ax\| \to 0$ （收敛的速度与x无关） $\Rightarrow \|A_n - A\| \to 0$.**

事实上, 由 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则

对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是 $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon.$

即 A_n 按范数收敛到 A.

注 线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛等价于在有界集上一致收敛.

事实上, 设 $M \subset X$ 是有界集, 则对于任何 $x \in M$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$, 于是

$$\|A_n(\frac{x}{\|x\|}) - A(\frac{x}{\|x\|})\| < \varepsilon \quad (n\text{充分大}),$$

即 $$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon\|x\| \leq K\varepsilon, \ (n\text{充分大}), \ \text{其中 } K\text{是 } M\text{的界}$$

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, **根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.**

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, **根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.**

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛)**, **还可定义其它收敛方式.**

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, **根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.**

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛)**, **还可定义其它收敛方式.**

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有逐点收敛、一致收敛,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, 根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, 除了按范数收敛(或称一致收敛), 还可定义其它收敛方式.

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.

如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,
处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, **根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.**

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛)**, **还可定义其它收敛方式.**

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.
如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, 根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛)**, **还可定义其它收敛方式.**

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.

如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则称 T_n 逐点收敛到 T, 或称 T_n 强收敛到 T. 记为 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, 根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛)**, **还可定义其它收敛方式.**

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.

如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则称 T_n 逐点收敛到 T, 或称 T_n 强收敛到 T. 记为 $T_n \xrightarrow{强} T$.

注 T_n 按范数收敛到 T(一致收敛) $\Rightarrow T_n \xrightarrow{强} T$.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有逐点收敛、一致收敛,

处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, 根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, 除了按范数收敛(或称一致收敛), 还可定义其它收敛方式.

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.

如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则称 T_n 逐点收敛到 T, 或称 T_n 强收敛到 T. 记为 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.

注 T_n 按范数收敛到 T(一致收敛) $\Rightarrow T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.

因 $\forall x \in X, \|T_n - T\| < \varepsilon \Rightarrow \|(T_n - T)x\| < \varepsilon \|x\|$.

即在有界集上一致收敛（收敛的速度与 x 无关）.

在数学分析中, 函数的收敛有**逐点收敛、一致收敛**,
处理不同的问题使用不同的收敛性.

在泛函分析中, 根据研究问题不同, 也可以考虑不同的收敛性.

线性算子在空间 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中, **除了按范数收敛(或称一致收敛), 还可定义其它收敛方式.**

定义 4.2.3 设 $T_n, T \in \mathscr{B}(X, X_1)(n = 1, 2, \cdots)$.
如果对于 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx \quad (n \to \infty)$, *即*

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则称 T_n 逐点收敛到 T, 或称 T_n 强收敛到 T. 记为 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.

注 T_n 按范数收敛到 T(一致收敛) $\Rightarrow T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.
因 $\forall x \in X, \|T_n - T\| < \varepsilon \Rightarrow \|(T_n - T)x\| < \varepsilon\|x\|$.
但是强收敛不一定是一致收敛.

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \le 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

(2) T_n **不是按范数收敛到零**.

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

(2) T_n **不是按范数收敛到零**.

令 $y_n = (0, \cdots, 1, \cdots) \in l^p$, **则**

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. **且** $\|T_n\| \le 1$. **现考虑此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

(2) T_n **不是按范数收敛到零**.

令 $y_n = (0, \cdots, 1, \cdots) \in l^p$, **则**

$$\|y_n\| = 1, \quad T_n y_n = (1, 0, 0, \cdots),$$

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

(2) T_n **不是按范数收敛到零**.

令 $y_n = (0, \cdots, 1, \cdots) \in l^p$, **则**

$$\|y_n\| = 1, \quad T_n y_n = (1, 0, 0, \cdots),$$

并且 $\|T_n y_n\| = 1.$,**于是**$\|T_n\| \geq \|T_n(y_n)\| = 1,$

例 4.2.4 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, *考虑左移算子:*

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} < (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子. 且 $\|T_n\| \leq 1$. 现考虑**此线性算子列的收敛性**.

T_n **强收敛到零. 但** T_n **不是按范数收敛到零.**

(1) T_n **强收敛到零**.

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p} = 0.$$

(2) T_n **不是按范数收敛到零**.

令 $y_n = (0, \cdots, 1, \cdots) \in l^p$, 则

$$\|y_n\| = 1, \qquad T_n y_n = (1, 0, 0, \cdots),$$

并且 $\|T_n y_n\| = 1.$,于是$\|T_n\| \geq \|T_n(y_n)\| = 1,$

所 $\|T_n\| = 1, \quad \|T_n - 0\| = 1$ 不收敛到零.

二、有界线性算子空间的完备性

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.

一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.

一个赋范空间是完备的(Banach空间)⇔空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X *是赋范空间*, X_1 ***是 Banach 空间***, ***则*** $\mathscr{B}(X, X_1)$ ***是 Banach 空间.***

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)⇔空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 *设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.*

证明分析:

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 *设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.*

证明分析:

(1) **要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛**（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.

一个赋范空间是完备的(Banach空间)⇔空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛 （注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

a. 构造一个线性算子 T;

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)⇔空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛 (注意：是按线性算子空间中的范数收敛.) .

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

a. 构造一个线性算子 T;

b. 证明 T 是有界线性算子;

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

a. 构造一个线性算子 T;

b. 证明 T 是有界线性算子;

c. 证明 T_n 按算子的范数趋近于 T.

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.

一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间，只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

a. 构造一个线性算子 T;

b. 证明 T 是有界线性算子;

c. 证明 T_n 按算子的范数趋近于 T.

证明 1. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的 Cauchy 列.

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 设 X 是赋范空间, X_1 是 *Banach* 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 *Banach* 空间.

证明分析:
(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间，只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：
a. 构造一个线性算子 T;
b. 证明 T 是有界线性算子;
c. 证明 T_n 按算子的范数趋近于 T.

证明 1. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的 Cauchy 列.
则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时, 有

二、有界线性算子空间的完备性

有界线性算子组成的空间是一个赋范空间，于是可以讨论它的完备性.
一个赋范空间是完备的(Banach空间)$\Leftrightarrow$空间中的Cauchy列一定收敛.

定理 4.2.5 *设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.*

证明分析:

(1) 要证明 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间, 只要证明此空间中的任意一Cauchy $\{T_n\}$列都收敛（注意：是按线性算子空间中的范数收敛.）.

(2) 为此, 对于空间中的任意一个 Cauchy 列 T_n, 要做以下三件事情：

a. 构造一个线性算子 T;

b. 证明 T 是有界线性算子;

c. 证明 T_n 按算子的范数趋近于 T.

证明 1. 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 中的 Cauchy 列.

则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时, 有

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

于是, 对于 $\forall x \in X$,

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

由于极限运算是线性的, T **是从 X 到 X_1 的线性算子**.

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

由于极限运算是线性的, T **是从 X 到 X_1 的线性算子**.

2. 证明 T 是有界线性算子.

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

由于极限运算是线性的, **T 是从 X 到 X_1 的线性算子**.

2. 证明 T 是有界线性算子.

注意到

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \le \|T_n - T_m\| \to 0(n \to \infty),$$

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

由于极限运算是线性的, T **是从 X 到 X_1 的线性算子**.

2. 证明 T 是有界线性算子.

注意到

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{\|T_n\|\}$ **是 Cauchy 数列.**

于是, 对于 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

这表明对于任何给定的 $x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列.

因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y, \quad \forall x \in X.$$

于是对于任给的 $x \in X$, 有唯一确定的 $y \in X_1$ 和它对应, 我们可以定义 $Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x$

由于极限运算是线性的, T **是从 X 到 X_1 的线性算子**.

2. 证明 T 是有界线性算子.

注意到

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \le \|T_n - T_m\| \to 0 (n \to \infty),$$

即 **$\{\|T_n\|\}$ 是 Cauchy 数列.**

故存在 $M > 0$, 使得

$$\|T_n\| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

于是我们有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.\end{aligned}$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

于是我们有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.\end{aligned}$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \ge N$ 时,

于是我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

于是我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

令 $m \to \infty$, **由范数的连续性**和$\lim_{m\to\infty} T_m x = Tx$ 可推出

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|, \text{ 即: } \|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N),$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.\end{aligned}$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \ge N$ 时,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

令 $m \to \infty$, **由范数的连续性**和$\lim_{m\to\infty} T_m x = Tx$ 可推出

$$\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon\|x\|, \text{ 即：} \|T_n - T\| \le \varepsilon \quad (n > N),$$

于是有 $T_n \to T \ \ (n \to \infty)$.

于是我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

令 $m \to \infty$, **由范数的连续性**和$\lim_{m\to\infty} T_m x = Tx$ 可推出

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|,\ \text{即：}\ \|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N),$$

于是有 $T_n \to T \quad (n \to \infty)$.

综上可知 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

于是我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\| < M\|x\|.$$

故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathscr{B}(X, X_1)$.

3. 证明 T_n 按范数收敛（一致收敛）到 T.

因对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

令 $m \to \infty$, **由范数的连续性**和$\lim_{m\to\infty} T_m x = Tx$ 可推出

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|, \text{ 即：} \|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n > N),$$

于是有 $T_n \to T \quad (n \to \infty)$.

综上可知 $\mathscr{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

注: 对于

$$\mathscr{B}(X, \mathbb{K}) = \{X\text{上定义的全体有界线性泛函}\},$$

这里 X 是赋范空间, 由于数域 $\mathbb{K}$(实、复)是完备的. 因此, $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ 是完备的, 即 全体有线性泛函组成的空间是 Banach 空间. 我们记 $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.