姓名：________

学号：________

院系：________

_____级____班

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 微分几何　　　　试 卷： A

授课院（系）： 数学科学学院　考试日期：2020 年 8 月 18 日　试 卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分											
得　分											

1.　　简答（24 分）

（1） 正则曲线的曲率的几何意义？空间正则曲线是平面曲线的充要条件；

① 曲线切线像的弧长元素和曲线的弧长元素之比

② $\tau=0$

（2） 给出 4 个在保长对应下保持不变的曲面几何量；

Gauss 曲率、测地曲率、测地线、区域面积

（3） 写出 Gauss 曲率的定义和计算公式，并描述其几何意义

①定义：

②公式：$\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=k_1k_2$.

③ 几何意义.

（4） 判断：柱面，单位球面：$x^2+y^2+z^2=1$，锥面，椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{5}=2z$，切线面，上述曲面中哪些曲面为可展曲面；给出可展曲面的任意 3 个充要条件。

③ 存在与平面保长映射.

① 无脐点，可展 $\Leftrightarrow$ Gauss 曲率 $=0$

② 直纹面 $a(u)+v\,l(u)=0$，有 $(a'(u),l(u),l'(u))=0$

① $x^2+y^2+z^2=1$.

$\vec r(u,v)=(u,v,1-u^2-v^2)$

$=(u,0,-u^2)$

$+(0,v,1-v^2)$

平移合成.

② $\vec r(u,v)=(u,v,\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{10})$

平移和面.

（5） 写出 Weingarten 映射在自然标架下的表示，给出其与主曲率和主方向的联系；

关系：正则曲面的每一点在 W 映射下的两个特征值为主曲率，对应的特征向量为主方向

（6） 什么是法曲率？给出其与曲面上曲线的曲率和测地曲率之间的关系

①定义：设正则参数曲面为 $\vec r(u,v)$. $k_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$.

② · 曲面上的曲线 C 的法曲率是曲率向量在曲面的法向量上的正交投影.

$k_n=k\cos\theta$，θ 为 β 与 n 之间的夹角

· $k^2=k_n^2+k_g^2$.

装　订　线

2. （16 分）求曲线$r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$的曲率，挠率和 Frenet 标架。

$k(t) = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$ $\tau(t) = \dfrac{(r'(t), r''(t), r'''(t))}{|r'(t) \times r''(t)|^2}$.

$\vec{\alpha}(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$ $\vec{\gamma}(t) = \dfrac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|}$ $\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{\gamma}(t)$.

$H = \dfrac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$

$K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$

3. （18 分）曲面S：$r = (u\cos v,\ u\sin v, 2\log u)$，求$S$的第一基本形式和第二基本形式，高斯曲率，平均曲率和曲面上的渐进曲线。

$\mathrm{I} = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$ $E = r_u \cdot r_u$ $F = r_u \cdot r_v$ $G = r_v \cdot r_v$.

$\mathrm{II} = L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2$ $L = r_{uu} \cdot \vec{n}$ $M = r_{uv} \cdot \vec{n}$ $N = r_{vv} \cdot \vec{n}$.

$L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2 = 0$

4. （8 分）证明：如果曲面S上的渐进曲线网的夹角是常数，则曲面S的 Gauss 曲率和平均曲率平方成比例。

θ_1表示渐近线与u-曲线的夹角，则两渐近线的夹角为$2\theta_1$，$k_1\cos^2\theta_1 + k_2\sin^2\theta_1 = 0$

$\dfrac{K}{H^2} = \dfrac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \dfrac{k_2}{k_1} + 2 + \dfrac{k_1}{k_2}$ ∴√

5. （18 分）（1）什么叫测地线？写出除定义外判别条件；

（2）什么叫曲率线？除定义外写出曲率线的两个判别条件；

（3）证明：若曲面S上一条曲线C即是测地线，又是曲率线，则它必是平面曲线；

（4）证明：若曲面S上的所有测地线都是平面曲线，则该曲面S必定是全脐点曲面。

(1) 在曲面S上测地曲率等于0的曲线 ⇕ 直线 或 曲线的主法向量处处是曲面S的法向量

(2) 设C是S上的一条正则曲线. C在每一点的切向量都是S在该点的主方向

① S沿C的法线构成可展曲面

② $\dfrac{dn(u(t), v(t))}{dt} \parallel \dfrac{dr(u(t), v(t))}{dt}$

(3) ∵测地线 ∴ $\vec{\beta} = \pm\vec{n}$ 代入 ∴ $\vec{\beta} = \pm\vec{n} = -\kappa\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma}$ 由Rodrigues定理 $\vec{n} \parallel \vec{\alpha}$ ∴ $\vec{n} = \lambda\vec{\alpha}$

∴ $\pm\lambda\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma}$ ∴ $\tau = 0$

6. （16 分）设两个柱面方程分别为$S_1: r(u, v) = (\cos u,\ \sin u,\ v)$和$S_2: r(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\sqrt{2}\cos\tilde{u},\ \tilde{v}, \sqrt{2}\sin\tilde{u})$，并假设两个柱面方程交线为$C$，易知$P(0, 1,\ \sqrt{2})$在曲线$C$上切方向为$(1, 0,\ 0)$。

（1） 求曲线C在点P处的曲率；

（2） 求S_1在P点处的主方向和法曲率；并证明S_1在P点处沿任意两个互相正交的切方向的法曲率之和是一个常数。

书本

5.(4).

证明：因对$\forall P \in S$及点P的任一单位切向量$\bar{v}$，均存在唯一的一条测地线过点P，且以$\bar{v}$为其在P处的切向量。

故S上任一点处均存在至少三条测地线是非直线的平面曲线。

$\forall P \in S$，设C_1, C_2, C_3为过点P的三条非直线的测地线，对应的在点P处的单位切向量分别为$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$。

由习题4(3)的结论，知C_1, C_2, C_3均为曲率线，从而$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$均为点$P$处的主方向。故由$P$的任意性知，曲面$S$在每一点处均有三个不同的主方向，而这只有在脐点处才会产生。

因此，S为全脐点曲面。

(1) 代公式.

(2) $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$ $H = \dfrac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$

$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ 得

对于k_1：$\dfrac{\delta u}{\delta v} = -\dfrac{N - k_1G}{M - k_1F}$

k_2：$\dfrac{\delta u}{\delta v} = -\dfrac{N - k_2G}{M - k_2F}$

$k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$.

3线：我也不会