第二章　线性赋范空间

赋以Euclidian距离的平面可以作为赋范线性空间的典型例子. 我们可以从三个方面来了解平面上的数学结构:

（1）集合的结构: 平面上的点集是有序的实数组，$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

（2）拓扑结构: 对于$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d(x,y)=\{\mid x_1-y_1\mid^2+\mid x_2-y_2\mid^2\},$$

由此引出了“接近”、极限、开集等概念.

（3）代数结构: 在平面上定义了加法和数乘

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2),\text{ 对于任何实数 }\alpha,\ \ \alpha x=(\alpha x_1,\alpha y_1).$$

我们将力图把这些性质“类比的”推广到我们研究的数学系统中. 上一章我们在集合上赋以距离, 定义了开集、闭集，给出了空间的拓扑结构. 这一章我们在数学系统的代数结构－线性空间（有时称为向量空间）上，引进向量的长度、距离这些概念，使一个集合上同时具有代数结构和拓扑结构，形成我们称之为的赋范线性空间. 不熟悉线性空间的读者可参阅附录1.

§2.1　赋范空间的基本概念

2.1.1 赋范空间和Banach空间的定义

设 $x=(x_1,x_2)$ 是实的Euclidean平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个点，其长度记为 $\parallel x\parallel$（或记为 $\mid x\mid$, 为统一起见，我们在这均记为 $\parallel x\parallel$）.

$$\parallel x\parallel=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

即 $\parallel x\parallel=d(x,0)$. 进一步在 $\mathbb{R}^n$ 中，可以定义

$$\parallel x\parallel=d(x,0)$$

其中 $d(x,0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中点 x 到原点的距离, 通常称之为向量的“模”, 或者称为元素的“长度”. 对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

(1) $\parallel x\parallel=d(x,0)\geq 0$;

(2) $\parallel x+y\parallel=d(x+y,0)\leq d(x,0)+d(y,0)=\parallel x\parallel+\parallel y\parallel$;

(3) $\parallel \alpha x\parallel=d(\alpha x,0)=|\alpha|d(x,0)=|\alpha|\parallel x\parallel$.

下面我们将把这一概念推广到一般的线性空间, 给出点或向量模的定义.

定义 2.1.1 X 是数域 $\mathbb{K}$上的线性空间, 函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 满足:

i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ （非负）;

ii) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ (正定);

iii) $\forall x \in X,\ \alpha \in K,\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (齐次);

iv) $\forall x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

则称 $\|\cdot\|$ 是 X上的一个范数. 定义了范数的线性空间称为赋范线性空间, 记为 $(X, \|\cdot\|)$或简记为 X.

有了范数可以自然地定义距离

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{2.1.1}$$

事实上, 由定义6.2.5的四个条件，可以验证对于 $\forall x, y \in X$ 有

(1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;

(2) $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ 当且仅当$x = y$;

(3) $d(y, x) = \|y - x\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$;

(4) $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$,

即 $d(x, y)$是一个距离. (X, d) 称为由范数诱导出的距离空间.

注 于是赋范空间一定是距离空间. 空间有了距离就可以定义开集, 闭集, 以及完备性等概念. 收敛(极限)也可以引入. $d(x_n, x) \to 0$ 即 $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$.

定义 2.1.2 设 x_n 是赋范空间 X中的点列, $x \in X$, 如果 $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$, 则称 x_n 按范数收敛到 x, 记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

有了距离和收敛性，我们引进泛函分析中十分重要的概念－Banach空间:

定义 2.1.3 完备的赋范空间称为Banach空间.

注 由于赋范空间就是距离空间，Banach 空间是完备的距离空间，因此具有完备距离空间的所有性质，例如在第一章第五节中的若干性质，这里不再罗列.

2.1.2 范数的连续性

定理 2.1.4 设$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间, 则

(1)对于任何 $x, y \in X$, 有: $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y - x\|$.

(2)范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数. 即: $x_n \to x (n \to \infty)$, 有 $\|x_n\| \to \|x\|\ (n \to \infty)$.

(3)范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的. 即 $x_n \to x, y_n \to y\ (n \to \infty)$ 时,有 $x_n + y_n \to x + y : \alpha_n \to \alpha, x_n \to x$ 时,有 $\alpha_n x_n \to \alpha x$.

证明 (1)由三角不等式 $\|y\| \leq \|y-x\|+\|x\|$, $\|x\| \leq \|x-y\|+\|y\| = \|y-x\|+\|y\|$, 我们有

$$|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y-x\|.$$

(2)由(1)我们有:

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

于是由 $x_n \to x$, 可推出 $\|x_n\| \to \|x\|(n \to \infty)$.

(2)由于 $\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$,以及

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x\| &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha x + \alpha_n x - \alpha x\| \\ &\leq |\alpha_n|\|x_n - x\| + \|x\||\alpha_n - \alpha|,\end{aligned}$$

由 (1)的结论, 结合$|\alpha_n|$有界, 可以知(2)成立. □

2.1.3 范数与距离的关系

赋范空间一定是距离空间，距离空间是不是一定是赋范空间？我们给出下面的定理：

定理 2.1.5 设 X 是一个赋范空间，d 是由范数诱导出来的距离，对于任何的 $x, y, z \in X$, $\alpha \in K$, 都有

$$d(x,y) = d(x+z, y+z); \tag{2.1.2}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\ \alpha\ |\ d(x,y). \tag{2.1.3}$$

证明 结论有以下等式直接可得.

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y);$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\ \alpha\ |\ d(x,y)$$

注 以上的两个条件是范数诱导出的距离需要满足的必要条件. 2.1.2式反映了范数诱导出的距离在“刚体运动”以后距离不变，2.1.3反映了这种距离的某种“齐次”性质. 下面的反例说明不是所有的距离都是由范数产生的.

例 2.1.6 空间 s(见例1.1.17). 即全体实数列组成的集合上定义了以下距离

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\ \xi_k - \eta_k\ |}{1 + |\ \xi_k - \eta_k\ |}.$$

其中： $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\}$. s 是距离空间，显然 $d(\alpha x, 0) \neq |\ \alpha\ |\ d(x, 0)$，只要 $\alpha \neq 0$，它不满足2.1.3式, 也就是说例1.1.17 空间 s 中的距离不是由任何一个范数诱导出来的.

2.1.4 赋范空间的完备化

例 2.1.7 $C[a,b]$. 闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体, 对加法, 数乘封闭. 定义:

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

可以验证$C[a,b]$是一个赋范空间, 在范数产生的距离

$$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| \tag{2.1.4}$$

下, 它是完备的, 可分的. 类似地可以考虑$C(\Omega)$, 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 是列紧的闭集.

例 2.1.8 设X表示$[a,b]$上的全体连续函数, 在X上可以定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{2.1.5}$$

积分的线性性质和绝对值的三角不等式, 可以证明$\|\cdot\|_1$是一个范数(满足正定、齐次和三角不等式), 但在它诱导出的距离

$$d(x,y) = \|x-y\| = \int_a^b |x(t)-y(t)|\mathrm{d}t \tag{2.1.6}$$

下不是完备的.

注 赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 可能是不完备的, 上例中由它产生的距离就是例1.4.12中的距离，在例1.4.12 中我们证明了这个距离空间是不完备的.

定理 2.1.9 赋范空间可以完备化

证明 对于不完备的赋范空间 X, 作为距离空间可以把它完备化，成为 $\widetilde{X}$. 设 $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}\in\widetilde{X}$, $\widetilde{x}=\{x_n\}$, $\widetilde{y}=\{y_n\}$ 是 X 中的Cauchy列, 在 $\widetilde{X}$ 中定义线性运算和范数

$$\widetilde{x}+\widetilde{y} = x_n+y_n,\ \alpha\widetilde{x} = \alpha x_n, \tag{2.1.7}$$

$$\|\widetilde{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \tag{2.1.8}$$

则 $\widetilde{X}$ 是Banach 空间, 并且 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子集等距同构. 也就是说, 赋范空间 X可以完备化.

注 上例中$(X,\|\cdot\|)$不是Banach空间, 于是它可以完备化. 事实上, 完备以后空间成为

$$\begin{aligned}(\widetilde{X},\|\cdot\|_1) &= \{\text{全体在 } [a,b] \text{ 上绝对可积的函数}\}\\ &= \{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t < \infty\}\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

可以看到空间中的元素比 $C[a,b]$ 中的元素增加了，使得所有的Cauchy列都收敛.

§2.2 赋范空间的例

第一节中, 我们通过在线性空间中引入范数, 定义了赋范空间, 给出了一般线性空间中元素“长度”的定义. 建立了空间的拓扑结构. 由于范数可以诱导距离, 从而赋范空间也是距离空间, 第一章讨论的有关距离空间的概念、性质(如完备性，可分性、紧性等)都可以在赋范空间中加以讨论.

赋范空间是一类重要的空间, 这类空间在泛函分析的理论及其应用中都是十分重要的. 这一节中, 我们重点介绍一些常用的赋范空间.

2.2.1 连续函数空间

例 2.2.1 $C[a,b]$. 闭区间$[a,b]$ 上连续函数的全体，对加法、数乘封闭，是一个线性空间. 在$C[a,b]$ 上定义范数:

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b}|x(t)|.$$

则$C[a,b]$是一个完备的可分的赋范空间.

这由例1.1.5、例1.3.19、例1.4.9 的结论可知.

2.2.2 L^p空间

在这一小节我们引进一类常用的赋范函数空间 $L^p[a,b](p\ge 1)$, 即

$$L^p[a,b] = \{x(t)|\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}. \tag{2.2.1}$$

更一般地还可以考虑 $L^p(E)(p\ge 1)$, 其中 $E\subset R^n$ 是一个可测集. 在 $L^p[a,b]$ 中, 我们引入范数:

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

为了验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 我们需要验证以下4条

(i) $\|x\|\ge 0$,

(ii) $\|x\|$ 当且仅当 $x(t)=0(pp.)$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, 即 $(\int_a^b|\alpha x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} = |\alpha|(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}$.

(iv) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$, 即

$$(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\le(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}+(\int_a^b|y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}.$$

(i)、(ii)、(iii) 是显然的, 为了证明 (iv), 我们需要 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

引理 2.2.2 p, q 是正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(共轭数), 则对于 $\forall a, b$

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{2.2.3}$$

证明 当$b=0$时不等式显然成立. 当 $b \neq 0$ 时，考虑函数 $\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t$, 当 $t=1$ 时, $\phi(t)$ 取到最大值 $\phi(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$, 用 $t=\frac{|a|^p}{|b|^q}$ 代入可证. □

引理 2.2.3 (Hölder 不等式) 设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 是 E 上可测函数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{2.2.4}$$

注 当 $n=2$ 时, 不等式成为:

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq (\int_E |x(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}(\int_E |y(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}. \tag{2.2.5}$$

证明 令 $A=(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}, B=(\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}$. 如果 A, B 中有一个为 0 或无穷, 不等式 (2.2.4) 显然成立. 不妨设 $0<A<\infty, 0<B<\infty$.

对于每一个 $t \in E$, 由不等式 (2.2.3),

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p+\frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q.$$

上式两边积分得

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB}\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t &\leq \frac{A^{-p}}{p}\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{B^{-q}}{q}\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t.\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

所以

$$\int_E |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leq AB=(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\cdot(\int_E |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}.\square$$

□

引理 2.2.4 (Minkowski 不等式) 设 E 是 Lebesgue 可测集, $x(t), y(t)$ 可测, $p \geq 1$, 则

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \leq (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}+(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

证明

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t = \int_E |x(t)+y(t)|^{p-1}\cdot|x(t)+y(t)|\mathrm{d}t$$
$$\le \int_E |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} + \int_E |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\mathrm{d}t$$
$$\le (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}$$
$$+(\int_E |y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)}\mathrm{d}t)^{1/q}.$$

$\because \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \therefore q(p-1)=p$. 于是

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t \le (\int_E |x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/q}(\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} + \int_E |y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}),$$

即

$$(\int_E |x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} \le (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p} + (\int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}.$$

于是 (2.2.2) 式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个范数, 一般地, 对于

$$L^p(E) = \{x(t)|\ \int_E |x(t)|^p\mathrm{d}t < \infty\}, \tag{2.2.7}$$

定义

$$\|x\| = (\int_E |x(t)|^p)^{1/p}, \tag{2.2.8}$$

由 Minkowski 不等式,$L^p(E)$ 是赋范空间. □

定理 2.2.5 $L^p(E)(p\ge 1)$ 是 Banach 空间.

证明 证明思路:

(i) 从Cauchy列 $\{x_n(t)\}$ 中选取一个点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$, 令 $\lim_{n\to\infty} x_{n_k}(t) = x_0(t)$,

(ii) 证明 $x_0(t)\in L^p$,

(iii)证明 $\{x_n(t)\}$ 按 L^p 中的范数趋近于 $x_0(t)$.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 列, 对于任意的 $\forall\varepsilon = \frac{1}{2^k} > 0$, 存在 $N_k(N_k$单调增加), 使得当 $m,n\ge N_k$ 时,

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^k}, N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots.$$

取 $x_{n_1} = x_{N_1}, x_{n_2} = x_{N_2}, x_{n_3} = x_{N_3}, \cdots$, 我们有

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}.$$

由 Hölder 不等式，在任何具有有限测度的集合 $E_1 \subset E$ 上，

$$\int_{E_1} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t \leq (\int_{E_1} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|^p)^{1/p} \cdot (\int_{E_1} 1\mathrm{d}t)^{1/q}$$
$$= (mE_1)^{1/q} \cdot \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}\|.$$

根据 Fatou 引理，对于任何 $f_n(x)$ 非负可测函数列，有

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

于是，

$$\int_{E_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{E_1} \sum_{k=1}^{n} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_1} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_1} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t$$
$$< \sum_{k=1}^{\infty} (mE_1)^{1/q} \cdot \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\| < (mE_1)^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

于是 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$ 几乎处处收敛.$\because E_1$ 是任意的,$\therefore$ 在 E 上 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\mathrm{d}t$ 几乎处处收敛. 即 $\sum_{k=1}^{\infty} [x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)]\mathrm{d}t$ 几乎处处有限. 由于其前 $k-1$ 项和为：$x_{n_k}(t) - x_{n_1}(t)$，所以 $x_{n_k}(t)$ 几乎处处收敛 $(n \to \infty)$. 记 $x_{n_k}(t) \to x_0(t)(p.p)$.

(2) 证明 $x_0(t) \in L^p$(目前已有 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}(t)\}$ 点点收敛，收敛到 $x_0(t)$).

$\because \{x_n\}$ 是 Cauchy 列，对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geq N, \|x_n - x_m\| < \varepsilon$. 于是

$$\int_E \lim_{m\to\infty} |x_n(t) - x_m(t)|^p \mathrm{d}t \leq \varliminf_{m\to\infty} \int_E |x_n(t) - x_m(t)|^p \mathrm{d}t$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|^p \leq \varepsilon^p,$$

令$m \to \infty$，当$n > N$ 时，有

$$\int_E |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t < \varepsilon^p < \infty.$$

于是 $x_n(t) - x(t) \in L^p$, 由 $x_n(t) \in L^p$, 有 $x(t) \in L^p$.

(3) 由 $\int_E |x_n(t) - x_m(t)|^p \mathrm{d}t < \varepsilon^p$, 令 $m \to \infty, x_n(t) \to x(t)(n \to \infty)$(按范数)，即：$\lim_{m\to\infty} x_n(t) = x(t)$.

定理 2.2.6 $L^p[a,b]$ 是可分的 Banach 空间.

证明思路: 对于 $\forall x \in L^p[a,b]$, 首先找到连续函数 $y(t)$, 使得 $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$. 进一步可以找到有理系数多项式 $p(t)$. 使得 $\|y(t) - p(t)\| < \varepsilon$. 于是 $\|x(t) - p(t)\| < 2\varepsilon$. 由于全体有理系数多项式是 $L^p[a,b]$ 中的可数子集, 所以 $L^p[a,b]$ 可分.

证明 对于任意 $x(t) \in L^p$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \leq n, \\ 0, & |x(t)| > n. \end{cases} (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.2.9}$$

显然,$x_n(t)\in L^p$, 且 $|x_n(t)|\le n$. 由于

$$n^p m\{t|\ |x(t)|>n\}\le\int_{\{t|\ |x(t)|>n\}}|x(t)|^p\mathrm{d}t<\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty,$$

所以 $m\{t|\ |x(t)|>n\}\to 0(n\to\infty)$. 再由积分的绝对连续, 我们有

$$\|x-x_n\|^p=\int_{\{t|\ |x(t)|\ge n\}}|x(t)|^p\mathrm{d}t\to 0(n\to\infty).$$

即对于 $\forall\varepsilon,\exists N$, 当 $n,m\ge N$ 时,

$$\|x_n-x\|<\varepsilon.$$

对于上面的 $x_n(t)$, 由 Лузцн 定理, 存在连续函数 $y(t)$, 除去一个可测子集 $A, x_n(t)=y(t), |y(t)|\le n$, 且可测子集的测度满足 $mA<(\frac{\varepsilon}{2n})^p$, 于是

$$\begin{aligned}\|x_n(t)-y(t)\|&=(\int_A|x_n(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t)^{1/p}\\&\le(\int_A(2n)^p)^{1/p}=2n(mA)^{1/p}<\varepsilon.\end{aligned}$$

对于连续函数 $y(t)$, 由 Weierstrass 定理,$y(t)$ 可以用有理系数的多项式 $p(t)$ 一致逼近, 即:

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}(\forall t\in[a,b]).$$

我们有

$$\|y(t)-p(t)\|=(\int_a^b|y(t)-p(t)|^p)^{1/p}<\varepsilon,$$

即

$$\|x-p\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-y\|+\|y-p(t)\|<3\varepsilon.$$

□

注 在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$, 但连续函数的全体在 L^p 的范数下不完备. 但它们是 $L^p[a,b]$ 中的稠子集，也就是说 $L^p[a,b]$是 $C[a,b]$ 在 L^p 范数6.2.8下的完备化空间.

我们还可以讨论 $p=\infty$ 的情况.

例 2.2.7 $L^\infty(E)$.

设 E 是可测集合,$x(t)$ 是 E 上的可测函数, 如果存在 E 的可测子集 $E_0\subset E, mE_0=0$, 且 $x(t)$ 在 $E\backslash E_0$ 上有界, 称 $x(t)$ 为本性有界.

$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数, 在 $L^\infty(E)$ 上定义

$$\|x\|=\inf_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset E}}\sup_{E\backslash E_0}|x(t)|. \tag{2.2.10}$$

注1　上述下确界是可以达到的, 即存在E_0, 使得

$$\|x\| = \sup_{E\setminus E_0} |x(t)|.$$

由下确界的定义, 对$\forall \frac{1}{n}$, 存在$E_n \subset E, mE_n = 0$, 且$\sup_{E\setminus E_n} |x(t)| < \|x\| + \frac{1}{n}$. 令$E_0 = \cup_{n=1}^{\infty} E_n, E_0 \subset E, mE_0 = 0$. 且对于$\forall n$,

$$\|x\| \leq \sup_{E\setminus E_0} |x(t)| \leq \sup_{E\setminus E_n} |x(t)| \leq \|x\| + \frac{1}{n}.$$

$\therefore \|x\| = \sup_{E\setminus E_0} |x(t)|$. 即$x(t)$ 在$E\setminus E_0$ 上有界(几乎处处有界).

注2　$\|x\|$ 是 $x(t)$ 的本性上界, 记为

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{E} |x(t)|. \tag{2.2.11}$$

注3　$\|x\|$ 是 X 上的范数, 容易验证它满足正定性, 齐次性和三角不等式.

注4　收敛性.$x_n \xrightarrow{d} x(n \to \infty), \|x_n - x\| \to 0$, 即 $\{x_n(t)\}$ 除去一个零测集以外,$x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

定理 2.2.8　$L^{\infty}(E)$ 是不可分的

证明　与 l^{∞} 不可分的证明类似.

命题 2.2.9　当 $mE < \infty$ 时, 如果 $1 \leq p_2 < p_1 < \infty$, 则

$$L^{\infty}(E) \subset L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E). \tag{2.2.12}$$

证明　事实上,

(i)$x(t) \in L^{\infty}, x(t)$ 本性有界, 结合 $mE < \infty$, 有 $x(t) \in L^{p_1}(E_1)$.

(ii)$\forall x \in L^{p_1}$, 令 $B = \{t \in E |\ |x(t)| \leq 1\}$,

$$\int_E |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t = \int_B |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t + \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_2}\mathrm{d}t \leq mB + \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_1}\mathrm{d}t.$$

$\therefore x(t) \in L^{p_2}(E)$.

注　由此可以证明, 对于任意的 $x(t) \in L^{\infty}(E), mE < \infty$, 有 $\|x\|_p \to \|x\|_{\infty}$. 即

$$\lim_{p\to\infty} (\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p} = \|x\|_{\infty}. \tag{2.2.13}$$

证明留给读者.

2.2.3 l^p 空间

类似地可以证明离散的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式

定理 2.2.10 设 $\{\xi_k\}$和 $\{\eta_k\}$ 是 p 次方可和的数列，即

$$(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}<\infty,\quad (\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q)^{1/q}<\infty,$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\leq(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q)^{1/q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2.2.14}$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p)^{1/p}\leq(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}+(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p)^{1/p}. \tag{2.2.15}$$

我们可以定义 $l^p(p\geq 1)$、l^∞ 空间

定义 2.2.11 设 $l^p(p\geq 1)$ 是全体 p 次方可和的数列，即

$$l^p(p\geq 1)=\{x=\{\xi_k\}|\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty\}, \tag{2.2.16}$$

并在其上赋以范数

$$\|x\|_p=(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}\quad (p\geq 1). \tag{2.2.17}$$

定义 2.2.12 设 l^∞ 是全体有界的数列，即

$$l^\infty=\{x=\{\xi_k\}|\{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.18}$$

并在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty=\sup_k|\xi_k|. \tag{2.2.19}$$

由 Minkowski 不等式6.2.9 可以证明 $\|x\|_p(p\geq 1)$ 是一个范数. 进一步地有 l^p $(1\leq p<\infty$ 是一个可分的 Banach 空间. 还可以证明 l^∞ 是不可分的 Banach 空间.

更一般地我们可以在一般测度空间 $(X,\mathscr{B},\mathscr{M})$ 中研究 $L^p(X,\mathscr{B},\mathscr{M})$, 其中 $\mathscr{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集),$\mathscr{M}$ 是广义测度，完全类似地可以研究它们的完备、可分等性质.

2.2.4 * L^p 空间的收敛性

进一步地，我们对 $L^p(E)(1 \le p < \infty)$ 中点列的收敛做进一步地讨论.

定理 2.2.13 设 $x_n(t), x(t) \in L^p$，且 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x$，即

$$\int_E |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0(n \to \infty) \tag{2.2.20}$$

则 $x_n(t)$ 按测度收敛到 $x_0(t)$.

证明 对任意的 $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}\int_E |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t &\ge \int_{E\{t|\,|x_n(t)-x(t)|\ge\sigma\}} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \\ &\ge \sigma mE\{t|\,|x_n(t) - x(t)| \ge \sigma\}.\end{aligned}$$

$\therefore$ 由 $\sigma mE\{t|\,|x_n(t) - x(t)| \ge \sigma\} \to 0$, 可知 $mE\{t|\,|x_n(t) - x(t)| \ge \sigma\} \to 0(n \to \infty)$.

注1 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x$, 称为 $\{x_n(t)\}$ 在 E 上按 p 次幂平均收敛到 $x_0(t)$ 即p次平均收敛可以推出测度收敛.

注2 但 $x_n(t)$ 按测度收敛到 $x(t)(n \to \infty)$, 不能推出 $\{x_n\}$ 按 p 次幂平均收敛. 例:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & x = 0, \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \\ e^n, & 0 < x < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

$x_n(t) \to x(t) = 0$(点点收敛)，且 $x_n(t) \xrightarrow{m} x(t) = 0$ (按测度收敛 (不等于零的测度为 $\frac{1}{n}$))． 但 $\int_0^1 |x_n(t)|^p \mathrm{d}t = \int_0^{1/p} e^{np} \mathrm{d}t = \frac{1}{n} e^{np} \to \infty(n \to \infty)$. $\therefore x_n(t)$ 不能按 p 次幂平均收敛到零.

§2.3 赋范空间的凸集和子空间

2.3.1 凸集

在 $\mathbb{R}^n$ 空间中, 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 其连线也在 A中, 则称 A 是凸的. 在一般的赋范空间中, 我们同样定义

定义 2.3.1 设X是线性空间, $A \subset X$, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 任意的 $\alpha:\ 0 < \alpha < 1$, 都有

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in A,$$

则称 A 是 X 中的凸集（参见图6.6.1）.

注1 两个凸集的交集是凸的. 事实上,如果 A 和 B 是凸集, 对于 $x, y \in A$, 有 $\alpha x + (1 - \alpha) y \in A; x, y \in B$, 有$\alpha + (1 - \alpha) y \in B$, 即$\alpha x + (1 - \alpha) x \in A \cap B$.

注2 $A \subset X$, 所有包含 A 的凸集的交集是凸集. 这个凸集称为 A 的凸包, 记为 $C_0\ (A)$. $C_0(A)$ 是包含 A 的最小凸集.

定理 2.3.2 设 $B(0,1)=\{x\in X|\ \|x\|<1\}$ 是赋范空间 X 中开的单位球，则 $B(0,1)$是凸的.

证明 对于任意的 $x,y\in B(0,1)$ 及 $0<\alpha<1$.

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leq\|\alpha x\|+(1-\alpha)\|y\|<\alpha+(1-\alpha)=1.$$

$\therefore B(0,1)$ 是一个凸集.

注 单位球是 0 点的凸邻域, 这是赋范空间十分重要的几何特征.

例 2.3.3 设 x 是由有序实数组 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 组成的向量空间，在 x 上定义

$$\varphi(x)=(\sqrt{|\ \xi_1\ |}+\sqrt{|\ \xi_1\ |})^2.$$

则曲线 $\varphi(x)=1$ 围成的区域不是凸集（见图6.6.2）, 由定理6.6.16 可知 $\varphi(x)$ 不是 x 上的范数.

2.3.2 子空间

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, $X_1\subset X$, X_1是X的一个子空间. 则 $(X_1,\|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间, 称为 X 的子空间. 显然子空间是凸集.

定理 2.3.4 设 X 是一个赋范空间， $X_1\subset X$ 是一个子空间，如果 X_1 是开集，则 $X_1=X$.

证明 对于任意的 $x\in X$，我们要证明 $x\in X_1$. 由于 X_1是一个子空间，于是 $0\in X_1$, 假设 $x\neq 0$, 因为 X_1 是开的，于是 $\exists\delta>0$, 使得 $B(0,\delta)\subset X_1$, 即 $y=\frac{\delta}{2\|x\|}\in X_1$, 注意到 X_1 是一个线性子空间，于是 $x=2\parallel x\parallel y\in X_1$.

定理 2.3.5 设 X 是一个赋范空间，则 X 的线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.

证明 由定理**??**知，范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数，且范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的, 则结论可得.

定理 2.3.6 设 X 是一个赋范空间， $X_1\subset X$ 是一个子空间，则

(1)若子空间 X_1是完备的，则 X_1 是闭的;

(2)若 X 是Banach 空间， X_1 是 X 的闭子空间，则 X_1 一定是Banach空间.

证明 (1)由完备性的定义和定理1.3.11可证. (2)由命题1.4.7直接可得.

例 2.3.7 $c=\{$所有的收敛数列$\}$,定义范数

$$\|x\|=\sup_k|\xi_k|, \tag{2.3.1}$$

则c是一个赋范空间. 在通常加法和数乘的意义下， c 是Banach 空间 l^∞ 的子空间.

下面证明 c 是Banach 空间 l^∞ 的闭子空间. 设 $\{x_n\}$ 是c 中的Cauchy 列, 由于$c \subset l^\infty$, 所以$\{x_n\}$ 是l^∞ 中的Cauchy 列, 由于l^∞ 完备，所以存在x_0 $\forall\varepsilon, \exists N$, 当$n > N$ 时

$$\|x_n - x_0\| \leq \sup|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.3.2}$$

$\therefore$ 当$n \geq N$ 时, 对于每一个k

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$\because \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^\infty$ 收敛$(k \to \infty), \exists K$, 当$k > K, l > K$ 时

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| &\leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

即$x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ 是Cauchy 列, 即收敛的数列, $\therefore$ $x_0 \in c$. 且由(2.3.2)式知$x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

由 c 是闭的子空间,于是可知 c 是Banach空间.

例 2.3.8 $c_0 = \{$全体收敛到零的数列$\}$, 定义范数

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{2.3.4}$$

则c_0是c的闭子空间.

事实上, 我们只须证明, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}(n \to \infty)$,则$x_0$是收敛到零的数列. 注意到在 c_0 中的收敛是一致收敛, 结合以下不等式.

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}|,$$

我们有 $x_0 \in c_0$. 即 c_0 是 c 的闭子空间. $c_0 \subset c \subset l^\infty$ (都是 l^∞ 的闭子空间). 进一步地, c_0 是可分的Banach空间.

2.3.3 Riesz引理

如果 M 是赋范空间 X 中的一个真子空间，那么 M 可能在 X 中稠, 例如多项式的全体是 $C[a, b]$ 的稠密的真子空间. 但是如果 M 还是闭的，那么由定理1.3.11知， M 要在 X 中稠只能是 $M = X$. 换句话说，如果 M 是 X 中的一个

真的闭的子空间，那么一定存在一个点，它和 M 有正距离，这给我们引出了一个很重要的几何概念. 在通常的三维Euclidean 空间，一个向量与一个平面正交（垂直）当且仅当 $d(x,M)=\|x\|$（见**??**），在一般的赋范空间没有正交的概念（因为没有定义内积，内积的定义见第三章），但是我们仍然能够问“如果 M 是 X 中的一个真的闭的子空间，那么是否存在一个点，它和 M 的距离 $d(x,M)=\|x\|$?”这一次几何的直观并不是完全正确的，也就是说答案可能是否定的. 但是我们可以有下面的结论－泛函分析中十分重要的Riesz引理.

引理 2.3.9 (F.Riesz)设$(X,\|\cdot\|)$是一个赋范空间,$X_0\subset X$,X_0是X的闭的真子空间,则对于$\forall\varepsilon>0$,存在$x_0\in X$,使得$\|x_0\|=1$,且对于$\forall x\in X_0$,

$$\|x-x_0\|>1-\varepsilon. \tag{2.3.5}$$

证明 $\forall x_1\in X\backslash X_0$,记

$$d=\inf_{x\in x_0}\|x-x_1\|.$$

$\because X_0$是闭的,$\therefore d>0$(否则存在$x_n\in X_0,\|x_n-x_1\|\to 0,\because$由$X_0$闭可推出$x_1\in X_0$).不妨设$\varepsilon<1,\therefore \frac{d}{1-\varepsilon}>d$,由下确界的定义,存在$x_2\in X_0$,使得

$$\|x_2-x_1\|<\frac{d}{1-\varepsilon}.$$

令$x_0=\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|}$,则$\|x_0\|=1$,对于任何$x\in X_0$,

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|&=\|x-\frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|}\|\\&=\frac{1}{\|x_1-x_2\|}\|(\|x_1-x_2\|x+x_2)-x_1\|\\&>\frac{1}{\|x_1-x_2\|}\cdot d>1-\varepsilon.\end{aligned}$$

□

注 在一般情况下，$\varepsilon=0$ 定理不能够成立（其反例可参阅[。。。。。。]）.

§2.4 等价的范数有限维赋范空间

2.4.1 等价的范数

在一个线性空间上可以定义不同的范数，例如：

例 2.4.1 在$\mathbb{R}^n$ 按通常意义下的加法、数乘, 可以定义一个线性空间, 对于任意的 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 定义范数:

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{1/2}, \tag{2.4.1}$$

由它产生的距离是

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2)^{1/2}. \tag{2.4.2}$$

显然, $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 可分的. 另外, 在 $\mathbb{R}^n$中还可以定义$\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|. \tag{2.4.3}$$

容易验证它是正定的, 齐次的, 且满足三角不等式, $\therefore \|\cdot\|_\infty$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数. 在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以定义$\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|. \tag{2.4.4}$$

容易验证它也是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个范数.

一般的，X是一个线性空间, 其上可以赋以不同的范数, 例如 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$, 则$(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 成为两个不同的赋范空间.

定义 2.4.2　设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$,是线性空间X上的两个范数, 如果存在$a > 0$, $b > 0$, 使得

$$a\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le b\|\cdot\|_1 \tag{2.4.5}$$

则称这两个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$,是等价的.

注　在两个等价范数产生的赋范空间中, 点列 $\{x_n\}$的收敛性一样. 事实上, 由2.4.5式可知，如果

$$\|x_n - x_0\|_1 \to 0, \quad (n \to \infty),$$

可推出

$$\|x_n - x_1\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

反之,

$$\|x_n - x_0\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

可推出

$$\|x_n - x_0\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 代数同构, 拓扑同胚 (收敛性一样, 闭集开集一样).

例 2.4.3　在例2.4.1中 $\mathbb{R}^n$上定义了三个不同的范数 $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$，它们满足

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{1/2} \le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| = \|x\|_1 \le \sqrt{n}(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|; \tag{2.4.6}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k| \le (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{1/2} = \|x\| \le \sqrt{n} \max_{1\le k\le n} |\xi_k| = \sqrt{n}\|x\|_\infty. \qquad (2.4.7)$$

由此可知 $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ 三个范数等价. 在 $\mathbb{R}^2$ 不同范数等价的情况可参见例1.2.10.

下面我们将看到 $\mathbb{R}^n$上定义的所有范数都等价.

2.4.2 有限维空间

这一节我们将证明有限维的赋范空间代数上与$\mathbb{R}^n$ 同构, 在拓扑意义下与$\mathbb{R}^n$ 同胚.

定理 2.4.4 任意n维赋范空间必与$\mathbb{R}^n$代数同构拓扑同胚.

证明 $(X, \|\cdot\|)$是n维赋范空间,存在一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}, \forall x \in X$,可以唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

令$\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,设$T : x \in X \to \overline{x} \in \mathbb{R}^n$.$T$是一个从$X$到$\mathbb{R}^n$的同构映射.

对于$\forall x \in X, \|\cdot\|$与$\mathbb{R}^n$的范数 $\|\cdot\|_2$等价,事实上

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| \le \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \|e_k\| \\ &\le (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{1/2} (\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2)^{1/2} = \beta \|\overline{x}\|_2, \qquad (2.4.8)\end{aligned}$$

其中$\beta = (\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2)^{1/2}$是与$x$无关的常数. 反之,在$\mathbb{R}^n$中的单位球面$S$ 上,$S \subset \mathbb{R}^n$, $S = \{\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) | \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 1\}$.定义

$$f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n\|,$$

在 S上,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$不同时为零,且$e_1, \cdots, e_n$线性无关, $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$不等于零.$\therefore f(\overline{x}) > 0$.对于任意的$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$,结合(2.4.2)式有

$$\begin{aligned}|f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) - f(\eta_1, \cdots, \eta_n)| &= |\|x\| - \|y\|| \\ &\le \|x - y\| \le \overline{\beta} \|\overline{x} - \overline{y}\|_2.\end{aligned}$$

$\therefore f(\overline{x})$是连续的$\because S$是$\mathbb{R}^n$中的闭的有界集,是紧的集合$\therefore f(\overline{x})$在$S$上有最小值,因此存在$\alpha > 0, \forall \overline{x} \in S$,有

$$f(\overline{x}) = \|x\| \ge \alpha, \quad \| \overline{x} \|_2 = 1. \qquad (2.4.9)$$

于是对于任意的 $x \in X/\{0\}$，$\| \frac{x}{\|\overline{x}\|_2} \|_2 = 1$，于是由式（2.4.9）知 $\| \frac{x}{\|\overline{x}\|_2} \| \geq \alpha$，即 $\| x \| \geq \alpha \| \overline{x} \|_2$. 于是我们有

$$\alpha\|\overline{x}\|_2 \leq \|x\| \leq \beta\|\overline{x}\|_2$$

$\therefore X$与$\mathbb{R}^n$同胚. □

注1 由此可以推出同一个有限维空间上定义的范数都是等价的.

注2 有限维空间中的收敛性与$\mathbb{R}^n$相同,即按坐标收敛.有限维的赋范空间是Banach空间.有限维空间中的有界集是列紧集.

2.4.3 有限维赋范的几何特征

定理 2.4.5 赋范空间是有限维的当且仅当X中的任何有界集是列紧的.

证明 必要性由定理2.4.4可知.下证充分性.假如不然,X是无穷维的.考虑$S = \{x| \|x\| = 1\}$, 任取$x_1 \in S$,记X_1为由x_1生成的子空间.$\because X$是无穷维的,$\therefore$由x_1生成的子空间是X的真闭子空间.$\therefore$由Riesz 引理,存在$x_2 \in S, \|x_2\| = 1$,使得

$$\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}, \forall x \in X_1,$$

特别地$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. 令$X_2$ 是由$\{x_1, x_2\}$ 生成的子空间, 同样存在$x_3 \in S, \forall x \in X_2$,

$$\|x_3 - x\| > \frac{1}{2}.$$

特别地$\|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_1\| > \frac{1}{2}$. 这样一直做下去, 得到$S$ 中的无穷点列$\{x_n\}$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}(i \neq j)$, 所以$\{x_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与S 列紧矛盾. $\therefore X$ 是有限维的. □

我们有以下推论

推论 2.4.6 设 X 是一个有限维的赋范空间，那么单位球 $B(0,1)$ 和单位球面 $S(0,1)$ 都不是紧的.

注1 即在无穷维空间,单位球（面）不是列紧的.($\because$存在 $\{x_n\}, \|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$).如果单位球（面）列紧, 则 X 是有限维的.

注2 列紧性在距离空间是十分重要的性质，在有限维空间任何有界闭集都是列紧的，但是在无穷维赋范空间，就没有“那么多”的紧集合，这是有限维的距离空间和无穷维距距离空间的主要区别.

§2.5 赋范空间的进一步性质

2.5.1 赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots, \tag{2.5.1}$$

其中 $x_k \in X$, 如果前 n 项的和 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 收敛, 即存在 $x \in X$, 使得 $S_n \to x(n\to\infty)(\|S_n - x\| \to 0)$, 则称 x 是级数的和, 记为 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_n$.

定理 2.5.1 $(X,\|\cdot\|)$是赋范空间, 如果X完备, 且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots \tag{2.5.2}$$

收敛, 则级数2.5.1收敛, 且

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.5.3}$$

反之, 在赋范空间X中, 若对于任何的 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, 可以推出$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$收敛, 则 X 是Banach空间.

证明 要证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 是否收敛, 即证明前n 项和S_n 是否收敛, 是否是Cauchy列. 考虑

$$\begin{aligned}\|S_n - S_{n+p}\| &= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \\ &\le \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon \ (\text{当}n\text{充分大时}).\end{aligned}$$

于是 S_n 是一个Cauchy 列, 因为 X 是完备的, 所以级数收敛. 由于$\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$,由范数的连续性

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| = \|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|.$$

反之, 如果 $\forall$ Cauchy列 $\{x_n\}$, 一定收敛, 则X完备. 我们只要找到 $\{x_n\}$ 的一个子列$\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \to x(k\to\infty)$, 则 $x_n \to x(n\to\infty)$.

设 $\{x_n\}$ 是Cauchy列, $\therefore$ 对于 $\forall\varepsilon = \frac{1}{2^k} > 0$, 存在 N,当 $n, m \geq N$ 时

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon = \frac{1}{2^n}.$$

$\therefore$ 我们可以找出 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$. 于是由条件，级数

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{x_k}) = x_{n_1} + x_{n_2} - x_{n_1} + \cdots + x_{n_{k_0}} - x_{n_{k_1}} + \cdots \tag{2.5.4}$$

收敛, 即前 $k-1$ 项的和 $S_{k-1} = x_{n_k}$ 收敛. 设 $x_{n_k} \to x(k \to \infty)$,由于$\{x_n\}$是Cauchy列, 所以对于$\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m \geq N$ 时

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

$\therefore$ 对于充分大的 k, $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$,令$k \to \infty$. 由范数连续, 我们有: $\|x_n - x\| \to 0(n \to \infty)$, 所以 X 是完备的. □

2.5.2 赋范空间的乘积空间

定义 2.5.2 设$(X_i, \|\cdot\|_i), 1 \leq i \leq n$是一组线性赋范空间,令

$$X = \{x = (x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}, \tag{2.5.5}$$

记为$X = \prod_{i=1}^n X_i$, X中元素按坐标定义线性运算,则X是线性空间.若定义

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i, p = \infty, \tag{2.5.6}$$

则 $(X, \|\cdot\|_p)$ 线性赋范空间.

定理 2.5.3 设X_i, X 如上，则 X 是线性赋范空间并且 X 是完备的当且仅当每个 $X_i(1 \leq i \leq n)$ 完备.

证明 先设每个X_i是完备的,假定$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$是$X$中的Cauchy序列,则$\forall\varepsilon > 0, \exists k_0$使得,$k \geq k_0$时

$$\sum_{i=1}^n \|x_i^{(s)} - x_i^{(k)}\|_i^p = \|x^{(s)} - x^{(k)}\|_p^p < \varepsilon^p,$$

特别地对于每个i,

$$\|x_i^{(s)}-x_i^{(k)}\|_i<\varepsilon. \tag{2.5.7}$$

这说明$\{x_i^{(k)};k\geq 1\}$是X_i中的Cauchy序列.由X_i的完备性,不妨设$\|x_i^{(s)}-x_i\|\to 0$ 这里$x_i\in X_i(1\leq i\leq n)$.记$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$.在(2.5.7)式中固定$k\geq k_0$,令$s\to\infty$,则有

$$\|x_i-x_i^{(k)}\|_i\leq\varepsilon. \tag{2.5.8}$$

不防设对于每个i,当$k\geq k_0$时(2.5.8)式均成立,则

$$\|x^{(k)}-x\|_p=(\sum_{i=1}^n\|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p)^{1/p}\leq\sqrt[p]{n}\varepsilon(1\leq p<\infty).$$

即$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x$.故$X$完备.

反之,设X完备,我们证明每个X_i完备.注意

$$E_i=\{(\underbrace{0,\cdots,0},x_i,0,\cdots,0)|x_i\in X_i\}$$

是X的线性子空间并且E_i与X_i等距同构.

$$\|(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0)\|_p=\|x_i\|_p,\forall x_i\in X_i$$

于是剩下只需证明E_i 是X的闭子空间.

设$x^{(k)}=(0,\cdots,0,x_i^{(k)},0,\cdots,0)\in E_i,x^{(k)}\to x$,不妨设$x=(x_1,\cdots,x_n)$,其中$x_i\in X_i(1\leq i\leq n)$).由于

$$\|x^{(k)}-x\|_p^p=\|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p+\sum_{j\neq i}\|x_j\|_j^p\to 0.$$

此时必有$j\neq i$时,$x_j=0$,同时$\|x_i^{(k)}-x_i\|\to 0$.这说明$x_i\in E_i,E_i$闭($p=\infty$的情况可类似证明).

2.5.3 * 赋范空间的商空间

定义 2.5.4 设M 是X 的线性子空间. $\forall x_1,x_2\in X$, 如果$x_1-x_2\in M$, 则称x_1 和x_2等价, 记为$x_1\sim x_2$.

注 等价关系具有:(i)自反性,$\because x-x=0\in M,x\sim x$;(ii)对称性,$\because x\sim y,x-y\in M,\therefore y-x=-(x-y)\in M(\because M$是子空间),所以$y\sim x$;(iii)传递性:$x\sim y,y\sim z$可推出$x\sim z$.事实上,$x-z=x-y+y-z\in M(\because M$是子空间).

例 2.5.5　在$L^p(E)$中,设$M = \{E$上几乎处处为零的可测函数$\}$,M是子空间.

对于$x_1, x_2 \in L^p$,且$x_1 - x_2 \in M$,则称x_1和x_2相等,在几乎处处的意义下相等,即x_1和x_2关于M等价.

定义 2.5.6　商空间: X/M(关于M的商空间)

设M 是一个子空间，$x_1 - x_2 \in M$, 则称x_1 和x_2 等价． 把与x 等价的全体元素记为$\widetilde{x}$(即以x 为代表的等价类)，则$\widetilde{X} = \{X$中元素的等价类的全体$\} = \{\widetilde{x} | x \in X\}$. 在$\widetilde{X}$ 中定义: $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x+y}, \alpha\widetilde{x} = \widetilde{\alpha x}$,这样的定义不依赖于代表元的选取． 则$\widetilde{X}$ 是一个线性空间，$\widetilde{X}$ 称为是X 关于M 的商空间，记为$\widetilde{X} = X/M$.

定义 2.5.7　设X是赋范空间,M是X的的闭子空间,在商空间$\widetilde{X} = X/M$中可以定义范数

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \{\|y\|\}. \tag{2.5.9}$$

可以验证$\|\widetilde{x}\|$满足范数的正定、齐次和三角不等式，$\widetilde{X}$是赋范空间． 称之为赋范空间X关于闭子空间M的赋范商空间.

例 2.5.8　复数平面$\mathbb{C}, \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, 是$\mathbb{C}$ 的一个闭子空间，$x \sim y$ 定义为$x - y \in \mathbb{R}, \mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\widetilde{x}\}$. $y \in \widetilde{x}$，即$y - x \in \mathbb{R}$. 也就是说y 和x 的虚部相同，$\mathtt{Im}x = \mathtt{Im}y$.

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\| = \mathtt{Im}|x|.$$

即:$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{$全体纯虚数$\}$，$\widetilde{0} = \{$全体实数$\}$，$\widetilde{x}$ 的范数就是x虚部的绝对值.

注　商空间是一个很抽象的概念，希望从这个最简单的例子里，读者能感悟到商空间的真正含义.

例 2.5.9　$X = \{E$上所有p次可积的函数.$\}$

$$L^p(E) = X/M, \tag{2.5.10}$$

其中M是E上全体几乎处处为零的可测函数，$\widetilde{0} = \{E$上全体几乎处处为零的可测函数$\}$.

定理 2.5.10　$X-$Banach空间，M 是X 的闭子空间，则赋范空间X 关于M的商空间X/M是Banach 空间.

证明　若X完备,M闭,$\{\widetilde{x}_n\}$是X/M中的Cauchy序列.取$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$，则$\exists n_k$,使得当$n \geq n_k$时,$\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$.不妨设$n_k$单调增加.记$u_k = x_{n_k}$,则$\{\widetilde{u}_k\}$是$\{\widetilde{x}_n\}$的子序列并且$\|\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k\| < \frac{1}{2^k}$.从而由$X/M$中范数定义,存在$z_k \in M$,使得

$$\|u_{k+1} - u_k + z_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

记$v_k = u_{k+1} - u_k + z_k$,则$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$.$X$完备,由定理2.5.1知存在$v \in X$,使得$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = v$.令$u = v + u_1$,现在证明$\widetilde{x}_n \to \widetilde{u}$.

实际上由$z_k \in M$,则$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} z_k \in M$, $\widetilde{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \widetilde{0}$,

$$\|\widetilde{u}_{n+1} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{u}_{n+1} - \widetilde{v} - \widetilde{u}_1 + \widetilde{\sum_{k=1}^{n} z_k}\|$$
$$\leq \|u_{n+1} - v - u_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k\| = \|\sum_{k=1}^{n} v_k - v\| \to 0.$$

于是$\widetilde{u}_k \to \widetilde{u}$,即$\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{u}$, $\{\widetilde{x}_n\}$ 为Cauchy序列,其中有子列$\{\widetilde{x}_{n_k}\}$收敛,故$\{\widetilde{x}_n\}$收敛并且$\widetilde{x}_n \to \widetilde{u}$,从而$X/M$完备. □

习题 2

1. 设在线性空间 X 中定义的距离 d 满足平移不变性和相似性, 即 $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$. 令 $\|x\| = d(x, 0)$. 证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.
2. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 对于 $x, y \in X$, 令
$$\beta = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \|x - y\| + 1, & x \neq y. \end{cases}$$
证明 d 是距离, 但不是由范数诱导的距离, 即不存在 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$, 使得 $d(x, y) = \|x - y\|_1, x, y \in X$.
3. 在 $C^1[a, b]$ 中令
$$\|x\|_1 = (\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)\mathrm{d}t)^{1/2}, \forall x \in C^1[a, b].$$
(1) 证明 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a, b]$ 上的范数;
(2) 问 $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备?
4. 设 $C[0, 1]$ 表示 $(0, 1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 的全体. 令 $\|x\| = \sup\{|x(t)| \,|0 < t \leq 1\}$. 证明
(1)$\|\cdot\|$ 是 $C[0, 1]$ 空间上的范数;
(2)l^∞ 与 $C(0, 1]$ 的一个子空间等距同构.
5. 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义范数 $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, 证明它是 Banach 空间.
6. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间,$X \neq \{0\}$. 证明 X 为 Banach 空间的充要条件是 X 中的单位球面 $S = \{x \in X | \, \|x\| = 1\}$ 完备的.
7. 设 X 是赋范空间, 证明 X 是 Banach 空间的充要条件是 $\forall \{x_n\} \subset X$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.
8. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 赋范空间,X_0 是 X 中的稠密子集. 证明对于每一 $x \in X$, 存在 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

9. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 中的点列. 若存在 $(0,\infty)$ 上非负递减的可积函数 $g(t)$, 使得 $\|x_n\| \leq g(n)(\forall n)$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

10. 设 $C^k[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数全体. 定义

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|, f,g \in C^k[a,b].$$

证明 (1)$(C^k[a,b],d)$ 是完备的距离空间;

(2) 若定义 $\|f\| = d(f,0)$. 则 $(C^k[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

11. 设 $(X_k,\|\cdot\|_k)$ 是一列赋范空间,$x=\{x_k\}, x_k \in X_k(k=1,2,\cdots)$ 且满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty$, 用 X 表示所有 x 的全体. 按坐标定义线性运算构成的线性空间, 在 X 中定义

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p)^{1/p}(p \geq 1).$$

证明 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间.

12. 设 M 是 $[a,b]$ 上有界函数的全体. 线性运算的定义与 $C[a,b]$ 中相同. 在 M 中定义范数 $\|x\| = \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)|$. 证明 M 是 Banach 空间.

13. 在 l^∞ 中, 按坐标定义线性运算且对 $x \in l^\infty, x=\{\xi_k\}$ 定义 $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$. 证明 l^∞ 是一个赋范空间.

14. 设 A 是 l^∞ 中仅有有限多个非零项的序列全体构成的子空间. 证明 A 不是 Banach 空间.

15. 证明 $l^p(p \geq 1)$ 是可分的 Banach 空间.

16. 设 M 线性空间 X 中的子集, 证明

$$C_0(A) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in X | n\text{是任意自然数}, x_k \in A, \alpha_k \geq 0\text{且}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\}.$$

17. 设 E 是直线上的 Lebesgue 可测集, 且 $m(E) < \infty$, 用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(E)(p \geq 1)$ 的范数,$\|\cdot\|_\infty$ 表示 $L^\infty(E)$ 的范数. 证明对于每一个 $x \in L^\infty(E), \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

18. 设 $(X_1,\|x\|_1),(X_2,\|x\|_2)$ 是赋范空间, 在乘积线性空间 $X_1 \times X_2$ 中定义

$$\|z\|_1 = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2, \|x\|_2 = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}.$$

其中 $z \in X_1 \times X_2, z=(x_1,x_2)$. 证明 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的等价范数.

19. 设$H_p(1 \leqslant p < \infty)$ 表示具有性质

$$\|f\|_p = \sup_{r<1} \{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta\}^{1/p} < \infty$$

的解析函数$f(z)$ $(|z|<1)$ 的全体. 证明$\|f\|_p$ 是范数并且$(H_p,\|\cdot\|_p)$ 是Banach 空间.

20. 设$0<p<1$, 考虑空间$L^p[0,1]$, 其中

$$\|x\| = (\int_0^1 |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < \infty)^{1/p}.$$

证明$\|x\|$ 不是$L^p[0,1]$ 上的范数, 但$d(x,y)=\|x-y\|$ 是$L^p[0,1]$ 上的距离. (提示：若$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则$\alpha \leqslant \alpha^p \leqslant 1$.)

21. 对于$f \in C(-\infty,\infty)$, 定义$\sigma_n(f) = \sup\{|f(t)| : |t| \leqslant n\}$, $\rho_n(f) = \min\{1, \sigma_n(f)\}$, $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(f)$. 证明

(1) $\rho_n(f)$ 及$\|f\|$ 不是范数;

(2) $d(f,g) = \|f-g\|$ 是$C(-\infty,\infty)$ 上的距离;

(3) $d(f_n,f) \to 0(n \to \infty)$ 当且仅当$\{f_n(t)\}$ 在$-\infty < t < \infty$ 的紧集上一致收敛于$f(t)$.

22. 设X 表示复序列$x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的全体, 定义

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1, |x_n|).$$

(1) $\|\cdot\|$ 是否是X 上的范数?

(2) $\|x-y\|$ 是否可定义为X 上的距离? 假若可以, 说明$\|x^{(n)} - x\| \to 0(n \to \infty)$ 的意义.

23. 设$H^p(0 < p \leqslant 1)$ 表示$[a,b]$ 上全体满足Hölder 条件

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant M|(t_1 - t_2)|^p$$

的函数, 线性运算的定义与$C[a,b]$ 中的相同. 在H^p 中定义范数

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p},$$

证明H^p 为Banach 空间.

24. 设X 是$[0,1]$ 上所有连续函数$x = x(t)$ 的集合. 证明

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

是X 上的范数, 但X 在这种范数下不完备.

25. 在$L^2[0,1]$ 上规定不同范数:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_3 = \left(\int_0^1 (1+t)|f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

哪些是等价范数? 试说明理由.

26. 设H 是在直线$\mathbb{R}$ 上平方可积, 导数也平方可积的连续函数集合, 对于每个 $f \in H$, 定义

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明H 是Banach 空间.