

# AUTOMI CELLULARI

Simone Maggi

25 maggio 2022

Dipartimento di Scienze dell'Informazione - Matricola 410687  
Università Statale di Milano  
Data della prima edizione: febbraio 1994, Milano

## 1 INTRODUZIONE

Gli automi cellulari sono un modello di calcolo per lo studio di sistemi complessi e l'analisi dei comportamenti che emergono in maniera evolutiva in tali sistemi.

La computazione realizzata dagli automi cellulari avviene in modo discreto e sincrono - l'evoluzione quindi è un insieme numerabile -, così pure discreto è lo spazio dei "dati" sui quali avviene la computazione. Per computazione si intende la determinazione del valore di una singola "cellula" (detta anche posto, in letteratura "site" o "spin") in maniera solitamente deterministica e in funzione del proprio valore e dei valori dei posti adiacenti. In questo lavoro si considereranno solamente gli automi cellulari che hanno la funzione di stato prossimo calcolata in modo deterministico; esistono comunque modelli parametrici e probabilistici. Il valore ottenuto risulta essere il nuovo "stato" della cellula all'istante di tempo successivo.

Sostanzialmente un automa cellulare (AC) consiste di un reticolo ordinato che forma lo spazio di evoluzione dell'automa (o il suo dominio), suddiviso discretamente in posti, ognuno dei quali può assumere uno tra i possibili ( $k$  finiti) valori decisi per l'automa; la regola di computazione o di stato prossimo, risulta essere unica per ogni cellula (*proprietà di omogeneità*) e si può ipotizzare che l'elaborazione avvenga tramite un processo parallelo su ogni posto. Il comportamento dinamico dell'automa è osservabile come sequenza di iterazioni di una regola globale ( $\Theta$ ) applicata partendo da una configurazione iniziale  $x^0$ ; pertanto la successione

$$\gamma_{x_0}^+ = (x^0, \Theta(x^0), \Theta(\Theta(x^0)), \dots, \Theta(\Theta^{n-1}(x^0)) = \Theta^n(x^0), \dots)$$

risulta essere una evoluzione o moto positivo dell'automa.

In base a questa osservazione, risulta importante notare come un AC sia un particolare tipo di sistema dinamico a tempo e spazio discreti. Si può infatti descrivere una transizione da una configurazione ad un'altra con la seguente forma compatta:

$$x^{t+1} = \Theta(x^t)$$

Si userà la scrittura  $x^t$  per denotare la  $t$ -esima configurazione globale dell'AC, mentre  $x_i^t$  indica il valore dell' $i$ -esimo *microstato* o *cellula* al tempo  $t$ .

## 1.1 DESCRIZIONE FORMALE DI AUTOMA CELLULARE

La seguente definizione formale viene introdotta per caratterizzare rigorosamente le componenti che formano un AC.

Un Automa Cellulare M consiste di una 5-upla,

$$M = (\Sigma, \Theta, v, l, x^0)$$

dove:

$\Sigma$  - insieme dei *microstati* dell'automa,

$\Theta$  - regola di iterazione,

$l$  - dimensione dello spazio delle fasi o dimensione del reticolo di evoluzione,

$v$  - quantità delle cellule adiacenti alla cellula da aggiornare, inclusa la cellula stessa,

$x^0$  - stato o configurazione iniziale.

## 1.2 ANALISI DELLE ENTITÀ CHE DEFINISCONO UN AC

Un generico elemento  $x \in \Sigma^l$  si dice **stato** o **configurazione** dell'automa.

Uno stato è quindi completamente specificato dall'insieme dei valori che ogni cellula assume in  $\Sigma$ , ovvero dai suoi  $l$  microstati.

- $\Sigma = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ , con  $|\Sigma| = k \geq 2$ , rappresenta l'insieme dei *valori* possibili che ogni cellula può assumere. Si parla di AC *booleani* quando  $\Sigma = \{0, 1\}$ , *bipolari* se  $\Sigma = \{a, b\}$ , *fuzzy* o *multistato* nel caso generale. Ovviamente il caso  $k = 2$  è quello minimale. Non è possibile diminuire  $k$  ad un valore inferiore; infatti non avrebbe nessun senso studiare il comportamento dell'automa, in quanto la funzione  $\Theta$  si ridurrebbe alla funzione identica e l'informazione codificata da  $\Sigma$  risulterebbe praticamente nulla. Inoltre, i risultati della Teoria dell'Informazione (teoremi di Shannon), dimostrano che considerare il caso binario non rappresenta una limitazione poiché partendo da esso è sempre possibile ottenere delle codifiche che estendono il dominio.

Quando è necessaria una rappresentazione grafica di una transizione da una configurazione ad un'altra (es.:  $x^0 \rightarrow x^1$ ), essa può avvenire associando ad ogni singolo stato in  $\Sigma$  un colore: per  $k = 2$  si pone ad esempio 0=nero e 1=bianco per denotare rispettivamente lo stato di cellula "morta" e cellula "viva"; per  $k > 2$  si possono fare le associazioni  $s_0$ =nero,  $s_{k-1}$ =bianco e per tutti gli stati rimanenti  $s_1 \dots s_{k-2}$  usare una scala di grigi opportunamente distribuiti.

- $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_l^0) \in \Sigma^l$  rappresenta la **configurazione iniziale** dell'automa. L'evoluzione dinamica è interamente dipendente da  $x^0$ . È possibile scegliere  $x^0$  in vari modi, come ad esempio "estrarre" con una certa probabilità  $p_i$  ogni singola cellula  $x_i^0$ , per  $i = 1 \dots l$  e considerarli eventi indipendenti e identicamente distribuiti, oppure "attivare" un solo posto e lasciare spenti ("quiescenti") tutti i rimanenti o ancora inizializzando con un particolare pattern, quale 012012012012... se ad esempio  $k = 3$ .

La scelta del tipo di inizializzazione, può avvenire in funzione del tipo di comportamento evolutivo nel tempo che si vuole evidenziare, oppure nella speranza di riuscire ad evidenziare quello in particolare desiderato.

- $l \in N$  (numeri naturali) specifica la dimensione del reticolo ordinato in cui trovano posto le cellule dell'automa. A livello teorico il reticolo si suppone infinito, come nel caso del nastro di computazione delle Macchine di Turing; più precisamente infatti si dovrebbe scrivere  $l \subseteq N$ . Ai fini di questo lavoro invece e per scopi essenzialmente pratici e sperimentalisti, si considera di fissare  $l \in N$ . Ad esempio  $l = 36$  può denotare un AC costituito da un vettore di cellule  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{35}, x_{36}) \in \Sigma^{36}$ , cioè una struttura unidimensionale. Se l'AC è binario potrà essere:

$$x = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots, 1)$$

Ma  $l = 36$  può anche denotare un reticolo 2-dimensionale, quindi un suo stato è rappresentato ad esempio dalla seguente matrice  $6 \times 6$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Un esempio famoso di AC basato su di un reticolo bidimensionale con  $\Sigma = \{0, 1\}$  è “Life”, ideato da John H. Conway nel 1970.

Analogamente,  $l = 36$  può ulteriormente voler denotare il reticolo 3-dimensionale  $3 \times 3 \times 4$ . E' quindi utile introdurre la convenzione secondo la quale  $l = n$ ,  $l = n_1 \times n_2$ ,  $l = m_1 \times \dots \times m_n$  denotano rispettivamente un AC 1-, 2- ed  $n$ -dimensionale.

La struttura  $\Sigma^l$  definisce il reticolo di evoluzione e le sue proprietà topologiche: tale struttura viene anche chiamata **spazio delle fasi**, usando la terminologia usata in Teoria dei Sistemi, oppure anche *universo*. E' inoltre interessante introdurre la nozione di spazio ciclico, ovvero ipoteticamente non limitato (*unbounded*).

1. Nel caso di  $l = n$ , si considera il reticolo come un vettore circolare o biinfinito, ovvero una array nel quale la  $l$ -esima cellula risulta connessa localmente con la prima e viceversa.

$$\longrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l) \longrightarrow$$

2. Nel caso in cui  $l = n \times m$  oppure  $l = n \times m \times \dots \times j$ , si ipotizza di connettere le regioni ai bordi della struttura in modo da formare un iperrettangolo. Ad esempio, con  $l = 64 \times 64$  i bordi formati dalle colonne

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{64,1} \end{bmatrix} \underset{e}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} x_{1,64} \\ x_{2,64} \\ \vdots \\ x_{64,64} \end{bmatrix}$$

si considerano connessi, come ugualmente la prima e l'ultima riga

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,64} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{64,1} & x_{64,2} & \dots & x_{64,64} \end{bmatrix}$$

La struttura che si ottiene equivale alla superficie di un toroide. Risulta chiaro che il vicinato delle cellule agli angoli della matrice, rimane “sparso” fisicamente agli opposti della matrice stessa, mentre la connessione risulta virtualmente adiacente.

Per quanto riguarda le implementazioni sul computer (cfr. [3-Stauf.]), è possibile memorizzare il generico reticolo  $\Sigma^l$  come un singolo array dimensionato ad  $l$ , ed eseguire le operazioni sui posti considerando i necessari spiazzamenti.

ESEMPIO - Sia  $l = 8 \times 8$ ; allora il generico macrostato  $x \in \Sigma^l$  è esprimibile come:

$$\begin{aligned} x = & (s_{1,1}, s_{2,1}, \dots, s_{8,1}, \\ & \dots, \\ & s_{1,i}, s_{2,i}, \dots, s_{8,i}, \\ & \dots, \\ & s_{1,8}, s_{2,8}, \dots, s_{8,8}) \end{aligned}$$

Relativamente alla codifica degli stati, può essere conveniente memorizzare in una singola word esattamente  $16/\lceil \log_2(k) \rceil$  cellule con  $k$  stati ciascuna (di norma 1 word=2 byte). Questa tecnica, detta “multispin-coding”, assicura una maggiore efficienza sia in termini di occupazione di memoria, sia in termini di velocità di computazione; d'altra parte è più complicata da programmare, rispetto ed esempio alla strategia di usare un byte per ogni cellula.

- $v \in N$ , specifica la dimensione del **vicinato** (*neighborhood*), cioè il numero delle connessioni locali adiacenti alla cellula da aggiornare. In questo caso la simbologia corrente non segue le usuali convenzioni; in [1-Wolf.] e in altri riferimenti si definisce  $r \in N$  come il *raggio* dell'intorno formato da  $(2r + 1)$  posti. Questa scelta è stata attuata semplicemente per motivi di comodità.

Si possono definire diversi tipi di vicinati, sia in funzione della dimensione del reticolo, sia in funzione del tipo di geometria gli si vuole assegnare. Se l'universo è unidimensionale ( $l = n$ ) e  $v = 3$ , allora il valore della nuova  $i$ -esima cellula dipenderà dal suo e dai valori delle due cellule  $((i - 1) \bmod l)$  e  $((i + 1) \bmod l)$  adiacenti:

$$\begin{aligned} x_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\ \forall i &= 1 \dots n \end{aligned}$$

Nei reticolati 2-dimensionali, si considera spesso il vicinato  $B_{VN}(i)$  formato da  $v = 5$  posti (detto **intorno di von Neumann**, a forma di croce) oppure il vicinato  $B_M(i)$  costituito da  $v = 9$  posti (**intorno di Moore**, a forma quadrata); entrambi sono organizzati simmetricamente intorno all' $i$ -esimo posto.

**ESEMPI** - Se il reticolo è  $\Sigma^{n \times m}$  si ha rispettivamente:

$$x_i = f_{B_M}(x_{i-m-1}, x_{i-m}, x_{i-m+1}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+m-1}, x_{i+m}, x_{i+m+1})$$

$\forall i = 1 \dots n$  e una qualche funzione  $f_{B_M}$  e

$$x_i = f_{B_{VN}}(x_{i-m}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+m})$$

$\forall i = 1 \dots n$  e una qualche funzione  $f_{B_{VN}}$ .

Analogo discorso per gli AC 3-dimensionali, nei quali l'intorno  $B_{VN}(i)$  è costituito da 7 posti, mentre l'intorno  $B_M(i)$  ne considera ben 27.

- $\Theta : \Sigma^l \rightarrow \Sigma^l$  rappresenta infine la *funzione di stato prossimo* e viene anche detta **funzione Theta di attivazione globale**.

$\Theta$  trasforma l'intera configurazione  $x^t \in \Sigma^l$  del reticolo, nella configurazione  $x^{t+1} \in \Sigma^l$  in una unità di tempo. La funzione  $\Theta$  consiste nella composizione di  $l$  funzionali  $g$  che agiscono con la stessa regola sul vicinato di ogni cellula computando il microstato  $x_i \in \Sigma$ .

In particolare si ha:

$$\begin{aligned} \Theta(x^t) &= \Theta(x_1^t, \dots, x_i^t, \dots, x_l^t) \\ &=_{def} g(x_1^t), \dots, g(x_i^t), \dots, g(x_l^t) \\ &= (x_1^{t+1}, \dots, x_i^{t+1}, \dots, x_l^{t+1}) \\ &= x^{t+1} \end{aligned}$$

$\forall x \in \Sigma^l$  dove la funzione componente  $g$ , chiamata **funzione di aggiornamento locale**, agisce su  $\Sigma^l$  in  $\Sigma$ . In realtà questa classica definizione sistematica viene modificata leggermente in questo contesto o se si vuole, ne rappresenta un caso particolare. La funzione  $g$  infatti viene definita con argomenti effettivi sul cartesiano  $\Sigma^v$  a valori in  $\Sigma$ .

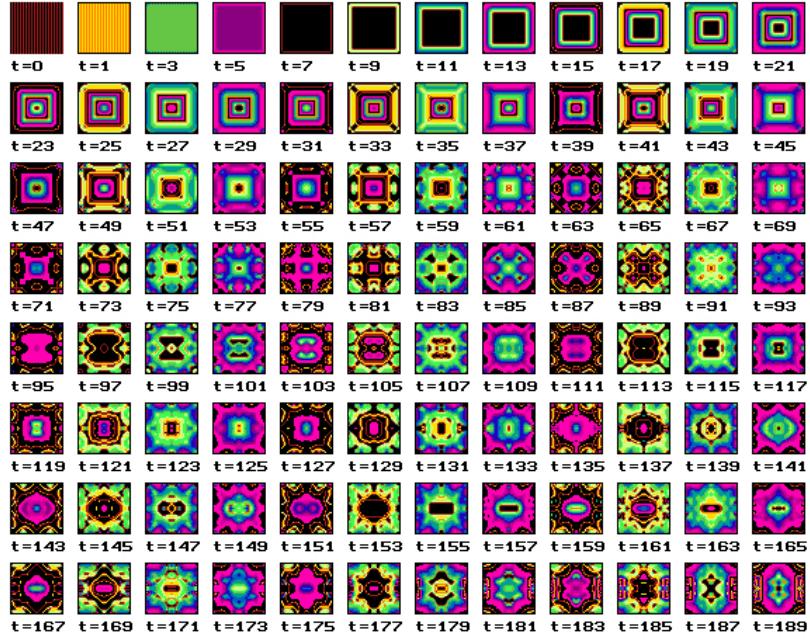


Figura 1: Automa cellulare bidimensionale con relative 190 transizioni di stato.

Introducendo  $\bar{g} : \Sigma^v \rightarrow \Sigma$  come tale nuova funzione e ponendo

$$B(i) := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_v}) \in \Sigma^v$$

l'insieme dei  $v$  posti che formano il vicinato di  $x_i$ , si può definire esattamente come avviene una transizione da uno stato ad un'altro con la funzione stato-prossimo  $\Theta$ :

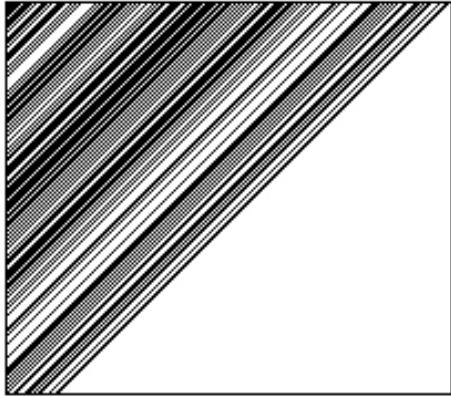
#### Transizione di stato di un Automa Cellulare:

$$\begin{aligned} \Theta(x^t) = (g(B(1)), \dots, g(B(i)), \dots, g(B(l))) &=_{\text{def}} (x_1^{t+1}, \dots, x_i^{t+1}, \dots, x_l^{t+1}) = x^{t+1} \\ \forall x \in \Sigma^l \end{aligned}$$

Per permettere di calcolare effettivamente in parallelo una singola iterazione di  $\Theta$  (e gli AC sono modelli che si prestano bene ad una simile tecnica di calcolo), bisogna fornire in ingresso ad ogni singolo “processore”  $\bar{g}$ , una copia opportuna del proprio “dominio di vicinato”  $B(i)$ . Supposto di avere a disposizione una porta Fan-out “parziale”, ovvero capace di duplicare solo la parte necessaria dell'ingresso, si ottiene uno schema di  $(l, \Sigma)$ -rete.

Si ricorda che la condizione che la funzione  $\bar{g}$  sia unica per ogni vicinato è una caratteristica essenziale per gli AC. Inoltre è richiesto generalmente che  $\bar{g}$  sia invariante, dando così luogo ad un sistema dinamico discreto *autonomo*. Gli studi sugli AC si basano sul fatto che uno schema di regole semplice, quale solitamente è la funzione realizzata da  $\bar{g}$ , porta a fenomeni complessi e interessanti. La condizione di ciclicità del reticolo risulta chiaramente determinante nella definizione dei vicinati  $B(1)$  e  $B(l)$ . In certi casi però può essere utile o necessario non usare un reticolo circolare oppure cercare di annullare gli effetti che sono introdotti dall'interazione dell'automa con i bordi del reticolo. In entrambi i casi si sovraddrivisiona a sufficienza il reticolo e si pongono a zero tutti i posti verso i suoi estremi. In principio, per evitare i “disturbi” dei bordi, che potrebbero modificare le proprietà dell'automa, si dovrebbe disporre di un reticolo molto vasto, nel quale l'evoluzione possa procedere per un tempo sufficiente senza i suddetti “effetti da bordo”. In pratica questo approccio non è sempre utilizzabile, soprattutto per AC con dimensione superiore alla prima.

L'evoluzione governata da  $\Theta$  non è invertibile, ovvero dato un qualsiasi  $y \in \Sigma^l$  non è possibile determinare univocamente quell' $x \in \Sigma^l$  per il quale di abbia  $y = \Theta(x)$ . Il motivo dell'irreversibilità di  $\Theta$  è legato al fatto che  $\bar{g}$  è sempre una funzione suriettiva e mai iniettiva.



**Regola 170: 10101010**

Figura 2: Regola 170, detta 'shift a sinistra'.

### 1.3 AUTOMI CELLULARI E TIPI DI REGOLE

Da questo punto in avanti, con i termini "regola", "funzione di transizione", "operatore", ecc., si farà riferimento esclusivamente al funzionale  $\bar{g} : \Sigma^v \rightarrow \Sigma$  che governa effettivamente la dinamica dell'AC. Tale funzione viene definita spesso in forma tabellare.

Consideriamo ad esempio il seguente AC detto *elementare*:

$$AC_E = < \{0, 1\}, \Theta, 3, 128, x^0 >$$

Lo spazio delle fasi chiaramente è  $\{0, 1\}^{128}$ ,  $x^0 \in \{0, 1\}^{128}$  viene determinato casualmente con  $p_i = \frac{1}{2}$  e infine  $\bar{g}$  coivolge il vicinato composto da 3 cellule:

$$x_i^{t+1} = \bar{g}(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$$

In questo caso, la totalità delle funzioni  $\bar{g}$  che mappano  $\{0, 1\}^3$  in  $\{0, 1\}$  è esattamente  $256 = 2^{2^3}$ , poichè le possibili configurazioni distinte del vicinato sono 8 e per ognuna di esse si possono associare due scelte in  $\{0, 1\}$ . In generale allora la totalità delle regole o funzioni  $\bar{g} : \Sigma^v \rightarrow \Sigma$  è data da

$$R = |\Sigma|^{\Sigma^v} = k^{k^v}$$

ESEMPIO - L'AC elementare "127" che viene ora analizzato è detto "shift a sinistra"; la sua regola di funzionamento è descritta dalla seguente tabella:

$$\bar{g}_{SHL} : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$$

000	$\rightarrow$	0
001	$\rightarrow$	1
010	$\rightarrow$	0
011	$\rightarrow$	1
100	$\rightarrow$	0
101	$\rightarrow$	1
110	$\rightarrow$	0
111	$\rightarrow$	1

La mappa di "bit" che segue, nella quale si è associato un pixel bianco al valore 0 e il nero al valore 1 (in pratica vengono mostrati i bit attivi), rappresenta una evoluzione dinamica di circa 160 passi di tale regola; in questo esempio si è posto  $l = 180$  e la configurazione di inizio è stata generata casualmente.

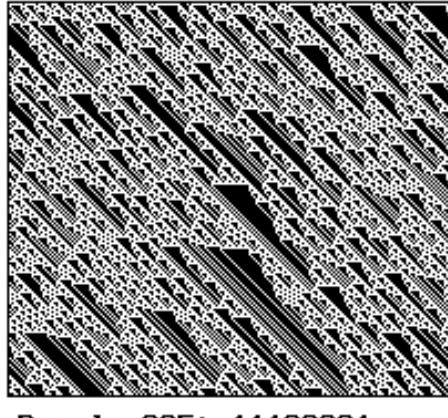


Figura 3: Regola 225

Si introduce ora la convenzione adottata da S. Wolfram secondo la quale si possono catalogare convenientemente gli AC che sono definiti da regole espresse in forma tabellare. L'enumerazione degli AC si ottiene semplicemente considerando la sequenza dei microstati di codominio di  $\bar{g}$  come la rappresentazione numerica in base  $k$  della regola che distingue l'automa. Poniamo quindi:

$$\begin{aligned} \bar{g} : \{0, 1\}^3 &\rightarrow \{0, 1\} \\ (000) &\rightarrow \alpha_0^{LSB} \\ (001) &\rightarrow \alpha_1 \\ (010) &\rightarrow \alpha_2 \\ (011) &\rightarrow \alpha_3 \\ (100) &\rightarrow \alpha_4 \\ (101) &\rightarrow \alpha_5 \\ (110) &\rightarrow \alpha_6 \\ (111) &\rightarrow \alpha_7^{MSB} \end{aligned}$$

per indicare che i blocchi ternari  $(\beta_1\beta_2\beta_3) \in \{0, 1\}^3$  vengono mappati nei nuovi microstati  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ . Il numero R della regola si ottiene convertendo in decimale le seguenti cifre:

$$R_{bin} = (\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)$$

Si noti che l'MSB (Most Significant Bit) è posto in ordine inverso rispetto all'ordine della tabella. Nel caso precedente si può quindi parlare dell'automa o della regola numero 170.

**ESEMPIO** - La seguente mappa - detta anche *pattern spazio-tempo* - rappresenta l'evoluzione dell'AC elementare “225”. Anche in questo caso il reticolo ha dimensione  $l = 180$  e non risulta connesso ciclicamente. In questo caso comunque si noti come la dinamica “emergente” risulti molto più complessa e come tenda ad organizzarsi.

Oltre alla forma tabellare, la funzione  $\bar{g}$  è esprimibile ovviamente anche in forma analitica, nonché in forma additiva (cfr.[2-Wolf.]) oppure come espressione condizionale.

L'AC “Life” per esempio è caratterizzato dalla seguente regola condizionale:

$$x_i^{t+1} = \bar{g}_{life}(x_i^t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i^t = 1 \text{ e } sum_i = 2 \text{ oppure } sum_i = 3 \\ 1 & \text{se } x_i^t = 1 \text{ e altrimenti} \\ 1 & \text{se } x_i^t = 0 \text{ e } sum_i = 3 \\ 0 & \text{se } x_i^t = 0 \text{ e altrimenti} \end{cases}$$

dove si è posto  $sum_i = \sum_{n=1}^9 x_n^t$ , ossia la somma dei 9 valori che formano il vicinato  $B_M(i)$  dell'i-esima cellula.

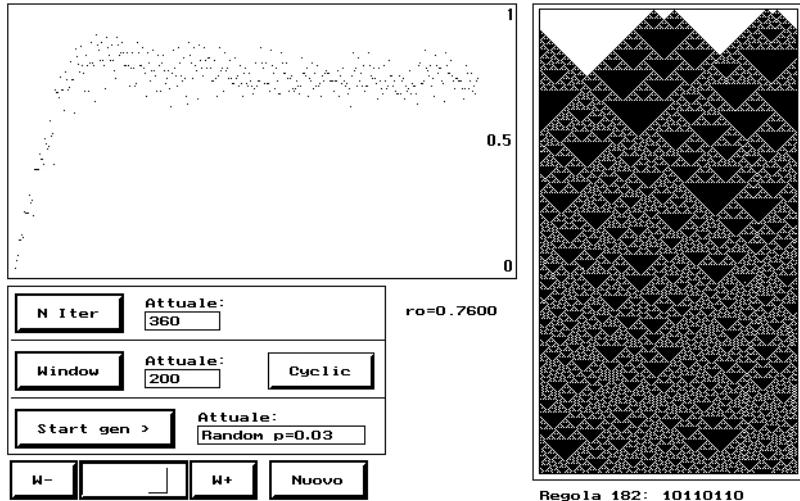


Figura 4: Dinamica della regola 182

## 2 ANALISI STATISTICA DELLE PROPRIETÀ LOCALI

Si considera a questo punto l'analisi statistica di una singola configurazione, in modo da ottenere quale primo risultato, un indice qualitativo del livello di auto-organizzazione degli AC. Per questo scopo vengono considerati gli AC elementari con spazio delle fasi finito ( $l = n \in N$ ) e con reticolo ciclico (questa condizione non si è rivelata particolarmente significativa).

Il primo passo consiste nell'introdurre l'indice di **densità media**  $\rho$ , ovvero la frazione media di posti 1 rispetto a 0 in ogni configurazione  $x \in \Sigma^l$ . Questo indice è comparabile al concetto di probabilità classica. Si pone  $\rho_0 = p$  in quanto la densità allo stato iniziale coincide con la probabilità  $p$  indipendente per ogni posto di essere ad 1. La maggior parte delle considerazioni che seguiranno, saranno riferite ad una densità iniziale di  $\rho_0 = p = \frac{1}{2}$ . Il calcolo di  $\rho_1$ , cioè la densità media di posti 1 dopo la prima iterazione, si ottiene applicando la regola dell'automa, indicata con  $R = (\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)$ .

Si crea così una configurazione  $x^1$  con densità ottenibile semplicemente con:

$$\rho_1 = \frac{\#_1(R)}{\#_0(R) + \#_1(R)} = \frac{\#_1(R)}{8}$$

dove  $\#_c(R)$  è il numero di occorrenze della cifra  $c$  in  $R$ . Ad esempio se  $R = (11100110)$ , cioè la regola-automa “230”, allora  $\rho_1 = \frac{5}{8}$ . La determinazione di  $\rho_1$  può essere generalizzata nel caso in cui  $\rho_0 \neq \frac{1}{2}$  (cfr. [2-Wolf.]).

Ora invece si è interessati a vedere cosa succede a  $\rho_t$  al crescere di  $t$ ; si è quindi interessati alla sua dinamica, in modo da ricavare informazioni (qualitative o a livello probabilistico) inerenti allo stato complessivo dell'automa. Il metodo precedente purtroppo non è più applicabile per effetto delle correlazioni introdotte nel tempo da  $R$ . La regola infatti crea una evoluzione che tende sempre più ad allontanarsi da un comportamento puramente casuale (“white-noise”). Sulla base di conoscenze sperimentali ottenute attraverso simulazioni, si è osservato che per le regole  $R = 0, 32, 72$  si ha esattamente  $\rho_\infty = 0$  dopo un certo transiente  $t_0 \in N$ .

In particolare per  $R = 0$  si ha  $\rho_t = 0$  per ogni  $t > 0$  e qualsiasi  $\rho_0$ ; chiaramente tale regola “uccide” ogni cellula dopo il primo passo, oltre a soddisfare la *condizione di quiescenza* che richiede il permanere a 0 di ogni terna (000). In altri casi invece si ha  $\rho_\infty = 1$ , con probabilità  $(1 - \rho_0)^3$ , come in  $R = 254$ .

La regola 204 invece realizza la funzione identità e ad ogni passo temporale si ha quindi che  $\rho_t = \rho_0, \forall t > 0$ . La regola 250 dà ancora luogo a  $\rho_\infty = 1$  in virtù di una condizione detta di “dissiunzione” (cfr. [2-Wolf.]), mentre la 50 grazie alla proprietà di “congiunzione”, produce un  $\rho_\infty = \frac{1}{2}$ . Altri dati sperimentali rivelano che l'evoluzione di  $\rho$  tende in media a raggiungere un limite e che tale punto viene raggiunto seguendo una curva esponenziale (quindi abbastanza velocemente); inoltre tale comportamento è indipendente dalle condizioni iniziali quando si sceglie come densità iniziale  $\rho_0 = \frac{1}{2}$ .

**ESEMPIO** - Le regole 182, 90 e 18 tendono asintoticamente a  $\rho_t = \frac{3}{4}$ ,  $\rho_t = \frac{1}{2}$  e  $\rho_t = \frac{1}{4}$  rispettivamente e per ogni  $t$  circa maggiore di 15 quando  $\rho_0 = p = \frac{1}{5}$ . La seguente figura mostra l'evoluzione

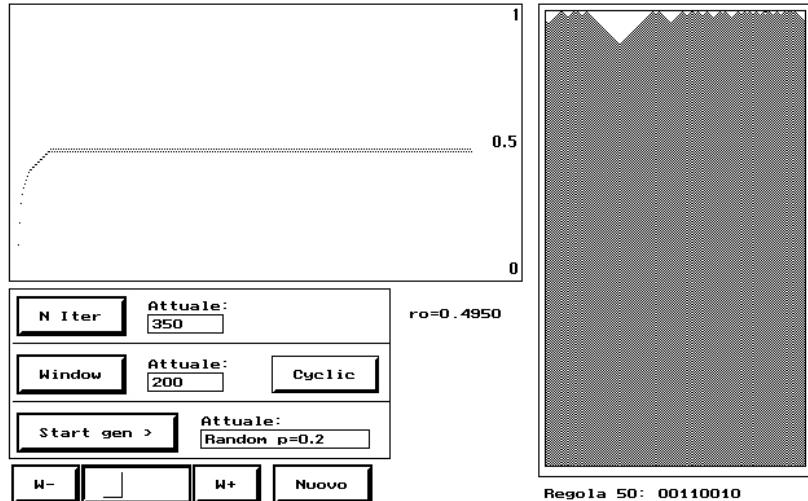


Figura 5: Dinamica della regola 50

temporale della regola 50, con tale densità iniziale e per un reticolo formato da  $l = 200$  posti; sono visualizzati i primi 350 istanti temporali. La precedente figura 4 visualizza invece la dinamica della regola 182. In particolare per la regola 90, detta anche *somma modulo 2* per il fatto che  $(01011010)$  è la stringa risultante da  $(\beta_1 + \beta_3) \bmod 2$ , per tutti i  $(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$  ordinatamente in  $\{0, 1\}^3$ , è stata trovata una funzione per la complessità di  $\rho_t$ :

$$\rho_t = \frac{1}{2[1 - (1 - 2\rho_0)^{2^{\#_1(t)}}]}$$

dove  $\#_1(t)$  è il numero di cifre 1 nella rappresentazione binaria dell'indice temporale  $t$  (per la derivazione di tale formula, cfr. [2-Wolf.]).

Maggiori problemi si hanno invece quando il moto dell'automa ha come stato iniziale un blocco limitato di cellule attive: in tal caso l'evoluzione di  $\rho_\infty$  presenta irregolarità. Per regole quale la 22, si è visto che alcuni approcci statistici falliscono; tramite diversi simulazioni si è fornita una stima numerica della densità nell'ordine di  $\rho_\infty = 0.35 \pm 0.02$  per ogni  $\rho_0 = p > 0$ .

Comunque a prescindere da questi risultati particolari, si può tentare di dare una semplice approssimazione di  $\rho$  con l'ipotesi di ignorare le correlazioni introdotte da R e considerando le configurazioni indipendenti. Una simile tecnica, permette di stimare  $\rho$  nel seguente modo:

$$\rho_\Delta = \frac{\delta\rho}{\delta t} = \Gamma(0 \rightarrow 1) - \Gamma(1 \rightarrow 0)$$

dove i termini  $\Gamma(0 \rightarrow 1)$  e  $\Gamma(1 \rightarrow 0)$  rappresentano la frazione media di posti che cambiano valore 0 in 1 e viceversa. Ponendo  $P = \{p^3, p^2q, p^2q, pq^2, p^2q, pq^2, pq^2, q^3\}$  il vettore delle probabilità degli 8 possibili vicinati (ovvero che  $(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = (111)$ ,  $(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = (110)$ , ...,  $(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = (001)$  e  $(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = (000)$ ), nei quali ogni posto ha probabilità indipendente  $p = \rho$  e  $q = 1 - p$ , si ricavano i due termini  $\Gamma$  nel seguente modo:

$$\Gamma(0 \rightarrow 1) == \langle P | (00110011 \wedge R) \rangle$$

$$\Gamma(1 \rightarrow 0) == \langle P | (11001100 \wedge R) \rangle$$

dove  $\wedge$  indica l'operatore And bit-per-bit (“bit-wise conjunction”) e l'operatore  $\langle . \rangle$  è il prodotto scalare del vettore  $P$  con i termini binari nella parte destra. Si ottiene una densità di equilibrio per  $\rho_\infty$  come soluzione dell'equazione

$$\rho_\Delta = \frac{\delta\rho}{\delta t} = 0$$

ESEMPIO - Sia  $R = (01011010)$ , ovvero l'AC 90. Si ricavano i termini  $\Gamma$ :

$$\Gamma(0 \rightarrow 1) == < P|(00010001) > == pq^2 + pq^2$$

$$\Gamma(1 \rightarrow 0) == < P|(10000100) > == p^3 + pq^2$$

L'equazione da risolvere è quindi:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = pq^2 + \cancel{pq^2} - p^3 - \cancel{pq^2} = 0$$

$$p(1-p)^2 - p^3 = 0$$

che ha soluzioni per  $p = 0$  e  $p = \frac{1}{2}$ . Questo metodo generale ha comunque due svantaggi:

1) è applicabile solamente agli AC con regola “legale”, ovvero quegli automi per cui  $R$  è nella forma  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_5\alpha_40)$ ; la condizione suddetta assicura che  $(000) \rightarrow 0$  (*quiescent condition*) in modo da evitare propagazioni istantanee di posti attivi e rende le regole simmetriche (*reflection symmetric*) per garantire l'isotropia, cioè  $(100) = (001) \rightarrow \beta_1$  e  $(011) = (110) \rightarrow \beta_2$ ; inoltre

2) anche se applicato a regole legali, fornisce talvolta valori errati, come ad esempio nel caso di  $R = (10110110) = 182$ , per la quale la stima ottenuta di  $\rho_\infty = 0, 1, \frac{2}{3}$  è sensibilmente lontana dal valore esatto, che in realtà è uguale a  $\frac{3}{4}$ . Inoltre si è visto (cfr. [2-Wolf.]) che per regole complesse l'accuratezza della stima di  $\rho$  si approssima alla densità reale con una precisione del 10 – 20%.

In conclusione, anche considerando le evoluzioni dinamiche a partire da stati casuali, il modo di stimare la densità media all'infinito risulta inadeguato; in un certo senso quindi non è ragionevole ignorare l'effetto di correlazione introdotta da  $R$ , anzi è proprio tale effetto che permette la creazione di certe strutture regolari e auto-organizzanti!

### 3 ANALISI DELLO SPAZIO DELLE REGOLE

In questa sezione si esaminano le regole degli AC collocandole sistematicamente in una sorta di spazio, caratterizzato da alcune proprietà che verranno descritte nelle sezioni successive.

Come nel caso precedente, l'oggetto dello studio è la classe degli AC con  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $l$  finito e con la funzione  $\bar{g}$  espressa in forma tabellare (*lookup rule table*).

La codifica delle regole segue la usuale convenzione di S. Wolfram. Ora si ipotizza di disporre tutte le 256 regole lungo un segmento di retta e di usare la distanza di Hamming per valutare l'ordinamento di tali regole. Secondo questa metrica, possiamo così parlare di **spazio delle regole** come l'insieme dei 256 “punti” codificati da stringhe di 8 bit.

L'operazione di movimento da un punto all'altro dello spazio può essere riferita con il termine *mutazione*; in biologia si usa infatti questo vocabolo per indicare il cambiamento di un singolo posto del genotipo. A questa modifica “genetica” corrisponde un relativo cambiamento del fenotipo e nel nostro caso della dinamica dell'AC.

Ogni punto dista 1 ham. dai rispettivi punti adiacenti. Prima di affrontare la descrizione della struttura dello spazio delle regole secondo [4-WeLi], viene presentata una sua analisi parametrizzata da  $\rho = \frac{\#_1(R)}{8}$ ; questa variabile servirà ora come “indicatore di attività” dell'AC o se si vuole come “indice termico” del livello di vita.

Chiaramente  $0 \leq \rho \leq 1$ , poichè  $0 \leq R \leq 255$ . Variando  $\rho$  (nei testi di [4-WeLi] e [5-Lang.] si usa  $\lambda$ ), si fornisce un modo per muoversi da un sottoinsieme dello spazio ad un altro. La seguente figura mostra schematicamente la fisionomia dello spazio delle regole (RS, *Rule-Space*).

Con l'aumento graduale di  $\rho$  da 0 ad  $\frac{1}{2}$ , la dinamica emergente aumenta la sua complessità, per poi diminuire in modo simmetrico passando da  $\frac{1}{2}$  ad 1.

Ovviamente  $\rho$  rimane un indice probabilistico e sicuramente non univoco, ci sono infatti alcuni casi di eccezione: a bassi valori di  $\rho$  possono corrispondere dinamiche relativamente attive. Partendo con  $\rho = 0.0$  (che rappresenta in “polo-sud” di RS), si nota che ogni configurazione di inizio viene subito trasformata in uno stato totalmente quiescente.

Con  $\rho$  di poco superiore a 0 significa che ci sono in  $R$  uno o due bit ad 1, quindi 7 o 6 blocchi ternari vengono mappati in 0; dopo alcune passi l'AC declina in stato inattivo o *null*. Ad esempio con  $R=8, 32, 64$  e in parte 128, lo stato è null al massimo dopo  $t = 3$  iterazioni, a prescindere da qualsiasi stato iniziale (non per 128 con  $p = 1!$ ). Tuttavia per  $R=16$  questo è falso e la dinamica infatti ricorda uno shift quando  $p = \frac{2}{5}$ .

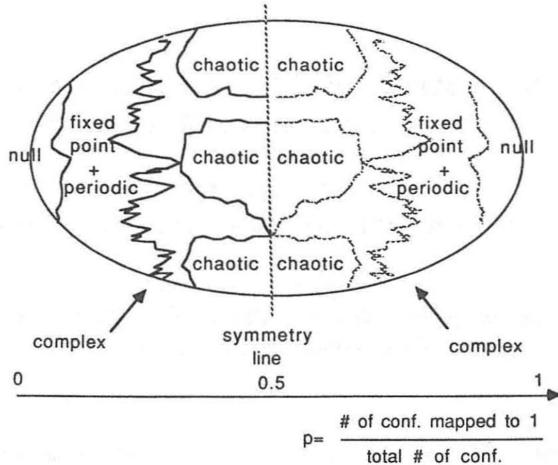


Figura 6: Illustrazione schematica del Rule Space [4-WeLi]

Nell'intorno destro di 0.2, l'attività aumenta notevolmente; in questa zona dello spettro i moti raggiungono punti fissi o ciclici e a volte possono presentarsi strutture persistenti e movimenti di propagazione.

In un intorno di 0.3 si supera la soglia detta di *percolazione*, che è il punto critico di RS oltre il quale l'AC ha una probabilità molto elevata di possedere una notevole attività (forse il livello massimo di "vita" si ottiene a questa "temperatura"). Qui si può osservare il fenomeno di auto-sostentamento, soprattutto negli AC 2-dimensionali.

A livello "equatoriale", cioè con  $0.4 \leq \rho \leq 0.5$ , l'attività tende ad espandersi su tutto il reticolo a discapito delle zone quiescenti. I moti diventano complessi e disordinati.

I comportamenti che risiedono nella regione  $0.5 < \rho \leq 1$  seguono dualmente quelli della prima metà di RS. Di conseguenza l'analisi statistica effettiva è ridotta a metà delle regole possibili. La sezione seguente è dedicata alla classificazione delle dinamiche, mentre nella successiva si confrontano vari risultati e si esamina più precisamente la struttura del RS.

## 4 CLASSIFICAZIONE QUALITATIVA DELLE DINAMICHE

In [2-Wolf.] è stata fatta la prima sistematica classificazione degli AC; sono state evidenziate empiricamente le quattro seguenti classi principali di comportamento:

- Classe I. I moti  $\gamma_{x_0}^+$  raggiungono uno stato omogeneo  $x^t$  dopo un tempo  $t \in N$ .
- Classe II. I moti  $\gamma_{x_0}^+$  giungono in un sottoinsieme di  $\Sigma^l$  ed entrano in un punto fisso o ciclico dopo un certo transiente.
- Classe III. I moti  $\gamma_{x_0}^+$  danno luogo a pattern caotici.
- Classe IV. I moti  $\gamma_{x_0}^+$  generano strutture complesse persistenti o che si propagano.

### 4.1 Classe I

Gli AC che appartengono a questa classe evolvono e permangono dopo un tempo finito in uno stato omogeneo, che è uno stato con tutti gli  $x_i = \alpha$ ,  $\forall i = 1 \dots l$ , ed  $\alpha$  fissato in  $\Sigma$ . Si conviene di chiamare questo stato  $x_f = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$  **punto limite omogeneo** o punto di **equilibrio omogeneo**. Gli AC che manifestano questa dinamica distruggono interamente l'informazione presente allo stato iniziale.

È possibile dividere la Classe I in due sottoclassi distinte (caso binario):

- Classe I.0: tutti i posti valgono 0 e il limite viene indicato con  $x_{f_0} = (0, 0, \dots, 0)$  (tabella 1);
- Classe I.1: tutti i posti valgono 1 e il limite è  $x_{f_1} = (1, 1, \dots, 1)$ .

### 4.2 Classe II

Fanno parte di questa classe quelle regole che fanno evolvere l'AC in un **punto fisso** ( $\Theta(x_f) = x_f$ ) o in un **punto periodico** ( $\Theta^h(x_f) = x_f$ ); in entrambi i casi il punto  $x_f$  non è omogeneo. Gli AC

che manifestano ciclicità nel moto dinamico, producono strutture persistenti semplici, come sequenze di blocchi (11) o (111) mantenute nel tempo distanziate da diversi 0. I periodi hanno un ordine prevalentemente piccolo.

Le strutture ottenute con le regole in classe II, sono comparate in [2-Wolf.] a stringhe generate da grammatiche regolari.

### 4.3 Classe III

I pattern creati da AC in questa classe, sono **globalmente caotici** e provengono pressochè per tutte le configurazioni di inizio.

La densità  $\rho_t$  tende a stabilizzarsi ad  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{k}$  per automi fuzzy), con un andamento esponenziale se una piccola frazione di posti è ad 1 in  $x^o$ , mentre se  $\rho_0 = p = \frac{1}{2}$  il transiente è praticamente nullo.

I pattern generati hanno spesso una morfologia frattale, sono cioè figure costituite da semplici elementi geometrici (triangoli soprattutto) ripetuti e composti in scala minore; tale proprietà è detta *auto-somiglianza* (*self-similarity*). Alcuni pattern hanno una geometria ben distribuita e altri ricordano la costruzione ricorsiva del triangolo di Sierpinski. Molte figure inoltre hanno una dimensione frattale non intera (dimensione di Hausdorff) circa uguale a  $\log_2 3 \simeq 1.59$ .

### 4.4 Classe IV

Gli AC che appartengono a questa categoria danno luogo a **pattern complessi**, con strutture **localizzate** e talvolta **propaganti**. Ci si riferisce spesso a questa classe come all'insieme delle regole “rimanenti”, quelle regole cioè per le quali non esiste un criterio netto di caratterizzazione.

L'AC Life è un valido esempio di appartenente alla classe IV per tre buone ragioni:

1) In alcune evoluzioni temporali, si possono osservare strutture propaganti, come i “glider”; un glider è una sotto-configurazione del reticolo 2D, composta da 5 microstati ad 1, che evolve lungo una direzione particolare (es. sud → nord-ovest). Se il reticolo è ciclico, un glider ha la proprietà di muoversi indefinitamente finché sul suo cammino incontra solo posti nulli. Un simile comportamento, che non è esplicitamente scritto nelle “regole del gioco” ma è una conseguenza visibile della struttura interna del sistema, viene detto *epifenomeno* (cfr. [8-Hofs.]).

2) Life abbonda di altri epfenomeni e spesso ad una piccola variazione dello stato iniziale corrisponde una evoluzione notevolmente differente. La predizione del comportamento di questi sistemi risulta molto complicata e tecniche algoritmiche falliscono quasi sempre; solo una esplicita simulazione permettere di comprendere l'esatta dinamica.

3) Life e in generale tutti gli AC di classe IV, sono gli unici modelli di AC che possono essere impiegati come macchine per computazioni universali. I dati sono posti nel reticolo come stato iniziale e la computazione procede sotto iterazione di  $\Theta$ .

Esiste una dimostrazione dell'universalità di Life (riferimenti in [2-Wolf.]). Gli AC elementari sono invece troppo semplici per permettere questa proprietà; necessita almeno avere  $k = 2, v = 5$  o  $k = 3, v = 3$  e per un opportuno transiente si può congetturare la capacità di computazione.

Si è dimostrato che un AC con  $k = 18, v = 3$  riesce a simulare una Macchina di Turing a 7 stati e 4 simboli. Comunque solo gli AC con spazio delle fasi infinito sembrano equivalenti alle Macchine di Turing Universali; nel caso finito, solo un sottoinsieme di tutte le funzioni Turing-computabili può essere simulato. Inoltre la computazione si considera terminata solo in corrispondenza di strutture non propaganti e ciò avviene circa nel 93% dei casi.

## 4.5 ANALOGIE TRA LE CLASSIFICAZIONI DELLE DINAMICHE

Tornando all'analisi dello spettro di RS (rule space), si possono evidenziare le seguenti corrispondenze con la classificazione di Wolfram:

- Classe I (punto limite omogeneo)  $\Leftrightarrow 0 \leq \rho < 0.2$
- Classe II (punti ciclici) e
- Classe IV (periodicità complesse/propagazioni)  $\Leftrightarrow 0.2 \leq \rho < 0.4$
- Classe III (caoticità)  $\Leftrightarrow 0.4 \leq \rho \leq 0.5$

Prima di presentare altri risultati riguardo al RS, è molto importante enunciare a questo punto un teorema fondamentale valido per gli AC finiti e anche per tutti i generici sistemi dinamici a tempi discreti:

Classe	Regola
(A) Null (8)	0, 8, 32, 40, 128, 136, 160, 168
(B) Punto fisso (32)	2, 4, 10, 12, 13, 24, 34, 36, 42, 44, 46, 56, 57, 58, 72, 76, 77, 78, 104, 130, 132, 138, 140, 152, 162, 164, 170, 172, 184, 200, 204, 232
(C) Periodica (31)	1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 19, 23, 25, 27, 28, 29, 33, 35, 37, 38, 41, 43, 50, 51, 74, 108, 131, 133, 134, 142, 156, 178
(D) Caotica locale (3)	26, 73, 154
(E) Caotica (14)	18, 22, 30, 45, 54, 60, 90, 105, 106, 129, 137, 146, 150, 161

Ogni moto positivo  $\gamma_{x_0}^+$  generato da un AC con spazio delle fasi  $\Sigma^l$  finito, raggiunge sempre un punto ciclico (eventualmente improprio).

DIMOSTRAZIONE: (traccia) Poiché l'insieme delle configurazioni sul reticolo è finito con cardinalità  $k^l$ , l'automa può al massimo visitarle tutte in un tempo finito  $t \leq k^l$  e di conseguenza entrare in un ciclo se  $t \rightarrow \infty$ ; se l'automa visita solo un sottoinsieme di  $\Sigma^l$ , il ciclo si instaura in breve tempo e la frazione di stati visitati permane piccola.

Le transizioni di stato possono quindi essere rappresentate su di un diagramma a stati finiti; i cicli rappresentano attrattori per il moto dell'AC e corrispondono ai cicli nel grafo di transizione

Quindi quando si effettuano studi teorici si può pensare alle classi III e IV come all'insieme delle dinamiche non periodiche; se invece si hanno da eseguire simulazioni al calcolatore, bisogna tener conto di questo fatto e spostare l'attenzione sulla dinamica analizzandola a meno di tali ciclicità indotte.

Un approccio tecnico completo e sistematico dovrebbe suddividere l'RS in due classi: 1) regole con moti non periodici e 2) regole con moti periodici. Per la limitazione suddetta questo può avvenire solo a livello teorico. Fissato quindi  $l$  si individuano due macroclassi per le regole con periodi "corti" e periodi "lunghi", anche se ciò può dar luogo ad ambiguità:

- 1.(A): Classe "NULL" ( $\equiv$  classe I)
- 1.(B): Classe "Punto fisso" ( $\simeq$  classe II)
- 2.(C): Classe "Periodica" ( $\simeq$  classe II)
- 2.(D): Classe "Caotica locale" ( $\simeq$  classe IV ?)
- 2.(E): Classe "Caotica" ( $\simeq$  classe III)

La classe IV secondo Wolfram si può considerare caotica nel senso 2.(E) se si usa come discriminante tra caotico e non caotico la "*risposta spaziale ad una perturbazione*" (cfr. [4-WeLi]); invece può essere considerata periodica, 2.(C), se  $t \rightarrow \infty$  ma  $l$  è fissato.

La precedente tabella elenca le 88 regole *indipendenti* dell'RS, suddivise nelle 5 classi suddette: Le 256 regole in RS vengono ridotte ad 88 se si considerano indipendenti a meno di una riflessione sinistra-destra ( $T_2$ ), complementazione  $0 \rightarrow 1$  ( $T_1$ ) e la loro composizione ( $T_3 = T_1 \circ T_2$ ).

ESEMPIO - R=2 risulta indipendente da 16, 191 e 247 ed è scelta quindi come regola rappresentante:

$$(2)_{DEC} = (00000010) \rightarrow_{T_2} (01000000) \rightarrow_{T_1} (10111111) = (191)_{DEC}$$

R=2 forma un *gruppo quaternario* denotato da 2(16, 191, 247); 55(99) è un *gruppo binario*, infatti

$$(57)_{DEC} = (00111001) \rightarrow_{T_2} (10011100) \rightarrow_{T_1} (01100011) = (99)_{DEC}$$

R=204 è invece un *gruppo singolo*, in quanto

$$(204)_{DEC} = (11001100) \rightarrow_{T_2 \circ T_1} (11001100) = (204)_{DEC}$$

La seguente figura mostra le connessioni all'interno di ciascuna delle cinque classi (*intra-class connections*), ordinate secondo il grado di densità  $\rho \in [0, \frac{1}{2}]$ .

Le uniche 3 regole della classe D sono state incluse nel terzo diagramma assieme a quelle della classe E. I diagrammi, per semplicità riportati in forma incompleta, hanno come scopo quello di mostrare l'esistenza di una struttura all'interno delle cinque classi.

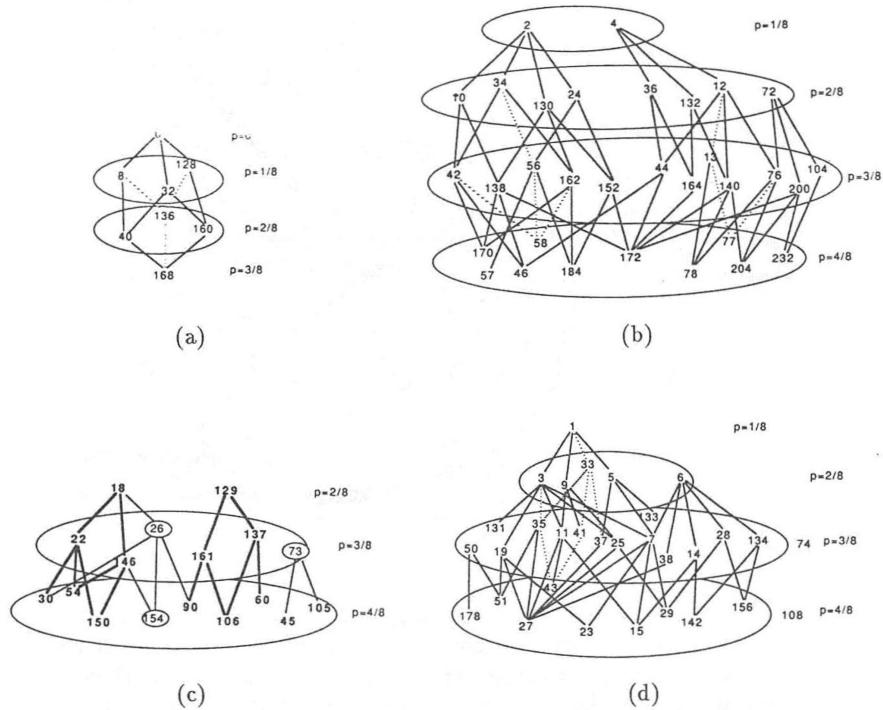


Figura 7: Connessioni tra le classi di AC nel Rule Space [4-WeLi]

Valgono infatti le seguenti osservazioni:

- (A): Le regole null formano un cubo
  - (B): Le regole per i punti fissi sono in gran parte divise a metà, eccetto la 172 e 44, che formano un “ponte” tra i due gruppi.
  - (C): Le regole cicliche sono generalmente connesse, eccetto la 74 e 108, che sono completamente disconnesse.

(D): La maggior parte delle regole caotiche appartengono a due gruppi, escluse la 45 e 105. A conclusione di questa sezione, si mostrano anche le connessioni tra le diverse classi (*inter-class connections*). Nella figura 8 i nodi del grafo rappresentano le classi e le regole che in qualche modo sono disgiunte o formano un legame tra queste, gli archi invece sono pesati con il numero delle connessioni presenti all'interno di ogni classe, come legame tra più classi e tra regole e classi. La struttura di RS risulta come si è visto, molto complicata; a livello grafico, lo spazio delle regole è composto da una griglia o ipercubo 8-dimensionale, con certe caratteristiche. Un ulteriore approccio di studio, basato

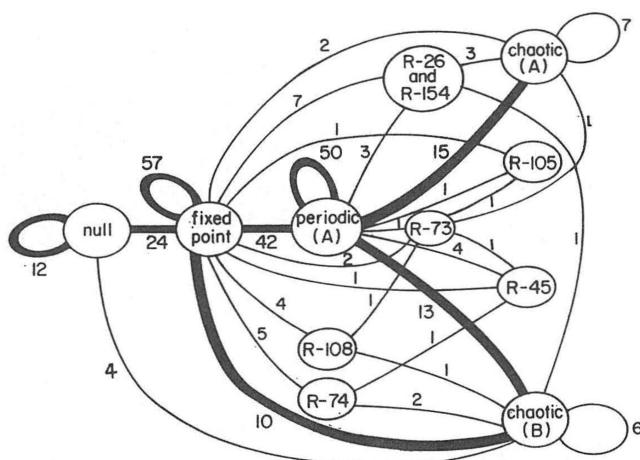


Figura 8: Grafo con le connessioni dentro le classi di AC nel Rule Space [4-WeLi]

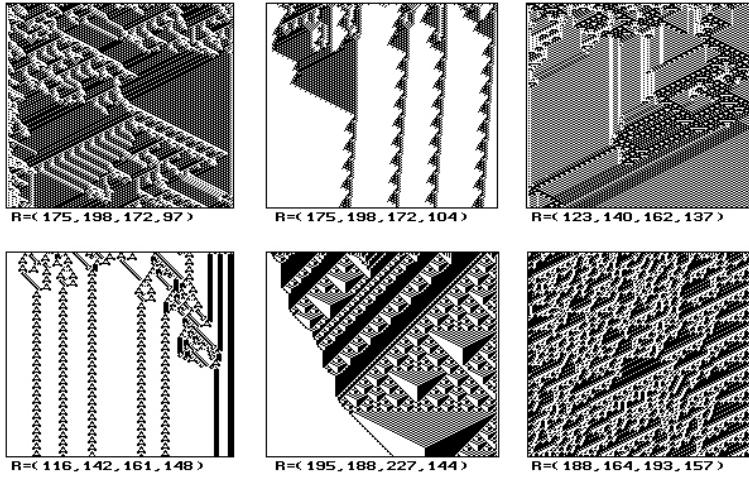


Figura 9: Sei differenti regole di un AC a 5 posti di vicinato.

sulla teoria dei “mean-field”, permette di investigare con maggiore accuratezza tale struttura. Anche in quest’ottica comunque, si tenta di rivelare quale rapporto esiste tra il mantenimento del fenotipo (la dinamica) quando si interviene sul genotipo (la stringa che codifica la regola).

Prima di concludere, vengono presentati tre risultati concernenti i bacini di attrazione e i punti di stabilità delle regole 24, 27 e 40.

Il soggetto è la classe di AC binari con spazio finito; si è scoperto che le tre regole suddette possiedono esattamente 2 bacini di attrazione con dimensione relativa costante.

Si pone  $(x_1^t, \dots, x_l^t) = x^t \in \{0, 1\}^l$  un generico stato e  $x_0^t, x_{l+1}^t$  due microstati fissati per ogni  $t$  che formano la condizione di valore ai bordi del reticolo.

**Regola 24** - La funzione locale è data da  $\bar{g}(100) = \bar{g}(011) = 1$ , 0 altrimenti; la condizione ai bordi è  $x_0^t = x_{l+1}^t = 1$ .

LEMMA - Esistono due cicli di periodo 3 ciascuno, nella forma:

$$(a) \dots(010)^n 0 \rightarrow \dots(001)^n 0 \rightarrow \dots(100)^n 0$$

$$(b) \dots(010)^n 01 \rightarrow \dots(001)^n 01 \rightarrow \dots(100)^n 01$$

I due attrattori (a) e (b) attraggono l’intero spazio delle configurazioni iniziali.

I puntini sono sequenze incomplete ripetute ed  $n$  è  $[\frac{l-1}{3}]$  in (a) e  $[\frac{l-2}{3}]$  in (b) (  $[x]$  denota la parte intera di  $x$ ). La sequenza (11) non compare più dopo  $t = 0$ , la sequenza (111) non compare più per  $t > 1$ . Il teorema si dimostra in virtù del lemma precedente.

Ogni configurazione iniziale viene eliminata interamente dopo  $l$  passi e viene sostituita dalla sequenza  $(001)^n 0*$  che “shifta” a destra con velocità unitaria. Tutte le configurazioni di inizio nella forma  $(*...*01)$  (sono  $\frac{1}{4}$  del totale, di  $2^l$ ) vengono attratte da (b), le restanti da (a).

Ora si esamina la *stabilità* degli attrattori: si è interessati cioè a vedere se dopo aver raggiunto uno dei due stati limite, l’evoluzione permane o meno nell’attrattore, quando viene alterato un singolo posto  $x_i, i \in [1, l]$ .

Valgono, *per qualsiasi valore di  $l$* , le seguenti conclusioni.

Come si è visto nel lemma, ogni configurazione viene “spazzata” via per effetto dello shift a destra; alterando così un singolo posto in  $x_1, \dots, x_{l-2}$ , il punto limite permane nello stesso attrattore, che risulta stabile in questo senso. Invece, una volta raggiunto (a) o (b) ma modificando i posti  $x_{l-1}, x_l$ , si determinano due situazioni:

Ciclo (a): i possibili stati iniziali dai quali l’evoluzione proviene, sono  $(*...*00)$  e  $(*...*10)$ . Agendo su  $x_{l-1}$  si hanno  $(*...*10)$  e  $(*...*00)$ , che permangono in (a). Agendo su  $x_l$  si hanno  $(*...*01)$  e  $(*...*11)$ , che evolvono rispettivamente in (b) e (a).

Ciclo (b): la condizione iniziale per giungere in questo attrattore è nella forma  $(*...*01)$  che può essere perturbata unicamente in  $(*...*11)$  e  $(*...*00)$ ; in entrambi i casi il moto salta nell’attrattore (a).

$x_1^0$	$x_2^0$	$x_3^0$	$x_l^0$	t pari	t dispari
0	0	-	0	$0^l$	$1^l$
0	0	-	1	$0^{l-1}1$	$1^{l-1}0$
0	1	0	0	$1^{l-1}0$	$0^{l-1}1$
0	1	0	1	$1^l$	$0^l$
0	1	1	0	$0^l$	$1^l$
0	1	1	1	$0^{l-1}1$	$1^{l-1}0$
1	-	-	0	$1^{l-1}0$	$0^{l-1}1$
1	-	-	1	$1^l$	$0^l$

**Regola 27** - La sua funzione è:  $\bar{g}(*00) = \bar{g}(0*1) = 1$ , 0 altrimenti; le condizioni ai bordi sono  $x_0^t = 1$  e  $x_{l+1}^t = 0, \forall t \in N$ . Esistono due cicli attrattori di periodo 2 nella forma:

$$\begin{array}{ll} (a) & 0^l \leftrightarrow 1^l \\ (b) & 0^{l-1}1 \leftrightarrow 1^{l-1}0 \end{array}$$

I bacini di attrazione sono ripartiti e hanno come elementi discriminanti i 4 bit nelle posizioni 0, 2, 3, ed  $l$  di  $x^0$ ; la tabella in alto descrive il modo in cui si determina la partizione delle configurazioni iniziali.

Brevemente si afferma che: se l'evoluzione giunge in (a) ed il posto  $x_l$  viene alterato, il sistema salta nell'attrattore (b) e viceversa.

**Regola 40** - La dinamica è governata dalla funzione  $\bar{g}(001) = \bar{g}(101) = 1$ , 0 altrimenti; si considerino le condizioni ai bordi  $x_0^t = x_{l+1}^t = 1$ . Il pattern generato è uno shift con velocità unitaria verso sinistra, senza la creazione di altri 1.

Esistono due punti fissi: (a)  $0^l$  e (b)  $0^{l-1}1$ .

Gli stati iniziali del tipo  $(*...*00)$  e  $(*...*111)$  evolvono in (a), altrimenti sono attratti da (b). Vale la seguente considerazione sulla stabilità degli attrattori:

Punto fisso (a): apportando modifiche sugli ultimi 3 posti di  $0^l$ , si producono gli stati  $0^{l-3}001, 0^{l-3}010, 0^{l-3}100$ , che evolvono rispettivamente in (b), (b) e (a).

Punto fisso (b): apportando modifiche sugli ultimi 3 posti di  $0^{l-1}0$ , si vengono a formare gli stati  $0^{l-3}000, 0^{l-3}011, 0^{l-3}101$ , che evolvono rispettivamente in (a), (a) e (b).

## 5 ALTRE TIPOLOGIE ED ESEMPI D'APPLICAZIONE

A conclusione di questo lavoro, vengono descritte a grandi linee, altre classi di AC e alcuni modelli che rivestono un importante ruolo a livello applicativo.

### 5.1 AC binari con vicinato a 5 posti

Seguendo la convenzione adottata in [7-Went.], la regola di un AC con  $v = 5$  (*next nearest neighbors*) e  $k = 2$ , può essere specificata con una quadrupla di byte  $R = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  anziché usare una stringa di 32 che rappresenta tutte le possibili configurazioni di  $\{0, 1\}^5$ .

**ESEMPIO** - Sia  $R_{bin}(11010101.11000100.11000000.10011001)$ ; ancora una volta si conviene che il blocco (11111) mappa in 1, (11110) in 1, (11101) in 0, ..., (00010) in 0, (00001) in 0 e infine (00000) in 1. La regola si può allora facilmente esprimere in decimale come  $R = (213, 196, 192, 153)$ .

La funzione locale di questo AC agisce secondo la relazione:

$$x_i^{t+1} = \bar{g}(x_{i-2}^t, x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t, x_{i+2}^t)$$

La totalità delle funzioni  $\bar{g} : \{0, 1\}^5 \rightarrow \{0, 1\}$  è  $2^{2^5} = 2^{32} = 4.294.967.295$ , un numero considerevolmente alto. Anche se si potesse generare, in un secondo, un pattern sufficientemente ampio per ogni regola, si impiegherebbero circa 138 anni per elencarle tutte! Nelle figure 9 e 10 sono rappresentate alcune di queste regole.

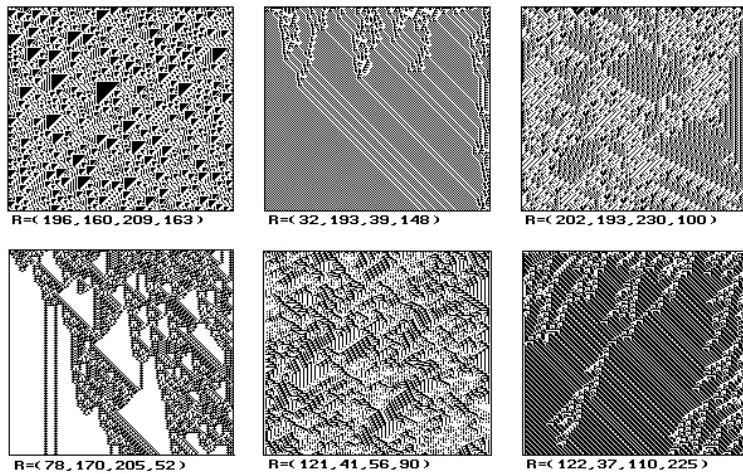


Figura 10: Altre sei differenti regole di un AC a 5 posti.

## 5.2 Ferromagnetismo

Il ferromagnetismo è la proprietà che hanno alcune sostanze (ferro, nichel, ecc.) di presentare permeabilità magnetica (grandezza che esprime l'attitudine a lasciarsi magnetizzare), quando sono sottoposte all'azione di un campo magnetico.

Un modello utile per l'insegnamento e l'illustrazione qualitativa di tale fenomeno e in generale dei principi di ergodicità e irreversibilità dei problemi in fisica statistica, viene dall'AC *Q2R*.

La regola di Q2R agisce su un reticolo quadrato, complementando l' $i$ -esima cellula se e solo la somma dei posti 1 nel vicinato  $B_{VN}(i)$  equivale alla somma dei posti 0. Le evoluzioni che si determinano eseguendo la simulazione, hanno spontaneamente la stessa magnetizzazione del modello “Ising”, secondo l'attuale conoscenza numerica.

## 5.3 Immunologia

Negli ultimi quaranta anni, alcune idee della fisica statistica e concetti quali la percolazione, hanno trovato applicazione nell'immunologia, benchè le approssimazioni ottenute per mezzo di AC sono ancora un argomento controverso.

Si esamina ora il modello di un semplice sistema immunitario; molti tipi differenti di cellule o molecole giocano un importante ruolo nella risposta immune del corpo umano. Tra queste ci sono gli anticorpi (A), che derivano dai linfociti (cellule B) e hanno come funzione quella di neutralizzare virus o altri corpi antigeni (V), si trovano cellule “aiutanti” (H) e cellule soppressori (S) che regolano positivamente o negativamente la risposta immune, esistono cellule killer (K) che attaccano il corpo e molecole interleucine (I) che coordinano i rapporti tra H ed S, altri virus come l'AIDS (D) che distruggono il sistema, ecc.

L'AC KUT è forse il primo esempio di modello per lo studio di un sistema immunitario. Le interazioni tra i vari tipi di cellule sono definite in termini di relazioni booleane. Si considera ora una versione semplificata del modello KUT: le entità impiegate sono A, B, V, H ed S che assumono valori in  $\{0, 1\}$ .

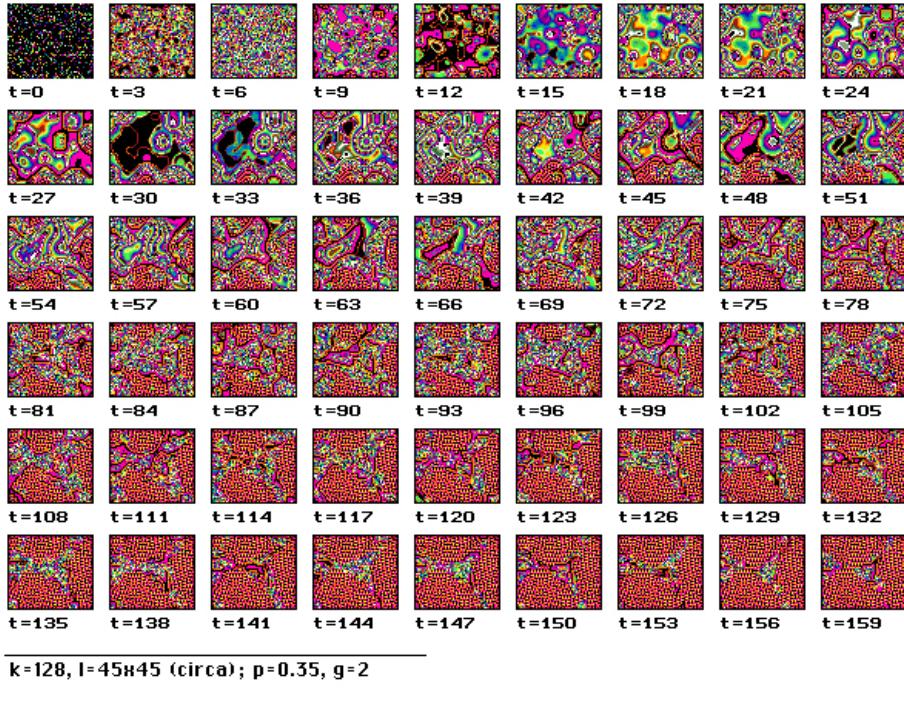


Figura 11: Automa cellulare bidimensionale.

Le interazioni sono specificate nel seguente modo, tenendo presente che  $\circ$  è l'usuale operazione binaria AND,  $+$  l'OR e  $\bar{S}$  è l'operatore unario di complemento:

$$\begin{aligned} A &= V \circ B \circ H \\ B &= H \circ (V + B) \\ V &= V \circ \bar{A} \\ H &= H + V \circ \bar{S} \\ S &= H + S \end{aligned}$$

La quintupla  $(A, B, V, H, S)$  determina  $2^5 = 32$  possibili configurazioni di inizio; ogni passo di iterazione corrisponde ad uno spazio temporale reale di 100 ore. Alcuni dati sperimentali mostrano il raggiungimento di 5 punti fissi:

$(A \ B \ V \ H \ S)$
$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ no risposta immune
$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$ vaccinato o immune
$(0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$ vaccinato o immune
$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ contagio virale
$(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$ contagio virale

Il primo punto è interpretabile come l'assenza totale di ogni risposta immune; il secondo e terzo punto fisso corrispondono ad uno stato vaccinato e immune. L'introduzione di un nuovo virus V a partire da queste due configurazioni, fa ritornare velocemente il sistema allo stato immune (01011) come effetto della distruzione di V.

Al contrario, partendo dal quarto punto fisso e introducendo un antigene V, si evolve immediatamente nel quinto punto; queste ultime due situazioni corrispondono al fatto che il corpo rimane contagiato da virus ancora attivi.

## Riferimenti bibliografici

[1-Wolf.] S. Wolfram, “Statistical mechanics of cellular automata”, *Reviews of Modern Physics*, **55** (1983) 601.

[2-Wolf.] S. Wolfram, “Universality and complexity in cellular automata”, *Physica D*, **10** (1984) 1-35.

[3-Stauff.] D. Stauffer, “Computer simulations of cellular automata”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24** (1991) 909-927.

[4-WeLi] W. Li, N. Packard, “The structure of the elementary cellular automata rule space”, *Complex Systems*, **4** (1990) 281-297.

[5-Lang.] C. Langton, “Studying artificial life with cellular automata”, *Physica D*, **22** (1986) 120-149.

[6-BiT] P. Binder, C. Twining e D. Sherrington, “Phase-space study of bistable cellular automata”, *Complex Systems*, **5** (1991) 127-137.

[7-Went.] Wentian Li, “Complex patterns generated by next nearest neighbors cellular automata”, *Comput. & Graphics*, **Vol.13-4** (1989) 531-537.

[8-Hofs.] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi, II ediz. (Ott. 1992) 333-336.

Questo articolo fa parte della tesina universitaria che preparai nel febbraio 1994 per il corso complementare di Teoria dei Sistemi, esame sostenuto col Prof. Cattaneo al Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Università Statale di Milano, Anno Accademico 1993-1994.

Maggi Simone, Nizza (F), 25 Maggio 2022