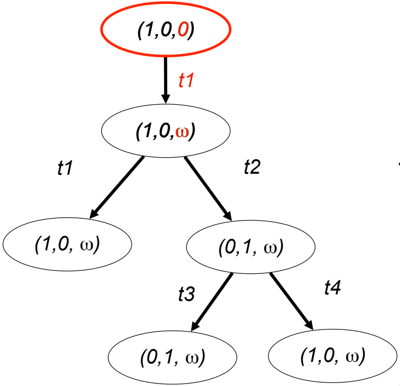
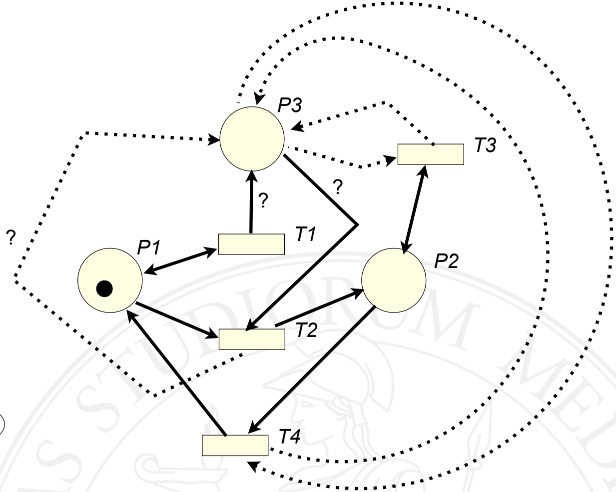
RETI DI PETRI

passaggio inverso





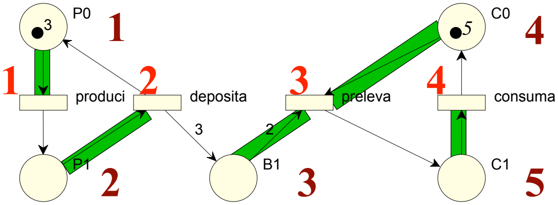
Rappresentazione matriciale

- E’ possibile rappresentare (definire) una rete di Petri mediante delle matrici
  - ennesima vista …
  - trasformazione automatica…
  - facilmente trattabile matematicamente
- Uso diverse matrici:
  - I archi in input alle transizioni
  - O archi in output alle transizioni
  - m marcatura dei posti

Matrice I e O

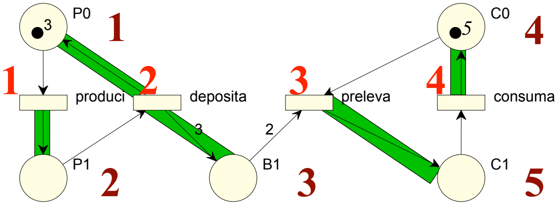
- Devo assegnare un indice ad ogni posto
  - $p: 1..|P| \rightarrow P$
- Devo assegnare un indice ad ogni transizione
  - $t: 1..|T| \rightarrow T$
- Le due matrici I e O sono $|P| \times |T|$
  - $\forall \langle p(i), t(j) \rangle \in F \quad I[i][j] = W(\langle p(i), t(j) \rangle)$
  - $\forall \langle p(i), t(j) \rangle \notin F \quad I[i][j] = 0$
  - $\forall \langle t(j), p(i) \rangle \in F \quad O[i][j] = W(\langle t(j), p(i) \rangle)$
  - $\forall \langle t(j), p(i) \rangle \notin F \quad O[i][j] = 0$
- Indicheremo il vettore colonna k di una matrice X con la notazione X[.][k]

Esempio matrice I



	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1

Esempio matrice O



	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	3	0	0
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0

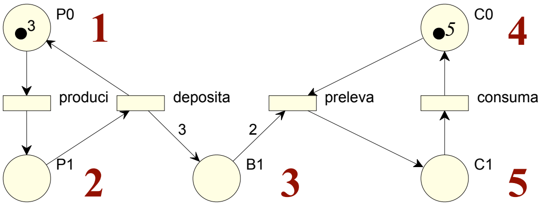
Marcatura m

- E` un vettore colonna di dimensione |P|

- si calcola a partire dalla funzione marcatura

  - m[i] = M(p(i))

Esempio vettore m



1	3
2	0
3	0
4	5
5	0

Abilitazione di una transizione

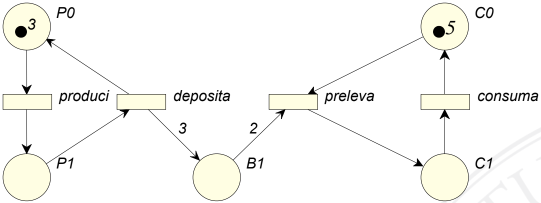
- La transizione j-esima è abilitata in una marcatura espressa dal vettore m
  - m [tj >

    se e solo se

- I[.][j] ≤ m
  - elemento per elemento (sono |P|)

Esempio di abilitazione

- Transizione 1 (produci) è abilitata se…

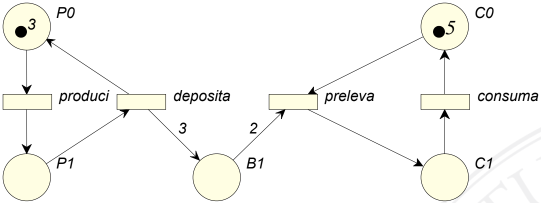


I[.][1]		m
1	≤	3
0	≤	0
0	≤	0
0	≤	5
0	≤	0

SI

Esempio di non abilitazione

- Transizione 2 (deposita) è abilitata se…



I[.][2]		m
0	≤	3
1	≤	0
0	≤	0
0	≤	5
0	≤	0

NO

Scatto di una transizione

- Quando la transizione j-esima scatta in una marcatura m produce una nuova marcatura m’

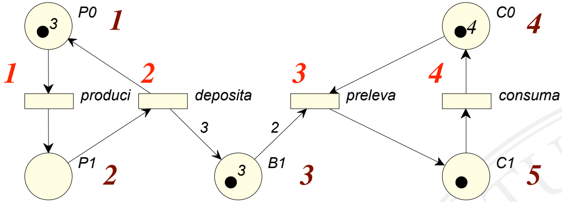
  - m [tj > m’

- m’ = m - I[.][j] + O[.][j]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Esempio di scatto di transizione

- Quali sono le transizioni abilitate?

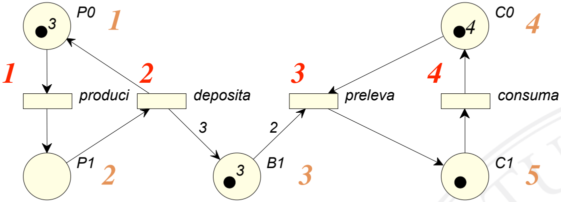


	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1

1	3
2	0
3	3
4	4
5	1

Esempio di scatto di transizione

- Come cambia la marcatura con lo scatto di t(3)?



1	3
2	0
3	3
4	4
5	1

\-

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	2	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1

\+

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	3	0	0
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0

=

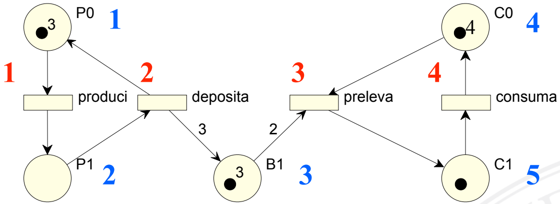
1	3
2	0
3	1
4	3
5	2

Matrice di incidenza C

- C = O - I
- Risulta utile per ottimizzare lo scatto ma non è sufficiente per abilitazione…

  - Condizione statica sufficiente per garantire che C sia significativa di abilitazione
    - $Pre(t) \cap Post(t) = \emptyset$
  - Cioè la condizione che stabilisce se una rete è una RETE PURA

Esempio matrice C



	1	2	3	4
1	-1	1	0	0
2	1	-1	0	0
3	0	3	-2	0
4	0	0	-1	1
5	0	0	1	-1

Sequenza di scatti

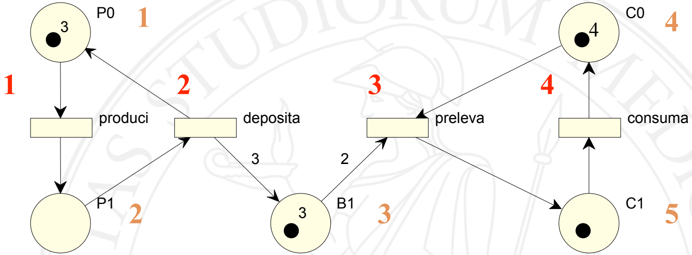
- $M\ [\ t1 > M'$ and $M'\ [\ t2 > M'' \rightarrow M\ [t1t2 > M''$

- $M\ [\ Sn > Mn$

- $Mn = M + C\ s$
  - dove s è il vettore di dimensione |T| contenente il numero di scatti per ogni transizione

Esempio di sequenza di scatto

- Data una sequenza di scatto ammissibile
  - s = t1, t1, t4, t2, t1, t3, t2, t4, t3, t2, t4, t3, t1, t3
- non importa ordine
  - 4 t1, 3 t2, 4 t3, 3 t4
  - s = [4 3 4 3]



Esempio calcolo nuova marcatura

- |P|x|T| * |T| -> |P|

	1	2	3	4
1	-1	1	0	0
2	1	-1	0	0
3	0	3	-2	0
4	0	0	-1	1
5	0	0	1	-1

1	4
2	3
3	4
4	3

1	3
2	0
3	3
4	4
5	1

+

1	-1
2	1
3	1
4	-1
5	1

=

1	2
2	1
3	4
4	3
5	2

Nuova tecnica di analisi

- Ricerca di invarianti all'interno della rete…
  - P-Invarianti
    - Invarianti sui posti… relativi alla marcatura
  - T-Invarianti
    - Invarianti su sequenze di scatto

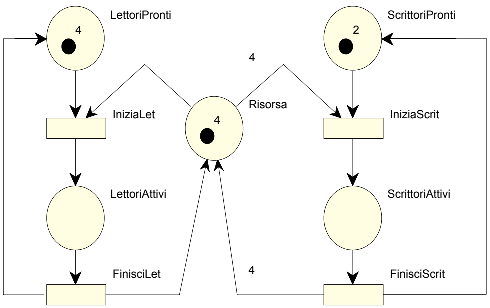
P-invarianti

- Un vettore di pesi h di dimensione |P|
  - Ricorda la funzione H della definizione di rete conservativa però con la possibilità che non tutti i pesi siano maggiori di zero
- il prodotto vettoriale h m deve essere costante
  - h m = h m’ per ogni m’ raggiungibile da m
  - m’ = m + C s
  - hm = hm + hCs
  - h C s = 0 per ogni s che rappresenti una sequenza ammissibile
  - Cond suff verificabile staticamente: per ogni possibile s
  - h C = 0
    - basta trovare le soluzioni di questo sistema lineare

Copertura di P-Invarianti

- Una combinazione lineare di P-invarianti è anch'essa un P-Invariante
- Un P-invariante che ha tutti pesi >= 0 è detto semipositivo
- Se un posto ha peso positivo in un P- invariante semi-positivo, allora il posto è limitato
- Una rete P/T si dice ricoperta da P- invarianti se per ogni posto esiste almeno un P-Invariante semipositivo il cui peso di tale posto sia positivo
  - Cioè è una rete limitata

Esempio



I	IniziaLet	FinisciLet	IniziaScrit	FinisciScrit
LettoriPronti	1	0	0	0
LettoriAttivi	0	1	0	0
Risorsa	1	0	*4*	0
ScrittoriPronti	0	0	1	0
ScrittoriAttivi	0	0	0	1

O	IniziaLet	FinisciLet	IniziaScrit	FinisciScrit
LettoriPronti	0	1	0	0
LettoriAttivi	1	0	0	0
Risorsa	0	1	0	*4*
ScrittoriPronti	0	0	0	1
ScrittoriAttivi	0	0	1	0

C	IniziaLet	FinisciLet	IniziaScrit	FinisciScrit
LettoriPronti	-1	1	0	0
LettoriAttivi	1	-1	0	0
Risorsa	-1	1	*-4*	*4*
ScrittoriPronti	0	0	-1	1
ScrittoriAttivi	0	0	1	-1

Esempio (cont)

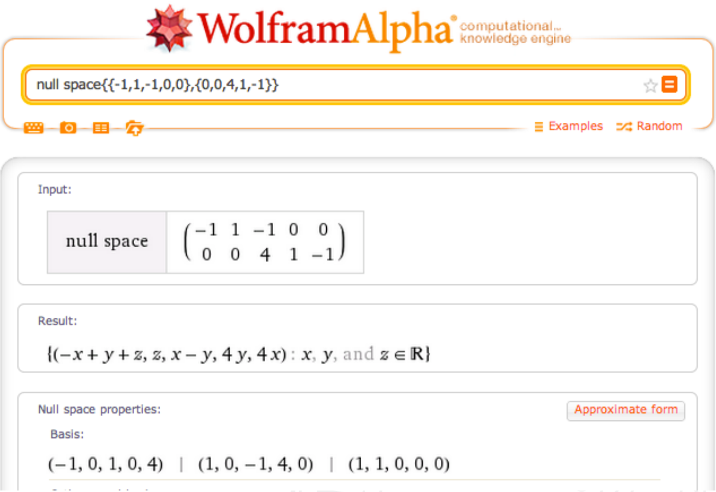
Risolviamo il sistema:

$$hC=0$$

$$-h_0+h_1-h_2 = 0$$
$$+h_0-h_1+h_2 = 0$$

$$-4h_2-h_3+h_4 = 0$$
$$+4h_2+h_3-h_4 = 0$$

Troviamo le soluzioni



Algoritmo di Farkas (1902)

- Trova basi minime semipositive

$D_0 := (C \mid E_n)$;
for $i := 1$ **to** m **do**
  for d_1, d_2 rows in D_{i-1} such that $d_1(i)$ and $d_2(i)$ have opposite signs **do**
    $d := |d_2(i)| \cdot d_1 + |d_1(i)| \cdot d_2$; (* $d(i) = 0$ *)
    $d' := d/\gcd(d(1), d(2), \ldots, d(m+n))$;
    augment D_{i-1} with d' as last row;
  endfor;
  delete all rows of the (augmented) matrix D_{i-1} whose i-th component
   is different from 0, the result is D_i;
endfor;
delete the first m columns of D_m

	C					E			
D0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
	1	-1	0	0	0	1	0	0	0
	-1	1	-4	4	0	0	1	0	0
	0	0	-1	1	0	0	0	1	0
	0	0	1	-1	0	0	0	0	1

D1 sommo riga 1 e 2
sommo riga 2 e 3

0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	-4	4	0	1	1	0	0
0	0	-1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	-1	0	0	0	0	1

D3 sommo riga 2 e 4 (*4)
sommo riga 3 e 4

0	0	0	0	0	1	1	0	4
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0

In octave

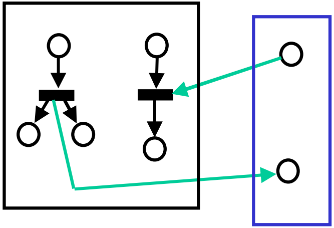
```
A = [C,eye(rows(C))]
for i = 1:columns(C)
   A1 = [];
   for j = 1:rows(A)
          for k = j+1:rows(A)
         if A(j,i)*A(k,i)<0
          d = abs(A(j,i))*A(k,:)+abs(A(k,i))*A(j,:);
          d = d/gcd(d);
          A1 = [A1;d];
      endif
    endfor
   endfor
   for j = 1:rows(A)
    if (A(j,i) == 0)
      A1 = [A1;A(j,:)];
    endif
   endfor
   A = A1;
endfor
soluzioni = A(:,columns(C)+1:columns(A))
```

Interpretiamo i risultati

- $hm = hm_0$
  - Ora gli h e m_0 sono noti, quindi le incognite sono quelle di m
- 1
  - LettoriPronti + LettoriAttivi = 4 (numero gettoni in LettoriPronti)
    - Il numero di lettori nel sistema è costante
- 2
  - ScrittoriPronti + ScrittoriAttivi = 2 (numero gettoni in ScrittoriPronti)
    - Il numero di scrittori nel sistema e' costante
- 3
  - LettoriAttivi + Risorsa + 4 ScrittoriAttivi = 4(num gettoni in Risorsa)
    - Se LettoriAttivi > 0 -> ScrittoriAttivi = 0
    - Se ScrittoriAttivi > 0 -> LettoriAttivi = 0
    - ScrittoriAttivi <= 1
    - LettoriAttivi <= 4 (numero gettoni in Risorsa)

Controllori con specifica a stati proibiti

- Transizioni osservate
- Transizioni controllate



Attenzione a cosa si può controllare

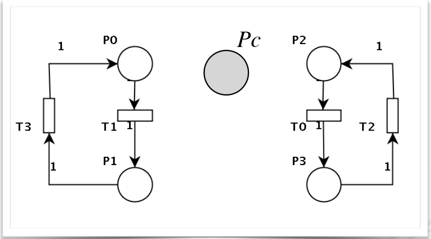
- Non tutte le transizioni sono osservabili
  - es. eventi che non sono rilevabili dal controllore, o troppo “costosi” da rilevare
- Non tutti gli eventi sono condizionabili
  - es. una transizione che modella un guasto (questo non può essere impedito dal controllore)

Quali vincoli esprimere?

- Esprimiamo il comportamento desiderato (le proprietà) del nostro sistema dicendo che una combinazione lineare delle marcature non deve superare un certo valore…
  - fissiamo perciò (quasi) dei P-invarianti “desiderati”

L M <= b

Mutua esclusione



- P1 + P3 <= 1
- Aggiungiamo un posto Pc
  - P1 + P3 + Pc = 1
- Poi
  - dobbiamo aggiungere riga opportuna a C
  - dobbiamo aggiungere riga opportuna a m

Sintesi del controllore

$$C = \begin{bmatrix} C_s \\ C_c \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{0s} \\ M_{0c} \end{bmatrix} \qquad LM_s + M_c = b$$

L Ms + Mc = [L I] M = b

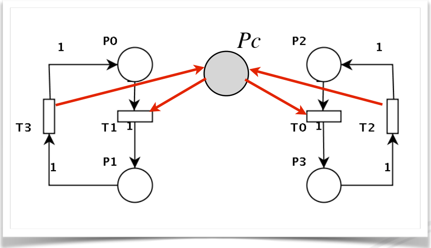
Ma allora vogliamo dire che [L I] è un P-Invariante e quindi deve valere:

[L I] C = O

L Cs + I Cc = 0

Cc = -L Cs

Mutua esclusione (sintesi)



$$Cs = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-LC_s = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Sintesi del controllore (M_O)

$$C = \begin{bmatrix} C_s \\ C_c \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{0s} \\ M_{0c} \end{bmatrix} \qquad LM_s + M_c = b$$

$L\ M_{Os} + M_{Oc} = b$

$M_{Oc} = b - L\ M_{Os} = 1$

Esempio

- Mutua esclusione
  - LAttivi+SAttivi<=1
- Ma non tra lettori
  - LAttivi+4SAttivi<=4

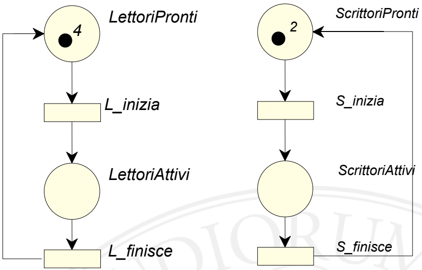
$L\ M <= b$

$L = [0\ 1\ 0\ 4]$

$b = 4$

$M_0 = [4\ 0\ 2\ 0]$

$$C = \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$



$C_c = -L\ C = [-1\ 1\ 4\ -4]$

$M_{0c} = b - L\ M_0 = 4$

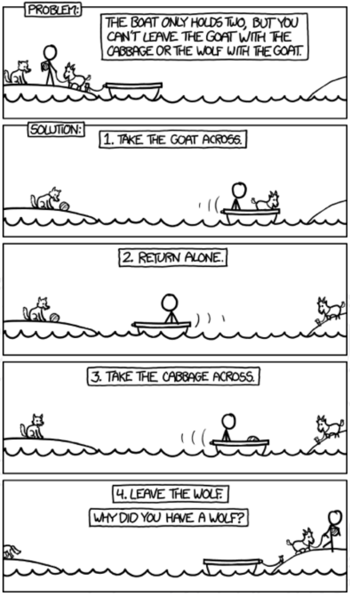
T-invarianti

- Fanno riferimento a sequenze di scatti
  - cicliche (cioe` che possono essere ripetute)
  - che riportano nella condizione iniziale

  - $m' = m + C s$
  - $m' = m$
  - soluzioni del sistema
    - $C s = 0$
  - non e` detto siano tutte valide

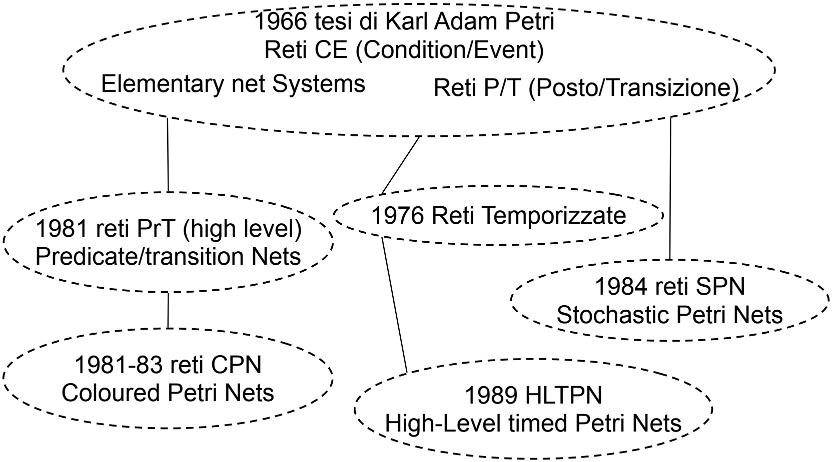
Esercizio

- Modellare il problema del barcaiolo che deve traghettare da una sponda all'altra di un torrente un lupo, una capra e un cavolo con una barca di capacità 1 (può trasportare solo un elemento alla volta oltre al barcaiolo).
- Il trasporto è vincolato dalla necessità di non lasciare soli
- lupo e capra
- capra e cavolo



http://xkcd.com/1134/

estensioni reti di petri



Modellare sistemi Hard Real-time

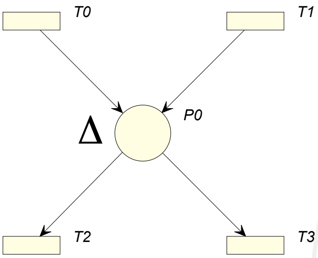
- Il tempo e' un fattore essenziale in moltissime applicazioni
- Hard-Real time significa che bisogna soddisfare dei vincoli temporali senza errori
  - Controllo di centrali nucleari
  - Controllo di volo
  - Controllo di processi industriali
- Analisi stocastica potrebbe non essere sufficiente in questi casi: si occupa piu' di analisi delle prestazioni
- Quindi la capacita' di avere modelli deterministici e' complementare e non alternativa ai modelli stocastici

Modelli temporali

- Esistono diverse proposte sulla maniera migliore per aggiungere il tempo (deterministico) alle reti di Petri :
  - Ritardi sui posti
  - Ritardi sulle transizioni
  - Tempi di scatto sulle transizioni
    - unici ⇔ multipli
    - fissi ⇔ variabili
    - assoluti ⇔ relativi

Tempo sui posti

- Il tempo associato ai posti indica il tempo che un gettone deve rimanere nel posto stesso prima di potere essere considerato come parte di una abilitazione

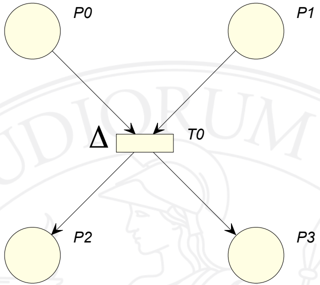


Δ rappresenta la durata minima di permanenza del gettone nel posto… quanto quell aparte di sistema rimane in quello stato

Coolahan & Roussopolous 1983
Stotts and Pratt 1985

Tempo sulle transizioni

- Il tempo associato alle transizioni puo` essere usato per indicare due cose diverse
  - Un ritardo di scatto (cioe` la durata di una azione)
    - Ramchandani 1974
    - Ramamoorthy & Ho 1980
    - Zuberek 1980
    - Holliday & Vernon 1987
  - Il momento in cui lo scatto avviene
    - ...

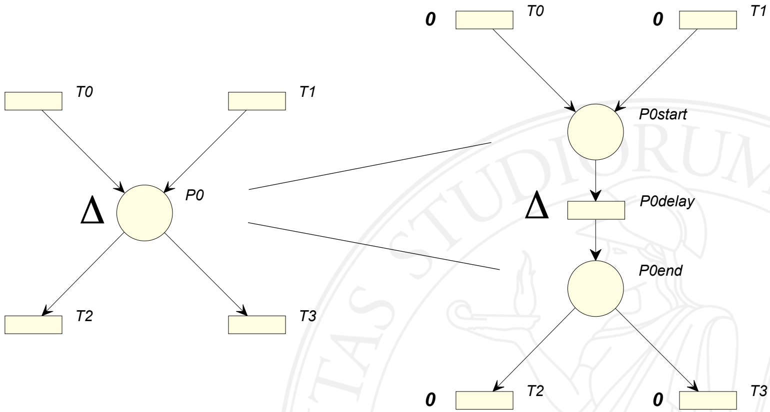


- Esistono anche modelli misti
  - Tempo sui posti (delay) e sulle transizioni (firing time)
    - Razouk & Phelps 1985
    - Tsai et al. 1995

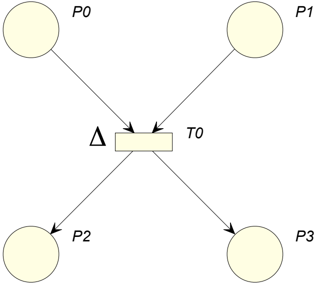
Durata vs. momento dello scatto

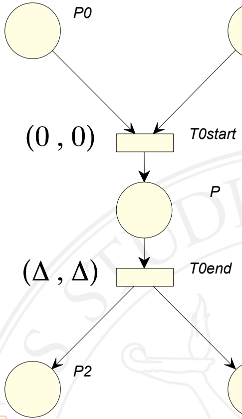
- Durata:
  - Le transizioni scattano non appena possibile
  - Gli scatti hanno una durata fissa
- Momento dello scatto:
  - Le transizioni scattano in un momento fissato (in diverse maneire dai diversi modelli)
  - Lo scatto e' istantaneo
- Modelli misti:
  - Si puo` specificare sia l'istante che la durata dello scatto

Spostare il tempo associato ai posti nelle transizioni



Durata di una transizione -> tempi di scatto





T0start modella lo scatto immediato di T0

P modella il fatto che sta avvenendo lo scatto di T0

T0end modella la fine dello scattodi T0 e la creazione dei gettoni in uscita

Transizione T0 scatta non appena è abilitata; Il suo scatto dura Δ unità di tempo

Momenti di scatto unici o multipli

- Momento di scatto unico
  - Alla transizione viene associato un valore singolo
    - Leveson & Stolzy 1987
- Momenti di scatto multipli
  - Alla transizione vengono associati più possibili valori: tra questi si sceglierà poi il tempo effettivo di scatto della transizione
    - Merlin&Farber 1976 (TPNs): intervalli
    - Ghezzi et al 1991 (TB nets): insiemi

- Il primo può essere visto come un caso particolare del secondo

Insiemi costanti o variabili

- Constanti
  - L'insieme dei tempi di scatto è definito staticamente
  - TPNs: gli estremi dell'intervallo dei possibili tempi di scatto sono costanti
- Variabili
  - L'insieme dei tempi di scatto può variare dinamicamente
  - TB nets: gli insiemi dei tempi di scatto sono definiti come funzioni dei timestamps gettoni che abilitano la transizione (their birth date)
  - HLTPNs (Ghezzi ed al TSE91): gli insiemi dei tempi di scatto sono definiti come funzioni dei timestamps e dei valori gettoni che abilitano la transizione
- Il primo può essere visto come un caso particolare del secondo

Tempi di scatto assoluti o relativi

- Relativi
  - I tempi di scatto possono essere espressi solo in termini relativi al tempo di abilitazione
    - TPNs
- Assoluti
  - I tempi di scatto possono essere espressi in termini relativi a tempi assoluti e/o al tempo dei singoli gettoni che compongono l'abilitazione
    - TB nets
    - TCPNs (Tsai et al. 1995)
- Il primo può essere visto come un caso particolare del secondo

Time Basic nets (Ghezzi et al. 1989)

- Tempo associato alle transizioni

- Vengono associati:
  - degli insiemi di tempi di scatto possibili
  - definiti in maniera dinamica
  - come funzioni che possono fare riferimento a tempi assoluti e ai tempi dei singoli gettoni