МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический

университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ___ФН___

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Теория вероятности и математическая статистика

Домашняя работа №7

Группа: _ФН11-51Б_

Вариант №15

Студент: Пунегов Д.Е.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Москва 2022

Задача 7

Критерий согласия для проверки простой непараметрической гипотезы

Исходные данные:

Основная гипотеза:

(A=2) Выборка получена из закона распределения, совпадающего с распределением $\eta = 1 - \sqrt{\xi}$, $\xi \sim R[0,1]$

Варианты значений n

1. $n = 250$

Варианты метрик для группированной выборки

1. $(D = 5)\ D5(n, l) = \sum_j^l \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j(n - np_j)}$

ν_j-количество значений, попавших в j-ый интервал группировки

p_j-теоретическая вероятность попадания в j-ый интервал группировки

Задание.

Постройте с помощью стохастического эксперимента на основе указанной метрики приближенный критерий для проверки основной гипотезы. Найдите критические значения $D_{\text{кр}}$ для трех уровней значимости $\alpha = 0.1, 0.05$ и 0.01.

Протестируйте критерий на двух-трех примерах и сформулируйте выводы.

Критерий согласия для проверки простой непараметрической гипотезы

In [62]:
```
A = 2
D = 5
n = 250
```

При A = 2 выборка получена из закона распределения, совпадающего с распределением η=1-$\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1]

Метрика $D5(n,l) = \sum_j \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j(n-np_j)}$

0. Импорт нужных библиотек

In [63]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Markdown as md
from IPython.display import Latex
import math
import scipy
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")
```

1. Моделирование выборки, подчиняющейся основной гипотезе

In [64]:
```
m = 20000

x = np.zeros((m, n), dtype=float)
for i in range(m):
    x[i] = np.random.uniform(0, 1, size=n)

x = 1 - np.sqrt(x)
print(x[1])
```

```
[2.01338496e-01 2.58776746e-03 1.21568043e-01 1.00558134e-02
 3.80278486e-01 7.95360229e-03 2.30451271e-01 1.90570609e-01
 1.29384348e-01 2.12362243e-01 1.89100846e-04 2.68064383e-01
 4.09444374e-01 8.28040402e-01 3.08372885e-01 2.21204091e-02
 4.45510714e-02 4.56010705e-01 1.22110392e-01 6.97645555e-02
 5.29785690e-01 1.91371623e-02 4.65114917e-01 1.08807498e-01
 4.18996627e-01 1.35000559e-01 8.85904360e-01 7.01873692e-01
 1.85476922e-01 2.70926340e-01 1.60738638e-01 5.78793575e-01
 7.23830831e-01 8.95924945e-01 8.10205516e-02 2.10980157e-02
 2.62692394e-01 5.30869436e-01 5.37803286e-01 2.09033163e-01
 7.74411736e-01 5.02043928e-01 9.78059447e-02 7.75367866e-01
 1.75916495e-01 3.33882800e-01 1.09413061e-01 2.03260837e-01
 4.94771044e-01 1.34931249e-01 1.60484735e-01 3.67930405e-01
 1.81849024e-01 2.48538626e-01 2.72480516e-01 1.27812814e-01
 6.67257095e-01 1.26168006e-02 2.34512247e-01 4.25571938e-01
 3.08730689e-01 7.84231921e-01 3.08456398e-01 2.80101800e-01
 2.34102251e-01 1.07502236e-01 2.64352360e-01 7.32426725e-02
 7.96860130e-02 1.99421863e-01 2.93492265e-01 2.89909090e-01
 3.46005534e-01 9.13708070e-01 3.42294184e-01 4.66049760e-01
 3.18790449e-01 1.15203536e-01 7.01412418e-02 4.41350018e-01
 2.85811734e-02 2.13577199e-01 7.60187367e-01 5.03960672e-01
 3.65768725e-01 2.10567380e-02 1.31270431e-01 5.87323038e-01
 3.28573729e-01 1.35615325e-01 3.11287750e-01 3.81487840e-01
 7.58287633e-02 2.79830126e-02 4.48118680e-01 1.06406268e-01
 2.63279557e-01 1.18984604e-01 4.69596612e-01 8.04195736e-02
 1.86452113e-01 5.90021860e-02 2.88111667e-01 3.87606950e-01
 2.10588185e-01 1.69254615e-01 2.22538328e-01 2.74871734e-01
 2.76564714e-01 3.52808902e-01 4.60009469e-01 4.28515996e-01
 3.88667697e-02 4.81896745e-01 2.78239204e-01 1.09118624e-01
 2.80151490e-01 2.79152911e-01 2.01171882e-01 4.11701835e-01
 2.06218877e-01 1.52950919e-01 5.20435824e-01 8.61390068e-01
 3.53161366e-01 4.69664134e-02 4.81915462e-01 1.51479794e-01
 1.81201040e-01 3.82614120e-02 7.24466337e-01 5.52678023e-02
 4.56328891e-01 2.86312938e-01 3.98186518e-01 2.27025721e-01
 3.85493996e-01 1.21411148e-01 9.29430155e-02 2.96690677e-01
 5.40143167e-01 1.00185665e-01 7.98306269e-01 2.04112483e-01
 2.01163955e-01 2.90921159e-01 5.89582943e-01 4.67325541e-02
 1.77860872e-01 7.68465907e-02 4.83216558e-01 2.03568722e-01
 8.65200315e-01 7.12941558e-01 3.17557822e-01 4.49129838e-01
 2.68084446e-02 8.70069557e-01 4.23341366e-01 3.50817323e-02
 2.70393874e-01 1.27677876e-01 4.12338369e-01 2.12616964e-01
 1.93870229e-01 1.96095039e-01 5.37162184e-02 1.31381976e-01
 4.32512683e-01 3.93811853e-01 1.84948972e-01 1.34265128e-01
 4.83698575e-01 8.74044231e-02 3.55411516e-01 5.21034489e-01
 1.22601802e-01 5.68621773e-01 1.22274363e-01 7.07454868e-03
 3.99917615e-01 5.78009202e-01 8.03945729e-01 6.21566214e-01
 4.79723667e-01 2.32500117e-01 5.13029112e-01 2.78699858e-01
 2.01561387e-01 2.92016482e-01 7.94409004e-02 1.75525824e-01
 1.03484694e-01 3.45486792e-01 7.41139556e-03 3.97064021e-01
 4.02125269e-01 1.90684182e-01 4.98079888e-01 6.43039618e-02
 4.28152444e-01 1.52664018e-02 6.64613907e-01 1.04448823e-01
 3.30533746e-02 4.61921882e-01 3.92761266e-01 6.51210723e-01
 6.32157071e-01 3.07684880e-01 7.46133172e-01 1.52731876e-01
 2.69902120e-01 9.71229233e-02 2.65523861e-01 2.21267577e-02
 1.08556657e-01 3.92469109e-02 2.85869878e-02 7.61378709e-01
 1.20714310e-01 1.94225791e-01 3.52034486e-01 1.91872095e-01
 6.82365894e-01 4.90274036e-01 4.90877572e-01 1.69961398e-01
 3.63230440e-01 1.24727655e-01 3.34768356e-01 6.50303941e-01
 3.36500551e-01 2.06305670e-01 6.23888472e-01 2.32069596e-01
 3.68637732e-01 4.45310811e-01 3.11402079e-01 2.37477252e-01
 1.72337704e-01 2.90170585e-03 5.43830893e-01 2.45418730e-01
 1.46525391e-01 2.54273164e-01 5.55018178e-01 8.93244657e-01
 2.77318594e-02 4.50121962e-01]
```

2. Функция распределения, соответствующая основной гипотезе

$$\eta = 1 - \sqrt{\xi}, \xi \in [0, 1]$$

$$p_{\xi}(x) = 1$$

$$g(x) = 1 - \sqrt{x} => g^{-1}(y) = (1 - y)^2$$

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}(g^{-1}(y)) * |(g^{-1}(y))'| = 2|y - 1| =>$$

$$F_{\eta}(y) = 2y - y^2, y \in [0, 1]$$

3. Формирование интервалов

In [65]:
```
l = math.trunc(1+math.log(n,2))
xn = np.linspace(0, 1, l + 1)

def F(y):
    return 2 * y - y ** 2

npi = (F(xn)[1:] - F(xn)[:-1]) * n
md(f'Количество интервалов: $l = \lfloor 1+log_2n \\rfloor = {l}$')
```

Out[65]: Количество интервалов: $l = \lfloor 1 + log_2 n \rfloor = 8$

In [66]:
```
nui = np.zeros(m * l).reshape(m, l)
for i in range(m):
    grouped = np.histogram(x[i], xn)[0]
    nui[i] = np.array(grouped)

df = pd.DataFrame()
intervals = np.round(np.linspace(0,1,l+1), 7)
interval_rows = ['[{}, {})'.format(intervals[val], intervals[val+1]) for val in range(l
interval_rows.append('[{}, {}]'.format(intervals[-2], intervals[-1]))
df['Интервалы'] = interval_rows
df['$np_i$'] = npi

for i in range(m):
    df[f'{i + 1}) $\nu_i$'] = nui[i]

df.transpose()
```

Out[66]:

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервалы	[0.0, 0.125)	[0.125, 0.25)	[0.25, 0.375)	[0.375, 0.5)	[0.5, 0.625)	[0.625, 0.75)	[0.75, 0.875)	[0.875, 1.0]
npi	58.59375	50.78125	42.96875	35.15625	27.34375	19.53125	11.71875	3.90625
1) ν_i	56.0	47.0	49.0	36.0	24.0	19.0	13.0	6.0
2) ν_i	62.0	57.0	47.0	40.0	18.0	11.0	11.0	4.0
3) ν_i	50.0	49.0	40.0	40.0	26.0	24.0	20.0	1.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
19996) ν_i	54.0	49.0	50.0	43.0	25.0	18.0	10.0	1.0
19997) ν_i	63.0	49.0	32.0	37.0	32.0	17.0	16.0	4.0
19998) ν_i	80.0	40.0	47.0	37.0	22.0	19.0	4.0	1.0
19999) ν_i	64.0	41.0	56.0	36.0	26.0	14.0	12.0	1.0
20000) ν_i	59.0	54.0	49.0	37.0	24.0	11.0	15.0	1.0

20002 rows × 8 columns

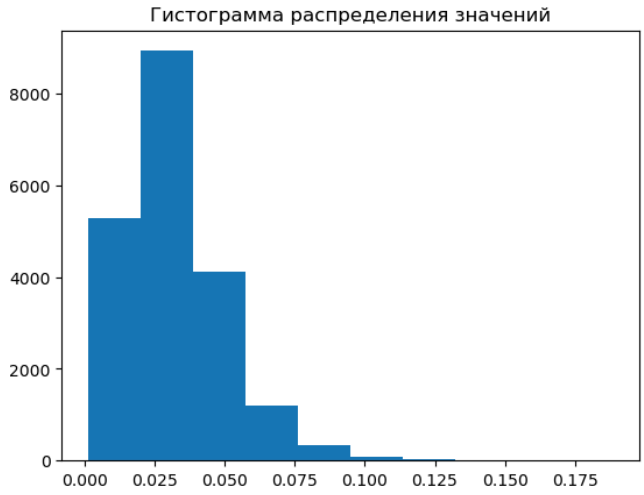
4. Вычисление метрик для сгенерированных выборок

In [67]:
```
D = np.zeros(m)
for i in range(m):
    D[i] = np.sum((nui[i]-npi) ** 2 / npi/(n-npi))

D.sort() # сортируем по возрастанию
print(D)
```

```
[0.00116488 0.00129913 0.00137216 ... 0.16016535 0.16395956 0.18869845]
```

In [68]:
```
plt.hist(D);
plt.title('Гистограмма распределения значений')
plt.show()
```



5. Эмпирические квантили для различных уровней значимости

In [69]:
```
alpha = [0.01, 0.05, 0.1]
D_alpha = [0, 0, 0]
i = 0
res = ''
for al in alpha:
    D_alpha[i] = D[math.trunc(m * (1 - al))]
    i += 1
    res += f'$D_{{кр}}({al}) = D[{math.trunc(m * (1 - al))}] = {round(D_alpha[i - 1], 3

md(res)
```

Out[69]:

$D_{кр}(0.01) = D[19800] = 0.086$
$D_{кр}(0.05) = D[19000] = 0.064$
$D_{кр}(0.1) = D[18000] = 0.055$

6. Тестирование критерия для различных выборок:

6.1 Протестируем критерий на выборке, полученной из распределения R[0; 1] (A = 0). Для этого сгенерируем выборку, найдем эмпирические частоты и вычислим статистику.

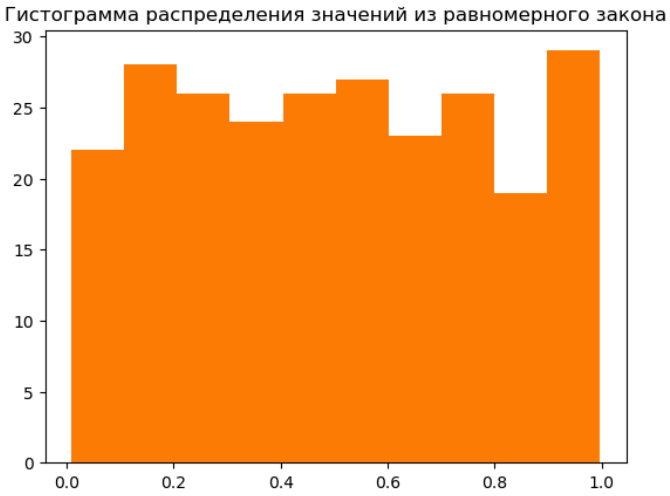
In [70]:
```
x1 = np.random.uniform(0, 1, size=n)
nui1 = np.histogram(x1, xn)[0]
D1 = np.sum((nui1-npi)**2 / npi/(n - npi))
```

In [71]:
```
counts, bins, bars = plt.hist(x1)

data = pd.DataFrame(columns = range(10), index=['Интервал', 'Количество значений'], dat
display(data)
print(data.transpose().describe())
plt.hist(x1);
plt.title('Гистограмма распределения значений из равномерного закона')
plt.show()
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	0.107559	0.20631	0.305061	0.403812	0.502563	0.601314	0.700065	0.798816
Количество значений	22.000000	28.00000	26.000000	24.000000	26.000000	27.000000	23.000000	26.000000

```
        Интервал  Количество значений
count  10.000000            10.000000
mean    0.551939            25.000000
std     0.298983             3.018462
min     0.107559            19.000000
25%     0.329749            23.250000
50%     0.551939            26.000000
75%     0.774128            26.750000
max     0.996318            29.000000
```



In [ ]:
```
```

In [72]:
```
md(f'${D1} > D_{{кр}}(\\alpha), \\forall \\alpha \\in [0.01, 0.05, 0.1]$')
```

Out[72]: $1.0930861546955675 > D_{кр}(\alpha), \forall \alpha \in [0.01, 0.05, 0.1]$

Из этого делаем вывод, что гипотеза о том, что данная выборка распределена по η=1- $\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1], отвергается.

6.2 Протестируем критерий на выборке, полученной из распределения η= $\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1] (A=1) Для этого сгенерируем выборку из равноменрого закона, найдем эмпирические частоты и вычислим статистику.

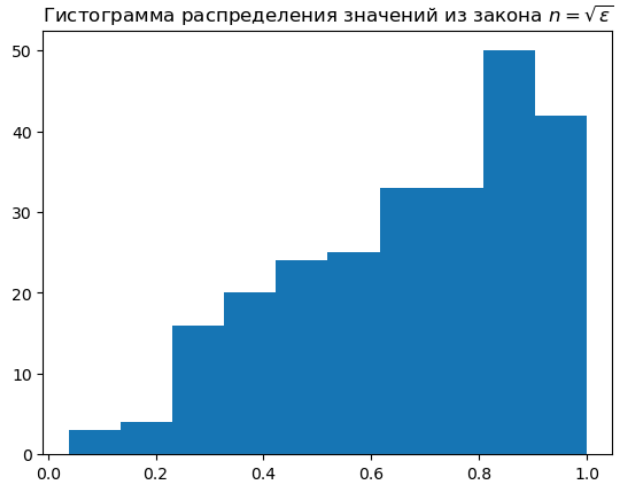
In [73]:
```
x2 = np.random.uniform(0, 1, size=n)
x2 = np.sqrt(x2)
nui2 = np.histogram(x2, xn)[0]
D2 = np.sum((nui2-npi)**2 / npi/(n-npi))
```

In [74]:
```
counts, bins, bars = plt.hist(x2);
data = pd.DataFrame(columns = range(10), index=['Интервал', 'Количество значений'], dat
display(data)
print(data.transpose().describe())

plt.title('Гистограмма распределения значений из закона $n=\sqrt{\epsilon}$')
plt.show()
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	0.134999	0.231076	0.327153	0.42323	0.519307	0.615384	0.711461	0.807538
Количество значений	3.000000	4.000000	16.000000	20.00000	24.000000	25.000000	33.000000	33.000000

```
       Интервал  Количество значений
count  10.000000            10.000000
mean    0.567345            25.000000
std     0.290888            15.180397
min     0.134999             3.000000
25%     0.351172            17.000000
50%     0.567345            24.500000
75%     0.783519            33.000000
max     0.999692            50.000000
```



In [75]:
```
md(f'${D2} > D_{{кр}}(\\alpha), \\forall \\alpha \\in [0.01, 0.05, 0.1]$')
```

Out[75]: $4.328648102023741 > D_{\text{кр}}(\alpha), \forall \alpha \in [0.01, 0.05, 0.1]$

Из этого делаем вывод, что гипотеза о том, что данная выборка распределена по η=1- $\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1], отвергается.

6.3 Протестируем критерий на выборке, полученной из бэта-распределения с параметрами d1 = 10, d2 = 20. Для этого сгенерируем выборку, найдем эмпирические частоты и вычислим статистику.

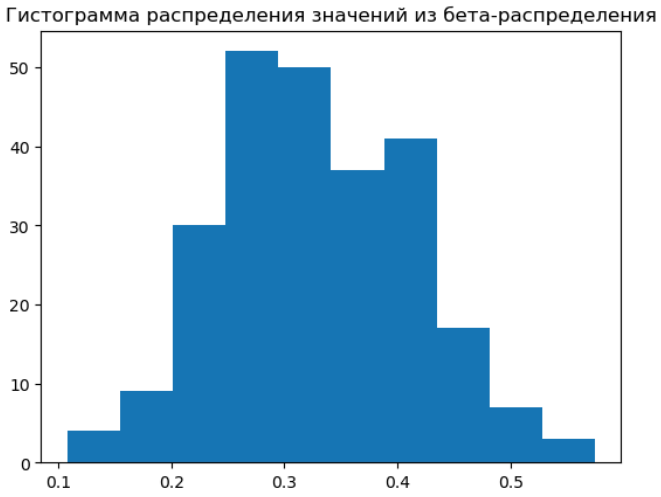
In [76]:
```
x3 = scipy.stats.beta.rvs(10, 20, size=n)
nui3 = np.histogram(x3, xn)[0]
D3 = np.sum((nui3-npi)**2 / npi/(n-npi))
```

In [77]:
```
counts, bins, bars = plt.hist(x3);
data = pd.DataFrame(columns = range(10), index=['Интервал', 'Количество значений'], dat
display(data)
print(data.transpose().describe())

plt.title('Гистограмма распределения значений из бета-распределения')
plt.show()
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	0.154781	0.201435	0.248088	0.294741	0.341394	0.388048	0.434701	0.481354
Количество значений	4.000000	9.000000	30.000000	52.000000	50.000000	37.000000	41.000000	17.000000

```
       Интервал  Количество значений
count  10.000000            10.000000
mean    0.364721            25.000000
std     0.141250            19.287302
min     0.154781             3.000000
25%     0.259751             7.500000
50%     0.364721            23.500000
75%     0.469691            40.000000
max     0.574661            52.000000
```



In [78]:
```
md(f'${D3} > D_{{кр}}(\\alpha), \\forall \\alpha \\in [0.01, 0.05, 0.1]$')
```

Out[78]: $1.4660738663440447 > D_{кр}(\alpha), \forall \alpha \in [0.01, 0.05, 0.1]$

Из этого делаем вывод, что гипотеза о том, что данная выборка распределена по η=1- $\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1], отвергается.

6.4 Протестируем критерий на выборке, полученной из исходного закона. Для этого сгенерируем выборку, найдем эмпирические частоты и вычислим статистику.

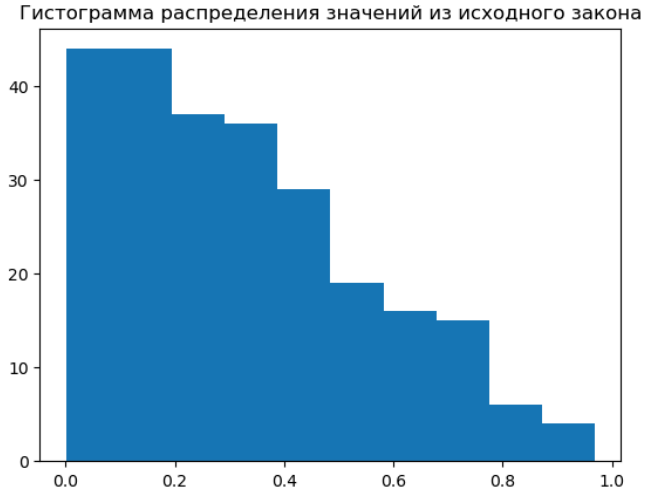
In [79]:
```
x4 = np.random.uniform(0, 1, size=n)
x4 = 1 - np.sqrt(x4)
nui4 = np.histogram(x4, xn)[0]
D4 = np.sum((nui4-npi)**2 / npi/(n - npi))
```

In [80]:
```
counts, bins, bars = plt.hist(x4);
data = pd.DataFrame(columns = range(10), index=['Интервал', 'Количество значений'], dat
display(data)
print(data.transpose().describe())

plt.title('Гистограмма распределения значений из исходного закона')
plt.show()
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	0.098211	0.194933	0.291655	0.388376	0.485098	0.58182	0.678542	0.775264
Количество значений	44.000000	44.000000	37.000000	36.000000	29.000000	19.00000	16.000000	15.000000

```
       Интервал  Количество значений
count  10.000000            10.000000
mean    0.533459            25.000000
std     0.292840            14.988885
min     0.098211             4.000000
25%     0.315835            15.250000
50%     0.533459            24.000000
75%     0.751083            36.750000
max     0.968707            44.000000
```



In [81]:
```
md(f'${D4} < D_{{кр}}(\\alpha), \\forall \\alpha \\in [0.01, 0.05, 0.1]$')
```

Out[81]: $0.011343783638827046 < D_{\text{кр}}(\alpha), \forall \alpha \in [0.01, 0.05, 0.1]$

Из этого делаем вывод, что гипотеза о том, что данная выборка распределена по η=1- $\sqrt{\xi}$, ξ~R[0,1], принимается.

7. Вывод

На основе стохастического эксперимента был построен критерий согласия для проверки простой гипотезы. Критерий был проверен на трех выборках распределенных не в соответствие с основной гипотезой, и для каждой из них основную гипотезу отклонил, что говорит в пользу критерия. Кроме того, критерий был проверен на выборке, распределенной в соответствие с основной гипотезой. Для этого случая была получена статистика, меньшая каждого из уровней доверия, и основная гипотеза была принята, что также говорит в пользу критерия.