МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДАНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический

университет имени Н.Э. Баумана»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ___ФН___

КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Теория вероятности и математическая статистика

Домашняя работа №8

Группа: _ФН11-51Б_

Вариант №15

Студент: Пунегов Д.Е.

Преподаватель: Облакова Т.В.

Москва 2022

Задача 8

Применение критерия χ^2 Пирсона к проверке гипотезы о виде функции распределения.

Задание.

1. Используя группированную выборку из задачи №1, проверьте на уровне доверия $1-\alpha$ гипотезу H_0: выборка взята из генеральной совокупности, распределенной по закону $F(x)$
2. Неизвестные параметры распределения $F(x)$, если это необходимо, найдите методом максимального правдоподобия (или методом моментов) по выборке.
3. Постройте совмещенные графики гистограммы относительных частот и плотности, соответствующей функции распределения $F(x)$.

Номер варианта	Закон распределения $F(x)$	α
15	Фишер $F(k,m)$	0,05

Решение

Исходные данные

Уровень доверия $1-\alpha=0.95$

Основная гипотеза

Плотность распределения имеет вид:

$$H_0: f(k,m)=\frac{m^{\frac{m}{2}}k^{\frac{k}{2}}x^{\frac{k}{2}-1}}{(m+kx)^{\frac{m+k}{2}}B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)},\quad x>0$$

Для применения критерия согласия Пирсона надо определить эмпирические и теоретические частоты

Применение критерия χ^2 Пирсона к проверке гипотезы о виде функции распределения.

1. Подготовка

1.1 Загружаем все нужные библиотеки

In [157]:

```python
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Markdown as md
from IPython.display import display, Math, Latex
import math
```

1.2 Импортируем нужную выборку из файла

In [158]:

```python
df = pd.read_csv ('data1.csv',sep='\t', header=None, decimal=",")
df = df.astype('float')
pd.set_option('display.expand_frame_repr', False)

heading_properties = [('font-size', '18px')]
cell_properties = [('font-size', '14px')]



dfstyle = [dict(selector="th", props=heading_properties), dict(selector="td", props=cell_properties)]

df.style.set_table_styles(dfstyle)

print(df)
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.152	0.650	1.115	1.371	0.654	1.189	0.935	1.518	1.420	0.511
1	1.153	1.228	1.241	1.323	1.745	1.305	1.486	0.582	1.080	1.068
2	1.084	0.650	0.628	0.666	3.041	0.991	1.074	1.540	0.487	0.432
3	1.103	1.523	3.052	1.144	1.432	0.541	1.470	0.517	0.677	1.412
4	1.391	0.909	0.974	1.527	1.032	0.619	1.172	0.994	1.263	1.009
5	0.819	1.198	1.857	0.740	1.059	1.188	2.016	0.461	0.876	0.715
6	0.417	1.292	0.751	0.299	0.788	0.694	0.637	0.566	0.513	0.424
7	1.448	0.379	1.235	0.247	2.698	1.415	3.237	1.189	1.082	1.076
8	1.246	1.132	1.525	1.218	1.596	0.664	0.594	0.505	0.684	0.716
9	1.081	1.269	1.521	0.960	5.313	0.455	1.046	1.391	0.735	4.653
10	1.011	1.945	1.332	1.500	0.472	0.580	0.503	0.869	3.095	0.427
11	2.611	1.088	2.296	0.713	0.975	0.466	1.796	1.273	2.664	2.516
12	1.559	1.004	0.717	0.581	0.881	1.319	0.796	1.731	0.455	0.597
13	1.751	1.036	1.375	1.027	0.697	0.983	0.522	1.008	0.793	0.519
14	1.953	0.294	1.271	1.336	0.694	1.745	1.051	2.357	0.424	1.587

2. Крайние члены вариационного ряда и размах выборки

In [159]:
```
n = df.shape[0] * df.shape[1]
print('Количество элементов n:', n)
```

```
Количество элементов n: 150
```

In [160]:
```
df_min = df.to_numpy().min()
md('$X_{{(1)}} = {}$'.format(df_min))
```

Out[160]: $X_{(1)} = 0.247$

In [161]:
```
df_max = df.to_numpy().max()
md('$X_{{(n)}} = X_{} = {}$'.format('{{({})}}'.format(n), df_max))
```

Out[161]: $X_{(n)} = X_{(150)} = 5.313$

In [162]:
```
df_diff = df_max - df_min
md('$\omega = X_{{(n)}} - X_{{(1)}} = {}$'.format(df_diff))
```

Out[162]: $\omega = X_{(n)} - X_{(1)} = 5.066$

3. Группировка данных (количество интервалов находим по правилу Стерджеса)

3.1 Находим число интервалов

In [163]:
```
l = math.trunc(1 + np.log2(n))
print('Количество интервалов l = {}'.format(l))
```

```
Количество интервалов l = 8
```

3.2 Находим шаг интервалов

In [164]:
```
h = df_diff / l
print('Размер интервалов h = {}'.format(h))
```

```
Размер интервалов h = 0.63325
```

3.3 Построение гистограммы

Для построения гистограммы нам понадобится сначала столбец средних точек на каждом интервале:

In [165]:
```
intervals = [(round(df_min + i * h, 3), round(df_min + (i + 1) * h, 3)) for i in range(l)]
intervals
```

Out[165]:
```
[(0.247, 0.88),
 (0.88, 1.514),
 (1.514, 2.147),
 (2.147, 2.78),
 (2.78, 3.413),
 (3.413, 4.046),
 (4.046, 4.68),
 (4.68, 5.313)]
```

In [166]:
```
histogram = pd.DataFrame()
interval_rows = ['[{}, {})'.format(val[0], val[1]) for val in intervals]
interval_rows[l - 1] = '[{}, {}]'.format(intervals[l - 1][0], intervals[l - 1][1])
histogram['Интервалы'] = interval_rows
histogram['Середины интервалов'] = [(val[0] + val[1]) / 2 for val in intervals]
histogram
```

Out[166]:

	Интервалы	Середины интервалов
0	[0.247, 0.88)	0.5635
1	[0.88, 1.514)	1.1970
2	[1.514, 2.147)	1.8305
3	[2.147, 2.78)	2.4635
4	[2.78, 3.413)	3.0965
5	[3.413, 4.046)	3.7295
6	[4.046, 4.68)	4.3630
7	[4.68, 5.313]	4.9965

Ну а дальше нужно посчитать количество точек, которые входят в каждый из интервалов:

In [167]:
```
histogram['Количество точек'] = [0 for i in range(l)]

for i in range(df.shape[0]):
    for j in range(df.shape[1]):
        value = float(df.at[i, j])
        for k in range(l):
            if value >= intervals[k][0] and value < intervals[k][1]:
                histogram.iat[k, 2] += 1
                break

        if value == intervals[l - 1][1]:
            histogram.iat[l - 1, 2] += 1
histogram
```

Out[167]:

	Интервалы	Середины интервалов	Количество точек
0	[0.247, 0.88)	0.5635	55
1	[0.88, 1.514)	1.1970	65
2	[1.514, 2.147)	1.8305	18
3	[2.147, 2.78)	2.4635	6
4	[2.78, 3.413)	3.0965	4
5	[3.413, 4.046)	3.7295	0
6	[4.046, 4.68)	4.3630	1
7	[4.68, 5.313]	4.9965	1

Убедимся, что все точки вошли в интервалы:

In [168]:
```
print('Количество точек: {}'.format(histogram['Количество точек'].sum()))
```

```
Количество точек: 150
```

Посчитаем относительные частоты:

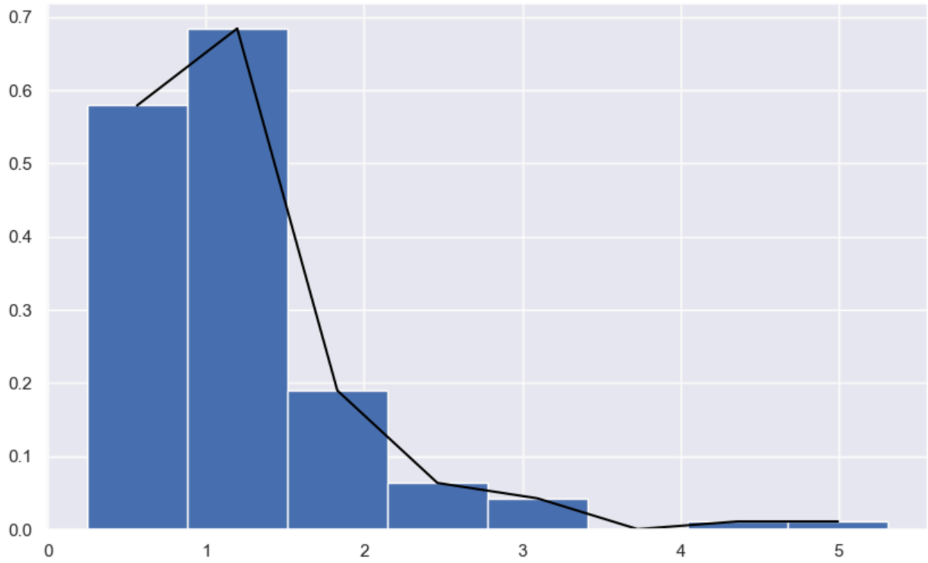
In [169]:
```
histogram['Относительная частота'] = histogram['Количество точек'] / n
histogram
```

Out[169]:

	Интервалы	Середины интервалов	Количество точек	Относительная частота
0	[0.247, 0.88)	0.5635	55	0.366667
1	[0.88, 1.514)	1.1970	65	0.433333
2	[1.514, 2.147)	1.8305	18	0.120000
3	[2.147, 2.78)	2.4635	6	0.040000
4	[2.78, 3.413)	3.0965	4	0.026667
5	[3.413, 4.046)	3.7295	0	0.000000
6	[4.046, 4.68)	4.3630	1	0.006667
7	[4.68, 5.313]	4.9965	1	0.006667

4. Построение Гистограммы относительных частот

In [170]:
```
import seaborn as sns
sns.set_theme()
plt.figure(figsize=(10,6))
x = histogram['Середины интервалов']
y = [i / h for i in histogram['Относительная частота']]
plt.bar(x, y, width=h)
plt.plot(x, y, color = 'black')
plt.show()
```



По виду гистограммы заключаем, что распределение эмпирических частот похоже на нормальный закон

5. Выборочные характеристики

5.1 Выборочное среднее

In [171]:
```
x_mean = 0
for i in range(df.shape[0]):
    for j in range(df.shape[1]):
        value = float(df.at[i, j])
        x_mean += value

x_mean /= n
md('Выборочное среднее <ins>X</ins> = {}'.format(round(x_mean, 3)))
```

Out[171]: Выборочное среднее X = 1.179

In [172]:
```
x_mean_squared = 0
for i in range(df.shape[0]):
    for j in range(df.shape[1]):
        value = float(df.at[i, j]) ** 2
        x_mean_squared += value

x_mean_squared /= n
md('Среднее суммы квадратов <ins>X</ins> = {}'.format(round(x_mean_squared, 3)))
```

Out[172]: Среднее суммы квадратов X = 1.939

5.2 Выборочная дисперсия

In [173]:
```
s_2 = 0

for i in range(df.shape[0]):
    for j in range(df.shape[1]):
        value = float(df.at[i, j])
        s_2 += (value - x_mean) ** 2

s_2 /= (n - 1)
md('Выборочная дисперсия $S^2$ = {}'.format(round(s_2, 3)))
```

Out[173]: Выборочная дисперсия S^2 = 0.552

$$M_{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{mean}$$

$$M_{\xi^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_{meansquared}$$

Найдем математическое ожидание распределения Фишера

$$M_{\zeta} = \int_0^{+\infty} x * f(k,m)dx = \int_0^{+\infty} \frac{m^{\frac{m}{2}} k^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}}}{(m+kx)^{\frac{m+k}{2}} B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}} k^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right) m^{\frac{m+k}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{k}{2}}}{\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{\frac{m+k}{2}}} dx$$

Сделаем замену $y = \frac{k}{m}x$

$$\frac{m^{\frac{m}{2}} k^{\frac{k}{2}} (\frac{m}{k})^{\frac{k}{2}+1}}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right) m^{\frac{m+k}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{k}{2}}}{(1+y)^{\frac{m+k}{2}}} dy = \frac{\frac{m}{k}}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)} * B\left(\frac{k}{2}+1;\frac{m}{2}-1\right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 = \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{2}\right)}{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 =$$

$$= \frac{m}{m-2} = x_{mean}$$

$$m = \frac{2x_{mean}}{x_{mean}-1}$$

Найдем M_{ζ^2} распределения Фишера

$$M_{\zeta^2} = \int_0^{+\infty} x^2 * f(k,m)dx = \int_0^{+\infty} \frac{m^{\frac{m}{2}}k^{\frac{k}{2}}x^{\frac{k}{2}+1}}{(m+kx)^{\frac{m+k}{2}}B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)}dx =$$

$$= \frac{m^{\frac{m}{2}}k^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)m^{\frac{m+k}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{k}{2}+1}}{\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{\frac{m+k}{2}}}dx$$

Сделаем замену $y = \frac{k}{m}x$

$$\frac{m^{\frac{m}{2}}\,k^{\frac{k}{2}}\,(\frac{m}{k})^{\frac{k}{2}+2}}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)m^{\frac{m+k}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{k}{2}+1}}{(1+y)^{\frac{m+k}{2}}}dy = \frac{\left(\frac{m}{k}\right)^2}{B\left(\frac{k}{2};\frac{m}{2}\right)} * B\left(\frac{k}{2}+2;\frac{m}{2}-2\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{m}{2}\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 = \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{\left(\frac{m}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 = \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{2}\right)}{\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)} * \left(\frac{m}{k}\right)^2 =$$

$$\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{k})*2m^2}{(m-2)(m-4)} = x_{meansquared}$$

$$k = \frac{2m^2}{x_{meansquared}(m-2)(m-4)-m^2}$$

Нахождение теоретических вероятностей. Определяем неизвестные параметры методом моментов

In [174]:
```
m = 2 * x_mean / (x_mean - 1)
m
```
Out[174]: 13.15448968209707

In [175]:
```
k = 2 * m ** 2 / (x_mean_squared * (m - 2) * (m - 4) - m ** 2)
k
```
Out[175]: 13.875789342482795

7. Вычисление статистики $\chi^2_{\text{в}}$ и квантили $\chi^2_{(1-\alpha)}(m1)$:

$$\chi^2_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$$

Необходимо посчитать теоретические частоты. Считать мы их будет по формулам:

Рассмотрим интервал $[a_i, b_i)$. Тогда его теоретическая частота будет равна:

$$v_i = n * P(a_i \leq x < b_i) = n * (F(b_i) - F(a_i))$$

Исключение составит последний интервал, который будет вычисляться следующим образом:

$$v_m = n * (1 - \sum_{i=1}^{n-1} P(a_i \leq x < b_i))$$

In [176]:
```
from scipy.stats import f

alpha = 0.01
teoretic_quantities = [n * (f.cdf(intervals[i][1], k, m)
                            - f.cdf(intervals[i-1][1], k, m))
                       for i in range(1, len(intervals) - 1)]
teoretic_quantities.insert(0, n * (f.cdf(intervals[0][1], k, m)))

teoretic_quantities.append(n - sum(teoretic_quantities))


table = pd.DataFrame()
table['Интервал'] = histogram['Интервалы']
table['Эмпирические частоты'] = histogram['Количество точек']
table['Теоретические частоты'] = teoretic_quantities
table = table.transpose()
table
```

Out[176]:

	0	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	[0.247, 0.88)	[0.88, 1.514)	[1.514, 2.147)	[2.147, 2.78)	[2.78, 3.413)	[3.413, 4.046)	[4.046, 4.68)	[4.68, 5.313]
Эмпирические частоты	55	65	18	6	4	0	1	1
Теоретические частоты	61.034637	54.486458	21.275437	7.749258	3.002491	1.262088	0.573668	0.615963

Объединим интервалы 4-7

In [177]:
```
table.iloc[1, 4] = table.iloc[1, 4] + 2
table.iloc[2, 4] += table.iloc[2, 5] + table.iloc[2, 6] + table.iloc[2, 7]
table = table.drop(columns=[5, 6, 7])
table
```

Out[177]:

	0	1	2	3	4
Интервал	[0.247, 0.88)	[0.88, 1.514)	[1.514, 2.147)	[2.147, 2.78)	[2.78, 3.413)
Эмпирические частоты	55	65	18	6	6
Теоретические частоты	61.034637	54.486458	21.275437	7.749258	5.45421

Проверка:

In [178]:
```
print(sum(teoretic_quantities))
```

```
150.0
```

In [179]:
```
tmp = (table.transpose()['Эмпирические частоты'] - table.transpose()['Теоретические частоты']) ** 2
arr = tmp / table.transpose()['Теоретические частоты']
xv_2 = round(sum(arr), 5)
print(xv_2)
md(f'$$χ_в^2 = \\sum_{{i=1}}^{{m}} \\frac{{(\\nu_i-{{np}}_i)^2}}{{np_i}} = {xv_2}$$')
```

```
3.57907
```

Out[56]:

$$\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 3.57907$$

Вычисление квантиля:

Число степеней свободы m1 = 5 - 2 - 1 = 2

In [57]:
```
from scipy.stats import chi2

md(f'$$χ_{{1-\\alpha}}^2(2) = {chi2.ppf(1 - alpha, 2)} > {xv_2}$$')
```

Out[57]: $\chi_{1-\alpha}^2(2) = 9.21034037197618 > 3.57907$

Следовательно, гипотеза H0 о распределении генеральной совокупности по закону Фишера принимается на уровне доверия 0,99.

9. Выводы

Мы научились примененять критерий χ^2 Пирсона к проверке гипотезы о виде функции распределения. В нашей задаче мы показали, что гипотеза о распределении случайных величин по закону Фишера принимается на уровне доверия 0.99

8. Графики

In [64]:
```
import seaborn as sns
import scipy.stats as st
sns.set_theme()
plt.figure(figsize=(10,6))
x = histogram['Середины интервалов']
y = [i / h for i in histogram['Относительная частота']]
plt.bar(x, y, width=h, color = 'lightgreen', label = 'Гистограмма')
x_theor = np.linspace(0, 5, 1000)
y_theor = [st.f.pdf(val, k, m) for val in x_theor]
plt.plot(x_theor, y_theor)

plt.show()
```