第一章 线性代数

1.1 线性映射和矩阵

1.1.1 线性映射

定义 线性运算指向量的加法与数乘.

定义 向量空间为带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$ 被称为向量空间.

定义 映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 若满足

1. 任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x'})$
2. 任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, 都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

则 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 线性映射.

定义 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为线性变换.

定义 若线性映射 f 有 $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^m$，则矩阵 $A = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ 即为标准坐标向量下的 线性映射的表示矩阵，且满足 $A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a_i}$.

定理 （线性映射的线性运算）若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $k\boldsymbol{A}$ 也是同样范畴上的线性映射.

定理 $\boldsymbol{AB}$ 表示线性映射 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的复合 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$. 需要注意，$\boldsymbol{AB} = 0$ 也不能推出 $\boldsymbol{A} = 0$ 或 $\boldsymbol{B} = 0$.

理解 矩阵乘法 $A\boldsymbol{x}$ 视为这样一种运算：按照 $\boldsymbol{x}$ 指定的系数，将 $\boldsymbol{A}$ 的列进行线性组合.

定义 反对称矩阵：$A = -A^{\mathrm{T}}$，反对称矩阵对角线必定为 0.

定义　　若一个上三角矩阵对角线上全为 0，则称为严格上三角矩阵.

定义　　将阶梯形矩阵，从下向上消元，并单位化主元，得到的矩阵每个非零行上，主变量为 1 而其他列的元素均为 0，称这个矩阵为 行简化阶梯形矩阵.

定理　　对于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = trace(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})$.

1.1.2 线性方程式组

定理　　对于方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，将 $[A\ \boldsymbol{b}]$ 简化为阶梯型后，若

1. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数比 A 多 $\mathbf{1}$，则方程组无解（$0 \neq 1$）
2. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数与 A 相等，则方程组有解
   (a) 若阶梯数等于未知数个数，则有唯一解
   (b) 若阶梯数小于未知数个数，则有无穷多组解

定义　　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 称为齐次线性方程组，$\vec{0}$ 为其平凡解，除此之外的解称为非平凡解.

1.1.3 可逆矩阵

定义　　设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则 A 为 可逆矩阵或非奇异矩阵，B 为 A 的逆.

定理　　以下命题等价

1. A 可逆
2. 任意 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解唯一
3. 其次方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 仅有零解
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵是 I_n
6. A 能表示为有限个初等矩阵的乘积（即消元至行简化阶梯形矩阵的逆过程）

定义　　若矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，则称其为 （行）对角占优矩阵.

定理　　对角占优矩阵必然可逆.

定义　　若矩阵 A 通过若干初等行变换可以变为矩阵 B，则称 A, B 左相抵. 即存在可逆矩阵 P，使得 $PA = B, A = P^{-1}B$. 所有和 A 相抵的矩阵中，最简单的是其行简化阶梯形，它被称

为 A 的左相抵标准形.

定理　　左相抵构成等价关系.

定理　　**(Sherman-Morrison)** 设 A 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 n 阶向量，则 $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆 $\iff 1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$，且此时

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{1.1}$$

若将 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 改为 $n\times k$ 的矩阵，则类似地有

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\boldsymbol{u}(I_k+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1} \tag{1.2}$$

1.1.4　LU 分解

定理　　若 n 阶方阵 A 仅通过倍加矩阵做行变化即可化为阶梯形，则存在**单位下三角矩阵**（主对角线均为 1）L 与上三角矩阵 U，使得 $A=LU$，此即 **LU 分解**.

定义　　方阵 A 左上角的 $k\times k$ 块为第 k 个**顺序主子阵**.

定理　　可逆矩阵 A 存在 LU 分解，当且仅当 A 的所有顺序主子阵均可逆，此时 LU 分解唯一.（满足在消元过程中不需要行的调换）

定理　　若可逆矩阵 A 存在 LU 分解，则存在对角线均不为 0 的对角矩阵 D、单位下三角矩阵 L、单位上三角矩阵 U，满足 $A=LDU$，且该分解**唯一**. 此即 **LDU 分解**.

定理　　若可逆对称阵 A 有 LDU 分解，则 $L=U^{\mathrm{T}}$.

定理　　可逆矩阵 A 存在分解 $A=PLU$，P 为置换矩阵，显然该分解不唯一.

技巧　　将 A 分解成对称阵 $X=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$ 与反对称阵 $Y=\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$.

1.2　子空间和维数

1.2.1　基本概念

定义　　映射 $A:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的**像集**

$$\mathcal{R}(A)=\{A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}\subseteq\mathbb{R}^m \tag{1.3}$$

显然 $\mathcal{R}(A)$ 必是子空间，即 A 的**列（向量）空间**.

命题　$\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m \iff A$ 为满射.

定义　映射 $A: \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的**原像**

$$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\in\mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

显然 $\mathcal{N}(A)$ 必是子空间，即 A 的**零空间（也称解空间）**.

命题　$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{0}\} \iff A$ 是单射 $\iff \forall \boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2,\ A(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\neq 0.$

定义　将 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 的全体线性组合为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，记为

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n):=\{k_1\boldsymbol{a}_1,\dots,k_n\boldsymbol{a}_n|k_1,\dots,k_n\in\mathbb{R}\} \tag{1.5}$$

定理　$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

1.2.2　基和维数

定义　向量组 S 的任一**极大线性无关组**中向量的个数称为 S 的**秩 (rank)**；子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基的向量数目称为**维数**，记为 $\dim\mathcal{M}$.

定理　**（基存在定理）**给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}\neq\{0\}$，则 $\mathcal{M}$ 存在一组基，且基向量个数不超过 m.

定理　**（基扩充定理）**若 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能够**扩充**成 $\mathcal{N}$ 的一组基.

定理　对于方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A$ 可逆 $\iff A$ 是单射 $\iff A$ 是满射.

1.2.3　矩阵的秩

定义　执行 Gauss 消去法将矩阵化为阶梯型后，主元所在的列对应主变量的系数，称为**主列**；其他列对应自由变量的系数，称为**自由列**.

定理　若矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$ 左相抵，则

1. 部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\dots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{b}_{i_1},\dots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 线性无关.
2. $\boldsymbol{a}_j=k_1\boldsymbol{a}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_{i_r} \iff \boldsymbol{b}_j=k_1\boldsymbol{b}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_{i_r}$

二级结论

- $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\right)\le\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & X\\ O & B\end{bmatrix}\right)$. 因而当 A,B 可逆时，上述两个分块矩阵都可逆
- $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$
- $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$
- 反对称矩阵的秩必定是偶数
- $\mathcal{R}(AB)\subseteq\mathcal{R}(A)$

定义　$\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 为 A 的**行（向量）空间**；$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})$；$\operatorname{rank}(A)=n$ 定义为**列满秩**，同理有**行满秩**.

定理　对于 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，

- A 是满射 $\iff$ A 行满秩
- A 是单射 $\iff$ A 列满秩

定义　通过行列初等变换，能将矩阵 A 变换为**相抵标准型** $\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$.

1.2.4　线性方程组的解

方法　（求零空间的一组基）矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，求其行简化阶梯形，考虑依次将各个自由元取为 1，同时维持其他自由元为 0（即只让其中一个自由列在线性组合中系数非零），由于主列都是单位向量，从而容易根据自由列的系数计算出零解. 这样求出的解（由于自由元的取值特点）构成零空间的一组基，继而有 $\dim\mathcal{N}(A)=n-\operatorname{rank}(A)$.

1.3　内积和正交性

1.3.1　基本概念

定义　$\boldsymbol{b}$ 向 $\boldsymbol{a}$ 的**垂直投影**为 $\hat{x}=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$；向量 $\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 向直线 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a})$ 的投影.

定理　**（Cauchy-Schwarz 不等式）** $|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}|\le\|a\|\|b\|$.

定义　设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，若它的一组基是**正交向量组**，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**正交基**；若是**正交单位向量组**，则称为 $\mathcal{M}$ 的**标准正交基**.

定义　　**（Gram-Schmidt 正交化）**从 $\mathcal{M}$ 的任意一组基 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 出发，执行如下操作

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_k}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_j} \widetilde{\boldsymbol{q}}_j \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{1.6}$$

即得到一组正交基，最后再通过单位化，得到一组标准正交基.

1.3.2　正交矩阵和 QR 分解

定义　　若方阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$，则称 Q 为 n 阶正交矩阵；Q 的行、列向量各自构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基；多个正交矩阵的积也为正交矩阵.

定理　　方阵 Q 的以下叙述等价

1. Q 是正交矩阵
2. Q 为保距变换，即 $\|Q\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
3. Q 为保内积变换，即 $Q\boldsymbol{x} \cdot Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

保距变换一定也是保角变换.

定义　　**（Givens 变换）**在 $\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$ 平面上转角 θ 的旋转变换的矩阵为

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \cos\theta & & & -\sin\theta & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & \sin\theta & & & \cos\theta & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

定义　　**（Householder 变换）**关于 $\mathbb{R}^n$ 中的单位法向量所确定的超平面 $\mathcal{N}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})$ 进行反射变换的矩阵为

$$H_{\boldsymbol{v}} = I_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \tag{1.8}$$

不难注意到 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{w}$ 向 $\operatorname{span}(\boldsymbol{v})$ 的投影，因此 $H_{\boldsymbol{v}}$ 的效果是将 $\boldsymbol{w}$ 中与 $\boldsymbol{v}$ 共线的成分反向.

定义　　**（QR 分解）**设 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ 为 n 可逆矩阵. 在对 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化过程的中，本质上是进行多次的列初等变换，故可以借此对 A 进行表达

$$\boldsymbol{a}_k = \widetilde{\boldsymbol{q}}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_k}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_j} \widetilde{\boldsymbol{q}}_j \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{1.9}$$

$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{q}}_1 & \dots & \widetilde{\boldsymbol{q}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_1} & \cdots & \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_n}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_n}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

可以进一步将 Q 单位化，得到

$$A = Q\ \mathrm{diag}(\|\widetilde{\boldsymbol{q}}_i\|)\widetilde{R} = QR \tag{1.11}$$

定理　设 A 为 n 阶可逆矩阵，则存在唯一的分解 $A = QR$，其中 Q 为正交矩阵，R 为对角元均为正数的上三角矩阵.

定义　若矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$，则称之为 **列正交矩阵**.

定理　对于 $m \times n$ 的矩阵 A，其中 $m \geq n$，则

1. **（简化 QR 分解）**存在 $m \times n$ 列正交矩阵 Q_1 和具有非负对角元的 n 阶上三角矩阵 R_1，使得 $A = Q_1R_1$
2. **（QR 分解）**进一步的，存在 m 阶正交矩阵 Q 和 $m \times n$ 矩阵 R，使得 $A = QR = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ O \end{bmatrix}$

1.3.3　正交投影

定义　**（子空间正交）**若子空间 $\mathcal{M}$ 的任意向量与 $\mathcal{N}$ 中的任意向量都正交，则称为 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 正交，记为 $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

若 $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{M} \perp \mathcal{N}, \mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{R}^n$，则称 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{M}$ 的**正交补**，记为 $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}$.

定理　对于 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，有

1. $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})^{\perp} = \mathcal{N}(A), \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ （矩阵导出的四个子空间的关系）
2. $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}), \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathcal{N}(A)$

TBD　正交投影

1.4　行列式

1.4.1　行列式函数

定义　定义在全体 n 阶方阵上的函数 δ，如果满足如下性质：

1. 列多线性性：$\delta(\cdots, k\boldsymbol{a}_i + k'\boldsymbol{a}_i', \cdots) = k\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + k'\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i', \cdots)$
2. 列反对称性：交换任意两列，函数符号反转
3. 单位化条件：$\delta(I_n) = 1$

则称 δ 为一个 n 阶**行列式函数**，该函数存在且唯一. 容易证明 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

定义　**Vandermonde 矩阵**及其行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j) \tag{1.12}$$

1.4.2　行列式的展开式

定义　给定 n 阶方阵 A，令 $A\binom{i}{j}$ 表示从 A 中划去第 i 行第 j 列后得到的 $n-1$ 阶方阵，称 $M_{ij} = \det\left(A\binom{i}{j}\right)$ 为元素 a_{ij} 的**余子式**；而 $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定理　行列式按第一列展开 $\det(A) = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{n1}C_{n1}$

定理　令 A 的第 i 列为 $\boldsymbol{a}_i$，记第 j 列元素的代数余子式组成的向量 $\boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ \vdots \\ C_{nj} \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{a}_{j'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_j = \begin{cases} 0, & j \neq j' \\ \det(A), & j = j' \end{cases} \tag{1.13}$$

定义　对矩阵 $A = [a_{ij}]$，记 $C = [C_{ij}]_{n\times n}$，则 C^{T} 为 A 的**伴随矩阵**，且 $C^{\mathrm{T}}A = \det(A)I_n$.

二级结论　若 A 不可逆，则其伴随矩阵秩为 0 或 1.

1.5　特征值和特征向量

引子　考虑问题 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，即求 $(A - \lambda I_n)\boldsymbol{x} = 0$ 的解，即求 $\det(A - \lambda I_n)$ 的解，即求某个多项式的 0 解. 由代数学基本定理知，在复数域上恰有 n 个根（计算重数）. 因此，接下来考虑的矩阵都是**复矩阵**.

定义　给定方阵 A 若对 $\lambda \in \mathbb{C}$，存在非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，使得 $A\boldsymbol{x} = \lambda x$，则称 λ 为 **特征值**，$\boldsymbol{x}$ 为 **特征向量**. 以 λ 为自变量，则多项式

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \tag{1.14}$$

为矩阵 A 的**特征多项式**.

定理

1. λ_0 是 A 的特征值 $\iff p_A(\lambda_0)=0$
2. $\boldsymbol{x}_0$ 是 A 的特征向量 $\iff \boldsymbol{x}_0\in\mathcal{N}(\lambda_0 I_n-A)$
3. 上（下）三角矩阵的对角线元素即为全部的特征值

定义　给定 n 阶方阵 A 及 A 的一个特征值 $\lambda_0\in\mathbb{C}$，若 λ_0 是 $p_A(\lambda)$ 的 n_0 重根，则称 n_0 为 λ_0 作为 A 的特征值的**代数重数（简称重数）**，称 λ_0 是 A 的 n_0 重特征值（$n_0=1$ 时称为**单特征值**）. 将特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n-A)$ 的维数作为 λ_0 关于 A 的**几何重数**.

定理　**（Vieta 定理）**对于一元 n 次多项式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，其 n 个根 $x_1,\ldots,x_n$ 满足

$$-\frac{a_1}{a_0}=x_1+x_2+\cdots+x_n \tag{1.15}$$

$$(-1)^k\frac{a_k}{a_0}=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} \tag{1.16}$$

$$(-1)^n\frac{a_n}{a_0}=x_1x_2\cdots x_n \tag{1.17}$$

即 $a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 的展开式与 $p(x)$ 完全相等. 故有

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{trace}(A) \tag{1.18}$$

推论　若复数 λ 及复向量 $\boldsymbol{x}$ 是实矩阵 A 的特征对，则 $\bar\lambda$ 也是 A 的特征值，且 λ 与 $\bar\lambda$ 的重数相同.

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\iff A\bar{\boldsymbol{x}}=\bar\lambda\bar{\boldsymbol{x}} \tag{1.19}$$

定义　对方阵 A，如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX=\Lambda$ 是对角矩阵，则称 A 在 $\mathbb{C}$ 上**可对角化**的，X 对角化 A，并称分解 $A=X\Lambda X^{-1}$ 为 A 的**谱分解**. 并且 Λ 的对角元素必定为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

定理　对 n 阶方阵 A，A 可对角化，当且仅当 A 有 n 个**线性无关的特征向量**.

$$\left.\begin{aligned}A=X\Lambda X^{-1}\implies AX=X\Lambda\implies Ax_i=\lambda_i x_i\\ x\text{ 可逆}\implies\{x_i\}\text{ 线性无关}\end{aligned}\right\}\implies A\text{ 有 }n\text{ 个线性无关的特征向量}$$

定理

1. A 和 $M=X^{-1}AX$ 具有相同的特征多项式.
2. 方阵特征值的几何重数小于等于其代数重数.

3. 方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明. 考虑将 A 关于 λ_0 的特征向量放在 X 的最左侧几列，则有

$$AX = [\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \ldots, \lambda_0 x_r, \ldots] = XM$$

所以 M 为这样的一个分块矩阵：它的左上角为对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_0)$，左下角为 0.

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(X^{-1}(\lambda_n - A)X) = \det(\lambda I_n - M) \tag{1.20}$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_r - \lambda_0 I_r & I_r - M_{12} \\ 0 & \lambda I_{n-r} - M_{22} \end{bmatrix}\right) = (\lambda - \lambda_0)^r \det(\lambda I_{n-r} - M_{22}) \tag{1.21}$$

第二行推导说明，几何重数为 r，代数重数必定 $\geq r$. □

定义　对方阵 A, B，若存在 X 使 $X^{-1}AX = B$，则称 A, B **相似**. 相似关系是等价关系，有如下不变量：

1. 秩，迹，行列式
2. 特征多项式，特征值
3. 特征值的代数重数、几何重数

定理　两个对角矩阵**相似**当且仅当它们的对角元素除排列次序外相同. 称一个可对角化的矩阵对角化得到的对角矩阵为其**相似标准型**.

引理　对方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{-1}AX = T$ 是上三角矩阵，且对角元素是 A 的 n 个特征值（计重数）.

定理　**(Hamilton-Cayley)** 设方阵的特征多项式为 $p_A(\lambda)$，则 $p_A(A) = O$.

$$p_A(A) = Xp_A(T)X^{-1} = X(\lambda_0 I_n - T)(\lambda_1 I_n - T)\cdots(\lambda_n I_n - T)X^{-1} = 0$$

定义　对于 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 若存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX = \Lambda_1, X^{-1}BX = \Lambda_2$ 都是对角矩阵，则称 A, B 可**同时对角化**. 以下叙述等价

1. A, B 可同时对角化
2. 存在 n 个线性无关的向量，它们同时是 A, B 的特征向量
3. A, B 可交换，即 $AB = BA$

1.6　实对称矩阵