Math Dominates the Universe
数学支配着宇宙

Jingze Xing

Thursday 4th August, 2022

目录

第一章 微积分 A1 ：一元微积分与常微分方程 **4**

1.1 极限 4

1.2 Taylor 展开、Cauchy 中值定理 6

1.3 凸函数 7

1.4 积分 7

1.5 积分的应用 10

1.6 广义积分 11

1.7 常微分方程 11

第二章 微积分 A2 ：多元函数微积分与级数 **13**

2.1 多元函数的连续、可导与可微 13

2.2 （广义）含参积分 16

2.3 重积分 17

2.4 场论初步 (Green, Gauss & Stokes) 17

2.5 常数项级数 20

第三章 线性代数 **22**

3.1 线性映射和矩阵 22

3.2 子空间和维数 24

3.3 内积和正交性 26

第四章 复变函数 **28**

4.1 复变函数 28

4.2 解析函数 29

4.3 复变函数积分 31

4.4 级数 34

4.5 留数 38

第五章 概率论 **41**
5.1 事件的概率 41
5.2 随机变量 42
5.3 联合分布 45
5.4 随机变量的数学特征 47
5.5 不等式与极限定理 50

第六章 随机过程 **52**
6.1 Bernoulli 过程与 Poisson 过程 52
6.2 离散时间 Markov 链 56
6.3 某次课 60

第七章 线性代数 **62**
7.1 基本事实 62
7.2 例题 62

第一章　微积分 A1 ：一元微积分与常微分方程

1.1　极限

1.1.1　基本事实 & 可避免的错误

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$，$\frac{n}{n+1} < \theta < 1$
- Taylor 展开 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，不可忘记除以 $n!$
- **(Leibniz)** 两个函数之积的高阶导数

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

1.1.2　例题

课本 p.57-9(14)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-x^2}) \\
=&\lim_{x\to\infty}(x\sqrt{1+\frac{2}{x}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}) \\
=&\lim_{x\to\infty}(\frac{(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}) - \lim_{x\to\infty}(\frac{(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}) \\
=&2 * \frac{1}{2} - (-1) * \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

《数学分析习题课讲义》2.3.2-6

求证：

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \ (p > 1) \tag{1.1}$$

收敛

证明.

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p} = r$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=r^2$$

$$\therefore S_n \le S_{2^n-1}<1+r+r^2+\cdots+r^n<\frac{1}{1-r}$$

又 $\because \{S_n\}$单调递增 $\therefore \{S_n\}$收敛.

□

习题课 1-1

求证：

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})=\frac{1}{2} \tag{1.2}$$

证明. 该式本质是 n 的多项式

$$\text{let } x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1},\ y_n=(p+1)n^p$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p-n^p)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}n^k}{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}n^k}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p+1}{k}n^k+\frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}}{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k+p(p+1)n^{p-1}}\\
\text{(只考虑最高次项)}\ &=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

习题课 4-6(4)

已知 $f(n)=x^n\ln n$，求 $f^{(n)}(x)$.

解. 直接用 Leibniz 公式会得到复杂的交错和，因此考虑递推.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\left(f'(x)\right)^{(n-1)}=\left(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}\right)^{(n-1)}\\
&=\left(nx^{n-1}\ln x\right)^{(n-1)}+(n-1)!=n\cdot\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n-1)}+n!\frac{1}{n}\\
&=n\cdot\left((n-1)x^{n-2}\ln x+x^{n-2}\right)^{(n-2)}+n!\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-1)\cdot\left(x^{n-2}\ln x\right)^{(n-2)} + n!\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= n(n-1)\cdot\left((n-2)x^{n-3}\ln x + x^{n-3}\right)^{(n-3)} + n!\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= n(n-1)(n-2)\cdot\left(x^{n-3}\ln x\right)^{(n-3)} + n!\left(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= \cdots = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

习题课 4-7

定义

$$P_{n,m}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$$

，求 $P_{n,m}(1)$.

解.

$$
\begin{aligned}
P_{n,m}(1) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x)^n(1+x^2+\cdots+x^{m-1})^n\\
\text{（用 Leibniz 定理展开）} &= (-1)^n n!\cdot m^n
\end{aligned}
$$

*$(1-x)^n$ 求至少 n 阶导数才非 0.

微积分 A 期中讲座

定义 $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = \sin a_n$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n^2 = 3$.

证明. 用 stolz 定理表现类等差数列 $\frac{1}{a_n^2}$ 公差趋向 $\frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2 a_n}{a_n^2\sin^2 a_n}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))(x+x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^4} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

1.2 Taylor 展开、Cauchy 中值定理

课本 p.125-10

设函数 $y = f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，$f''(0) \neq 0$. $\forall x \in (-1,1), x \neq 0$，$\exists\ \theta(x)$ 满足 $f(x) - f(0) = xf'(x\cdot\theta(x))$，证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$

证明. 用 Cauchy 中值定理将 $\theta(x)$ 分离出来.

$$\begin{aligned}
f^{''}(\zeta_x)\cdot\theta(x)x &= f^{'}(x\cdot\theta(x)) - f^{'}(0) \\
f^{''}(\zeta_x)\cdot\theta(x)x &= \frac{f(x)-f(0)}{x} - f^{'}(0) \\
\theta(x) &= \frac{1}{f^{''}(\zeta_x)}\cdot\frac{f(x)-f(0)-f^{'}(0)x}{x^2} \\
&= \frac{1}{f^{''}(\zeta_x)}\cdot\frac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{2x} \\
&= \frac{f^{''}(0)}{2f^{''}(0)} = \frac{1}{2}\ (x\to 0)
\end{aligned}$$

□

习题课 6-2-1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f^{''}(\xi)$$

证明. 令 $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

则 $\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = g'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}$

而 $f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$

故 $g'(\eta)=\frac{1}{2}f''(\xi)$ □

1.3 凸函数

- 开区间上的凸函数连续，闭区间上的凸函数未必连续
- 开区间上的凸函数处处存在两个单侧导数，且对于下凸函数，满足 $f'_-(x)\le f'_+(x)$，但是导数不一定存在

1.4 积分

1.4.1 基本定理

- $f(x)$ 在 J 上非一致连续 $\iff$
  $\exists\varepsilon_0>0,\ x_n,x'_n\in J$, 满足 $|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n)-f(x'_n)|>\varepsilon_0,\forall n\ge 1$
- 有界闭区间上的连续函数、单调函数黎曼可积，可积必有界

- **(Lebesgue)** $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 可积 $\iff$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集为零测集
- **(Cauchy-Schwarz)**
$$\left(\int_a^b f\cdot g\right)^2 \le \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$
- **(积分中值定理)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
- 可积函数 $f(x)$ 的变上限积分 $g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 连续，且若 $f(x)$ 在 x_0 处**连续**，即有 $g'(x_0)=f(x_0)$
- 导函数不一定可积，如：
$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2}), & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$
其中 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界，不可积.

1.4.2 常见不定积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$
$$\int\frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{a}})+C$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int\frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}|+C$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C$$
$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x &= \int\sqrt{\sec^2 t-1}\mathrm{d}(\sec t) = \int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\mathrm{d}t = \int\frac{\sin^2 t\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^4 t} \\
&= \int\frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2}\mathrm{d}u = \int\frac{1}{4}\left(\frac{u}{(1-u)^2}-\frac{u}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(1-u)^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}+\ln\frac{1-u}{1+u}\right)+C \\
(u=\sin t) \quad &= \frac{\sin t}{2\cos^2 t}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin t}{\cos t}+C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\cos t = \frac{1}{x}) \qquad & = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{x^2-1}) + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \qquad & = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\
J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x \qquad & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\mathrm{d}(\sin x) = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x \mathrm{d}x \\
& = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \\
& \Longrightarrow J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2} \Longrightarrow J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}
\end{aligned}
$$

1.4.3　例题

Lijun Yang: Nov.18 P25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f(a)=0$. 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

证明.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t \\
f^2(x) &= \left(\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\
(\text{Cauchy}) &\le \left(\int_a^x 1\cdot \mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t\right) \\
&\le (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t \\
\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x &\le \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

□

习题课 8-4-4.4

设 $k,n\in\mathbb{Z}_+$，求证：

$$\int_0^\pi \cos nx\cos kx\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k=n \\ 0, & k\ne n \end{cases} \tag{1.3}$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos nx\cos kx &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((n+k)x)+\cos((n-k)x))\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n+k)x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-k)x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}[n=k]\end{aligned}$$

□

1.5　积分的应用

- 极坐标下的面积
$$S=\int_a^n\frac{1}{2}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$
- 弧长
$$|\Gamma|=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$$
- 极坐标下曲线的弧长
$$|\Gamma|=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$
- 曲率
$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{[x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$
或
$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
REMARK: 圆的曲率为 $\frac{1}{R}$
- 绕 x,y 轴的旋转体体积
$$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)\mathrm{d}x, V_y=\int_a^b 2\pi x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$
- 绕 x,y 轴的旋转体表面积
$$S_x=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x, S_y=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$$
- 曲线的形心（质量均匀时即为质心）
$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}{\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}, \bar{y}=\frac{\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}{\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}$$

- 平面图形的形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}t}, \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}f^2(x)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}t}$$

- (Guldin,I,II)
  - 曲线绕直线旋转所得的旋转面的侧面积，等于曲线的弧长，乘以形心绕直线旋转一周的周长
  - 封闭图形绕直线旋转所得的旋转面的体积，等于图形的面积，乘以形心绕直线旋转一周的周长

1.6　广义积分

1.6.1　定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有唯一瑕点 b，且 $\forall b' \in (a,b)$，$f(x)$ 在 $[a,b')$ 上可积，则 $f(x)$ 在该区间上**内闭可积**.

1.6.2　Dirichlet 判敛

设有：

1. $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上**内闭可积**，且存在 $M>0$，使得 $|\int_a^{b'} f(x)\mathrm{d}x| < M, \forall b' \in [a,b)$
2. $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上**单调**且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

1.6.3　Abel 判敛

设有：

1. $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上**内闭可积**，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
2. **(ii)** $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上**单调有界**

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

1.7　常微分方程

1.7.1　常数变易法

1. 求解 $f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$,

2. 先解 $f'(x)+p(x)f(x)=0$，得 $f(x)=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$

3. 进一步设原方程解为 $f(x)=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$

4. $C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$

5. $f(x)=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}+C)$

1.7.2 特殊可降阶高阶常微分方程

方程中不显含自变量 x，可以表示为 $F(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2})=0$.

令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

，问题转化为函数 p 关于自变量 y 的一阶常微分方程 $F(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})$.

1.7.3 二阶线性常系数齐次方程

设 p,q 为实常数，则对常微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

，称 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 为特征方程，令 $\Delta=p^2-4q$，设方程的根为 $\lambda_{1,2}$.

- $\Delta>0$，$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
- $\Delta=0$，$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$
- $\Delta<0$，有二虚根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

1.7.4 Euler 方程

设 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 为实常数，则方程

$$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=0$$

称为 **Euler 方程**，一般作变量替换 $t=\log|x|$ 将方程化为以 t 为自变量的常系数方程，第 k 项转化为：

$$\begin{aligned}a_kx^ky^{(k)}&=a_kx^k\cdot\boldsymbol{y}(t(x))^{(k)}\\&=a_kx^k\cdot(\boldsymbol{y}'(t)\cdot\frac{1}{x})^{(k-1)}\\&=a_kx^k\cdot(y''(t))^{(k-2)}\\&=\ldots\end{aligned}$$

第二章　微积分 A2 ：多元函数微积分与级数

2.1　多元函数的连续、可导与可微

2.1.1　基本定理

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续 $\iff$
  动点 (x,y) 以任意路径趋向 (x_0,y_0) 时的极限全部等于 $f(x_0,y_0)$

- $f(x,y)$在(x_0,y_0)可微 $\iff$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

- 函数是否连续与偏导数是否存在无关

- 函数可微 $\implies$ 偏导数存在
  偏导数连续 $\implies$ 函数可微
  o 邻域上偏导数有界 $\implies$ 函数可微
  邻域上偏导数只有一个不一致连续 $\implies$ 函数可微

- 梯度的定义

$$\mathrm{grad}f(\boldsymbol{X}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{X}_0}$$

- $\boldsymbol{J}(f\circ g)=\boldsymbol{J}(f)\cdot\boldsymbol{J}(g)$（一阶微分形式不变）
  $\mathrm{d}f(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{X}$

- 多元隐函数的偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{X},y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{X},y)}$$

- 向量值隐函数的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{X})=\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=-\left(\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

理解：记 $G_k(\boldsymbol{X}) = f_k(\boldsymbol{X}, y_1(\boldsymbol{X}), \ldots, y_m(\boldsymbol{X})) \equiv 0$

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}+\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{\partial(G_1,\ldots,G_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=0$$

- 隐函数的逆映射：对于 $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{x}), f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，当 $\det(\boldsymbol{J}f(X_0))$ 非零时，有：

$$\boldsymbol{J}f^{-1}(Y_0) = [\boldsymbol{J}f(Y_0)]^{-1}, Y_0 = f(X_0)$$

★ Taylor 展开

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^k f(x_0,y_0)+o\left((\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^n\right)$$

★**（多元函数的中值定理）**设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 C^1 函数，则 $\forall a,b\in\Omega$，$\exists\,\theta\in(0,1)$，s.t.

$$f(b)-f(a)=\nabla f(a+(b-a)\theta)\cdot(b-a)$$

* 定理不能推广到向量值函数的情形

2.1.2 极值与条件极值

★ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极值的条件

（必要）$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$（极值点必为驻点）

（必要）$H(x_0,y_0)$ 非不定

（充分）$H(x_0,y_0)$ 正定（极小值）或负定（极大值）

（充分）在 (x_0,y_0) 的某个邻域上 $H(x_0,y_0)$ 半正定（极小值）或半负定（极大值）

- **（条件极值的必要条件）**设原问题的 Lagrange 函数对应无约束问题 max(min) $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$，则原问题的每个解必然对应着无约束问题的一个驻点。即答案必然在无约束问题的驻点中

2.1.3 几何应用

- 平面及其法线（直线及其法平面）公式
  记 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处法线方向向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则法线为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面使得 $\vec{P_0P}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，即点积为零

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

因此，只要求出法线方向向量即可快速表达法线及切平面

- 空间曲面的表达方式及法向量

∘ 空间曲面可以看做是二维空间到三维欧氏空间投影的像，故可以用以 x, y 为自变量确定 z 的隐函数方程表示

$$F(x,y,z)=0, \vec{n}=\mathrm{grad}F(P_0)$$

由于沿任何**在该点切平面内的**方向向量都使函数值保持不变，故均与梯度垂直，即梯度为法向量，表示函数 $F(x,y,z)$ 变化最快的方向.

∘ 借助辅助变量 $P=(u,v)$ 表示

$$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad \text{注意：这与 } F(x,y,z)=0 \text{ 完全不同}$$

化曲为平，切平面的参数方程：$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\\ z'_u & z'_v\end{pmatrix}_{P_0}\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}$

- 空间曲线的表达方式及切向量

∘ $\mathcal{L}:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(y)\end{cases}\quad \vec{n}=(x'(t),y'(t),z'(t))$

∘ $\mathcal{L}:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 曲线可以视作**两空间曲面的交**，其**切线**为两**切平面的交**，即**垂直于**两个**法向量**，因而可用叉积确定 $\vec{n}=\mathrm{grad}F(P_0)\times\mathrm{grad}G(P_0)$

2.1.4 例题

课本 p.66-3(4)

以下方程确定了 $z=f(x,y)$：$\begin{cases}x=u\cos v\ (\bigstar)\\ y=u\sin v\ (\star)\\ z=v\end{cases}$，计算：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解.

将 x, y 视为自变量，将 u, v 视作 $u=\boldsymbol{u}(x,y), v=\boldsymbol{v}(x,y)$，则

$$z=\boldsymbol{z}(u,v)=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u}(x,y),\boldsymbol{v}(x,y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{对 }(\bigstar)\text{ 与 }(\star)\text{ 两边依次求 } x, y \text{ 的偏导}$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos v - u\frac{\partial v}{\partial x}\sin v$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\sin v + u\frac{\partial v}{\partial x}\cos v$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}\cos v - u\frac{\partial v}{\partial y}\sin v$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial y}\sin v + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos v$$

$$\text{从而 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \cos v,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin v}{u}\right) = \frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos v}{u}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sin 2v}{u^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin v}{u}\right) = \frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\cos v}{u}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$$

注：最后仍可用 u, v 表示。

2.2　（广义）含参积分

2.2.1　累次积分

- $f(x, y)$ 在有界闭域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上连续 $\implies$ $f(x, y)$ 在 Ω 上**一致连续**.
- **（积分号下可求极限）** $f(x, y)$ 为矩形有界闭域 D 上的**连续函数**时，积分运算和极限运算可以交换顺序.
- **（积分号下可求导）** 设 $f(x)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上**连续**，则

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]\mathrm{d}x$$

  若要将 b 改为 $+\infty$，则需等式右侧的积分关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.
- **（积分号下求积分公式）** $f(x, y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上**连续**，则

  $$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$$

  若要将 b 改为 $+\infty$，则需 $\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

2.2.2　广义积分

- **（连续性定理）** 设 $f(x)$ 在 $[a, \infty) \times K \subset \mathbb{R}^2$，其中 K 为某一区间。那么，若广义含参积分

  $$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

  关于 $y \in K$ 一致收敛，则 $J(y)$ 在区间 K 上连续.

2.2.3 例题

课本 p.110-5(2)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

2.3 重积分

2.3.1 基本定理

- 若 $f(x, y)$ 在闭矩形域 K 上可积，则它在 K 上有界.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集合，则 D 有面积 $\iff$ ∂D 为零测集.
  一个平面集合不可求面积与面积为零是两回事.
- **（平面变换的面积公式）**当 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ **可微、正则且一一对应**时，面积微元
  $$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
  体积微元的变换类似.
- 球坐标系体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，$\varphi$ 为 $\vec{r}$ 与 z 轴的夹角.
  柱坐标系体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
- **Euler-Poisson 积分**
  $$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ I^2 &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r \quad \text{（注意 } x, y > 0 \text{ 对应的 } \theta \text{ 范围）} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\ I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

2.4 场论初步 (Green, Gauss & Stokes)

2.4.1 曲线积分与曲面积分

- **（第一型曲线积分）**设曲线 C 有正则参数表达 $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$，则
  $$\int_C f(x, y, z)\mathrm{d}l \triangleq \int_a^b f(r(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

- **（第二型曲线积分）**设向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=(M(\dots),N(\dots),P(\dots))$，$C^+$ 有正则表示 $r(t)=(x(t),y(t),z(t)),t:a\to b$，则

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{r} &\triangleq \int_C \mathbf{F}\cdot\tau \mathrm{d}l && \text{定义}\\ &=\int_C \mathbf{F}(r(t))\cdot r'(t)\mathrm{d}t && \text{计算公式}\\ &=\int_C [Mx'(t)+Ny'(t)+Pz'(t)]\mathrm{d}t && \text{内积展开}\\ &=\int_C M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y+P\mathrm{d}z && \text{上式的缩写}\end{aligned}$$

- **（第一型曲面积分）**设曲面 S 有正则的参数表示 $r=r(u,v),(u,v)\in D$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \triangleq \iint_D f(r(u,v))|r_u\times r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

对显式曲面 $z=z(x,y)$，面积微元为 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$

- **（第二型曲面积分）**设向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=(M(\dots),N(\dots),P(\dots))$

$$\begin{aligned}\iint_{S^+}\mathrm{d}\vec{S} &\triangleq \iint_S (\mathbf{F}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S\\ &=\iint_D \mathbf{F}(r(u,v))\cdot(r_u\times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为面积微元 $\mathrm{d}S$ 在 xy 平面上的投影
现考虑其中一个分量，若 S^+ 正法向向上，D 为 S 在 xy 平面上的投影，则

$$\iint_{S^+} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_D R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将第二型曲面积分转换为二重积分.

- 为什么 $\mathrm{d}\vec{S}=(r_u\times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$：
S 在 (u,v) 对应的点处近似于平行四边形的小平面，该平面的两条邻边分别为 $r_u\mathrm{d}u$ 与 $r_v\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}\vec{S}$ 即对应该小平面的有向面积

2.4.2　向量场

- **散度 (divergence)**：表征在某点处的单位体积内散发出来的矢量的**通量**

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **旋度 (curl)**：表示三维向量场对某一点附近的微元造成的**旋转程度**，旋度向量的方向表示向量场在这一点附近**旋转度最大的环量的旋转轴**

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

- **单连通 (simply connected)**：Ω 中的任意一条简单闭曲线都可以**连续地在 Ω 中**收缩成一点.

- 几种特殊的场：

  – **（保守场）**$L(A,B)$ 逐段光滑，则 $\int_{L(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，只与起终点有关.
  等价表述：对 D 内任意一条逐段光滑的封闭曲线 l_+,

$$\oint_{l_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

  – **（梯度场）**$\mathbf{F} = \nabla u = (u_x, u_y, u_z)$，且 u 与 $\mathbf{F}$ 的定义域相同.

  – **（无旋场）**$\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$，二维平面上，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

  保守场 $\iff$ 梯度场 $\Longrightarrow$ 无旋场（对二维、三维欧氏空间均成立）
  无旋场 & 平面单连通区域 $\iff$ 保守场

- 设 D 为单连通有界闭域，$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，则任两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in D$，

$$\int_{L(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(x,y)\Big|_A^B$$

- **（Green 定理）**在平面有界闭区域 D 上，对于向量场 $\mathbf{F}$，沿闭路 ∂D^+ 的环量（通量）等于闭域 D 上各点旋度（散度）的积分.

  – 环量 (circulation) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{\tau})\mathrm{d}l = \iint_D \mathrm{rot}\mathbf{F}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  – 通量 (flux) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n})\mathrm{d}l = \iint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  更一般的，可以记为

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- （**Gauss 定理**）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间有界闭域，$\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 为 Ω 上的连续可微向量场，则

$$\iint_{\partial\Omega^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n})\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} (\mathrm{div}\mathbf{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- （**Stokes 定理**）设 S^+ 是空间中的一个定向曲面，分片正则，∂S^+ 为分段正则的空间闭曲线，S^+ 与 ∂S^+ 定向协调，则

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{S^+} \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}S$$

2.5 常数项级数

2.5.1 非负项级数的收敛性

- （**Cauchy 积分判敛法**）设 $f \in C[1, +\infty]$ **非负递减**，$u_n = f(n)$，则
  $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 收敛 $\iff$ $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

- 设 $\{u_n\}$ 是非负递减数列，则
  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n u_{2^n}$ 敛散性相同

- （**根值判敛法**）若对正项级数 $\{u_n\}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

  若 $\rho < 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

  若 $\rho > 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

  此外，将极限分别更换为上极限与下极限，也有类似的结果

- （**Raabe 判敛法**）若存在 $\rho > 1$，使得当 n 足够大时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq \rho$$

  则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.
  若 n 充分大时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$

  则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

- （**Leibniz 定理**）若交错项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ 满足 $\{u_n\}$ 非负递减，则该级数收敛，且 $S \leq u_1$.

2.5.2 任意项级数的收敛性

- （**Dirichlet 判敛法**）若 $\sum_{i=1}^{n} u_n$ 有界，v_n 单调趋近于 0，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛
- （**Abel 判敛法**）若 $\sum_{i=1}^{n} u_n$ 收敛，v_n 单调有界，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛、
- 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\iff$ $\sum_{i=m}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛
  其中 m 为充分大的正整数

2.5.3 函数项级数的收敛性

- （**Weierstrass**）若存在非负常数项级数，使得集合 I 上，

$$|u_n(x)| \leq M_n, n=1,2,\ldots;\ x \in I$$

  且 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

- （**Dirichlet 判敛法**）若有：
  - $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ **单调**，且在 I 上**一致趋于 0**
  - 部分和数列 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ **一致有界**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M, n=1,2,\ldots;\ x \in I$$

  则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛

- （**Abel 判敛法**）若有：
  - $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ **单调**，且在 I 上**一致有界**，即

$$|v_n(x)| \leq M, n=1,2,\ldots;\ x \in I$$

  - $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 在 I 上**一致收敛**

  则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛

第三章　线性代数

3.1　线性映射和矩阵

3.1.1　线性映射

定义　线性运算指向量的加法与数乘。

定义　向量空间为带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$ 被称为向量空间。

定义　映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 若满足

1. 任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x'})$
2. 任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, 都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

则 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 线性映射。

定义　从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为线性变换.

定义　若线性映射 f 有 $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^m$，则矩阵 $A = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ 即为标准坐标向量下的 线性映射的表示矩阵，且满足 $A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a_i}$。

定理　（线性映射的线性运算）若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $k\boldsymbol{A}$ 也是同样范畴上的线性映射。

定理　$\boldsymbol{AB}$ 表示线性映射 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的复合 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$。需要注意，$\boldsymbol{AB} = 0$ 也不能推出 $\boldsymbol{A} = 0$ 或 $\boldsymbol{B} = 0$。

理解　矩阵乘法 $A\boldsymbol{x}$ 视为这样一种运算：按照 $\boldsymbol{x}$ 指定的系数，将 $\boldsymbol{A}$ 的列进行线性组合。

定义　反对称矩阵：$A = -A^T$，反对称矩阵对角线必定为 0。

定义 若一个上三角矩阵对角线上全为 0，则称为**严格上三角矩阵**。

定义 将阶梯形矩阵，从下向上消元，并单位化**主元**，得到的矩阵每个非零行上，主变量为 1 而其他列的元素均为 0，称这个矩阵为 **行简化阶梯形矩阵**。

定理 对于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = trace(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T)$。

3.1.2 线性方程式组

定理 对于方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，将 $[A\ \boldsymbol{b}]$ 简化为阶梯型后，若

1. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数比 A 多 **1**，则方程组无解（$0 \neq 1$）
2. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数与 A 相等，则方程组有解
   (a) 若阶梯数等于未知数个数，则有唯一解
   (b) 若阶梯数小于未知数个数，则有无穷多组解

定义 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 称为**齐次线性方程组**，$\vec{0}$ 为其**平凡解**，除此之外的解称为**非平凡解**。

3.1.3 可逆矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则 A 为 **可逆矩阵** 或 **非奇异矩阵**，B 为 A 的逆。

定理 以下命题等价

1. A 可逆
2. 任意 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解唯一
3. 其次方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 仅有零解
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵是 I_n
6. A 能表示为有限个初等矩阵的乘积（即消元至行简化阶梯形矩阵的逆过程）

定义 若矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$,则称其为 **（行）对角占优矩阵**。

定理 对角占优矩阵必然可逆。

定义 若矩阵 A 通过若干初等**行变换**可以变为矩阵 B，则称 A, B **左相抵**。即存在可逆矩阵 P，使得 $PA = B, A = P^{-1}B$。所有和 A 相抵的矩阵中，最简单的是其行简化阶梯形，它被称

为 A 的**左相抵标准形**。

定理　左相抵构成等价关系。

定理　**(Sherman-Morrison)** 设 A 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 为 n 阶向量，则 $A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 可逆 $\iff 1 + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$，且此时

$$(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T A^{-1}}{1 + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{3.1}$$

若将 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 改为 $n \times k$ 的矩阵，则类似地有

$$(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\boldsymbol{u}(I_k + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{v}^T A^{-1} \tag{3.2}$$

3.1.4　LU 分解

定理　若 n 阶方阵 A 仅通过倍加矩阵做行变化即可化为阶梯形，则存在**单位下三角矩阵**（主对角线均为 1）L 与上三角矩阵 U，使得 $A = LU$，此即 **LU 分解**。

定义　方阵 A 左上角的 $k \times k$ 块为第 k 个**顺序主子阵**。

定理　可逆矩阵 A 存在 LU 分解，当且仅当 A 的所有顺序主子阵均可逆，此时 LU 分解唯一。（满足在消元过程中不需要行的调换）

定理　若可逆矩阵 A 存在 LU 分解，则存在对角线均不为 0 的对角矩阵 D、单位下三角矩阵 L、单位上三角矩阵 U，满足 $A = LDU$，且该分解**唯一**。此即 **LDU 分解**。

定理　若可逆对称阵 A 有 LDU 分解，则 $L = U^T$。

定理　可逆矩阵 A 存在分解 $A = PLU$，P 为置换矩阵，显然该分解不唯一。

技巧　将 A 分解成对称阵 $X = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 与反对称阵 $Y = \frac{1}{2}(A - A^T)$。

3.2　子空间和维数

3.2.1　基本概念

定义　映射 $A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的**像集**

$$\mathcal{R}(A) = \{A\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m \tag{3.3}$$

显然 $\mathcal{R}(A)$ 必是子空间，即 A 的**列（向量）空间**。

命题　$\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m \iff A$ 为满射。

定义　映射 $A:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的**原像**

$$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\in\mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

显然 $\mathcal{N}(A)$ 必是子空间，即 A 的**零空间（也称解空间）**。

命题　$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{0}\} \iff A$ 是单射 $\iff \forall \boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2,\ A(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\neq 0$。

定义　将 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 的全体线性组合为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，记为

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n):=\{k_1\boldsymbol{a}_1,\dots,k_n\boldsymbol{a}_n|k_1,\dots,k_n\in\mathbb{R}\} \tag{3.5}$$

定理　$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

3.2.2　基和维数

定义　向量组 S 的任一**极大线性无关组**中向量的个数称为 S 的**秩 (rank)**；子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基的向量数目称为**维数**，记为 $\dim\mathcal{M}$。

定理　**（基存在定理）**给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}\neq\{0\}$，则 $\mathcal{M}$ 存在一组基，且基向量个数不超过 m。

定理　**（基扩充定理）**若 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能够**扩充**成 $\mathcal{N}$ 的一组基。

定理　对于方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A$ 可逆 $\iff A$ 是单射 $\iff A$ 是满射。

3.2.3　矩阵的秩

定义　执行 Gauss 消去法将矩阵化为阶梯型后，主元所在的列对应主变量的系数，称为**主列**；其他列对应自由变量的系数，称为**自由列**。

定理　若矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$ 左相抵，则

1. 部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\dots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{b}_{i_1},\dots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 线性无关。
2. $\boldsymbol{a}_j=k_1\boldsymbol{a}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_{i_r} \iff \boldsymbol{b}_j=k_1\boldsymbol{b}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_{i_r}$

二级结论

- $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\right)\leq \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}A & X\\ O & B\end{bmatrix}\right)$。因而当 A,B 可逆时，上述两个分块矩阵都可逆
- $\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$
- $\mathrm{rank}(AB)\leq \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$
- 反对称矩阵的秩必定是偶数
- $\mathcal{R}(AB)\subseteq \mathcal{R}(A)$

定义　$\mathcal{R}(A^T)$ 为 A 的**行（向量）空间**；$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$；$\mathrm{rank}(A)=n$ 定义为**列满秩**，同理有**行满秩**。

定理　对于 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，

- A 是满射 $\iff$ A 行满秩
- A 是单射 $\iff$ A 列满秩

定义　通过行列初等变换，能将矩阵 A 变换为**相抵标准型** $\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$。

3.2.4　线性方程组的解

方法　（求零空间的一组基）矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，求其行简化阶梯形，考虑依次将各个自由元取为 1，同时维持其他自由元为 0（即只让其中一个自由列在线性组合中系数非零），由于主列都是单位向量，从而容易根据自由列的系数计算出零解。这样求出的解（由于自由元的取值特点）构成零空间的一组基，继而有 $\dim\mathcal{N}(A)=n-\mathrm{rank}(A)$。

3.3　内积和正交性

定义　$\boldsymbol{b}$ 向 $\boldsymbol{a}$ 的**垂直投影** 为 $\hat{x}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$；向量 $\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 向直线 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a})$ 的投影。

定理　**（Cauchy-Schwarz 不等式）** $|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}|\leq\|a\|\|b\|$。

定义　设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，若它的一组基是**正交向量组**，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**正交基**；若是**正交单位向量组**，则称为 $\mathcal{M}$ 的**标准正交基**。

定义　**（Gram-Schmidt 正交化）**从 $\mathcal{M}$ 的任意一组基 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ 出发，执行如下操作

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_k=\boldsymbol{a}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^T\boldsymbol{a}_k}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^T\widetilde{\boldsymbol{q}}_j}\widetilde{\boldsymbol{q}}_j\quad(k=1,2,\ldots,r)\tag{3.6}$$

即得到一组正交基。

3.3.1　正交矩阵和 QR 分解

定义　若方阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 为 n 阶正交矩阵；Q 的行、列向量各自构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。

定理　方阵 Q 的以下叙述等价

1. Q 是正交矩阵
2. Q 为保距变换，即 $\|Q\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
3. Q 为保内积变换，即 $Q\boldsymbol{x} \cdot Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

保距变换一定也是保角变换。

第四章　复变函数

4.1　复变函数

4.1.1　函数的定义

给定 $G \in \mathbb{C}$ 及从 G 到 $\mathbb{C}$ 的对应法则 f，满足 $\forall z = x + iy \in G$，都有一个或多个 $\omega = u + iv \in \mathbb{C}$ 与之对应，则称 ω 为关于 z 的函数。

4.1.2　极限的定义

设 $\omega = f(z)$ 在 $B_{\varphi}^{*}(z_0) \triangleq \{z \in \mathbb{C} \big| 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 上有定义，若 $\exists A \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \mathrm{s.t.} 0 < |z - z_0| < \delta \to |f(z) - A| < \varepsilon$，则称 $z \to z_0$ 时，$f(z)$ 以 A 为极限。**注意这意味着沿任意路径逼近得到的极限都是** A。

4.1.3　连续性的定义

若 f 在实心邻域 B_{φ} 上有定义，且 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 连续。

1. 连续函数的和、差、积、商仍是连续函数
2. 设 $g = g(z)$ 连续，$\omega = f(g)$ 在 $g_0 = g(z_0)$ 处连续，则 $\omega = (g \circ f)(z)$ 在 z_0 连续。
3. 闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的连续函数一定能在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上取到最小（大）模长。

4.1.4　区域、曲线的定义

点集 $\mathscr{D}$ 称为一个**区域**，如果它是一个开集 且它连通。没有重点的连续曲线称为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**；若仅有曲线起点与终点重合，则为**简单闭曲线**，曲线以逆时针为正向。若一个区域内任意一条闭曲线的内部都属于该区域，那么该区域为**单连通域**。

4.1.5　复数的辐角

对于 $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$，定义$\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ 为辐角的主值；$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为负数的辐角函数。

4.2 解析函数

4.2.1 导数的定义

若极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在且有限，则 $f(z)$ 在 z_0 可导。

4.2.2 可微与微分

若 $\omega=f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有表达式

$$\Delta\omega=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\mathscr{A}\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z \tag{4.1}$$

$$\mathscr{A}\in\mathbb{C},\ \lim_{|z_0|\to 0}\rho(z)=0 \tag{4.2}$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 可微，$\mathscr{A}\Delta z$ 称为 $f(z)$ 在 z_0 的微分，记为 $\mathrm{d}\omega=\mathscr{A}\Delta z=f'(z_0)\mathrm{d}z$。

函数在一点可导和可微是等价的。

4.2.3 解析函数（或全纯函数、正则函数）

$\forall z_0\in\mathbb{C}$，若 $\omega=f(z)$ 在 z_0 的**某邻域内处处可导**，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析，z_0 为解析点；否则 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。注意可能函数在某一点可导，在其任意邻域上均不可导。在整个 $\mathbb{C}$ 上都解析的函数称为整函数。

★Lemma

1. 两个解析函数的和、差、积、商仍是解析函数
2. 设 $g=g(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，$\omega=f(g)$ 在 $g(\mathscr{D})$ 上解析，则 $\omega=(f\circ g)(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析。

4.2.4 函数可导的充要条件

Cauchy-Riemann 方程：设 $z=x+iy\in D,\omega=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 z 可导的充要条件 是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x,y) 可微 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.3}$$

导数为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.4}$$

形式导数：用形式变元 $z,\bar{z}$ 表示 x,y，则 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})\end{cases}$，则 $\begin{cases}x_z=x_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\\ y_z=-y_{\bar{z}}=\frac{1}{2i}\end{cases}$ 进而可以求出 $u_z,u_{\bar{z}},v_z,v_{\bar{z}}$，可以发现

$$f_z=u_z+iv_z=\frac{1}{2}(u_x+u_y)+\frac{i}{2}(v_x-u_y) \tag{4.5}$$

$$f_{\overline{z}} = u_{\overline{z}} + iv_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x) \tag{4.6}$$

注意到 $f_{\overline{z}} = 0 \iff f$ 满足柯西-黎曼方程。

4.2.5 初等函数

指数函数

定义指数函数为

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{4.7}$$

该函数为整函数，$\exp z' = \exp z$，周期为 $2k\pi i$，值域为 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$，满足 $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2$，$|\exp z| = e^x$，$\arg(\exp z) = y$。

对数函数

定义为指数函数的反函数，即

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z), \mathrm{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i \tag{4.8}$$

，导数 $\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}$。

幂函数

定义幂函数为

$$z^b \triangleq \exp(b\cdot \mathrm{Ln}z) = e^{b\ln z}\cdot e^{2bk\pi i}, k\in\mathbb{Z} \tag{4.9}$$

多值性讨论

- $b\in\mathbb{Z}$, $e^{2bk\pi i}\equiv 1$，单值
- $b\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $e^{2k\pi i\frac{m}{n}}$，n 值
- $b\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $e^{2(bk)\pi i}$ ，无穷多值
- $b\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $e^{2(\alpha+i\beta)k\pi i} = e^{-2\beta k\pi}\cdot e^{2\alpha k\pi i}$，仅模长部分便有无穷多值

取同一个第 k 支的情况下有 $(z^b)' = bz^{b-1}, z^{a+b} = z^a\cdot z^b, z^{-a} = \frac{1}{z^a}$

三角函数

根据指数函数的定义进行“逆推”，有

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{4.10}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{4.11}$$

$\sin z$ 与 $\cos z$ 都是整函数，导数性质、和角公式与实数下相同。注意该函数**无界**。

4.3　复变函数积分

4.3.1　积分的计算

设 $f(z)$ 沿 C 连续，弧上第 k 段取点 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$，记 $\delta = \max\{|\Delta x_k + i\Delta y_k|\}$。

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n}[u(\xi_k + i\eta_k) + iv(\xi_k + i\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}[(u\Delta x_k - v\Delta y_k) + i(u\Delta y_k + v\Delta x_k)] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\delta\to 0} \int_c [(u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i(u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x)] \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3.2　积分的性质

积分的复共轭：

$$\overline{\int_c f(z)\mathrm{d}z} = \int_c \overline{f}(z)\overline{\mathrm{d}z} \tag{4.13}$$

若曲线 C 上有 $\left|f(z)\right| \le M(< +\infty)$，$C$ 的弧长为 L，则

$$\left|\int_c f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML \tag{4.14}$$

（积分控制）。

一个重要的积分 $(n \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} I_n &= \oint_c \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi i[n=0] \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3.3　柯西-古萨 (Cauchy-Goarsat) 定理

若函数 $f(z)$ 在**单连通区域** $\mathscr{B}$ 内**处处解析**，那么函数 $f(z)$ 沿 $\mathscr{B}$ 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为 0。

一种不严谨的理解：基于(4.12)，使用格林公式，以实部为例，变为 $\iint_D(-u_y - v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。若处处解析，则处处满足柯西-黎曼方程，故 $u_y = -v_x$，因此实部被积变量恒为 0。虚部同理。（由于 u, v 不一定有一阶**连续**偏导数，故不一能使用 Green 公式。）

4.3.4　复合闭路定理

连续变形原理

在区域内一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内做连续变形而改变它的值。

复合闭路定理

设 Jordan 闭曲线 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-+\cdots+\gamma_n^-$ 围成一个 (n+1)-连通区域 $\mathscr{D}$，$\omega=f(z)$ 在其上解析，在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，则 $\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$。

4.3.5 原函数与不定积分

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，定义原函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

，则 $F(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，且 $F'(z)=f(z),\forall z\in\mathscr{D}$。原函数可以有多个，但它们的差恒为常数。

Newton-Leibniz 定理

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1}f(z)\mathrm{d}z=G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}\tag{4.16}$$

分部积分公式

设 $\omega=f(z),\sigma=g(z)$ 在单连通域 D 上解析

$$\int_{z_0}^{z_1}f'(z)g(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1}-\int_{z_0}^{z_1}f(z)g'(z)\mathrm{d}z\tag{4.17}$$

三个等价命题

设 $\omega=f(z)$ 在 n-连通区域 D 上解析，则

(1) $\forall C\subseteq D$ 有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$

(2) $f(z)$ 在 D 上有积分路径无关性

(3) $f(z)$ 在 D 上有原函数

等价，且任意一条成立，牛顿-莱布尼茨定理即可使用。

4.3.6 Cauchy 积分公式

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 D 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则 $\forall z_0\in D,C\subseteq D$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\tag{4.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{4.20}$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\iint_{|z-z_0|\le R} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.21}$$

4.3.7 高阶导数

定理：解析函数 $f(z)$ 的**任意阶导数**仍为解析函数，其 n 阶导数满足

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{4.22}$$

其中 C 为围绕 z_0 的任意一条**正向**简单闭曲线，且 C 在单连通的解析区域 $\mathscr{D}$ 上。

莫雷拉 (Morera) 定理（柯西定理的逆定理）

若 $f(z)$ 在**单连通区域** $\mathscr{D}$ 内**连续**，且沿 $\mathscr{D}$ 内任意闭合曲线积分为 0（**路径无关**），则 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析。（在任意一个解析函数上修改一个点，函数仍然路径无关，因此连续是必要的。）

4.3.8 代数基本定理

$P_n(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n \neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个零点（记重数）。

只要证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+, P_n$ 存在零点即可（从而可以不断地分离因式降阶）。

刘维尔（Liouville）定理

一个有界的正函数必然是常函数

证明. 设 $|f(z)| < M$，根据(4.22)

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{M}{R^2}\mathrm{d}l = \frac{M}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

故 $f(z_0)$ 为常数 □

代数基本定理证明

假设 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，设 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$，则 $f(z)$ 为整函数。在 $|z| \to +\infty$ 时，显然 $|f(z)| \to \frac{1}{a_n|z|^n} \to 0$ 故存在 R 使得 $\forall |z| > R, f(|z|) < 1$，则在 $\mathbb{C}$ 上，

$$|f(z)| \le \max\{1, \max_{|z|\le R}\{|f(z)|\}\}$$

不等式右侧显然不等于 ∞（有界闭域上连续函数有界），故 $f(z)$ 为常函数，$P_n(z)$ 为常数，这与 $a_n \neq 0$ 矛盾。故 $P_n(z)$ 必有零点。

4.3.9 解析函数与调和函数

调和函数

设 $\varphi=\varphi(x,y)\in C^2(\mathscr{D})$ 且处处有 $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\equiv 0$，则 φ 为 $\mathscr{D}$ 上的调和函数。

设 $\omega=f(z)=u+iv$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，则 u,v 在 $\mathscr{D}$ 上调和。称上述 u,v 为 $\mathscr{D}$ 上的**共轭调和函数**。给出 $\mathscr{D}$ 上调和函数 u，找出其共轭调和函数 $\iff$ 找出解析函数 $f(z)$ 使 $Re\ f(z)=u$。

设 u 为**单连通域**上的调和函数，则必然存在 $f(z)$ 使 $Re\ f(z)=u$。注意多连通情况下不一定正确。

证明. 这样的 $f(z)$ 必定满足 $f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$，$U(z)$ 显然是解析的，故 $f(z)=\int_{z_0}^{z}U(z)\mathrm{d}z$ 即为满足条件的函数。 □

例：$u=x^3-3xy^2$

❝不定积分法

$f'(z)=(3x^2-3y^2)-i(-6xy)=3(x+iy)^2$

$f(z)=\int 3z^2\mathrm{d}z=z^3+c=(x+iy)^3+C=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)+C$

$v(x)=3x^2y-y^3-iC$

由于 $f(z)-u=iv$ 为虚数，故 C 必须为纯虚数。

❝偏积分法

$v_y=u_x=3x^2-3y^2, v_x=-u_y=6xy$

v 先关于 y 积分，即 $v=3x^2y-y^3+g(x)$，则 $v_x=6xy+g'(x)=6xy\implies g(x)=C$

4.4 级数

4.4.1 复数项级数

复数项序列

设 $\{x_i\},\{y_i\}$ 为实数序列，则 $z_n=x_n+iy_n$ 即为复数项序列。

级数

定义 $I=\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{n=0}^{\infty}x_n+i\sum_{n=0}^{\infty}y_n$（不论是否收敛都称为级数），级数的部分和定义为 $S_n=\sum_{k=0}^{n}z_k$。

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A\in\mathbb{C}$，则称 I 收敛
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 I 绝对收敛
3. 若 I 收敛但不绝对收敛，则称 I 条件收敛

复数项级数与常数项级数的关系

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta$ 条件收敛或绝对收敛 $\iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均条件收敛或绝对收敛

敛散判别法

(I) Cauchy 根式判别法

- $\sqrt[n]{|z_n|} < q < 1(\forall n > N)$，则 I 绝对收敛
- 只要满足 $\sqrt[n]{|z_n|} \geq q \geq 1$ 的项有无穷多个，则 I 发散
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$，则 $q < 1$ 时 I 绝对收敛，$q > 1$ 时 I 发散。$q = 1$ 时无法确定，例如 $\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n^2}$ 三者收敛情况均不同

(II) D'Alembert 判别法

- $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < q < 1(\forall n > N)$ 则 I 绝对收敛
- $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq q \geq 1(\forall n > N)$ 则 I 发散
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q$，则 $q < 1$ 时绝对收敛，$q > 1$ 时绝对发散，$q = 1$ 时无法判断

(III) Dirichlet 判别法

4.4.2 幂级数

（复变）函数级数

定义 $\mathscr{D}$ 上的函数列 $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$，其级数为 $I = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$，当 z 固定时 I 就变成常数项级数。

幂级数

形如 $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 或 $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的级数称为幂级数。

1. 若 i 在 z_0 处收敛，则 $\forall z : |z| < |z_0|$，I 在 z 处收敛
2. 若 i 在 z_0 处发散，则 $\forall z : |z| > |z_0|$，I 在 z 处发散

证明. (1)
易知 $\lim\limits_{n\to\infty} |C_n z_0^n|$ 收敛到 0，故其必有 $|C_n z_0^n| < M(\forall n \in \mathbb{N})$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 有界递增（并因此收敛），因此 $I(z)$ 绝对收敛。 □

收敛半径与收敛圆盘

$I=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的<u>收敛半径</u> R 定义为

$$\begin{aligned} R &\triangleq \sup\{|z| : I \text{ is convergent at } z\} \\ &= \sup\{|z| : I \text{ is absolutely convergent at } z\} \\ &= \inf\{|z| : I \text{ is divergent at } z\} \end{aligned}$$

（$R=+\infty$ 时函数级数在 $\mathbb{C}$ 上收敛。）定义 $C_R:|z|=R$ 为收敛圆周，$D_R:|z|\leq R$ 为<u>收敛圆盘</u>，考虑 C_R 上的点属于内外哪一侧：

- $I(z)$ 在 C_R 上处处发散：$I(z)=\sum z^n$
- $I(z)$ 在 C_R 上部分收敛：$I(z)=\sum \frac{z^n}{n}$，C_R 上仅 $z=1$ 处发散
- $I(z)$ 在 C_R 上全部收敛：$I(z)=\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} z^n$
- $I(z)$ 在 C_R 上全部绝对收敛：$I(z)=\sum \frac{z^n}{n^2}$，一旦有一个点绝对收敛，则整个圆上所有点都绝对收敛

收敛半径的计算

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$ 或者 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$

幂级数的和函数

设 $I=\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R，则在 $D:|z-a|<R$ 上有

(a) 和函数 $f(z)$ 为解析函数

(b) $f(z)$ 能够逐项求导

$$f'(z)=\sum_{n\geq 1} nc_n(z-a)^{n-1}$$

(c) $f(z)$ 能够逐项积分

$$F(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

(d) $f(z)$ 在 C_R 上至少存在一个奇点

4.4.3 Taylor 展开式

设 $\omega = f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，$z_0 \in \mathscr{D}, d = \inf\limits_{z\in\partial\mathscr{D}} |z - z_0|$，则 $\forall z \in B_d(z_0)$，有

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{4.23}$$

且该展开式唯一。

4.4.4 解析函数的零点

设 $\omega = f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析

1. 若 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点
2. 若 $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$，则称 z_0 为 m 级零点
3. 若 $f(z_0) = 0$，且某个去心领域 $B^*_\delta(z_0)$ 上 $f(z)$ 恒不为 0，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点

定理　z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Longleftrightarrow$ $\exists B_\delta(z_0)$ 及其上的解析函数 $\varphi(z)$，满足

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z), \varphi(z_0) \neq 0$$

定理　设 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的所有零点都孤立，除非 $f(z) \equiv 0$。

4.4.5 解析函数的唯一性定理

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，且 $a \in D$，若 $\exists \{z_n\} \in D$，满足

1. $z_n \neq a$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$
3. $f(z_n) = g(z_n), \forall n \geq 0$

则 $f(z) = g(z), \forall z \in D$

4.4.6 一般常级数

形如 $I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n\geq 1} c_{-n}\zeta^n = I_+ + I_-, \zeta = \frac{1}{z-z_0}$ 的级数称为一般常级数。

若 I_+ 的收敛半径为 R_+，I_- 的收敛半径为 R_-，则称 $|\frac{1}{R_-} < |z-z_0| < R_+|$ 为 I 的<u>收敛圆环域</u> $D(z_0, r_1, r_2)$。

4.4.7 洛朗级数

设 $\omega = f(z)$ 在 $D(z_0, r, R)$ 上解析，则 $\forall z \in D(z_0, r, R)$，有

$$f(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \tag{4.24}$$

其中 C 为 D 上任意环绕的 Jordan 闭曲线。该展开唯一，称为**Laurent 级数**。
注意 $f(z)$ **在** z_0 **的导数一般不存在，故不能套用高阶导数公式。**

4.5 留数

4.5.1 孤立奇点

定义 若 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，且在某个邻域 $B^*_\delta(z_0)$ 内 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**。
若 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为孤立奇点，且 $f(z)$ 在上述领域中的洛朗级数为 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_n)^n$，则

(A) z_0 为可去奇点，若级数中不含负幂项，且 $\lim\limits_{z \to z_0} = c_0$。若补充定义 $f(z_0) = c_0$，则 $f(z)$ 在 z_0 解析，因而以下命题等价：

- z_0 为可取奇点
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$
- $f(z)$ 在某邻域 $B^*_\delta(z_0)$ 内有界

(B) z_0 为 m 级极点，若展式中含有有限的负幂项，且最低负幂项为 $c_{-m}(z - z_0)^{-m}, c_{-m} \neq 0$。若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$，则必定为极点而不是本性奇点。以下命题等价

- z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点
- 存在某个 $B_0(z_0)$ 上的解析函数 $g(z)$，满足 $f(z) = g(z)(z - z_0)^{-m}$
- $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$
- z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点

(C) z_0 为本性奇点，若展式中含有无穷个负幂项。注意 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 必不存在。
(Weierstress) $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$，都存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B^*_\delta(z_0)$，满足 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$

若 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。设 $\zeta = \frac{1}{z}$，则 $\varphi(\zeta) = \sum_n c_{-n} \zeta^n = f(z)$，若 0 为 $\varphi(\zeta)$ 的本性/可去奇点或 m 级极点，则 ∞ 为 $f(z)$ 的本性/可去奇点或 m 级极点。

4.5.2　留数

设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$C$ 为环绕 z_0 的正向简单曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} \tag{4.25}$$

这是由(4.15)直接得到的。定义留数为

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = c_{-1} \tag{4.26}$$

4.5.3　留数的计算规则

(A) 若 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

(B) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} \tag{4.27}$$

(C) 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z),Q(z)$ 在 z_0 解析，若 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且（可由 (A) 导出）

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(D) 若无穷远也为孤立极点，则无穷远处的留数定义为 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$，不难发现，此即所有有限点的留数之和的负数

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right] \tag{4.28}$$

4.5.4　留数的应用

(A) 形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分，对于 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，可以用 z 反求 $\cos\theta,\sin\theta$。

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{4.29}$$

(B) 形如 $\sum_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$ 为**有理函数**，且分母比分子的次数**至少高二次**，且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上，并且沿路径 $(-R,0)\to(R,0)\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}(-R,0), R\to+\infty$ 进行积分，设 z_k 为虚部为正数的全部奇点，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k] \tag{4.30}$$

(C) 形如 $\sum_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x(a>0)$ 的积分，其中 $R(x)$ 为**有理函数**，且分母比分子的次数**至少高一次**，且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上，并且沿路径 $(-R,0)\to(R,0)\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}(-R,0), R\to+\infty$ 进行积分，设 z_k 为虚部为正数的全部奇点，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] \tag{4.31}$$

第五章　概率论

5.1　事件的概率

5.1.1　概率的公理化定义

设 Ω 为样本空间，定义事件集类 $\mathscr{J} \subset 2^{\Omega}$。定义 $P : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$ 满足三条公理

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{J}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \forall A_i \in \mathscr{J}, A_iA_j = \phi, \forall i \neq j$

则称 P 为<u>概率函数</u>，$(\omega, \mathscr{J}, P)$ 为<u>概率空间</u>

错位排序

A_i 表示第 i 个数恰好在原位上，则每个数**都不在**原位的概率为

$$\begin{aligned}
P &= 1 - P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\
&= 1 - \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} (-1)^{r+1} P(A_{i_1} \ldots A_{i_r}) \\
&= 1 - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} (= \frac{1}{r!}) \\
&= 1 - [1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n)!}] (\to \frac{1}{e})
\end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.2　条件概率

设 $A, B \in \mathscr{J}$，定义 <u>条件概率</u> 为

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) > 0) \tag{5.2}$$

容易证明，

$$\widetilde{P}(A) = P(A|B) : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$$

也是概率函数。

5.1.3 独立事件

两个事件的独立

若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称 A,B 相互独立。此时有 $P(A)=P(A|B)$，并且能**推出** A **与** B^C **独立**。

多个事件的独立

若对 $A_1,A_2,\dots$ 为可数个事件，若从中**任取有限个事件** $A_{i_1},\dots,A_{i_m}$ 都有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_m})$$

，则称 $A_1,A_2,\dots$ 相互独立。

条件独立

若 $P(AB|E)=P(A|E)P(B|E)$，则称事件 A,B 关于事件 E 条件独立。
<u>注意：条件独立不能推出独立，独立也不能推出条件独立</u>

5.1.4 贝叶斯 (Bayes) 公式

定义 Ω 的一个分割 $\{B\}$ 满足 $\sum_i B_i=\Omega$ 且 $B_iB_j=\phi,\forall i\neq j$。则

$$P(A)=P(A\sum_i B_i)=\sum_i P(B_i)P(A|B_i) \tag{5.3}$$

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)} \tag{5.4}$$

(5.4) 即为 Bayes 公式。

5.2 随机变量

5.2.1 1 维随机变量

定义实值函数 $X(\omega):\Omega\rightarrow\mathbb{R}$，该映射给样本空间中的每个试验结果一个对应的数值，<u>随机变量</u> 即定义为试验结果的一个实值函数，也可以通过**随机变量的函数**定义另一个随机变量。(默认用大写字母表示随机变量，小写字母表示实数。)

5.2.2 随机变量的概率

$\forall I\in\mathbb{R}$ 且 I 为可测集，利用数值所对应的事件定义概率函数 $P_X:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

$$P_X(X\in I)\triangleq P(X^{-1}(I))$$

5.2.3 （累积）分布函数 (cdf)

定义为 $F(x) \triangleq P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$，则 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$。cdf 有以下性质：

1. $F(x)$ 单调（非严格）递增
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ 右连续

以上性质也是 $F(x)$ 成为 cdf 的充要条件。

5.2.4 离散分布

概率质量函数 (pmf)

定义为 $f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$。

期望和方差

期望 $E(X) \triangleq \sum_i x_i f(x_i)$；方差 $Var(X) \triangleq \sum_i (x_i - E(X))^2 f(x_i) = E(X - E(X)^2)$。

1. 若用 X 的函数 $g(X)$ 定义 Y，则 $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) f(x_i) \neq g(E(X))$
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$；若 X, Y 独立，则 $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

5.2.5 常见离散分布

Bernoulli 分布

- $X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$，记为 $X \sim B(p)$
- $E(X) = p$，$Var(X) = p(1-p)$

二项分布

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$，记为 $X \sim B(n, p)$
- X 为 n 次伯努利试验中试验成功的次数
- $E(X) = np$，$Var(X) = np(1-p)$

Poisson 分布

- $f(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$，记为 $X \sim P(\lambda)$
- $E(X) = \lambda$，$Var(X) = \lambda$
- 对于 $X \sim B(n, p)$，n 非常大而 np 较小时，X 近似服从 $P(np)$
- $P(\lambda)$ 多用于当 X 表示一定时间内出现的小概率时间的次数时

5.2.6 连续分布

概率密度函数 (pdf)

若存在 $f \geq 0$，使得 $\forall$ 可测集 $I \subset R$ 都有

$$P(X \in I) = \int_I f(x)\mathrm{d}x$$

，则 X 为连续型随机变量，f 为 X 的概率密度函数

1. $P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$
3. $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x = E(X^2) - E(X)^2$

5.2.7 常见连续分布

均匀分布

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & otherwise \end{cases}$，记为 $X \sim U(a,b)$
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$，$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

正态分布

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

指数分布

- $f = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$
- X 一般刻画寿命或者等待时间
- 无记忆性：

$$P(X > x + t | X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t} = f(t)$$

5.3 联合分布

5.3.1 随机向量

$(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$，其中 X_i 为随机变量，定义（联合）累积分布函数

$$F(x_1, \ldots, x_n) \triangleq P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

5.3.2 离散分布

若 $\forall 1 \le i \le n, X_i$ 为离散型随机变量，则 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为离散型随机向量。定义 pmf 为 $f(x_1, \ldots, x_n) \triangleq P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$。

5.3.3 连续分布

若对一切可测集 $Q \subset \mathbb{R}^n$,$P((X_1, \ldots, X_n) \in Q) = \int_Q f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$,则 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为连续型随机向量，f 为其 pdf。

以 $n = 2$ 为例，$F(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$，反过来有 $f(a, b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

二元正态分布

$X, Y \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho), |\rho| < 1$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right\} \tag{5.5}$$

5.3.4 边际分布

对于的连续随机变量，定义 X_i 的边际累积分布函数 (cdf)

$$F_i(x) \triangleq P(X_i \le x) = P(X_i \le x, -\infty < X_j < \infty (j \ne i)) \tag{5.6}$$

以 $n = 2$ 为例，$F_X(x) = \lim\limits_{y \to \infty} P(X \le x, Y \le y) = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$。
定义 X_i 的边际密度函数 (pdf)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$$

5.3.5 条件分布

对于 $n = 2$ 的连续型随机变量，求其条件密度函数

$$P(X \le x | y \le Y \le y + \mathrm{d}y) = \frac{\int_{-\infty}^x \left(\int_y^{y+\mathrm{d}y} f(t, s) \mathrm{d}q\right) \mathrm{d}p}{\int_y^{y+\mathrm{d}y} f_Y(q) \mathrm{d}q}$$

$$P(X=x|y\le Y\le y+\mathrm{d}y)=\frac{\int_y^{y+\mathrm{d}y}f(t,s)\mathrm{d}q}{\int_y^{y+\mathrm{d}y}f_Y(q)\mathrm{d}q}\to\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}(\mathrm{d}y\to 0)$$

$$f_X(x|y)\triangleq\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\tag{5.7}$$

定义 $f_X(x|y)$ 的累积分布函数 (cdf) 为 $F(a|y)=\int_{-\infty}^a f_X(x|y)\mathrm{d}x$

(1)（乘法法则）$f(x,y)=f_X(x|y)f_Y(y)=f_Y(y|x)f_X(x)$

(2)（全概率公式）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}y$

对于二元正态分布，

$$f_Y(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right\}\tag{5.8}$$

即 $\boldsymbol{Z=(Y|x)\sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)}$

5.3.6 独立性

若 $F(x_1,\ldots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n),\forall x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$，则称 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立。该条件完全等价于 $f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$。

1. 若 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，则 $Y_1=g_1(X_1,\ldots,X_m)$ 与 $Y_2=g_2(X_{m+1},\ldots,X_n)$ 相互独立
2. 若 pdf $f(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1)\cdots g_n(x_n),\forall x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$，则 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，且 f_i 与 g_i 相差常数倍

5.3.7 多个随机变量的函数

★密度函数变换法

设存在由随机变量 $X1,X2$ 到 Y_1,Y_2 的可逆映射 $\begin{cases}Y_1=g_1(X_1,X_2)\\Y_2=g_2(X_1,X_2)\end{cases}$,逆为 $\begin{cases}X_1=h(Y_1,Y_2)\\X_2=h(Y_1,Y_2)\end{cases}$ 。对于 X_1,X_2 上的区域 A，若其在 Y_1,Y_2 上的映射为 B，则显然有

$$P((X_1,X_2)\in A)=P((Y_1,Y_2)\in B)$$

$$P((Y_1,Y_2)\in B)=\int_B\mathscr{F}(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

$$P((X_1,X_2)\in A)=\int_A f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_B f(h(y_1),h(y_2))\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(y_1,y_2)}\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

因此

$$\mathscr{F}(Y_1,Y_2)=f(h(Y_1),h(Y_2))\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(y_1,y_2)}\right|\tag{5.9}$$

5.4 随机变量的数学特征

5.4.1 期望

1. 刻画分布的集中趋势
2. $X_1, \ldots, X_n$ 独立时，$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$

5.4.2 分位数

$\forall \alpha \in (0,1)$，若 $P(X \leq a) \geq \alpha$ 且 $P(X \geq a) \geq 1-\alpha$，则称 $X = a$ 为 X 的 **下α-分位数**。

1. 若 cdf 连续，则 $F(a) = \alpha$
2. 分位数不一定唯一

5.4.3 方差

1. 刻画分布的集中程度
2. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
3. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$

5.4.4 协方差与相关系数

定义协方差 $Cov(X,Y) \triangleq E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$

1. $Cov(X,X) = Var(X)$
2. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. $Cov(aX_1 + bX_2 + c, Y) = aCov(X_1, Y) + bCov(X_2, Y)$

定义相关系数 $Corr(X,Y) \triangleq \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = E(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}) = \rho$

1. X, Y 独立 $\implies Cov(X,Y) = 0$，反之不一定
2. $|Corr(X,Y)| \leq 1$
3. ρ 实际上是**线性**相关系数，不能表达高维的相关关系

5.4.5 矩 (Moment)

定义 将 $E[(X-C)^n]$ 称为 X 关于 C 的 n 阶矩。当 $C = E(X)$ 时，称为中心矩；当 $C = 0$ 时，称为原点矩；标准化后的矩 $E[(\frac{x-\mu}{\sigma})^n]$ 称为 n 阶标注矩。

偏度系数

定义 3 阶标准矩又称偏度系数。

1. 偏度系数小于零，左偏；大于零，右偏
2. 相对于 5 阶以上的奇数阶矩，3 阶矩容易计算且噪声的影响小

峰度系数

定义 4 阶标准矩又称峰度系数。

1. 正态分布峰度恒为 3
2. 超值峰度定义为 $E[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4]$
3. 超值峰度为正，一般相对于正态分布峰更尖，尾部更扁

5.4.6 矩母函数

定义 (moment generating function, mgf) $M_X(t) \triangleq E(e^{tX})$ 若在 $t=0$ 的某个邻域内 $M_X(t)$ 存在，则称其为 X 的矩母函数，否则称 X 的矩母函数不存在。**注意标明 t 的取值范围。**
对于 $X \sim Exp(\lambda)$，

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda \tag{5.10}$$

对于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，

$$M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} \tag{5.11}$$

对于 $Y = aX + b$，

$$M_Y(t) = E(e^{aX+b}) = e^{tb}E(e^{taX}) = e^{tb}M_X(ta) \tag{5.12}$$

定理 矩母函数确定矩：

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0) \tag{5.13}$$

证明.

$$M_X(t) = \sum_{n\geq 0} M_X^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = E\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(tx)^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} E(t^n)\frac{x^n}{n!}$$

由于 $M_X(t)$ 泰勒展开唯一，故 $M_X^{(n)} = E(t^n)$ □

例 对于 $X \sim N(0,1)$，

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

故 $E(X^{2n}) = \frac{(2n!)}{2^n n!}, E(X^{2n-1}) \equiv 0$
定理 矩母函数确定分布。若存在 $a > 0$，使得 $M_X(t) = M_Y(t), t \in (-a, a)$，则 X, Y 同分

布。

REMARK 矩存在的时候，矩母函数不一定存在（即泰勒展式不收敛），因此各阶矩完全相同也无法说明两个随机变量同分布。

例 取服从对数正态分布的变量 Y 于另一变量 Z

$$y = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{\log^2 x}{2}}, x > 0$$
$$z = f_2(x) = f_1(x)[1 + \sin(2\pi \log x)], x > 0$$

则它们的 n 阶矩存在以下关系：

$$E(Z^n) - E(Y^n) = \int_0^\infty x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) \mathrm{d}x = T$$

令 $t = \log x - n$，则 $x = e^{t+n}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{n(t+n)} e^{-\frac{1}{2}(t+n)} e^{-\frac{1}{2}(t+n)^2} \sin(2\pi(t+n)) e^{t+n} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}(n+t)(n+t+1)\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}(n+t+\frac{1}{2})^2\right] \mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

因此对一切 n，Y, Z 的 n 阶矩相等。但是由于

$$e^{tx} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx - \frac{\log^2 x}{2}}$$

对于一切的 $t > 0$ 都有 $\lim_{x\to\infty} e^{tx} f_1(x) = +\infty$，因此无法积分，$M_Y(t)$ 不存在。故即使各阶矩完全相同，实际上也不是同分布。

独立随机变量和的分布

对于相互独立的 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，有

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) \tag{5.14}$$

对于联合分布 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，定义矩母函数为多元函数

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n}) \tag{5.15}$$

若该函数在原点的邻域 $B(0,\sigma), \sigma > 0$ 内有定义，则称联合分布的矩母函数存在；若两组联合分布的矩母函数在 $B(0,\sigma)$ 内恒等，则这两组联合分布同分布。

5.4.7 条件期望

定义

$$E(Y|X=x)=\begin{cases}\sum_i y_iP(Y=y_i|X=x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}f_Y(y|X=x)\mathrm{d}y\end{cases}$$

定理 $E(Y)=E(E(Y|X))$

定理 $E((Y-g(X))^2)\geq E[(Y-E(Y|X))^2]$，这意味着 $E(Y|X)$ 是均方误差意义下的最优预测。均方最优：$E[(Y-c)^2]\geq E[(Y-E(Y))^2]$，这是因为 $\frac{\partial E[(Y-c)^2]}{\partial c}=2E[Y-c]\big|_{c=E(Y)}=0$。

5.5 不等式与极限定理

5.5.1 概率不等式

Markov 不等式

若 $Y\geq 0$，则 $\forall a>0$，有

$$P(Y\geq a)\leq\frac{E(Y)}{a}\tag{5.16}$$

证明. 令 $I=\begin{cases}1,Y\geq a\\ 0,Y<a\end{cases}$，则不论 Y 的取值，均有 $I\leq\frac{Y}{a}$

故 $P(Y\geq a)=E(I)\leq E(\frac{Y}{a})=\frac{E(Y)}{a}$ □

Chebyshef 不等式

若 $Var(Y)$ 存在，则 $\forall a>0$

$$E(|Y-E(Y)|\geq a)\leq\frac{Var(Y)}{a^2}\tag{5.17}$$

证明. 在(5.16)中代入 $P[|Y-E(Y)|\geq a]=P[(Y-E(Y))^2\geq a^2]=E[Var(Y)\geq a^2]$ 即可。 □

Chernoff 不等式

$\forall a>0,t>0$ 有

$$P(Y\geq a)\leq\frac{E(e^{tY})}{e^{ta}}\tag{5.18}$$

5.5.2 大数定律

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立同分布，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ，则

Khinchin 弱大数定律

$\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon) = 1 \tag{5.19}$$

证明.

$$P(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0(n\to\infty)$$

□

若 $P(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon) \leq \alpha$，则称 α 为置信水平，ε 为精度。

Kolmogorov 强大数定律

$\bar{X}$ 几乎必然收敛到 μ

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(\lim_{n\to\infty} |\bar{X}-\mu| < \varepsilon) = 1 \tag{5.20}$$

5.5.3 中心极限定理 (CLT)

若 $E(X_i), Var(X_i)$ 均存在，则

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) = \Phi(X) \sim N(0,1), \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

第六章　随机过程

6.1　Bernoulli 过程与 Poisson 过程

6.1.1　基本概念

定义　令 $(\omega, \mathscr{J}, P)$ 为概率空间，T 为指标集，S 为状态空间（相空间），$\forall t \in T, \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$，$X_t$ 为随机变量，$\{X_t : t \in T\}$ 称为一个<u>随机过程</u>**(stochastic process)**；$\forall \omega_0 \in \Omega$，$X_t(\omega_0)$ 称为一个<u>样本轨道</u>**(sample path)**。

定义　随机变量 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 称为<u>计数过程</u>，如果满足

1. $N(t) \geq 0$，取整数值
2. $\forall t > s \geq 0, N(t) \geq N(s)$
3. $N(t) - N(s)$ 表示时间 $(s, t]$ 时间内的事件数

一般记第 n 次到达的时间为 Y_n，则有到达时间序列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$；定义 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $T_1 = Y_1$，$T_i = Y_i - Y_{i-1} (i > 1)$。

REMARK:

1. X_t 记为 $X(t)$ 时强调函数性质
2. T 通常解释为时间，可以为离散或者连续
3. X_t 称为过程在 t 时刻的状态，S 可以为离散或者连续
4. $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ 视为 (t, ω) 的函数

6.1.2　Bernoulli 过程

定义　T 为离散时间，记为 $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$。$X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布且 $X_i \sim B(p)$，X_i 可以视为第 i 次实验成功与否。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 记为 Bernoulli 过程。

REMARK:

1. $X_1, X_2, \ldots$ 相互独立 $\iff \forall n, X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立
2. $\forall$certain n，$\{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\}$ 仍为 Bernoulli 过程。

6.1.3 Bernoulli 过程的性质

首次到达（相邻两次到达）的分布：几何分布

定义 令 $T=$ 首次试验成功的时间，则 $P(T=m)=p(1-p)^{m-1}(m=1,2,\dots)$
性质 无记忆性

$$P(T-n=m|T>m)=\frac{P(T=n+m,T>n)}{P(T>n)}=\frac{p(1-p)^{n+m}}{1-\sum_{k\geq 1}p(1-p)^{k-1}}=p(1-p)^{m-1}=P(T=m) \tag{6.1}$$

第 k 次到达时间的分布：负二项分布

定义 对于 Bernoulli 过程 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$P(Y_k=m)=P(\text{第 } m \text{ 次成功，且前 } m \text{ 次成功了 } k \text{ 次})=\binom{m-1}{k-1}p^k(1-p)^{m-k}$$

Bernoulli 过程的分裂

若每次到达的时间以 q 的概率保留下来，则保留下来的过程为 Bernoulli 过程，参数为 pq。

Bernoulli 过程的合并

两个独立的 Bernoulli 过程合并，结果仍为 Bernoulli 过程，且参数为 $p+q-pq$。

6.1.4 Poisson 过程

平稳增量过程

定义 如果增量 $X(t+\tau)-X(t)$ 的**分布**仅与 τ 有关，而与 t 无关，则称为平稳增量过程。

独立增量过程

定义 时刻 t 以前发生的事件数 [即 $N(t)$] 必须独立于时刻 t 与 $t+s$ 之间发生的事件数 $[N(t+s)-N(t)]$，则该过程为独立增量过程。

Poisson 过程

定义 1 计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 称为 Poisson 过程，如果满足

1. $N(0)=0$
2. 过程有平稳独立增量
3. 存在 $\lambda>0$，满足 $h\to 0$ 时，$P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$
4. $P(N(h)\geq 2)=o(h)$

定义 2

1. $N(0) = 0$
2. 过程有独立增量
3. $\forall s, t \geq 0, P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

6.1.5 Poisson 过程的性质

Poisson 过程的分裂

定理　假设 Poisson 过程过程中每次发生的事件分为 I 型和 II 型，以概率 p 为 I 型，否则为 II 型。$N_1(t), N_2(t)$ 分别表示 $(0, t]$ 内两种事件的数目，则

1. $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
2. $\{N_1(t) : t \geq 0\}, \{N_2(t) : t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程，且到达率分别为 $\lambda p, \lambda(1-p)$
3. 这两个过程相互独立

Poisson 过程的合并

定理　已知 $\{N_1(t) : t \geq 0\}, \{N_2(t) : t \geq 0\}$ 为相互独立的 Poisson 过程，到达率分别为 λ_1, λ_2，令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$，则 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程，其到达率为 $\lambda_1 + \lambda_2$。且时间 N_1 先发生的概率为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，事实上，对于每个发生的事件，其属于 N_i 的概率为 $\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$。

条件作用

已知 $[0, t]$ 内发生了一次事件，则该事件发生在 $[0, s](s \leq t)$ 上的概率为

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq s | N(t) = 1) &= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow N(t) = 1$ 条件下，$Y_1 \sim U(0, t)$。

定理　$N(t_2) = n$ 的条件下，对于 $t_1 < t_2$，$N(t_1) \sim B(n, \frac{t_1}{t_2})$。相当于在 $[0, t_2]$ 上均匀分布随机放置 n 个到达点，第 j 次到达即为第 j 阶次序统计量。

定理　$N(t) = n$ 的条件下，事件发生的 n 个时刻 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 的联合 pdf 为

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \tag{6.2}$$

证明. 已知条件等价于

$$T_1 = 1, T_2 = t_2 - t_1, \ldots, T_n = t_n - t_{n-1}, T_{n+1} > t - t_n$$

这里 T_i 为间隔事件，$T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$。$Y_1,\dots,Y_n$ 的 pdf 就等价于 $T_1,\dots,T_n$ 的 pdf

$$\begin{aligned}
f(t_1,\dots,t_n|N(t)=n) &= \frac{f(t_1,\dots,t_n,n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1}\cdots\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\cdot e^{-\lambda(t-t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{n!}{t^n}
\end{aligned}$$

□

因此有生成 Poisson 过程的另一种方式：

1. 根据 $N(t) \sim P(\lambda t)$ 生成 $(0,t]$ 内事件发生数
2. 假定 $N(t)=n$，则取 $U_1,\dots,U_n \overset{iid}{\sim} U(0,t)$
3. 令 $Y_j = U_{(j)}, j=1,2,\dots,n$

次序统计量

设有 $X_1,\dots,X_n$ 独立同分布，令 $X_{(i)} = \min\{X_1,\dots,X_n\}$ $(1 \le i \le n)$，则 $X_{(i)}$ 为 i 阶次序统计量。

设 X_i 的 pdf 为 $f(x)$，cdf 为 $F(x)$，则

$X_{(j)} = x \iff X_1,\dots,X_n$ 中有 $j-1$ 个取值 $< x$，且有 $n-j$ 个取值 $> x$，可以不严格地推导出 $X_{(j)}$ 的 pdf。

$$\begin{aligned}
P(x \le X_{(j)} \le x+\mathrm{d}x) &\approx \binom{n}{j-1,n-j,1}F^{j-1}(x)(1-F(x))^{n-j}f(x)\mathrm{d}x \\
f_j(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}F^{j-1}(x)(1-F(x))^{n-j}f(x) \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

由此定义联合分布 pdf ...

6.1.6 Poisson 过程的推广

非齐次 Poisson 过程

定义　计数过程 $\{N(t): t \ge 0\}$ 称为到达率为 $\lambda(t)(\lambda(t)>0)$ 的 Poisson 过程，如果

1. $N(0)=0$
2. 具有独立增量
3. $P(N(t+h)-N(t)=1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $P(N(t+h)-N(t)\ge 2) = o(h)$

若令 $m(t)=\int_0^t \lambda(k)\mathrm{d}k$，则

$$P(N(t+s)-N(t)=n)=e^{m(t+s)-m(t)}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

其中 $m(t+s)-m(t)$ 即为这段时间内的期望事件数。该过程没有平稳增量性质。

复合 Poisson 过程

定义 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为 Poisson 过程，X_i iid 且与 $N(t)$ 相互独立，令 $Z(t)\triangleq\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$，则 Z_t 为复合 Poisson 过程。**定理**

1. $Z(t)$ 有独立增量性质
2. 若 $E(X_i^2)\leq\infty$，则 $E(Z(t))=\lambda tE(X_i), Var(Z(t))=\lambda tE(X_i^2)$（用矩母函数证明）

条件 Poisson 过程

定义 设 $\Lambda>0$ 为随机变量，当 $\Lambda=\lambda$ 时，计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为到达率为 λ 的 Poisson 过程，则称 $N(t)$ 为条件 Poisson 过程。$N(t)$ 不是一个 Poisson 过程。

定理 $E(\Lambda)<\infty$，则 $E(N(t))=tE(\Lambda), Var(N(t))=t^2Var(\Lambda)+tE(\Lambda)$

若事件间隔 X_i 的分布不限定为指数分布，则计数过程称为**更新过程**

表 6.1: **Summary**

到达过程	Bernoulli 过程	Poisson 过程
到达时间	离散	连续
到达率	p 每次试验	λ 单位时间
相邻两次到达间隔	几何分布	指数分布
t 内到达次数的分布	二项分布	Poisson 分布
第 k 次到达	负二项分布	Gamma 分布

6.2 离散时间 Markov 链

6.2.1 基本概念

指标集 T 离散，不妨记 $T=\{0,1,2,\ldots\}$。

状态空间 S 离散，不妨记 $T=\{0,1,2,\ldots\}$

定义 (Markov 链) $\{X_n,n=0,1,\ldots\}$ 为随机过程，$X_i\in S$，若 $\forall n\geq 0$ 及任意状态 $i,j,i_0,\ldots,i_{n-1}$，有

$$P(X_{n+1}=j|X_1=1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)\tag{6.4}$$

则称 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为离散时间 Markov 链。可以导出：

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\
=&P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
=&P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
=&\dots \\
=&P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \dots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0)
\end{aligned}$$

定义 $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 称为 Markov 链的（一步）**转移概率**。当它与 n 无关时，称 Markov 链关于时间是**齐次** 的，记

$$P_{ij}^{(n)} = P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{6.5}$$

将 $P \triangleq (P_{ij})$ 称为**转移概率矩阵**。

1. 状态有限（无限）时，对应称为有（无）限链
2. 路径概率 $P(X_k = i_k) = P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$
3. 转移概率矩阵描述了一个 n 个点带自环的完全图

例 (随机游走) $S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, p \in (0, 1)$。$P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p$，令 $Y_n = \sum_0^n X_i$，则 $\{Y_n\}$ 称为随机游走模型。$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = 1 - p$。

例 (赌博模型) $S = \{0, 1, \dots, n\}$，0 和 n 为**吸收态**，$P_{0,0=1}, P_{n,n} = 1$。此模型称为**具有吸收壁的有限随机游走**。

6.2.2 C-K 方程

定义 n 步转移概率为 $P_{ij}^{(n)} \triangleq P(X_n = j | X_0 = i)$，由于时间齐次性，$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P_{ij}^{(n)}$，即与 m 无关。规定 $P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$。

定理 (Chapman-Kolmogorov 方程) $\forall m, n \geq 0, \forall i, j \in S$，有

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)} \tag{6.6}$$

证明. $P(X_{m+n} = j | X_0 = i_0, \dots, X_m = k) = P(X_{m+n} = j | X_m = k)$ □

定理 若记 $P^{(n)} \triangleq (P_{ij}^{(n)})$，则 $P^{(n)} = P^n, P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$。

计算 X_n 的边际分布

$$\begin{aligned}
P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P_{ij}^n
\end{aligned} \tag{6.7}$$

矩阵形式：记 $\vec{\beta}_n = (\beta_{n_1}, \beta_{n_2} \dots), \beta_{n_i} \triangleq P(X_n = i)$，则 $\vec{\beta}_n = \vec{\beta}_0 P^n$。

6.2.3　状态的分类

定义（可达）　称状态 i **可达**状态 j，若 $\exists n \geq 0, P_{ij}^{(n)} > 0$。若相互可达，则记为 $i \leftrightarrow j$。

1. 自返性：$i \leftrightarrow i$
2. 对称性：$i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
3. 传递性

显然，$\leftrightarrow$ 定义了一个 S 上的**等价关系**，将所有状态划分为若干个**等价类**。若一条 Markov 链上仅有一个类，则称其为<u>不可约的</u>。

定义　记 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 经过 n 次转移后，首次到达 j 的概率。则**首达**概率

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i)$$

额外定义平凡情况 $f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$。注意区别 $P_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$。

定义　$f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发经有限步可达 j 的概率。

定义　若 $f_{ii} = 1$，则称状态 i 为**常返 (recurrent)**，否则 i 为**瞬时 (transient)** 的。

★定理（常返态的等价判定）

- i 为常返态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$
- i 为瞬时态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$

证明. 引理：$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} &= P_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)} \\
&= P_{ii}^{(0)} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)}\right) \\
&= 1 + f_{ii}\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)} \\
&= \frac{1}{1-f_{ii}} (\text{若 } f_{ii} < 1)
\end{aligned}$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$收敛 $\iff f_{ii} < 1$。 □

性质（常返态的命运）

1. 令 $I_n = [X_n = i]$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 为经过状态 i 的次数，

$$E(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(I_n = 1 | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

为从 i 出发的链回到 i 的期望次数

2. 若 i 常返，则从 i 出发时以概率 1 有限步回到 i
3. 若 i 非常返，则从 i 出发以概率 $P = 1 - f_i i > 0$ 回不到 i，从而从 i 出发的链恰好经过 i 的次数为 k 的概率为 $f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii})$（几何分布），所以只能返回有限次，最后永远离开

★定理（常返态的事实）

1. 若 $i \leftrightarrow j$，则 i 和 j 同时为常返态或者非常返态
2. 常返态 i 所能到达的一切状态均与 i 相互可达，即**从常返态出发不能到达非常返态**
3. 在一个**有限** Markov 链上，从任意非常返态出发，最终必然到达常返态
4. 一个**有限** Markov 链至少有一个常返态
5. 一个**有限** Markov 链若**不可约**，则所有状态均为常返态

例子　（随机游走）当 $p = \frac{1}{2}$ 时常返，当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时非常返。
定理　若 $i \leftrightarrow j$，且 i 为常返态，则 $f_{ji} = 1$
定义　若集合 $\{n|n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空，则其最大公约数 $d = d(i)$ 称为状态 i 的**周期**。若 $d > 1$，则称状态 i 是**周期的**；若 $d = 1$ 则称 i 是**非周期的**。若链中所有状态的周期都为 d，则称 d 为该**链的周期**。若链中所有状态周期都为 1，则称该链是**非周期的**；否则称其为**周期的**。
定理　若 $i \leftrightarrow j$，则 i 的周期与 j 相等。
定理　若一个**不可约** Markov 链周期为 d，其状态空间 S 存在唯一的**划分** $\{S_1, S_2, \ldots, S_d\}$，且使得从 S_r 中任意状态出发，任 1 步转移必然进入 S_{r+1} 中。实际上，若将状态 i 固定在 S_d 中，则有

$$S_r = \{j|\exists n \in \mathbb{N}, s.t. P_{ij}^{(nd+r)} > 0\}$$

对于任意 Markov 链，其状态空间存在划分 $\{C_0, C_1, C_2, \ldots\}$，其中 C_0 为所有非常返态构成的集合，$C_n (n \geq 1)$ 不可约。

6.2.4　稳态性质

定义　$\vec{\beta} = (\beta_j)_{j \in S}$ 为概率分布，若

$$\vec{\beta} P = \vec{\beta} \quad (i.e. \beta_j = \sum_{i \in S} \beta_i P_{ij})$$

则称 $\vec{\beta}$ 为该 Markov 链的**平稳分布 (stationary distribution)**。

若 $\vec{\beta}$ 为 X_0 的分布 (即 $P(X_0 = j) = \beta_j$)，则 $X_n (n \geq 1)$ 的分布都为 $\vec{\beta}$，从而 $\{X_n : n \geq 0\}$ 为**平稳过程**。

平稳分布为边际分布，不是条件分布，一般地有

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P_{ij} \neq P(X_{n+1} = j)$$

定义　设 i 为常返态，定义 $\mu_i \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为由 i 出发再返回 i 所需的平均时间（步数）。

若 $\mu_i < +\infty$，则称 i 为**正常返的 (positive recurrent)**；

若 $\mu_i = +\infty$，则称 i 为**零常返的 (null recurrent)**。

μ_i 越小，返回越频繁。

★**定理**　若 i 常返且周期为 d ，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \tag{6.8}$$

当 $\mu_i = +\infty$ 时，$\frac{d}{\mu_i} = 0$。（不证）

定理　i 为零常返态或非常返态 $\iff \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

证明. i 为零常返 $\implies \mu_i = +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = 0$

又知 $P_{ii}^{(m)} = 0, m$ 不被 d 整除，故 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

i 非常返 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ □

定理　$i \leftrightarrow j$，常返，则 i 与 j 同时为正常返或零常返。

定理　若 j 为非常返或零常返，则 $\forall i \in S$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$。有限链不可能又零常返态，从而不可约有限 Markov 链所有状态都是正常返的。若 Markov 链有零常返态

定义　若 i 正常返且周期为 1，则称 i 为**遍历的 (ergodic)**；若一个 Markov 链中所有状态都是遍历的，则称该链是遍历的。

★**定理**　对于不可约、非周期的 Markov 链，

(1) 若它是遍历的，则 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 是该链的唯一平稳分布

(2) 若状态都是非常返的或是零常返的，则平稳分布不存在

6.3　某次课

1. 若它是遍历的，则 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty}$

$\vec{\pi} P = \vec{\pi}$

证明.

$$\forall M, \sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} \le \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = 1$$

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj} \ge \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

$$P_{ij}^{(n)} \ge \sum_{k=0}$$

□

定义 若 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 存在，则 $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ 称为该链的**极限分布**。

性质

1. $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \\ \vdots \end{bmatrix}$
2. 对于一切初始分布 $\vec{\beta}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\beta}P^n = \vec{\pi}$
3. 一个链具有平稳分布并不意味着有极限分布
4. 若链不可约且遍历，则极限分布式链唯一的平稳分布
5. 可以证明，有限链总存在平稳分布；若其不可约，则平稳分布唯一

6.3.1 可逆性

（平稳分布当状态空间规模非常大时难以计算）

定义 $\pi_j \geq 0, \sum_i \pi_i = 1$，若满足以下<u>**可逆性条件**</u>：

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i, j \in S \tag{6.9}$$

则称该链对于 $\vec{\pi}$ 可逆。

定理 若 P 相对于 $\vec{\pi}$ 可逆，则 $\vec{\pi}$ 为链的平稳分布。

证明. $\sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j (\sum_i P_{ji}) = \pi_j \implies \vec{\pi}P = \vec{\pi}$ □

第七章　线性代数

7.1　基本事实

- $rank(A) + rank(B) < rank(AB) - n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_n + a_1$可逆 $\implies$ n为奇数
- $Q^TQ = I_n \iff Q$为保距变换 $\iff$ 为保内积变换
- $Housholder$ 变换 (关于**面**反射)：$I_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T, ||\boldsymbol{v}|| = 1$
- $\mathcal{R}(A^TA) = \mathcal{R}(A^T)$
- $P_{\mathcal{M}} = QQ^T, \mathrm{span}(Q) = \mathcal{M}$
- $P_A = A(A^TA)^{-1}A^T, A$ 列线性无关
- 实对称矩阵 $S = Q\Lambda Q^T$

7.2　例题

练习 1.6.17-(5)

若 $A^2 - I_n = O$ ，证明：

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v},\ s.t.\ (A - I_n)\boldsymbol{x} = (A + I_n)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

证明.

$$(A + I_n)(A - I_n) = 0$$
$$\text{构造 } \boldsymbol{x} = \frac{A + I_n}{2}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} = \frac{-A + I_n}{2}\boldsymbol{v}$$

□

练习 1.7.10

证明：$A \in \mathbb{R}^{m*n}, B \in \mathbb{R}^{n*m}, I_m + AB$ 可逆 $\iff I_n + BA$ 可逆.

证明.

$$
\begin{aligned}
&\text{构造矩阵} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n - BA \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix} \\
&I_n - BA\text{可逆} \iff \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\text{可逆} \iff I_m - AB\text{可逆}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{另：}\ & (I_m + AB)A = A + ABA = A(I_n + BA) \\
let\ & (I_n + BA)^{-1} = C \\
then\ & (I_m + AB)ACB = AB \\
& (I_m + AB) - (I_m + AB)ACB = (I_m + AB) - AB \\
& (I_m + AB)(I_m - ACB) = I_m \implies (I_m + AB)^{-1} = I_m - A(I_n + BA)^{-1}B
\end{aligned}
$$

□

7.2.1　正交矩阵

7.2.2　特征值与特征向量

练习 5.2.23

给定 m 阶方阵 A_1，n 阶方阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B，证明若 A_1 和 A_2 没有相同的特征值，则关于 $m \times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

证明. 因为 X 与 B 规格相同，所以只要证明该变换是单射即可证明是双射.
即证：$A_1X = XA_2$ 仅有零解

$$
\begin{aligned}
A_1^2X &= (A_1X)A_2 = XA_2^2 \\
A_1^3X &= (A_1X)A_2^2 = XA_2^3 \\
&\vdots \\
A_1^nX &= (A_1X)A_2^{n-1} = XA_2^n \qquad (\bigstar)
\end{aligned}
$$

考虑上述等式的线性组合，则

$$f(A_1)X = Xf(A_2)$$

恒成立.

不妨令 $f = p_A$，则 $f(A_1) = O$. 令 λ_i 为 A_1 的特征值，则 $\det(\lambda_i I_n - A_2) \neq 0$，所以

$$\det(f(A_2)) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i I_n - A_2) \neq 0 \tag{$\bigstar$}$$

故 $f(A_2)$ 可逆，因此

$$X = f(A_1)X\left[f(A_2)\right]^{-1} = O$$

□

7.2.3 实对称矩阵

对实对称矩阵，A 正定

$\iff A$ 的特征值都是正数

$\iff A = TT^T$,T 可逆

$\iff A = LDL^T$

$\iff A$ 的顺序主子式都是正数

- gbk (gbk 不能解码的特殊字符，用更高级的 GB18030)