

第一章 随机过程

1.1 Bernoulli 过程与 Poisson 过程

1.1.1 基本概念

定义 令 (ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, T 为指标集, S 为状态空间 (相空间), $\forall t \in T, \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$, X_t 为随机变量, $\{X_t : t \in T\}$ 称为一个 **随机过程 (stochastic process)**; $\forall \omega_0 \in \Omega, X_t(\omega_0)$ 称为一个 **样本轨道 (sample path)**。

定义 随机变量 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 称为 **计数过程**, 如果满足

1. $N(t) \geq 0$, 取整数值
2. $\forall t > s \geq 0, N(t) \geq N(s)$
3. $N(t) - N(s)$ 表示时间 $(s, t]$ 时间内的事件数

一般记第 n 次到达的时间为 Y_n , 则有到达时间序列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$; 定义 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $T_1 = Y_1, T_i = Y_i - Y_{i-1} (i > 1)$ 。

REMARK:

1. X_t 记为 $X(t)$ 时强调函数性质
2. T 通常解释为时间, 可以为离散或者连续
3. X_t 称为过程在 t 时刻的状态, S 可以为离散或者连续
4. $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ 视为 (t, ω) 的函数

1.1.2 Bernoulli 过程

定义 T 为离散时间, 记为 $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。 X_1, X_2, \dots 独立同分布且 $X_i \sim B(p)$, X_i 可以视为第 i 次实验成功与否。 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 记为 Bernoulli 过程。

REMARK:

1. X_1, X_2, \dots 相互独立 $\iff \forall n, X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立
2. \forall certain $n, \{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$ 仍为 Bernoulli 过程。

1.1.3 Bernoulli 过程的性质

首次到达（相邻两次到达）的分布：几何分布

定义 令 $T =$ 首次试验成功的时间，则 $P(T = m) = p(1-p)^{m-1} (m = 1, 2, \dots)$

性质 无记忆性

$$P(T-n = m | T > n) = \frac{P(T = n+m, T > n)}{P(T > n)} = \frac{p(1-p)^{n+m}}{1 - \sum_{k \geq 1} p(1-p)^{k-1}} = p(1-p)^{m-1} = P(T = m) \quad (1.1)$$

第 k 次到达时间的分布：负二项分布

定义 对于 Bernoulli 过程 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，令

$$P(Y_k = m) = P(\text{第 } m \text{ 次成功，且前 } m \text{ 次成功了 } k \text{ 次}) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}$$

Bernoulli 过程的分裂

若每次到达的时间以 q 的概率保留下来，则保留下来的过程为 Bernoulli 过程，参数为 pq 。

Bernoulli 过程的合并

两个独立的 Bernoulli 过程合并，结果仍为 Bernoulli 过程，且参数为 $p + q - pq$ 。

1.1.4 Poisson 过程

平稳增量过程

定义 如果增量 $X(t+\tau) - X(t)$ 的分布仅与 τ 有关，而与 t 无关，则称为平稳增量过程。

独立增量过程

定义 时刻 t 以前发生的事件数 [即 $N(t)$] 必须独立于时刻 t 与 $t+s$ 之间发生的事件数 $[N(t+s) - N(t)]$ ，则该过程为独立增量过程。

Poisson 过程

定义 1 计数过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 称为 Poisson 过程，如果满足

1. $N(0) = 0$
2. 过程有平稳独立增量
3. 存在 $\lambda > 0$ ，满足 $h \rightarrow 0$ 时， $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

定义 2

1. $N(0) = 0$
2. 过程有独立增量
3. $\forall s, t \geq 0, P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

1.1.5 Poisson 过程的性质**Poisson 过程的分裂**

定理 假设 Poisson 过程过程中每次发生的事件分为 I 型和 II 型，以概率 p 为 I 型，否则为 II 型。 $N_1(t), N_2(t)$ 分别表示 $(0, t]$ 内两种事件的数目，则

1. $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
2. $\{N_1(t) : t \geq 0\}, \{N_2(t) : t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程，且到达率分别为 $\lambda p, \lambda(1-p)$
3. 这两个过程相互独立

Poisson 过程的合并

定理 已知 $\{N_1(t) : t \geq 0\}, \{N_2(t) : t \geq 0\}$ 为相互独立的 Poisson 过程，到达率分别为 λ_1, λ_2 ，令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ ，则 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程，其到达率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 。且时间 N_1 先发生的概率为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ，事实上，对于每个发生的事件，其属于 N_i 的概率为 $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 。

条件作用

已知 $[0, t]$ 内发生了一次事件，则该事件发生在 $[0, s](s \leq t)$ 上的概率为

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq s | N(t) = 1) &= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

$\Rightarrow N(t) = 1$ 条件下， $Y_1 \sim U(0, t)$ 。

定理 $N(t_2) = n$ 的条件下，对于 $t_1 < t_2$ ， $N(t_1) \sim B(n, \frac{t_1}{t_2})$ 。相当于在 $[0, t_2]$ 上均匀分布随机放置 n 个到达点，第 j 次到达即为第 j 阶次序统计量。

定理 $N(t) = n$ 的条件下，事件发生的 n 个时刻 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的联合 pdf 为

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \quad (1.2)$$

证明. 已知条件等价于

$$T_1 = 1, T_2 = t_2 - t_1, \dots, T_n = t_n - t_{n-1}, T_{n+1} > t - t_n$$

这里 T_i 为间隔事件, $T_i \stackrel{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ 。 Y_1, \dots, Y_n 的 pdf 就等价于 T_1, \dots, T_n 的 pdf

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) &= \frac{f(t_1, \dots, t_n, n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1} \dots \lambda e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \cdot e^{-\lambda(t - t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{n!}{t^n} \end{aligned}$$

□

因此有生成 Poisson 过程的另一种方式:

1. 根据 $N(t) \sim P(\lambda t)$ 生成 $(0, t]$ 内事件发生数
2. 假定 $N(t) = n$, 则取 $U_1, \dots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, t)$
3. 令 $Y_j = U_{(j)}, j = 1, 2, \dots, n$

次序统计量

设有 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 令 $X_{(i)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ($1 \leq i \leq n$), 则 $X_{(i)}$ 为 i 阶次序统计量。

设 X_i 的 pdf 为 $f(x)$, cdf 为 $F(x)$, 则

$X_{(j)} = x \iff X_1, \dots, X_n$ 中有 $j-1$ 个取值 $< x$, 且有 $n-j$ 个取值 $> x$, 可以不严格地推导出 $X_{(j)}$ 的 pdf。

$$\begin{aligned} P(x \leq X_{(j)} \leq x + dx) &\approx \binom{n}{j-1, n-j, 1} F^{j-1}(x) (1 - F(x))^{n-j} f(x) dx \\ f_j(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} F^{j-1}(x) (1 - F(x))^{n-j} f(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

由此定义联合分布 pdf ...

1.1.6 Poisson 过程的推广

非齐次 Poisson 过程

定义 计数过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 称为到达率为 $\lambda(t)$ ($\lambda(t) > 0$) 的 Poisson 过程, 如果

1. $N(0) = 0$
2. 具有独立增量
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

若令 $m(t) = \int_0^t \lambda(k)dk$, 则

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{m(t+s)-m(t)} \frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

其中 $m(t+s) - m(t)$ 即为这段时间内的期望事件数。该过程没有平稳增量性质。

复合 Poisson 过程

定义 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程, X_i iid 且与 $N(t)$ 相互独立, 令 $Z(t) \triangleq \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, 则 Z_t 为复合 Poisson 过程。**定理**

1. $Z(t)$ 有独立增量性质
2. 若 $E(X_i^2) \leq \infty$, 则 $E(Z(t)) = \lambda t E(X_i), \text{Var}(Z(t)) = \lambda t E(X_i^2)$ (用矩母函数证明)

条件 Poisson 过程

定义 设 $\Lambda > 0$ 为随机变量, 当 $\Lambda = \lambda$ 时, 计数过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为到达率为 λ 的 Poisson 过程, 则称 $N(t)$ 为条件 Poisson 过程。 $N(t)$ 不是一个 Poisson 过程。

定理 $E(\Lambda) < \infty$, 则 $E(N(t)) = tE(\Lambda), \text{Var}(N(t)) = t^2 \text{Var}(\Lambda) + tE(\Lambda)$
若事件间隔 X_i 的分布不限定为指数分布, 则计数过程称为更新过程

表 1.1: Summary

到达过程	Bernoulli 过程	Poisson 过程
到达时间	离散	连续
到达率	p 每次试验	λ 单位时间
相邻两次到达间隔	几何分布	指数分布
t 内到达次数的分布	二项分布	Poisson 分布
第 k 次到达	负二项分布	Gamma 分布

1.2 离散时间 Markov 链

1.2.1 基本概念

指标集 T 离散, 不妨记 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

状态空间 S 离散, 不妨记 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$

定义 (Markov 链) $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为随机过程, $X_i \in S$, 若 $\forall n \geq 0$ 及任意状态 $i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$, 有

$$P(X_{n+1} = j | X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (1.4)$$

则称 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为离散时间 Markov 链。可以导出：

$$\begin{aligned}
 & P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\
 &= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
 &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
 &= \dots \\
 &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \dots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0)
 \end{aligned}$$

定义 $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 称为 Markov 链的（一步）转移概率。当它与 n 无关时，称 Markov 链关于时间是齐次的，记

$$P_{ij}^{(n)} = P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (1.5)$$

将 $P \triangleq (P_{ij})$ 称为转移概率矩阵。

1. 状态有限（无限）时，对应称为有（无）限链
2. 路径概率 $P(X_k = i_k) = P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$
3. 转移概率矩阵描述了一个 n 个点带自环的完全图

例 （随机游走） $S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, p \in (0, 1)$ 。 $P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p$ ，令 $Y_n = \sum_0^n X_i$ ，则 $\{Y_n\}$ 称为随机游走模型。 $P_{i, i+1} = p, P_{i, i-1} = 1 - p$ 。

例 （赌博模型） $S = \{0, 1, \dots, n\}$ ，0 和 n 为吸收态， $P_{0,0}=1, P_{n,n}=1$ 。此模型称为具有吸收壁的有限随机游走。

1.2.2 C-K 方程

定义 n 步转移概率为 $P_{ij}^{(n)} \triangleq P(X_n = j | X_0 = i)$ ，由于时间齐次性， $P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P_{ij}^{(n)}$ ，即与 m 无关。规定 $P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$ 。

定理 （Chapman-Kolmogorov 方程） $\forall m, n \geq 0, \forall i, j \in S$ ，有

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)} \quad (1.6)$$

证明. $P(X_{m+n} = j | X_0 = i_0, \dots, X_m = k) = P(X_{m+n} = j | X_m = k)$ □

定理 若记 $P^{(n)} \triangleq (P_{ij}^{(n)})$ ，则 $P^{(n)} = P^n, P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$ 。

计算 X_n 的边际分布

$$\begin{aligned}
 P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i) \\
 &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P_{ij}^n
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

矩阵形式：记 $\vec{\beta}_n = (\beta_{n_1}, \beta_{n_2} \dots), \beta_{n_i} \triangleq P(X_n = i)$ ，则 $\vec{\beta}_n = \vec{\beta}_0 P^n$ 。

1.2.3 状态的分类

定义 (可达) 称状态 i 可达状态 j , 若 $\exists n \geq 0, P_{ij}^{(n)} > 0$ 。若相互可达, 则记为 $i \leftrightarrow j$ 。

1. 自返性: $i \leftrightarrow i$
2. 对称性: $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
3. 传递性

显然, \leftrightarrow 定义了一个 S 上的等价关系, 将所有状态划分为若干个等价类。若一条 Markov 链上仅有一个类, 则称其为不可约的。

定义 记 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 经过 n 次转移后, 首次到达 j 的概率。则首次到达概率

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i)$$

额外定义平凡情况 $f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ 。注意区别 $P_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 。

定义 $f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发经有限步可达 j 的概率。

定义 若 $f_{ii} = 1$, 则称状态 i 为常返 (recurrent), 否则 i 为瞬时 (transient) 的。

★定理 (常返态的等价判定)

- i 为常返态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$
- i 为瞬时态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$

证明. 引理: $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} &= P_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)} \\ &= P_{ii}^{(0)} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)} \right) \\ &= 1 + f_{ii} \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)} \\ &= \frac{1}{1-f_{ii}} \text{ (若 } f_{ii} < 1) \end{aligned}$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$ 收敛 $\iff f_{ii} < 1$ 。

□

性质 (常返态的命运)

1. 令 $I_n = [X_n = i]$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ 为经过状态 i 的次数,

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(I_n = 1 | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

为从 i 出发的链回到 i 的期望次数

2. 若 i 常返, 则从 i 出发时以概率 1 有限步回到 i
3. 若 i 非常返, 则从 i 出发以概率 $P = 1 - f_{ii} > 0$ 回不到 i , 从而从 i 出发的链恰好经过 i 的次数为 k 的概率为 $f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii})$ (几何分布), 所以只能返回有限次, 最后永远离开

★定理 (常返态的事实)

1. 若 $i \leftrightarrow j$, 则 i 和 j 同时为常返态或者非常返态
2. 常返态 i 所能到达的一切状态均与 i 相互可达, 即从常返态出发不能到达非常返态
3. 在一个有限 Markov 链上, 从任意非常返态出发, 最终必然到达常返态
4. 一个有限 Markov 链至少有一个常返态
5. 一个有限 Markov 链若不可约, 则所有状态均为常返态

例子 (随机游走) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时常返, 当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时非常返。

定理 若 $i \leftrightarrow j$, 且 i 为常返态, 则 $f_{ji} = 1$

定义 若集合 $\{n | n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空, 则其最大公约数 $d = d(i)$ 称为状态 i 的周期。若 $d > 1$, 则称状态 i 是周期的; 若 $d = 1$ 则称 i 是非周期的。若链中所有状态的周期都为 d , 则称 d 为该链的周期。若链中所有状态周期都为 1, 则称该链是非周期的; 否则称其为周期的。

定理 若 $i \leftrightarrow j$, 则 i 的周期与 j 相等。

定理 若一个不可约 Markov 链周期为 d , 其状态空间 S 存在唯一的划分 $\{S_1, S_2, \dots, S_d\}$, 且使得从 S_r 中任意状态出发, 任 1 步转移必然进入 S_{r+1} 中。实际上, 若将状态 i 固定在 S_d 中, 则有

$$S_r = \{j | \exists n \in \mathbb{N}, s.t. P_{ij}^{(nd+r)} > 0\}$$

对于任意 Markov 链, 其状态空间存在划分 $\{C_0, C_1, C_2, \dots\}$, 其中 C_0 为所有非常返态构成的集合, $C_n (n \geq 1)$ 不可约。

1.2.4 稳态性质

定义 $\vec{\beta} = (\beta_j)_{j \in S}$ 为概率分布, 若

$$\vec{\beta}P = \vec{\beta} \quad (i.e. \beta_j = \sum_{i \in S} \beta_i P_{ij})$$

则称 $\vec{\beta}$ 为该 Markov 链的平稳分布 (stationary distribution)。

若 $\vec{\beta}$ 为 X_0 的分布 (即 $P(X_0 = j) = \beta_j$), 则 $X_n (n \geq 1)$ 的分布都为 $\vec{\beta}$, 从而 $\{X_n : n \geq 0\}$ 为平稳过程。

平稳分布为边际分布, 不是条件分布, 一般地有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij} \neq P(X_{n+1} = j)$$

定义 设 i 为常返态, 定义 $\mu_i \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为由 i 出发再返回 i 所需的平均时间 (步数)。若 $\mu_i < +\infty$, 则称 i 为正常返的 (positive recurrent);

若 $\mu_i = +\infty$, 则称 i 为零常返的 (null recurrent)。

μ_i 越小, 返回越频繁。

★定理 若 i 常返且周期为 d , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \quad (1.8)$$

当 $\mu_i = +\infty$ 时, $\frac{d}{\mu_i} = 0$ 。(不证)

定理 i 为零常返态或非常返态 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

证明. i 为零常返 $\implies \mu_i = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = 0$

又知 $P_{ii}^{(m)} = 0, m$ 不被 d 整除, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

i 非常返 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ □

定理 $i \leftrightarrow j$, 常返, 则 i 与 j 同时为正常返或零常返。

定理 若 j 为非常返或零常返, 则 $\forall i \in S$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ 。有限链不可能有零常返态, 从而不可约有限 Markov 链所有状态都是正常返的。若 Markov 链有零常返态

定义 若 i 正常返且周期为 1, 则称 i 为遍历的 (ergodic); 若一个 Markov 链中所有状态都是遍历的, 则称该链是遍历的。

★定理 对于不可约、非周期的 Markov 链,

(1) 若它是遍历的, 则 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ 是该链的唯一平稳分布

(2) 若状态都是非常返的或是零常返的, 则平稳分布不存在

1.3 某次课

1. 若它是遍历的, 则 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$

$$\vec{\pi}P = \vec{\pi}$$

证明.

$$\begin{aligned} \forall M, \sum_{j=0}^M P_{ij}^{(n)} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = 1 \\ P_{ij}^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj} \geq \sum_{k=0}^M P_{ik}^{(n)} P_{kj} \\ &\geq P_{ij}^{(n)} \sum_{k=0}^M P_{kj} \end{aligned}$$

□

定义 若 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ 存在, 则 $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ 称为该链的**极限分布**。

性质

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \\ \vdots \end{bmatrix}$
2. 对于一切初始分布 $\vec{\beta}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\beta} P^n = \vec{\pi}$
3. 一个链具有平稳分布并不意味着有极限分布
4. 若链不可约且遍历, 则极限分布是链唯一的平稳分布
5. 可以证明, 有限链总存在平稳分布; 若其不可约, 则平稳分布唯一

1.3.1 可逆性

(平稳分布当状态空间规模非常大时难以计算)

定义 $\pi_j \geq 0, \sum_i \pi_i = 1$, 若满足以下**可逆性条件**:

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i, j \in S \quad (1.9)$$

则称该链对于 $\vec{\pi}$ 可逆。

定理 若 P 相对于 $\vec{\pi}$ 可逆, 则 $\vec{\pi}$ 为链的平稳分布。

证明. $\sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j (\sum_i P_{ji}) = \pi_j \implies \vec{\pi} P = \vec{\pi}$ □