

第一章 微积分 A2 : 多元函数微积分与级数

1.1 多元函数的连续、可导与可微

1.1.1 基本定理

- $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续 \iff
动点 (x, y) 以任意路径趋向 (x_0, y_0) 时的极限全部等于 $f(x_0, y_0)$

- $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微 \iff

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

- 函数是否连续与偏导数是否存在无关
- 函数可微 \implies 偏导数存在
偏导数连续 \implies 函数可微
o 邻域上偏导数有界 \implies 函数可微
邻域上偏导数只有一个不一致连续 \implies 函数可微

- 梯度的定义

$$\text{grad} f(\mathbf{X}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{X}_0}$$

- $\mathbf{J}(f \circ g) = \mathbf{J}(f) \cdot \mathbf{J}(g)$ (一阶微分形式不变)
 $df(\mathbf{X}_0) = \mathbf{J}f(\mathbf{X}_0)d\mathbf{X}$

- 多元隐函数的偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{X}, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X}, y)}$$

- 向量值隐函数的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{J}f(\mathbf{X}) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = - \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right)^{-1} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

理解：记 $G_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}, y_1(\mathbf{X}), \dots, y_m(\mathbf{X})) \equiv 0$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} + \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(G_1, \dots, G_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0$$

- 隐函数的逆映射：对于 $\mathbf{Y} = f(\mathbf{x}), f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，当 $\det(\mathbf{J}f(X_0))$ 非零时，有：

$$\mathbf{J}f^{-1}(Y_0) = [\mathbf{J}f(Y_0)]^{-1}, Y_0 = f(X_0)$$

★ Taylor 展开

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^k f(x_0, y_0) + o\left((\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^n\right)$$

★（多元函数的中值定理）设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 函数，则 $\forall a, b \in \Omega, \exists \theta \in (0, 1)$, s.t.

$$f(b) - f(a) = \nabla f(a + (b - a)\theta) \cdot (b - a)$$

* 定理不能推广到向量值函数的情形

1.1.2 极值与条件极值

★ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处有极值的条件

（必要） $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ （极值点必为驻点）

（必要） $H(x_0, y_0)$ 非不定

（充分） $H(x_0, y_0)$ 正定（极小值）或负定（极大值）

（充分）在 (x_0, y_0) 的某个邻域上 $H(x_0, y_0)$ 半正定（极小值）或半负定（极大值）

- （条件极值的必要条件）设原问题的 Lagrange 函数对应无约束问题 $\max(\min) L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ，则原问题的每个解必然对应着无约束问题的一个驻点。即答案必然在无约束问题的驻点中

1.1.3 几何应用

- 平面及其法线（直线及其法平面）公式

记 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处法线方向向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ ，则法线为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

法平面使得 $\vec{P_0P}$ 与 \vec{n} 垂直，即点积为零

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

因此，只要求出法线方向向量即可快速表达法线及切平面

- 空间曲面的表达方式及法向量

- 空间曲面可以看做是二维空间到三维欧氏空间投影的像, 故可以用以 x, y 为自变量确定 z 的隐函数方程表示

$$F(x, y, z) = 0, \vec{n} = \text{grad}F(P_0)$$

由于沿任何在该点切平面内的方向向量都使函数值保持不变, 故均与梯度垂直, 即梯度为法向量, 表示函数 $F(x, y, z)$ 变化最快的方向.

- 借助辅助变量 $P = (u, v)$ 表示

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{注意: 这与 } F(x, y, z) = 0 \text{ 完全不同}$$

$$\text{化曲为平, 切平面的参数方程: } \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}_{P_0} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

- 空间曲线的表达方式及切向量

$$\circ \mathcal{L}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{n} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$\circ \mathcal{L}: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{曲线可以视作两空间曲面的交, 其切线为两切平面的交, 即垂直于}$$

两个法向量, 因而可用叉积确定 $\vec{n} = \text{grad}F(P_0) \times \text{grad}G(P_0)$

1.1.4 例题

课本 p.66-3(4)

$$\text{以下方程确定了 } z = f(x, y): \begin{cases} x = u \cos v \text{ (★)} \\ y = u \sin v \text{ (☆)} \\ z = v \end{cases}, \text{ 计算: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

解.

将 x, y 视为自变量, 将 u, v 视作 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 则

$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

对 (★) 与 (☆) 两边依次求 x, y 的偏导

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos v - u \frac{\partial v}{\partial x} \sin v$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \sin v + u \frac{\partial v}{\partial x} \cos v$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} \cos v - u \frac{\partial v}{\partial y} \sin v$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial y} \sin v + u \frac{\partial v}{\partial y} \cos v$$

$$\text{从而 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u}, \frac{\partial u}{\partial x} = \cos v, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sin v}{u} \right) = \frac{\sin v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos v}{u} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sin 2v}{u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\sin v}{u} \right) = \frac{\sin v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\cos v}{u} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$$

注：最后仍可用 u, v 表示。

1.2 (广义) 含参积分

1.2.1 累次积分

- $f(x, y)$ 在有界闭域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上连续 $\implies f(x, y)$ 在 Ω 上一致连续.
- (积分号下可求极限) $f(x, y)$ 为矩形有界闭域 D 上的连续函数时, 积分运算和极限运算可以交换顺序.
- (积分号下可求导) 设 $f(x)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则

$$\frac{d}{dy} \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dx$$

若要将 b 改为 $+\infty$, 则需等式右侧的积分关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

- (积分号下求积分公式) $f(x, y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

若要将 b 改为 $+\infty$, 则需 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛.

1.2.2 广义积分

- (连续性定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, \infty) \times K \subset \mathbb{R}^2$, 其中 K 为某一区间. 那么, 若广义含参积分

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于 $y \in K$ 一致收敛, 则 $J(y)$ 在区间 K 上连续.

1.2.3 例题

课本 p.110-5(2)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

1.3 重积分

1.3.1 基本定理

- 若 $f(x, y)$ 在闭矩形域 K 上可积, 则它在 K 上有界.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集合, 则 D 有面积 $\iff \partial D$ 为零测集.
一个平面集合不可求面积与面积为零是两回事.
- (平面变换的面积公式) 当 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ 可微、正则且一一对应时, 面积微元

$$dx dy = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

体积微元的变换类似.

- 球坐标系体积微元 $dx dy dz = r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$, φ 为 \vec{r} 与 z 轴的夹角.
柱坐标系体积微元 $dx dy dz = r \, dr d\theta dz$

- Euler-Poisson 积分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \quad (\text{注意 } x, y > 0 \text{ 对应的 } \theta \text{ 范围}) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\ I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

1.4 场论初步 (Green, Gauss & Stokes)

1.4.1 曲线积分与曲面积分

- (第一型曲线积分) 设曲线 C 有正则参数表达 $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, 则

$$\int_C f(x, y, z) dl \triangleq \int_a^b f(r(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

- (第二型曲线积分) 设向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = (M(\dots), N(\dots), P(\dots))$, C^+ 有正则表示 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t: a \rightarrow b$, 则

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(r) \cdot d\vec{r} &\triangleq \int_C \mathbf{F} \cdot \tau dl && \text{定义} \\ &= \int_C \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt && \text{计算公式} \\ &= \int_C [Mx'(t) + Ny'(t) + Pz'(t)] dt && \text{内积展开} \\ &= \int_C Mdx + Ndy + Pdz && \text{上式的缩写} \end{aligned}$$

- (第一型曲面积分) 设曲面 S 有正则的参数表示 $r = r(u, v)$, $(u, v) \in D$, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS \triangleq \iint_D f(r(u, v)) |r_u \times r_v| du dv$$

对显式曲面 $z = z(x, y)$, 面积微元为 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$

- (第二型曲面积分) 设向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = (M(\dots), N(\dots), P(\dots))$

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} d\vec{S} &\triangleq \iint_S (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \iint_D \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) du dv \\ &= \iint_{S^+} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \end{aligned}$$

其中 $dx \wedge dy$ 为面积微元 dS 在 xy 平面上的投影

现考虑其中一个分量, 若 S^+ 正法向向上, D 为 S 在 xy 平面上的投影, 则

$$\iint_{S^+} Rdx \wedge dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

将第二型曲面积分转换为二重积分.

- 为什么 $d\vec{S} = (r_u \times r_v) du dv$:
 S 在 (u, v) 对应的点处近似于平行四边形的小平面, 该平面的两条邻边分别为 $r_u du$ 与 $r_v dv$, $d\vec{S}$ 即对应该小平面的有向面积

1.4.2 向量场

- 散度 (divergence): 表征在某点处的单位体积内散发出来的矢量的通量

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **旋度 (curl):** 表示三维向量场对某一点附近的微元造成的旋转程度, 旋度向量的方向表示向量场在这一点附近旋转度最大的环量的旋转轴

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

- **单连通 (simply connected):** Ω 中的任意一条简单闭曲线都可以连续地在 Ω 中收缩成一点.
- 几种特殊的场:

– (保守场) $L(A, B)$ 逐段光滑, 则 $\int_{L(A, B)} Pdx + Qdy$ 与积分路径无关, 只与起终点有关.

等价表述: 对 D 内任意一条逐段光滑的封闭曲线 l_+ ,

$$\oint_{l_+} Pdx + Qdy = 0$$

– (梯度场) $\mathbf{F} = \nabla u = (u_x, u_y, u_z)$, 且 u 与 \mathbf{F} 的定义域相同.

– (无旋场) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, 二维平面上, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

保守场 \iff 梯度场 \implies 无旋场 (对二维、三维欧氏空间均成立)

无旋场 & 平面单连通区域 \iff 保守场

- 设 D 为单连通有界闭域, $du = Pdx + Qdy$, 则任两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in D$,

$$\int_{L(A, B)} Pdx + Qdy = u(x, y) \Big|_A^B$$

- **(Green 定理)** 在平面有界闭区域 D 上, 对于向量场 \mathbf{F} , 沿闭路 ∂D^+ 的环量 (通量) 等于闭域 D 上各点旋度 (散度) 的积分.

– 环量 (circulation) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{\tau}) dl = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdy$$

– 通量 (flux) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dl = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdy$$

更一般的, 可以记为

$$\oint_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy$$

- (Gauss 定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间有界闭域, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 为 Ω 上的连续可微向量场, 则

$$\iint_{\partial\Omega^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz$$

- (Stokes 定理) 设 S^+ 是空间中的一个定向曲面, 分片正则, ∂S^+ 为分段正则的空间闭曲线, S^+ 与 ∂S^+ 定向协调, 则

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot dS$$

1.5 常数项级数

1.5.1 非负项级数的收敛性

- (Cauchy 积分判敛法) 设 $f \in C[1, +\infty]$ 非负递减, $u_n = f(n)$, 则
 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\iff \int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
- 设 $\{u_n\}$ 是非负递减数列, 则
 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n u_{2^n}$ 敛散性相同
- (根值判敛法) 若对正项级数 $\{u_n\}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

此外, 将极限分别更换为上极限与下极限, 也有类似的结果

- (Raabe 判敛法) 若存在 $\rho > 1$, 使得当 n 足够大时, 有

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \rho$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

若 n 充分大时, 有

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

- (Leibniz 定理) 若交错项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ 满足 $\{u_n\}$ 非负递减, 则该级数收敛, 且 $S \leq u_1$.

1.5.2 任意项级数的收敛性

- (Dirichlet 判敛法) 若 $\sum_{i=1}^n u_n$ 有界, v_n 单调趋近于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛
- (Abel 判敛法) 若 $\sum_{i=1}^n u_n$ 收敛, v_n 单调有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛、
- 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ 收敛 $\iff \sum_{i=m}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ 收敛
其中 m 为充分大的正整数

1.5.3 函数项级数的收敛性

- (Weierstrass) 若存在非负常数项级数, 使得集合 I 上,

$$|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, \dots; x \in I$$

且 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

- (Dirichlet 判敛法) 若有:

- $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ 单调, 且在 I 上一致趋于 0
- 部分和数列 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一致有界

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq M, n = 1, 2, \dots; x \in I$$

则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛

- (Abel 判敛法) 若有:

- $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ 单调, 且在 I 上一致有界, 即

$$|v_n(x)| \leq M, n = 1, 2, \dots; x \in I$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 在 I 上一致收敛

则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛