第一章　复变函数

1.1　复变函数

1.1.1　函数的定义

给定 $G \in \mathbb{C}$ 及从 G 到 $\mathbb{C}$ 的对应法则 f，满足 $\forall z = x + iy \in G$，都有一个或多个 $\omega = u + iv \in \mathbb{C}$ 与之对应，则称 ω 为关于 z 的函数。

1.1.2　极限的定义

设 $\omega = f(z)$ 在 $B^*_\varphi(z_0) \triangleq \{z \in \mathbb{C} \big| 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 上有定义，若 $\exists A \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \mathrm{s.t.} 0 < |z - z_0| < \delta \to |f(z) - A| < \varepsilon$，则称 $z \to z_0$ 时，$f(z)$ 以 A 为极限。**注意这意味着沿任意路径逼近得到的极限都是** A。

1.1.3　连续性的定义

若 f 在实心邻域 B_φ 上有定义，且 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 连续。

1. 连续函数的和、差、积、商仍是连续函数
2. 设 $g = g(z)$ 连续，$\omega = f(g)$ 在 $g_0 = g(z_0)$ 处连续，则 $\omega = (g \circ f)(z)$ 在 z_0 连续。
3. 闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的连续函数一定能在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上取到最小（大）模长。

1.1.4　区域、曲线的定义

点集 $\mathscr{D}$ 称为一个**区域**，如果它是一个<u>开集</u> 且它连通。没有重点的连续曲线称为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**；若仅有曲线起点与终点重合，则为**简单闭曲线**，曲线以**逆时针**为正向。若一个区域内任意一条闭曲线的内部都属于该区域，那么该区域为**单连通域**。

1.1.5　复数的辐角

对于 $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$，定义$\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ 为辐角的主值；$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为负数的辐角函数。

1.2 解析函数

1.2.1 导数的定义

若极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在且有限，则 $f(z)$ 在 z_0 可导。

1.2.2 可微与微分

若 $\omega=f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有表达式

$$\Delta\omega=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\mathscr{A}\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z \tag{1.1}$$

$$\mathscr{A}\in\mathbb{C},\ \lim_{|z_0|\to 0}\rho(z)=0 \tag{1.2}$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 可微，$\mathscr{A}\Delta z$ 称为 $f(z)$ 在 z_0 的微分，记为 $\mathrm{d}\omega=\mathscr{A}\Delta z=f'(z_0)\mathrm{d}z$。

函数在一点可导和可微是等价的。

1.2.3 解析函数（或全纯函数、正则函数）

$\forall z_0\in\mathbb{C}$，若 $\omega=f(z)$ 在 z_0 的**某邻域内处处可导**，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析，z_0 为解析点；否则 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。注意可能函数在某一点可导，在其任意邻域上均不可导。在整个 $\mathbb{C}$ 上都解析的函数称为整函数。

★Lemma

1. 两个解析函数的和、差、积、商仍是解析函数
2. 设 $g=g(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，$\omega=f(g)$ 在 $g(\mathscr{D})$ 上解析，则 $\omega=(f\circ g)(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析。

1.2.4 函数可导的充要条件

Cauchy-Riemann 方程：设 $z=x+iy\in D,\omega=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 z 可导的充要条件 是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x,y) 可微 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

导数为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.4}$$

形式导数：用形式变元 $z,\bar{z}$ 表示 x,y，则 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})\end{cases}$，则 $\begin{cases}x_z=x_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\\ y_z=-y_{\bar{z}}=\frac{1}{2i}\end{cases}$ 进而可以求出 $u_z,u_{\bar{z}},v_z,v_{\bar{z}}$，可以发现

$$f_z=u_z+iv_z=\frac{1}{2}(u_x+u_y)+\frac{i}{2}(v_x-u_y) \tag{1.5}$$

$$f_{\overline{z}} = u_{\overline{z}} + iv_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x) \tag{1.6}$$

注意到 $f_{\overline{z}} = 0 \iff f$ 满足柯西-黎曼方程。

1.2.5　初等函数

指数函数

定义指数函数为

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{1.7}$$

该函数为整函数，$\exp z' = \exp z$，周期为 $2k\pi i$，值域为 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$，满足 $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2$，$|\exp z| = e^x$，$\arg(\exp z) = y$。

对数函数

定义为指数函数的反函数，即

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z), \mathrm{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i \tag{1.8}$$

，导数 $\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}$。

幂函数

定义幂函数为

$$z^b \triangleq \exp(b \cdot \mathrm{Ln} z) = e^{b\ln z} \cdot e^{2bk\pi i}, k \in \mathbb{Z} \tag{1.9}$$

多值性讨论

- $b \in \mathbb{Z}$, $e^{2bk\pi i} \equiv 1$，单值
- $b \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, $e^{2k\pi i\frac{m}{n}}$，n 值
- $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $e^{2(bk)\pi i}$ ，无穷多值
- $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $e^{2(\alpha+i\beta)k\pi i} = e^{-2\beta k\pi} \cdot e^{2\alpha k\pi i}$，仅模长部分便有无穷多值

取同一个第 k 支的情况下有 $(z^b)' = bz^{b-1}, z^{a+b} = z^a \cdot z^b, z^{-a} = \frac{1}{z^a}$

三角函数

根据指数函数的定义进行“逆推”，有

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.10}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1.11}$$

$\sin z$ 与 $\cos z$ 都是整函数，导数性质、和角公式与实数下相同。注意该函数**无界**。

1.3 复变函数积分

1.3.1 积分的计算

设 $f(z)$ 沿 C 连续，弧上第 k 段取点 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$，记 $\delta = \max\{|\Delta x_k + i\Delta y_k|\}$。

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n} [u(\xi_k + i\eta_k) + iv(\xi_k + i\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [(u\Delta x_k - v\Delta y_k) + i(u\Delta y_k + v\Delta x_k)] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\delta\to 0} \int_c [(u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i(u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x)] \end{aligned} \tag{1.12}$$

1.3.2 积分的性质

积分的复共轭：

$$\overline{\int_c f(z)\mathrm{d}z} = \int_c \overline{f}(z)\overline{\mathrm{d}z} \tag{1.13}$$

若曲线 C 上有 $\left|f(z)\right| \le M(< +\infty)$，$C$ 的弧长为 L，则

$$\left|\int_c f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML \tag{1.14}$$

（积分控制）。

一个重要的积分 $(n \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} I_n &= \oint_c \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi i[n=0] \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.3.3 柯西-古萨 (Cauchy-Goarsat) 定理

若函数 $f(z)$ 在**单连通区域** $\mathscr{B}$ 内**处处解析**，那么函数 $f(z)$ 沿 $\mathscr{B}$ 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为 0。

一种不严谨的理解：基于(**??**)，使用格林公式，以实部为例，变为 $\iint_D(-u_y - v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。若处处解析，则处处满足柯西-黎曼方程，故 $u_y = -v_x$，因此实部被积变量恒为 0。虚部同理。（由于 u, v 不一定有一阶**连续**偏导数，故不一能使用 Green 公式。）

1.3.4 复合闭路定理

连续变形原理

在区域内一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内做连续变形而改变它的值。

复合闭路定理

设 Jordan 闭曲线 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-+\cdots+\gamma_n^-$ 围成一个 (n+1)-连通区域 $\mathscr{D}$，$\omega=f(z)$ 在其上解析，在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，则 $\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$。

1.3.5　原函数与不定积分

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，定义原函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

，则 $F(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，且 $F'(z)=f(z),\forall z\in\mathscr{D}$。原函数可以有多个，但它们的差恒为常数。

Newton-Leibniz 定理

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1}f(z)\mathrm{d}z=G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}\tag{1.16}$$

分步积分公式

设 $\omega=f(z),\sigma=g(z)$ 在单连通域 D 上解析

$$\int_{z_0}^{z_1}f'(z)g(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1}-\int_{z_0}^{z_1}f(z)g'(z)\mathrm{d}z\tag{1.17}$$

三个等价命题

设 $\omega=f(z)$ 在 n-连通区域 D 上解析，则

(1) $\forall C\subseteq D$ 有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$

(2) $f(z)$ 在 D 上有积分路径无关性

(3) $f(z)$ 在 D 上有原函数

等价，且任意一条成立，牛顿-莱布尼茨定理即可使用。

1.3.6　Cauchy 积分公式

设 $\omega=f(z)$ 在单连通域 D 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则 $\forall z_0\in D,C\subseteq D$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\tag{1.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \tag{1.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \tag{1.20}$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|z-z_0| \le R} f(z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.21}$$

1.3.7 高阶导数

定理：解析函数 $f(z)$ 的**任意阶导数**仍为解析函数，其 n 阶导数满足

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{1.22}$$

其中 C 为围绕 z_0 的任意一条**正向**简单闭曲线，且 C 在单连通的解析区域 $\mathscr{D}$ 上。

莫雷拉 (Morera) 定理（柯西定理的逆定理）

若 $f(z)$ 在**单连通区域** $\mathscr{D}$ 内**连续**，且沿 $\mathscr{D}$ 内任意闭合曲线积分为 0（**路径无关**），则 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析。（在任意一个解析函数上修改一个点，函数仍然路径无关，因此连续是必要的。）

1.3.8 代数基本定理

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n \neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个零点（记重数）。

只要证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+, P_n$ 存在零点即可（从而可以不断地分离因式降阶）。

刘维尔（Liouville）定理

一个有界的正函数必然是常函数

证明. 设 $|f(z)| < M$，根据(**??**)

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{M}{R^2} \mathrm{d}l = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

故 $f(z_0)$ 为常数 □

代数基本定理证明

假设 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，设 $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$，则 $f(z)$ 为整函数。在 $|z| \to +\infty$ 时，显然 $|f(z)| \to \frac{1}{a_n |z|^n} \to 0$ 故存在 R 使得 $\forall |z| > R, f(|z|) < 1$，则在 $\mathbb{C}$ 上，

$$|f(z)| \le \max\{1, \max_{|z| \le R} \{|f(z)|\}\}$$

不等式右侧显然不等于 ∞（有界闭域上连续函数有界），故 $f(z)$ 为常函数，$P_n(z)$ 为常数，这与 $a_n \neq 0$ 矛盾。故 $P_n(z)$ 必有零点。

1.3.9 解析函数与调和函数

调和函数

设 $\varphi=\varphi(x,y)\in C^2(\mathscr{D})$ 且处处有 $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\equiv 0$，则 φ 为 $\mathscr{D}$ 上的调和函数。

设 $\omega=f(z)=u+iv$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，则 u,v 在 $\mathscr{D}$ 上调和。称上述 u,v 为 $\mathscr{D}$ 上的**共轭调和函数**。给出 $\mathscr{D}$ 上调和函数 u，找出其共轭调和函数 $\iff$ 找出解析函数 $f(z)$ 使 $Re\ f(z)=u$。

设 u 为**单连通域**上的调和函数，则必然存在 $f(z)$ 使 $Re\ f(z)=u$。注意多连通情况下不一定正确。

证明. 这样的 $f(z)$ 必定满足 $f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$,$U(z)$ 显然是解析的,故 $f(z)=\int_{z_0}^{z}U(z)\mathrm{d}z$ 即为满足条件的函数。 □

例：$u=x^3-3xy^2$

❝不定积分法

$f'(z)=(3x^2-3y^2)-i(-6xy)=3(x+iy)^2$

$f(z)=\int 3z^2\mathrm{d}z=z^3+c=(x+iy)^3+C=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)+C$

$v(x)=3x^2y-y^3-iC$

由于 $f(z)-u=iv$ 为虚数，故 C 必须为纯虚数。

❝偏积分法

$v_y=u_x=3x^2-3y^2, v_x=-u_y=6xy$

v 先关于 y 积分，即 $v=3x^2y-y^3+g(x)$，则 $v_x=6xy+g'(x)=6xy\implies g(x)=C$

1.4 级数

1.4.1 复数项级数

复数项序列

设 $\{x_i\},\{y_i\}$ 为实数序列，则 $z_n=x_n+iy_n$ 即为复数项序列。

级数

定义 $I=\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{n=0}^{\infty}x_n+i\sum_{n=0}^{\infty}y_n$（不论是否收敛都称为级数），级数的部分和定义为 $S_n=\sum_{k=0}^{n}z_k$。

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A\in\mathbb{C}$，则称 I 收敛
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 I 绝对收敛
3. 若 I 收敛但不绝对收敛，则称 I 条件收敛

复数项级数与常数项级数的关系

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

$\lim_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta$ 条件收敛或绝对收敛 $\iff \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$ 均条件收敛或绝对收敛

敛散判别法

(I) Cauchy 根式判别法

- $\sqrt[n]{|z_n|} < q < 1(\forall n > N)$，则 I 绝对收敛
- 只要满足 $\sqrt[n]{|z_n|} \geq q \geq 1$ 的项有无穷多个，则 I 发散
- 若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$，则 $q < 1$ 时 I 绝对收敛，$q > 1$ 时 I 发散。$q = 1$ 时无法确定，例如 $\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n^2}$ 三者收敛情况均不同

(II) D'Alembert 判别法

- $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < q < 1(\forall n > N)$ 则 I 绝对收敛
- $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq q \geq 1(\forall n > N)$ 则 I 发散
- 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q$，则 $q < 1$ 时绝对收敛，$q > 1$ 时绝对发散，$q = 1$ 时无法判断

(III) Dirichlet 判别法

1.4.2　幂级数

（复变）函数级数

定义 $\mathscr{D}$ 上的函数列 $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$，其级数为 $I = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$，当 z 固定时 I 就变成常数项级数。

幂级数

形如 $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 或 $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的级数称为幂级数。

1. 若 i 在 z_0 处收敛，则 $\forall z : |z| < |z_0|$，I 在 z 处收敛
2. 若 i 在 z_0 处发散，则 $\forall z : |z| > |z_0|$，I 在 z 处发散

证明. (1)
易知 $\lim_{n\to\infty} |C_n z_0^n|$ 收敛到 0，故其必有 $|C_n z_0^n| < M(\forall n \in \mathbb{N})$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 有界递增（并因此收敛），因此 $I(z)$ 绝对收敛。 □

收敛半径与收敛圆盘

$I=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径 R 定义为

$$
\begin{aligned}
R &\triangleq \sup\{|z| : I \text{ is convergent at } z\} \\
&= \sup\{|z| : I \text{ is absolutely convergent at } z\} \\
&= \inf\{|z| : I \text{ is divergent at } z\}
\end{aligned}
$$

（$R=+\infty$ 时函数级数在 $\mathbb{C}$ 上收敛。）定义 $C_R:|z|=R$ 为收敛圆周，$D_R:|z|\leq R$ 为收敛圆盘，考虑 C_R 上的点属于内外哪一侧：

- $I(z)$ 在 C_R 上处处发散：$I(z)=\sum z^n$
- $I(z)$ 在 C_R 上部分收敛：$I(z)=\sum \frac{z^n}{n}$，C_R 上仅 $z=1$ 处发散
- $I(z)$ 在 C_R 上全部收敛：$I(z)=\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}z^n$
- $I(z)$ 在 C_R 上全部绝对收敛：$I(z)=\sum \frac{z^n}{n^2}$，一旦有一个点绝对收敛，则整个圆上所有点都绝对收敛

收敛半径的计算

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$ 或者 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$

幂级数的和函数

设 $I=\sum_{n\geq 0}c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R，则在 $D:|z-a|<R$ 上有

(a) 和函数 $f(z)$ 为解析函数

(b) $f(z)$ 能够逐项求导

$$f'(z)=\sum_{n\geq 1}nc_n(z-a)^{n-1}$$

(c) $f(z)$ 能够逐项积分

$$F(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

(d) $f(z)$ 在 C_R 上至少存在一个奇点

1.4.3 Taylor 展开式

设 $\omega = f(z)$ 在单连通域 $\mathscr{D}$ 上解析，$z_0 \in \mathscr{D}, d = \inf\limits_{z \in \partial\mathscr{D}} |z - z_0|$，则 $\forall z \in B_d(z_0)$，有

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{1.23}$$

且该展开式唯一。

1.4.4 解析函数的零点

设 $\omega = f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析

1. 若 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点
2. 若 $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$，则称 z_0 为 m 级零点
3. 若 $f(z_0) = 0$，且某个去心领域 $B^*_\delta(z_0)$ 上 $f(z)$ 恒不为 0，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立零点

定理 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Longleftrightarrow \exists B_\delta(z_0)$ 及其上的解析函数 $\varphi(z)$，满足

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \varphi(z_0) \neq 0$$

定理 设 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上的所有零点都孤立，除非 $f(z) \equiv 0$。

1.4.5 解析函数的唯一性定理

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析，且 $a \in D$，若 $\exists \{z_n\} \in D$，满足

1. $z_n \neq a$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$
3. $f(z_n) = g(z_n), \forall n \geq 0$

则 $f(z) = g(z), \forall z \in D$

1.4.6 一般常级数

形如 $I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} c_{-n} \zeta^n = I_+ + I_-, \zeta = \frac{1}{z - z_0}$ 的级数称为一般常级数。

若 I_+ 的收敛半径为 R_+，I_- 的收敛半径为 R_-，则称 $|\frac{1}{R_-} < |z - z_0| < R_+|$ 为 I 的<u>收敛圆环域</u> $D(z_0, r_1, r_2)$。

1.4.7 洛朗级数

设 $\omega = f(z)$ 在 $D(z_0, r, R)$ 上解析，则 $\forall z \in D(z_0, r, R)$，有

$$f(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \tag{1.24}$$

其中 C 为 D 上任意环绕的 Jordan 闭曲线。该展开唯一，称为**Laurent 级数**。
注意 $f(z)$ 在 z_0 的导数一般不存在，故不能套用高阶导数公式。

1.5 留数

1.5.1 孤立奇点

定义　若 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，且在某个邻域 $B^*_\delta(z_0)$ 内 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**。
若 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为孤立奇点，且 $f(z)$ 在上述领域中的洛朗级数为 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_n)^n$，则

(A) z_0 为可去奇点，若级数中不含负幂项，且 $\lim\limits_{z \to z_0} = c_0$。若补充定义 $f(z_0) = c_0$，则 $f(z)$ 在 z_0 解析，因而以下命题等价：

- z_0 为可取奇点
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$
- $f(z)$ 在某邻域 $B^*_\delta(z_0)$ 内有界

(B) z_0 为 m 级极点，若展式中含有有限的负幂项，且最低负幂项为 $c_{-m}(z - z_0)^{-m}, c_{-m} \neq 0$。若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$，则必定为极点而不是本性奇点。以下命题等价

- z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点
- 存在某个 $B_0(z_0)$ 上的解析函数 $g(z)$，满足 $f(z) = g(z)(z - z_0)^{-m}$
- $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$
- z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点

(C) z_0 为本性奇点，若展式中含有无穷个负幂项。注意 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 必不存在。
(Weierstress) $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$，都存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B^*_\delta(z_0)$，满足 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$

若 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。设 $\zeta = \frac{1}{z}$，则 $\varphi(\zeta) = \sum_n c_{-n} \zeta^n = f(z)$，若 0 为 $\varphi(\zeta)$ 的本性/可去奇点或 m 级极点，则 ∞ 为 $f(z)$ 的本性/可去奇点或 m 级极点。

1.5.2　留数

设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的洛朗级数为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$C$ 为环绕 z_0 的正向简单曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} \tag{1.25}$$

这是由(??)直接得到的。定义留数为

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = c_{-1} \tag{1.26}$$

1.5.3　留数的计算规则

(A) 若 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

(B) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} \tag{1.27}$$

(C) 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z),Q(z)$ 在 z_0 解析，若 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且（可由 (A) 导出）

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(D) 若无穷远也为孤立极点，则无穷远处的留数定义为 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$，不难发现，此即所有有限点的留数之和的负数

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right] \tag{1.28}$$

1.5.4　留数的应用

(A) 形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分，对于 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，可以用 z 反求 $\cos\theta,\sin\theta$。

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{1.29}$$

(B) 形如 $\sum_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$ 为**有理函数**，且分母比分子的次数**至少高二次**，且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上，并且沿路径 $(-R,0)\to(R,0)\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}(-R,0), R\to+\infty$ 进行积分，设 z_k 为虚部为正数的全部奇点，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k] \tag{1.30}$$

(C) 形如 $\sum_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x(a>0)$ 的积分，其中 $R(x)$ 为**有理函数**，且分母比分子的次数**至少高一次**，且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上，并且沿路径 $(-R,0)\to(R,0)\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}(-R,0), R\to+\infty$ 进行积分，设 z_k 为虚部为正数的全部奇点，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] \tag{1.31}$$