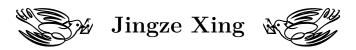




# Math Dominates the Universe 数学支配着宇宙



Wednesday 2nd March, 2022





# 目录

第一章	微积分 A1: 一元微积分与常微分方程	3
1.1	极限	3
1.2	Taylor 展开、Cauchy 中值定理	5
1.3	凸函数	6
1.4	积分	6
1.5	积分的应用	9
1.6	广义积分	10
1.7	常微分方程	10
第二章	微积分 <b>A2</b> : 多元函数微积分与级数	12
2.1	多元函数的连续、可导与可微	12
2.2	(广义) 含参积分	15
2.3	重积分	16
2.4	场论初步 (Green, Gauss & Stokes)	16
2.5	常数项级数	19
第三章	线性代数	21
3.1	基本概念及定义	21
第四章		
牙凹早	复变函数	22
<b>第四阜</b> 4.1		<b>22</b> 22
	复变函数	
4.1	复变函数	22 23
4.1 4.2	复变函数	22 23 25
4.1 4.2 4.3	复变函数	22 23 25 28
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	复变函数          解析函数          复变函数积分          级数          留数	22 23 25 28 32
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	复变函数       解析函数         复变函数积分       级数         留数          概率论	22

目录		3
•		

5.4	联合分布	41
第六章	随机过程	46
6.1	Bernoulli 过程与 Poisson 过程	46
6.2	离散时间 Markov 链	50
6.3	某次课	54
第七章	线性代数	<b>56</b>
7.1	基本事实	56
7.2	例题	56

# 第一章 微积分 A1: 一元微积分与常微分方程

# 1.1 极限

#### 1.1.1 基本事实 & 可避免的错误

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \frac{n}{n+1} < \theta < 1$
- Taylor 展开  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ , 不可忘记除以 n!
- (Leibniz) 两个函数之积的高阶导数

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

#### 1.1.2 例题

课本 p.57-9(14)

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$$

$$= \lim_{x \to \infty} (x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}})$$

$$= \lim_{x \to \infty} (\frac{(1 + \frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}) - \lim_{x \to \infty} (\frac{(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}})$$

$$= 2 * \frac{1}{2} - (-1) * \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

#### 《数学分析习题课讲义》2.3.2-6

求证:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \ (p > 1)$$
 (1.1)

收敛

证明.

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p} = r$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p} = r^2$$

$$\therefore S_n \le S_{2^n - 1} < 1 + r + r^2 + \dots + r^n < \frac{1}{1 - r}$$

又: $\{S_n\}$ 单调递增 : $\{S_n\}$ 收敛.

习题课 1-1

求证:

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}$$
 (1.2)

证明. 该式本质是 n 的多项式

let 
$$x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \dots + n^p) - n^{p+1}, \ y_n = (p+1)n^p$$

$$\mathbb{R} \mathbf{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p - n^p)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(p+1)\sum_{k=0}^p \binom{p}{k}n^k - \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k}n^k}{(p+1)\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k}n^k}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(p+1)\sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k}n^k - \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p+1}{k}n^k + \frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}}{(p+1)\sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k}n^k + p(p+1)n^{p-1}}$$

(只考虑最高次项 $)=\frac{1}{2}$ 

习题课 4-6(4)

己知  $f(n) = x^n \ln n$ ,求  $f^{(n)}(x)$ .

解. 直接用 Leibniz 公式会得到复杂的交错和, 因此考虑递推.

$$f^{(n)}(x) = (f'(x))^{(n-1)} = (nx^{n-1}\ln x + x^{n-1})^{(n-1)}$$

$$= (nx^{n-1}\ln x)^{(n-1)} + (n-1)! = n \cdot (x^{n-1}\ln x)^{(n-1)} + n! \frac{1}{n}$$

$$= n \cdot ((n-1)x^{n-2}\ln x + x^{n-2})^{(n-2)} + n! \cdot \frac{1}{n}$$

$$= n(n-1) \cdot \left(x^{n-2} \ln x\right)^{(n-2)} + n! \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n(n-1) \cdot \left((n-2)x^{n-3} \ln x + x^{n-3}\right)^{(n-3)} + n! \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n(n-1)(n-2) \cdot \left(x^{n-3} \ln x\right)^{(n-3)} + n! \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \dots = n! \left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

#### 习题课 4-7

定义

$$P_{n,m}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (1 - x^m)^n$$

,求  $P_{n,m}(1)$ .

解.

$$P_{n,m}(1) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (1-x)^n (1+x^2+\dots+x^{m-1})^n$$
 (用 Leibniz 定理展开) =  $(-1)^n n! \cdot m^n$ 

 $*(1-x)^n$  求至少 n 阶导数才非 0.

#### 微积分 A 期中讲座

定义  $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = \sin a_n$ ,求证:  $\lim_{n \to \infty} n \cdot a_n^2 = 3$ .

证明. 用 stolz 定理表现类等差数列  $\frac{1}{a_s^2}$  公差趋向  $\frac{1}{3}$ .

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n^2 - \sin^2 a_n}{a_n^2 \sin^2 a_n}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(x + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^4} = \frac{1}{3}$$

# 1.2 Taylor 展开、Cauchy 中值定理

#### 课本 p.125-10

设函数 y=f(x) 在 (-1,1) 内二阶可导, $f^{''}(0)\neq 0$ .  $\forall x\in (-1,1), x\neq 0$ , $\exists \ \theta(x)$  满足  $f(x)-f(0)=xf^{'}(x\cdot \theta(x))$ ,证明:  $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$ 

证明. 用 Cauchy 中值定理将  $\theta(x)$  分离出来.

$$f''(\zeta_x) \cdot \theta(x)x = f'(x \cdot \theta(x)) - f'(0)$$

$$f''(\zeta_x) \cdot \theta(x)x = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{f''(\zeta_x)} \cdot \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{f''(\zeta_x)} \cdot \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}$$

$$= \frac{f''(0)}{2f''(0)} = \frac{1}{2} (x \to 0)$$

#### 习题课 6-2-1

设 f(x) 在 [a,b] 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,证明  $\exists \xi \in (a,b)$ ,使得

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明. 令 
$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
   
则  $\frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}{x - b} = \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = g'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta - a) - (f(\eta) - f(a))}{(\eta - a)^2}$    
而  $f(a) = f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2$    
故  $g'(\eta) = \frac{1}{2}f''(\xi)$ 

# 1.3 凸函数

- 开区间上的凸函数连续,闭区间上的凸函数未必连续
- 开区间上的凸函数处处存在两个单侧导数,且对于下凸函数,满足  $f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x)$ ,但是导数不一定存在

# 1.4 积分

#### 1.4.1 基本定理

- f(x) 在 J 上非一致连续  $\iff$   $\exists \varepsilon_0 > 0, \ x_n, x_n' \in J,$ 满足  $|x_n x_n'| < \frac{1}{n}$ ,但  $|f(x_n) f(x_n')| > \varepsilon_0, \forall n \ge 1$
- 有界闭区间上的连续函数、单调函数黎曼可积,可积必有界

- (Lebesgue) [a,b] 上的有界函数 f(x) 可积  $\iff$  f(x) 在 [a,b] 上的间断点集为零测集
- (Cauchy-Schwarz)

$$\left(\int_a^b f \cdot g\right)^2 \le \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

• (积分中值定理) 设 f(x) 在 [a,b] 上连续,则

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_{a}^{b} g(x)dx$$

- 可积函数 f(x) 的变上限积分  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$  连续,且若 f(x) 在  $x_0$  处**连续**,即有  $g'(x_0) = f(x_0)$
- 导函数不一定可积,如:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

其中 F'(x) 在 [0,1] 上无界,不可积.

#### 1.4.2 常见不定积分

$$\begin{split} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \\ \int \frac{1}{x^2 + a} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{a}}) + C \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan \frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}} = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C \\ \int \sqrt{x^2 - 1} \mathrm{d}x &= \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \mathrm{d}(\sec t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} \mathrm{d}t = \int \frac{\sin^2 t \mathrm{d}(\sin t)}{\cos^4 t} \\ &= \int \frac{u^2}{(1 - u)^2 (1 + u)^2} \mathrm{d}u = \int \frac{1}{4} \left(\frac{u}{(1 - u)^2} - \frac{u}{(1 + u)^2}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(1 - u)^2} - \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{(1 + u)^2}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} + \ln \frac{1 - u}{1 + u}\right) + C \\ (u = \sin t) &= \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin t}{\cos t} + C \end{split}$$

$$(\cos t = \frac{1}{x}) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d(\sin x) = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n$$

$$\implies J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \implies J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

#### 1.4.3 例题

#### Lijun Yang: Nov.18 P25

设 f(x) 在 [a,b] 上连续可微,且 f(a) = 0. 证明:

$$\int_{a}^{b} f^{2}(x) dx \le \frac{1}{2} (b - a)^{2} \int_{a}^{b} [f'(x)]^{2} dx$$

证明.

$$f(x) = \int_{a}^{x} f'(t)dt = \int_{a}^{x} 1 \cdot f'(t)dt$$

$$f^{2}(x) = \left(\int_{a}^{x} 1 \cdot f'(t)dt\right)^{2}$$
(Cauchy)  $\leq \left(\int_{a}^{x} 1 \cdot dt\right) \cdot \left(\int_{a}^{x} [f'(t)]^{2}dt\right)$ 

$$\leq (x - a) \int_{a}^{b} [f'(t)]^{2}dt$$

$$\int_{a}^{b} f^{2}(x)dx \leq \int_{a}^{b} (x - a)dx \int_{a}^{b} [f'(t)]^{2}dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(b - a)^{2} \int_{a}^{b} [f'(x)]^{2}dx$$

#### 习题课 8-4-4.4

设  $k, n \in \mathbb{Z}_+$ , 求证:

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$
 (1.3)

证明.

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos kx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((n+k)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((n-k)x) dx$$
$$= \frac{\pi}{2} [n=k]$$

1.5 积分的应用

• 极坐标下的面积

$$S = \int_{a}^{n} \frac{1}{2} f^{2}(\theta) d\theta$$

• 弧长

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

• 极坐标下曲线的弧长

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

曲率

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

或

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

REMARK: 圆的曲率为  $\frac{1}{R}$ 

• 绕 x, y 轴的旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx, V_y = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) dx$$

• 绕 x, y 轴的旋转体表面积

$$S_x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx, S_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

• 曲线的形心(质量均匀时即为质心)

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(t)\sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}, \bar{y} = \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}$$

• 平面图形的形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dt}{\int_a^b f(x) dt}, \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dt}{\int_a^b f(x) dt}$$

- (Guldin,I,II)
  - 曲线绕直线旋转所得的旋转面的侧面积,等于曲线的弧长,乘以形心绕直线旋转一周的周长
  - 封闭图形绕直线旋转所得的旋转面的体积,等于图形的面积,乘以形心绕直线旋转 一周的周长

# 1.6 广义积分

#### 1.6.1 定义

设 f(x) 在 [a,b) 上有唯一瑕点 b,且  $\forall b' \in (a,b)$ ,f(x) 在 [a,b') 上可积,则 f(x) 在该区间上**内闭可积**.

#### 1.6.2 Dirichlet 判敛

设有:

- 1. f(x) 在 [a,b) 上内闭可积,且存在 M>0,使得  $|\int_a^{b'}f(x)\mathrm{d}x|< M, \forall b'\in [a,b)$
- 2. g(x) 在 [a,b) 上单调且  $\lim_{x\to b^-}g(x)=0$

则广义积分  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  收敛

#### 1.6.3 Abel 判敛

设有:

- 1. f(x) 在 [a,b) 上内闭可积,且  $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$  收敛
- 2. (ii) g(x) 在 [a,b) 上单调有界

则广义积分  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  收敛

# 1.7 常微分方程

#### 1.7.1 常数变易法

1.  $\Re f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$ ,

- 2. 先解 f'(x) + p(x)f(x) = 0, 得  $f(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$
- 3. 进一步设原方程解为  $f(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$
- 4.  $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$
- 5.  $f(x) = e^{-\int p(x)dx} (\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C)$

#### 1.7.2 特殊可降阶高阶常微分方程

方程中不显含自变量 x,可以表示为  $F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}) = 0$ . 令  $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ,则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

,问题转化为函数 p 关于自变量 y 的一阶常微分方程  $F(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}).$ 

#### 1.7.3 二阶线性常系数齐次方程

设 p,q 为实常数,则对常微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

- ,称  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  为特征方程,令  $\Delta = p^2 4q$ ,设方程的根为  $\lambda_{1,2}$ .
  - $\Delta > 0$ ,  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
  - $\Delta = 0$ ,  $y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}$
  - $\Delta < 0$ , 有二虚根  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ,  $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

## 1.7.4 Euler 方程

设  $a_0, a_1, \ldots, a_n$  为实常数,则方程

$$x^{n}y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{1}xy' + a_{0}y = 0$$

称为 Euler 方程,一般作变量替换  $t = \log |x|$  将方程化为以 t 为自变量的常系数方程,第 k 项转化为:

$$a_k x^k y^{(k)} = a_k x^k \cdot \boldsymbol{y}(t(x))^{(k)}$$

$$= a_k x^k \cdot (\boldsymbol{y}'(t) \cdot \frac{1}{x})^{(k-1)}$$

$$= a_k x^k \cdot (\boldsymbol{y}''(t))^{(k-2)}$$

$$= \dots$$

# 第二章 微积分 A2: 多元函数微积分与级数

# 2.1 多元函数的连续、可导与可微

#### 2.1.1 基本定理

- f(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续  $\iff$  动点 (x,y) 以任意路径趋向  $(x_0,y_0)$  时的极限全部等于  $f(x_0,y_0)$
- f(x,y)在 $(x_0,y_0)$ 可微  $\iff$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \Delta x - f'_y(x_0, y_0) \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

- 函数是否连续与偏导数是否存在无关
- 函数可微 ⇒ 偏导数存在 偏导数连续 ⇒ 函数可微
   ○邻域上偏导数有界 ⇒ 函数可微
   邻域上偏导数只有一个不一致连续 ⇒ 函数可微
- 梯度的定义

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{X}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{X}_0}$$

- $J(f \circ g) = J(f) \cdot J(g)$  (一阶微分形式不变)  $df(X_0) = Jf(X_0)dX$
- 多元隐函数的偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{X}, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{X}, y)}$$

• 向量值隐函数的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = -\left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

理解:记 
$$G_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}, y_1(\mathbf{X}), \dots, y_m(\mathbf{X})) \equiv 0$$

$$\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \frac{\partial (y_1, \dots, y_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} + \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial (G_1, \dots, G_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = 0$$

• 隐函数的逆映射: 对于  $Y = f(x), f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ , 当  $\det(Jf(X_0))$  非零时, 有:

$$Jf^{-1}(Y_0) = [Jf(Y_0)]^{-1}, Y_0 = f(X_0)$$

★ Taylor 展开

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^k f(x_0, y_0) + o\left( (\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^n \right)$$

★ (多元函数的中值定理) 设  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  为  $C^1$  函数,则  $\forall a,b \in \Omega$ ,∃  $\theta \in (0,1)$ ,s.t.

$$f(b) - f(a) = \nabla f(a + (b - a)\theta) \cdot (b - a)$$

\* 定理不能推广到向量值函数的情形

#### 2.1.2 极值与条件极值

★ f(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  处有极值的条件

(必要) 
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$
 (极值点必为驻点)

(必要)  $H(x_0, y_0)$  非不定

(充分)  $H(x_0, y_0)$  正定 (极小值) 或负定 (极大值)

(充分) 在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域上  $H(x_0, y_0)$  半正定 (极小值) 或半负定 (极大值)

•(条件极值的必要条件)设原问题的 Lagrange 函数对应无约束问题  $\max(\min)$   $L(x, \lambda)$ ,则原问题的每个解必然对应着无约束问题的一个驻点。即答案必然在无约束问题的驻点中

#### 2.1.3 几何应用

• 平面及其法线(直线及其法平面)公式 记  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处法线方向向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ ,则法线为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

法平面使得  $\vec{P_0P}$  与  $\vec{n}$  垂直, 即点积为零

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

因此,只要求出法线方向向量即可快速表达法线及切平面

- 空间曲面的表达方式及法向量
- $\circ$  空间曲面可以看做是二维空间到三维欧氏空间投影的像,故可以用以 x,y 为自变量确定 z 的隐函数方程表示

$$F(x, y, z) = 0, \vec{n} = \operatorname{grad} F(P_0)$$

由于沿任何在该点切平面内的方向向量都使函数值保持不变,故均与梯度垂直,即梯度 为法向量,表示函数 F(x,y,z) 变化最快的方向.

。 借助辅助变量 P = (u, v) 表示

$$S:$$
 
$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$
 注意: 这与  $F(x,y,z)=0$  完全不同  $z=z(u,v)$ 

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$
 注意: 这与  $F(x,y,z) = 0$  完全不同  $z = z(u,v)$  化曲为平,切平面的参数方程: 
$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}_{P_0} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

• 空间曲线的表达方式及切向量

$$\circ \mathcal{L} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & \vec{n} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \\ z = z(y) \end{cases}$$

 $\circ$   $\mathcal{L}:$   $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$  曲线可以视作两空间曲面的交,其切线为两切平面的交,即垂直于

两个**法向量**,因而可用叉积确定  $\vec{n} = \operatorname{grad} F(P_0) \times \operatorname{grad} G(P_0)$ 

#### 2.1.4 例题

课本 p.66-3(4)

以下方程确定了 
$$z = f(x,y)$$
: 
$$\begin{cases} x = u \cos v \ (\bigstar) \\ y = u \sin v \ (\diamondsuit) \end{cases}$$
 , 计算:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .  $z = v$ 

解.

将 x, y 视为自变量,将 u, v 视作  $u = \mathbf{u}(x, y), v = \mathbf{v}(x, y),$ 则

$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y))$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

对 (★) 与 (☆) 两边依次求 
$$x,y$$
 的偏导 
$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos v - u \frac{\partial v}{\partial x} \sin v$$
 
$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \sin v + u \frac{\partial v}{\partial x} \cos v$$
 
$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} \cos v - u \frac{\partial v}{\partial y} \sin v$$
 
$$1 = \frac{\partial u}{\partial y} \sin v + u \frac{\partial v}{\partial y} \cos v$$
 从而  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin v$  
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\sin v}{u} \right) = \frac{\sin v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos v}{u} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sin 2v}{u^2}$$
 
$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\sin v}{u} \right) = \frac{\sin v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\cos v}{u} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$$

注: 最后仍可用 u,v 表示。

# 2.2 (广义) 含参积分

#### 2.2.1 累次积分

- f(x,y) 在有界闭域  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  上连续  $\Longrightarrow f(x,y)$  在  $\Omega$  上一致连续.
- (积分号下可求极限) f(x,y) 为矩形有界闭域 D 上的连续函数时,积分运算和极限运算可以交换顺序.
- (积分号下可求导) 设 f(x) 与  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在  $D = [a,b] \times [c,d]$  上连续,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left[ \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right] = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \mathrm{d}x$$

若要将 b 改为  $+\infty$ ,则需等式右侧的积分关于  $y \in [c,d]$ 一致收敛.

• (积分号下求积分公式) f(x,y) 在  $D = [a,b] \times [c,d]$  上连续,则

$$\int_{a}^{d} dy \int_{a}^{b} f(x, y) dx = \int_{a}^{b} dx \int_{a}^{d} f(x, y) dy$$

若要将 b 改为  $+\infty$ ,则需  $\int_{a}^{+\infty} f(x,y) dx$  关于  $y \in [c,d]$  一致收敛.

#### 2.2.2 广义积分

• (连续性定理) 设 f(x) 在  $[a,\infty) \times K \subset \mathbb{R}^2$ ,其中 K 为某一区间。那么,若广义含参积分

$$J(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x$$

关于  $y \in K$  一致收敛,则 J(y) 在区间 K 上连续.

#### 2.2.3 例题

课本 p.110-5(2)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

## 2.3 重积分

#### 2.3.1 基本定理

- 若 f(x,y) 在闭矩形域 K 上可积,则它在 K 上有界.
- $D \subset \mathbb{R}^2$  为有界集合,则 D 有面积  $\iff \partial D$  为零测集. 一个平面集合不可求面积与面积为零是两回事.
- (平面变换的面积公式) 当  $(u,v) \mapsto (x(u,v),y(u,v))$  可微、正则且——对应时,面积微元

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

体积微元的变换类似.

- 球坐标系体积微元  $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\;\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ , $\varphi$  为  $\vec{r}$  与 z 轴的夹角. 柱坐标系体积微元  $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\;\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
- Euler-Poisson 积分

$$\begin{split} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \\ I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \mathrm{d}r \quad (注意 \ x,y > 0 \ \text{对应的} \ \theta \ 范围) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\ I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{split}$$

# 2.4 场论初步 (Green, Gauss & Stokes)

#### 2.4.1 曲线积分与曲面积分

• (第一型曲线积分) 设曲线 C 有正则参数表达  $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ ,则

$$\int_C f(x, y, z) dl \triangleq \int_a^b f(r(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

• (第二型曲线积分) 设向量场  $\mathbf{F}(x,y,z) = (M(...),N(...),P(...))$ ,  $C^+$  有正则表示 r(t) = (x(t),y(t),z(t)),  $t:a\to b$ ,则

$$\begin{split} \int_{C} \mathbf{F}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r} &\triangleq \int_{C} \mathbf{F} \cdot \tau \mathrm{d}l & \qquad \qquad \mathbf{定义} \\ &= \int_{C} \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) \mathrm{d}t & \qquad \qquad \text{计算公式} \\ &= \int_{C} [Mx'(t) + Ny'(t) + Pz'(t)] \mathrm{d}t & \qquad \qquad \mathsf{内积展开} \\ &= \int_{C} M \mathrm{d}x + N \mathrm{d}y + P \mathrm{d}z & \qquad \qquad \mathsf{上式的缩写} \end{split}$$

• (第一型曲面积分) 设曲面 S 有正则的参数表示  $r = r(u, v), (u, v) \in D$ ,则

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS \triangleq \iint_{D} f(r(u, v)) |r_{u} \times r_{v}| du dv$$

对显式曲面 z=z(x,y), 面积微元为  $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ 

•(第二型曲面积分)设向量场  $\mathbf{F}(x,y,z)=(M(\dots),N(\dots),P(\dots))$ 

$$\iint_{S^{+}} d\vec{S} \triangleq \iint_{S} (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dS$$

$$= \iint_{D} \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot (r_{u} \times r_{v}) du dv$$

$$= \iint_{S^{+}} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

其中  $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$  为面积微元  $\mathrm{d}S$  在 xy 平面上的投影 现考虑其中一个分量,若  $S^+$  正法向向上,D 为 S 在 xy 平面上的投影,则

$$\iint_{S^+} R dx \wedge dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

将第二型曲面积分转换为二重积分.

• 为什么  $d\vec{S} = (r_u \times r_v) du dv$ : S 在 (u,v) 对应的点处近似于平行四边形的小平面,该平面的两条邻边分别为  $r_u du$  与  $r_v dv$ , $d\vec{S}$  即对应该小平面的有向面积

#### 2.4.2 向量场

• 散度 (divergence): 表征在某点处的单位体积内散发出来的矢量的通量

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

• **旋度 (curl)**:表示三维向量场对某一点附近的微元造成的**旋转程度**,旋度向量的方向表示向量场在这一点附近**旋转度最大的环量的旋转轴** 

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

- 单连通 (simply connected):  $\Omega$  中的任意一条简单闭曲线都可以**连续地在**  $\Omega$  中收缩成一点.
- 几种特殊的场:
  - (保守场) L(A,B) 逐段光滑,则  $\int_{L(A,B)} P dx + Q dy$  与积分路径无关,只与起终点有关.

等价表述:对 D 内任意一条逐段光滑的封闭曲线  $l_+$ ,

$$\oint_{l_{\perp}} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = 0$$

- (梯度场)  $\mathbf{F} = \nabla u = (u_x, u_y, u_z)$ ,且  $u \in \mathbf{F}$  的定义域相同.
- (无旋场)  $rot \mathbf{F} = 0$ ,二维平面上, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

保守场  $\iff$  梯度场  $\implies$  无旋场(对二维、三维欧氏空间均成立) 无旋场 & 平面单连通区域  $\iff$  保守场

• 设 D 为单连通有界闭域,du = Pdx + Qdy,则任两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in D$ ,

$$\int_{L(A,B)} P dx + Q dy = u(x,y) \Big|_{A}^{B}$$

- •(Green 定理)在平面有界闭区域 D 上,对于向量场  $\mathbf{F}$ ,沿闭路  $\partial D^+$  的环量(通量)等于闭域 D 上各点旋度(散度)的积分.
  - 环量 (circulation) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{\tau}) dl = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dx dy$$

- 通量 (flux) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dl = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy$$

更一般的,可以记为

$$\oint_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

• (Gauss 定理) 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  为空间有界闭域,  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  为  $\Omega$  上的连续可微向量场,则

$$\iint_{\partial\Omega^{+}} (\mathbf{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz$$

• (Stokes 定理) 设  $S^+$  是空间中的一个定向曲面,分片正则, $\partial S^+$  为分段正则的空间闭曲线, $S^+$  与  $\partial S^+$  定向协调,则

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S^+} \mathrm{rot} \mathbf{F} \cdot dS$$

# 2.5 常数项级数

## 2.5.1 非负项级数的收敛性

- (Cauchy 积分判敛法) 设  $f \in C[1, +\infty]$  非负递减, $u_n = f(n)$ ,则  $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi$ 敛  $\iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \psi$ 敛
- 设  $\{u_n\}$  是非负递减数列,则  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n u_{2^n}$  敛散性相同
- (根值判敛法) 若对正项级数  $\{u_n\}$  有

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

若  $\rho < 1$ ,则  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  收敛

若  $\rho > 1$ ,则  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  发散

此外,将极限分别更换为上极限与下极限,也有类似的结果

• (Raabe 判敛法) 若存在  $\rho > 1$ ,使得当 n 足够大时,有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \ge \rho$$

则  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  收敛.

若 n 充分大时,有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \le 1$$

则  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  发散.

• (Leibniz 定理) 若交错项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$  满足  $\{u_n\}$  非负递减,则该级数收敛,且  $S \leq u_1$ .

## 2.5.2 任意项级数的收敛性

- (Dirichlet 判敛法) 若  $\sum_{i=1}^n u_n$  有界,  $v_n$  单调趋近于 0, 则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$  收敛
- (Abel 判敛法) 若  $\sum_{i=1}^n u_n$  收敛, $v_n$  单调有界,则级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$  收敛、
- 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$  收敛  $\iff \sum_{i=m}^{+\infty}\ln(1+a_n)$  收敛 其中 m 为充分大的正整数

#### 2.5.3 函数项级数的收敛性

• (Weierstrass) 若存在非负常数项级数,使得集合 I 上,

$$|u_n(x)| \le M_n, n = 1, 2, \dots; x \in I$$

且  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  收敛,则函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  在 I 上一致收敛

- (Dirichlet 判敛法) 若有:
  - $\circ v_n(x)$  对任意固定的  $x \in I$  单调,且在 I 上一致趋于 0
  - $\circ$  部分和数列  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  一致有界

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \le M, n = 1, 2, \dots; \ x \in I$$

则函数级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$  在 I 上一致收敛

- (**Abel** 判敛法) 若有:
  - $\circ v_n(x)$  对任意固定的  $x \in I$  单调,且在 I 上一致有界,即

$$|v_n(x)| \le M, n = 1, 2, \dots; x \in I$$

 $\circ \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  在 I 上一致收敛

则函数级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$  在 I 上一致收敛

# 第三章 线性代数

# 3.1 基本概念及定义

- 定义 线性运算 指向量的加法与数乘。
- 定义 向量空间为带有线性运算的集合  $\mathbb{R}^m$ 被称为向量空间。
- 定义 映射  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  若满足
  - 1. 任意  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , 都有 f(x + x') = f(x) + f(x')
  - 2. 任意  $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ , 都有 f(kx = kf(x))

则 f 为从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的 线性映射。

定义 从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^n$  的线性映射称为线性变换

## 4.1 复变函数

#### 4.1.1 函数的定义

给定  $G \in \mathbb{C}$  及从 G 到  $\mathbb{C}$  的对应法则 f,满足  $\forall z = x + iy \in G$ ,都有一个或多个  $\omega = u + iv \in \mathbb{C}$  与之对应,则称  $\omega$  为关于 z 的函数。

#### 4.1.2 极限的定义

设  $\omega = f(z)$  在  $B_{\varphi}^*(z_0) \triangleq \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < \rho\}$  上有定义,若  $\exists A \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , s.t. $0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$ ,则称  $z \rightarrow z_0$  时,f(z) 以 A 为极限。注意这意味着沿任意路径逼近得到的极限都是 A。

#### 4.1.3 连续性的定义

若 f 在实心邻域  $B_{\varphi}$  上有定义,且  $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ ,则称 f(z) 在  $z_0$  连续。

- 1. 连续函数的和、差、积、商仍是连续函数
- 2. 设 g=g(z) 连续, $\omega=f(g)$  在  $g_0=g(z_0)$  处连续,则  $\omega=(g\circ f)(z)$  在  $z_0$  连续。
- 3. 闭区域  $\overline{\mathcal{D}}$  上的连续函数一定能在  $\overline{\mathcal{D}}$  上取到最小(大)模长。

#### 4.1.4 区域、曲线的定义

点集  $\mathscr{D}$  称为一个区域,如果它是一个<u>开集</u> 且它连通。没有重点的连续曲线称为简单曲线 或 **Jordan 曲线**;若仅有曲线起点与终点重合,则为简单闭曲线,曲线以<mark>逆时针</mark>为正向。若一个区域内任意一条闭曲线的内部都属于该区域,那么该区域为单连通域。

#### 4.1.5 复数的辐角

对于  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,定义 $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$  为辐角的主值; $\operatorname{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  为负数的辐角函数。

# 4.2 解析函数

#### 4.2.1 导数的定义

若极限  $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$  存在且有限,则 f(z) 在  $z_0$  可导。

#### 4.2.2 可微与微分

若  $\omega = f(z)$  在  $z_0$  的某个邻域内有表达式

$$\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \mathcal{A}\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z \tag{4.1}$$

$$\mathscr{A} \in \mathbb{C}, \lim_{|z_0| \to 0} \rho(z) = 0$$
 (4.2)

则称 f(z) 在  $z_0$  可微, $\Delta z$  称为 f(z) 在  $z_0$  的微分,记为  $d\omega = \Delta z = f'(z_0)dz$ 。 函数在一点可导和可微是等价的。

#### 4.2.3 解析函数(或全纯函数、正则函数)

 $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ ,若  $\omega = f(z)$  在  $z_0$  的某邻域内处处可导,则称 f(z) 在  $z_0$  处解析, $z_0$  为解析点; 否则  $z_0$  为 f(z) 的奇点。注意可能函数在某一点可导,在其任意邻域上均不可导。在整个  $\mathbb{C}$  上都解析的函数称为整函数。

#### ★Lemma

- 1. 两个解析函数的和、差、积、商仍是解析函数
- 2. 设 g = g(z) 在  $\mathcal{D}$  上解析, $\omega = f(g)$  在  $g(\mathcal{D})$  上解析,则  $\omega = (f \circ g)(z)$  在  $\mathcal{D}$  上解析。

#### 4.2.4 函数可导的充要条件

Cauchy-Riemann 方程: 设  $z=x+iy\in D, \omega=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ,则 f(z) 在 z 可导的充要条件 是 u(x,y) 与 v(x,y) 在 (x,y) 可微 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.3}$$

导数为

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$
(4.4)

形式导数: 用形式变元 
$$z, \overline{z}$$
 表示  $x, y$ ,则 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{cases}$$
,则 
$$\begin{cases} x_z = x_{\overline{z}} = \frac{1}{2} \\ y_z = -y_{\overline{z}} = \frac{1}{2i} \end{cases}$$
 进而

可以求出  $u_z, u_{\overline{z}}, v_z, v_{\overline{z}}$ , 可以发现

$$f_z = u_z + iv_z = \frac{1}{2}(u_x + u_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$
(4.5)

$$f_{\overline{z}} = u_{\overline{z}} + iv_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x)$$
 (4.6)

注意到  $f_z = 0 \iff f$  满足柯西-黎曼方程。

#### 4.2.5 初等函数

#### 指数函数

定义指数函数为

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{4.7}$$

该函数为整函数,  $\exp z' = \exp z$ , 周期为  $2k\pi i$ , 值域为  $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ , 满足  $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ ,  $|\exp z| = e^x$ ,  $\arg(\exp z) = y$ .

#### 对数函数

定义为指数函数的反函数,即

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z), \ln(z) = \ln(z) + 2k\pi i$$
 (4.8)

,导数  $\frac{\mathrm{d} \ln z}{\mathrm{d} z} = \frac{1}{z}$ 。

#### 幂函数

定义幂函数为

$$z^{b} \triangleq \exp(b \cdot \operatorname{Ln} z) = e^{b \ln z} \cdot e^{2bk\pi i}, k \in \mathbb{Z}$$
(4.9)

多值性讨论

- $b \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{2bk\pi i} \equiv 1$ ,单值
- $b \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ ,  $e^{2k\pi i \frac{m}{n}}$ , n f
- $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $e^{2(bk)\pi i}$ , 无穷多值
- $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $e^{2(\alpha+i\beta)k\pi i} = e^{-2\beta k\pi} \cdot e^{2\alpha k\pi i}$ , 仅模长部分便有无穷多值

取同一个第 k 支的情况下有  $(z^b)'=bz^{b-1}, z^{a+b}=z^a\cdot z^b, z^{-a}=\frac{1}{z^a}$ 

#### 三角函数

根据指数函数的定义进行"逆推",有

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{4.10}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{4.11}$$

 $\sin z$ 与  $\cos z$  都是整函数,导数性质、和角公式与实数下相同。注意该函数**无界**。

# 4.3 复变函数积分

#### 4.3.1 积分的计算

设 f(z) 沿 C 连续,弧上第 k 段取点  $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ ,记  $\delta = \max\{|\Delta x_k + i\Delta y_k|\}$ 。

$$I_{n} = \sum_{i=1}^{n} [u(\xi_{k} + i\eta_{k}) + iv(\xi_{k} + i\eta_{k})](\Delta x_{k} + i\Delta y_{k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(u\Delta x_{k} - v\Delta y_{k}) + i(u\Delta y_{k} + v\Delta x_{k})]$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{c} [(udx - vdy) + i(udy + vdx)]$$

$$(4.12)$$

#### 4.3.2 积分的性质

积分的复共轭:

$$\overline{\int_{c} f(z) dz} = \int_{c} \overline{f}(z) \overline{dz}$$
(4.13)

若曲线 C 上有  $|f(z)| \le M(<+\infty)$ ,C 的弧长为 L,则

$$\left| \int_{c} f(z) dz \right| \le ML \tag{4.14}$$

(积分控制)。

一个重要的积分  $(n \in \mathbb{Z})$ 

$$I_n = \oint_c \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) \mathrm{d}\theta = 2\pi i [n = 0]$$
(4.15)

#### 4.3.3 柯西-古萨 (Cauchy-Goarsat) 定理

若函数 f(z) 在**单连通区域**  $\mathscr{B}$  内**处处解析**,那么函数 f(z) 沿  $\mathscr{B}$  内的任何一条封闭曲线 C 的积分为 0。

一种不严谨的理解: 基于(4.12),使用格林公式,以实部为例,变为  $\iint_D (-u_y-v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。若处处解析,则处处满足柯西-黎曼方程,故  $u_y=-v_x$ ,因此实部被积变量恒为 0。虚部同理。(由于 u,v 不一定有一阶**连续**偏导数,故不一能使用 Green 公式。)

#### 4.3.4 复合闭路定理

#### 连续变形原理

在区域内一个解析函数沿闭曲线的积分,不因闭曲线在区域内做连续变形而改变它的值。

#### 复合闭路定理

设 Jordan 闭曲线  $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-+\cdots+\gamma_n^-$  围成一个 (n+1)-连通区域  $\mathcal{D}$ , $\omega=f(z)$  在其上解析,在  $\overline{\mathcal{D}}$  上连续,则  $\oint_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=0$ 。

#### 4.3.5 原函数与不定积分

设  $\omega = f(z)$  在单连通域  $\mathcal{D}$  上解析, 定义原函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$$

,则 F(z) 在  $\mathcal{D}$  上解析,且  $F'(z) = f(z), \forall z \in \mathcal{D}$ 。原函数可以有多个,但它们的差恒为常数。

#### Newton-Leibniz 定理

设  $\omega = f(z)$  在单连通域  $\mathcal{D}$  上解析,G(z) 为 f(z) 在  $\mathcal{D}$  上的一个原函数,则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = G(z) \Big|_{z_0}^{z_1}$$
(4.16)

#### 分步积分公式

设  $\omega = f(z), \sigma = g(z)$  在单连通域 D 上解析

$$\int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz$$
(4.17)

#### 三个等价命题

设  $\omega = f(z)$  在 n-连通区域 D 上解析,则

- (1)  $\forall C \subseteq D \ f(z) dz = 0$
- (2) f(z) 在 D 上有积分路径无关性
- (3) f(z) 在 D 上有原函数

等价,且任意一条成立,牛顿-莱布尼茨定理即可使用。

#### 4.3.6 Cauchy 积分公式

设  $\omega = f(z)$  在单连通域 D 上解析,在  $\overline{D}$  上连续,则  $\forall z_0 \in D, C \subseteq D$ 

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{4.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$
 (4.20)

$$= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|z-z_0| \le R} f(z) dx dy$$
 (4.21)

#### 4.3.7 高阶导数

定理:解析函数 f(z) 的任意阶导数仍为解析函数,其 n 阶导数满足

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$
 (4.22)

其中 C 为围绕  $z_0$  的任意一条正向简单闭曲线,且 C 在单连通的解析区域  $\mathcal{D}$  上。

#### 莫雷拉 (Morera) 定理 (柯西定理的逆定理)

若 f(z) 在单连通区域  $\mathcal{D}$  内连续,且沿  $\mathcal{D}$  内任意闭合曲线积分为 0 (路径无关),则 f(z) 在  $\mathcal{D}$  内解析。(在任意一个解析函数上修改一个点,函数仍然路径无关,因此连续是必要的。)

#### 4.3.8 代数基本定理

 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 (a_n \neq 0)$  在  $\mathbb{C}$  上恰有 n 个零点(记重数)。 只要证明  $\forall n \in \mathbb{N}_+, P_n$  存在零点即可(从而可以不断地分离因式降阶)。

#### 刘维尔(Liouville)定理

一个有界的正函数必然是常函数

证明. 设 |f(z)| < M,根据(4.22)

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|-R} \frac{M}{R^2} dl = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

故  $f(z_0)$  为常数

#### 代数基本定理证明

假设  $P_n(z)$  在  $\mathbb C$  上没有零点,设  $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ ,则 f(z) 为整函数。在  $|z|\to +\infty$  时,显然  $|f(z)|\to \frac{1}{a_n|z|^n}\to 0$  故存在 R 使得  $\forall |z|>R, f(|z|)<1$ ,则在  $\mathbb C$  上,

$$|f(z)| \le \max\{1, \max_{|z| \le R} \{|f(z)|\}\}$$

不等式右侧显然不等于  $\infty$  (有界闭域上连续函数有界),故 f(z) 为常函数, $P_n(z)$  为常数,这 与  $a_n \neq 0$  矛盾。故  $P_n(z)$  必有零点。

## 4.3.9 解析函数与调和函数

#### 调和函数

设  $\varphi=\varphi(x,y)\in C^2(\mathscr{D})$  且处处有  $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\equiv 0$ ,则  $\varphi$  为  $\mathscr{D}$  上的调和函数。

设  $\omega = f(z) = u + iv$  在  $\mathcal{D}$  上解析,则 u,v 在  $\mathcal{D}$  上调和。称上述 u,v 为  $\mathcal{D}$  上的共轭调和函数。给出  $\mathcal{D}$  上调和函数 u,找出其共轭调和函数  $\iff$  找出解析函数 f(z) 使  $Re\ f(z) = u$ 。

设 u 为**单连通域**上的调和函数,则必然存在 f(z) 使  $Re\ f(z)=u$ 。注意多连通情况下不一定正确。

证明. 这样的 f(z) 必定满足  $f'(z) = u_x - iu_y = U(z)$ ,U(z) 显然是解析的,故  $f(z) = \int_{z_0}^z U(z) dz$  即为满足条件的函数。

例: 
$$u = x^3 - 3xy^2$$

#### ₩不定积分法

$$f'(z) = (3x^2 - 3y^2) - i(-6xy) = 3(x + iy)^2$$
 
$$f(z) = \int 3z^2 dz = z^3 + c = (x + iy)^3 + C = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) + C$$
 
$$v(x) = 3x^2y - y^3 - iC$$
 由于  $f(z) - u = iv$  为虚数,故  $C$  必须为纯虚数。

#### ≤偏积分法

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2, v_x = -u_y = 6xy$$
  
v 先关于 y 积分,即  $v = 3x^2y - y^3 + g(x)$ ,则  $v_x = 6xy + g'(x) = 6xy \implies g(x) = C$ 

# 4.4 级数

#### 4.4.1 复数项级数

#### 复数项序列

设  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$  为实数序列,则  $z_n = x_n + iy_n$  即为复数项序列。

#### 级数

定义  $I = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$  (不论是否收敛都称为级数),级数的部分和定义为  $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$ 。

- 1. 若  $\lim_{n \to \infty} S_n = A \in \mathbb{C}$ ,则称 I 收敛
- 2. 若  $\sum_{n=0}^{n\to\infty} |z_n|$  收敛,则称 I 绝对收敛
- 3. 若 I 收敛但不绝对收敛,则称 I 条件收敛

#### 复数项级数与常数项级数的关系

 $\lim_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$   $\lim_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta$  条件收敛或绝对收敛  $\iff \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$  均条件收敛或绝对收敛

#### 敛散判别法

- (I) Cauchy 根式判别法
  - $\sqrt[n]{|z_n|} < q < 1(\forall n > N)$ ,则 I 绝对收敛
  - 只要满足  $\sqrt[n]{|z_n|} \ge q \ge 1$  的项有无穷多个,则 I 发散
  - 若  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$ ,则 q<1 时 I 绝对收敛,q>1 时 I 发散。q=1 时无法确定,例如  $\frac{1}{n},\frac{(-1)^n}{n},\frac{1}{n^2}$  三者收敛情况均不同
- (II) D'Alembert 判别法
  - $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < q < 1(\forall n > N)$  则 I 绝对收敛
  - $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq q \geq 1 (\forall n > N)$  则 I 发散
  - 若  $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q$ ,则 q<1 时绝对收敛,q>1 时绝对发散,q=1 时无法判断
- (III) Dirichlet 判别法

#### 4.4.2 幂级数

#### (复变) 函数级数

定义  $\mathscr D$  上的函数列  $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ ,其级数为  $I=\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$ ,当 z 固定时 I 就变成常数项级数。

#### 幂级数

形如  $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$  或  $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$  的级数称为幂级数。

- 1. 若 i 在  $z_0$  处收敛,则  $\forall z : |z| < |z_0|$ ,I 在 z 处收敛
- 2. 若 i 在  $z_0$  处发散,则  $\forall z : |z| > |z_0|$ , I 在 z 处发散

#### 证明. (1)

易知  $\lim_{n\to\infty} |C_n z_0^n|$  收敛到 0,故其必有  $|C_n z_0^n| < M(\forall n \in \mathbb{N})$ ,则  $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$  有界递增 (并因此收敛),因此 I(z) 绝对收敛。

#### 收敛半径与收敛圆盘

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$
 的收敛半径  $R$  定义为

 $R \triangleq \sup\{|z| : I \text{ is convergent at } z\}$ 

 $= \sup\{|z| : I \text{ is absolutely convergent at } z\}$ 

 $=\inf\{|z|: I \text{ is divergent at } z\}$ 

 $(R=+\infty$  时函数级数在  $\mathbb{C}$  上收敛。) 定义  $C_R:|z|=R$  为收敛圆周, $D_R:|z|\leq R$  为**收敛圆盘**, 考虑  $C_R$  上的点属于内外哪一侧:

- I(z) 在  $C_R$  上处处发散:  $I(z) = \sum z^n$
- I(z) 在  $C_R$  上部分收敛:  $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ,  $C_R$  上仅 z = 1 处发散 I(z) 在  $C_R$  上全部收敛:  $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} z^n$
- I(z) 在  $C_R$  上全部绝对收敛:  $I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ,一旦有一个点绝对收敛,则整个圆上所有点 都绝对收敛

#### 收敛半径的计算

- $\ddot{\pi} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda, \quad M R = \frac{1}{\lambda}$
- $\ddot{\pi} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$  或者  $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$ , 则  $R = \frac{1}{\lambda}$

#### 幂级数的和函数

设  $I = \sum_{n>0} c_n (z-a)^n$  的收敛半径为 R,则在 D: |z-a| < R 上有

- (a) 和函数 f(z) 为解析函数
- (b) f(z) 能够逐项求导

$$f'(z) = \sum_{n>1} nc_n(z-a)^{n-1}$$

(c) f(z) 能够逐项积分

$$F(z) = \sum_{n \ge 0} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

(d) f(z) 在  $C_R$  上至少存在一个奇点

#### 4.4.3 Taylor 展开式

设  $\omega=f(z)$  在单连通域  $\mathcal D$  上解析, $z_0\in\mathcal D, d=\inf_{z\in\partial\mathcal D}|z-z_0|$ ,则  $\forall z\in B_d(z_0)$ ,有

$$f(z) = \sum_{n \ge 0} c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$
 (4.23)

且该展开式唯一。

## 4.4.4 解析函数的零点

设  $\omega = f(z)$  在  $\mathcal{D}$  上解析

- 1. 若  $f(z_0) = 0$ ,则称  $z_0$  为 f(z) 的零点
- 2. 若  $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$ ,则称  $z_0$  为 m 级零点
- 3. 若  $f(z_0)=0$ ,且某个去心领域  $B^*_\delta(z_0)$  上 f(z) 恒不为 0,则称  $z_0$  为 f(z) 的孤立零点

定理  $z_0$  为 f(z) 的 m 级零点  $\iff \exists B_{\delta}(z_0)$  及其上的解析函数  $\varphi(z)$ ,满足

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \varphi(z_0) \neq 0$$

定理 设 f(z) 在  $\mathcal{D}$  上解析,则 f(z) 在  $\mathcal{D}$  上的所有零点都孤立,除非  $f(z) \equiv 0$ 。

#### 4.4.5 解析函数的唯一性定理

设 f(z) 与 g(z) 在  $\mathcal{D}$  上解析,且  $a \in D$ ,若  $\exists \{z_n\} \in D$ ,满足

- 1.  $z_n \neq a$
- $2. \lim_{n \to \infty} z_n = a$
- 3.  $f(z_n) = g(z_n), \forall n \ge 0$

则  $f(z) = g(z), \forall z \in D$ 

## 4.4.6 一般常级数

形如  $I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n\geq 1} c_{-n} \zeta^n = I_+ + I_-, \zeta = \frac{1}{z-z_0}$  的级数称为一般常级数。

若  $I_+$  的收敛半径为  $R_+$ , $I_-$  的收敛半径为  $R_-$ ,则称  $|\frac{1}{R_-}|<|z-z_0|<|R_+|$  为 I 的收敛圆环域  $D(z_0,r_1,r_2)$ 。

#### 洛朗级数 4.4.7

设  $\omega = f(z)$  在  $D(z_0, r, R)$  上解析,则  $\forall z \in D(z_0, r, R)$ ,有

$$f(z) = \sum_{n} c_n (z - z_0)^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta$$
 (4.24)

其中 C 为 D 上任意环绕的 Jordan 闭曲线。该展开唯一,称为**Laurent 级数**。 注意 f(z) 在  $z_0$  的导数一般不存在,故不能套用高阶导数公式。

#### 留数 4.5

#### 4.5.1孤立奇点

若  $z_0$  为 f(z) 的奇点,且在某个邻域  $B_{\delta}^*(z_0)$  内 f(z) 解析,则称  $z_0$  为 f(z) 的孤立奇点。 若  $z_0\in\mathbb{C}$  为孤立奇点,且 f(z) 在上述领域中的洛朗级数为  $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_n)^n$ ,则

- (A)  $z_0$  为可去奇点,若级数中不含负幂项,且  $\lim_{z\to z_0}=c_0$ 。若补充定义  $f(z_0)=c_0$ ,则 f(z) 在 z<sub>0</sub> 解析,因而以下命题等价:
  - zn 为可取奇点

  - $\lim_{z\to z_0}f(z)=A\in\mathbb{C}$  f(z) 在某邻域  $B^*_\delta(z_0)$  内有界
- (B)  $z_0$  为 m 级极点,若展式中含有有限的负幂项,且最低负幂项为  $c_{-m}(z-z_0)^{-m}, c_{-m} \neq 0$ 。 若  $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ , 则必定为极点而不是本性奇点。以下命题等价
  - $z_0$  为 f(z) 的 m 级极点
  - 存在某个  $B_0(z_0)$  上的解析函数 g(z), 满足  $f(z) = g(z)(z-z_0)^{-m}$
  - $\lim_{z \to z_0} (z z_0)^n f(z) = A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
  - $z_0$  为  $\frac{1}{f(z)}$  的 m 级零点
- (C)  $z_0$  为本性奇点,若展式中含有无穷个负幂项。注意  $\lim_{z\to z_0} f(z)$  必不存在。

(Weierstress)  $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ , 都存在  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B_{\delta}^*(z_0)$ , 满足  $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$  且  $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A$ 

若 f(z) 在  $R<|z|<\infty$  内解析, 则称  $\infty$  为 f(z) 的孤立奇点。设  $\zeta=\frac{1}{z}$ , 则  $\varphi(\zeta)=\sum_n c_{-n}\zeta^n=$ f(z),若 0 为  $\varphi(\zeta)$  的本性/可去奇点或 m 级极点,则  $\infty$  为 f(z) 的本性/可去奇点或 m 级极 点。

#### 4.5.2 留数

设  $z_0$  为 f(z) 的孤立奇点,f(z) 在  $z_0$  的洛朗级数为  $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ ,C 为环绕  $z_0$  的正向简单曲线,则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} \tag{4.25}$$

这是由(4.15)直接得到的。定义留数为

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = c_{-1}$$
 (4.26)

#### 4.5.3 留数的计算规则

(A) 若  $z_0$  为 f(z) 的一级极点,则

Res
$$[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(B) 若  $z_0$  为 f(z) 的 m 级极点,则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{ (z - z_0)^m f(z) \}$$
(4.27)

(C) 设  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , P(z), Q(z) 在  $z_0$  解析,若  $P(z_0) \neq 0$ ,  $Q(z_0) = 0$ ,  $Q'(z_0) \neq 0$ ,则  $z_0$  为 f(z) 的一级极点,且(可由 (A) 导出)

Res
$$[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(D) 若无穷远也为孤立极点,则无穷远处的留数定义为  $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$ ,不难发现,此即所有有限点的留数之和的负数

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right] \tag{4.28}$$

#### 4.5.4 留数的应用

(A) 形如  $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta) d\theta$  的积分,对于  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ,可以用 z 反求  $\cos\theta,\sin\theta$ 。

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right] \frac{dz}{iz}$$
(4.29)

(B) 形如  $\sum_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$  的积分,其中 R(x) 为**有理函数**,且分母比分子的次数**至少高二次**,且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上,并且沿路径  $(-R,0) \to (R,0)$   $\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}$   $(-R,0), R \to +\infty$  进行积分,设  $z_k$  为虚部为正数的全部奇点,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res}[R(z), z_k]$$
(4.30)

(C) 形如  $\sum_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx (a>0)$  的积分,其中 R(x) 为**有理函数**,且分母比分子的次数**至少高** 一次,且在实轴上没有奇点。将其延拓到复数域上,并且沿路径  $(-R,0) \to (R,0)$   $\xrightarrow{x^2+y^2=R^2,y\geq 0}$   $(-R,0),R\to +\infty$  进行积分,设  $z_k$  为虚部为正数的全部奇点,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k]$$
(4.31)

# 第五章 概率论

# 5.1 事件的概率

#### 5.1.1 概率的公理化定义

设  $\Omega$  为样本空间,定义事件集类  $\mathscr{J}\subset 2^{\Omega}$ 。定义  $P:\mathscr{J}\to\mathbb{R}$  满足三条公理

- 1.  $P(A) \ge 0, \forall A \in \mathscr{J}$
- 2.  $P(\Omega) = 1$
- 3.  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{J}, A_i A_j = \phi, \forall i \neq j$

则称 P 为概率函数, $(\omega, \mathcal{J}, P)$  为概率空间

#### 错位排序

 $A_i$  表示第 i 个数恰好在原位上,则每个数**都不在**原位的概率为

$$P = 1 - P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

$$= 1 - \sum_{i_1 \le \dots \le i_r} (-1)^{r+1} P(A_{i_1} \dots A_{i_r})$$

$$= 1 - \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(n-r)!}{n!} (= \frac{1}{r!})$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n)!}\right] (\to \frac{1}{e})$$
(5.1)

#### 5.1.2 条件概率

设  $A, B \in \mathcal{J}$ , 定义 条件概率 为

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) > 0) \tag{5.2}$$

容易证明,

$$\widetilde{P}(A) = P(A|B) : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$$

也是概率函数。

# 5.1.3 独立事件

# 两个事件的独立

若 P(AB) = P(A)P(B) 则称 A, B 相互独立。此时有 P(A) = P(A|B),并且能**推出** A 与  $B^C$  独立。

### 多个事件的独立

若对  $A_1, A_2, \ldots$  为可数个事件,若从中**任取有限个事件**  $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$  都有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_m})$$

,则称  $A_1, A_2, ...$  相互独立。

### 条件独立

若 P(AB|E) = P(A|E)P(B|E), 则称事件 A, B 关于事件 E 条件独立。

注意:条件独立不能推出独立,独立也不能推出条件独立

# 5.1.4 贝叶斯 (Bayes) 公式

定义  $\Omega$  的一个分割  $\{B\}$  满足  $\sum_i B_i = \Omega$  且  $B_i B_j = \phi, \forall i \neq j$ 。则

$$P(A) = P(A\sum_{i} B_{i}) = \sum_{i} P(B_{i})P(A|B_{i})$$
(5.3)

$$P(B_j|A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}$$
(5.4)

(5.4) 即为 Bayes 公式。

# 5.2 随机变量

### 5.2.1 1 维随机变量

定义实值函数  $X(\omega):\Omega\to\mathbb{R}$ ,该映射给样本空间中的每个试验结果一个对应的数值, **随机变量** 即定义为试验结果的一个实值函数,也可以通过**随机变量的函数**定义另一个随机变量。(默认用大写字母表示随机变量,小写字母表示实数。)

#### 5.2.2 随机变量的概率

 $\forall I \in \mathbb{R}$  且 I 为可测集,利用数值所对应的事件定义概率函数  $P_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 

$$P_X(X \in I) \triangleq P(X^{-1}(I))$$

### 5.2.3 (累积)分布函数 (cdf)

定义为  $F(x) \triangleq P(X \le x), x \in \mathbb{R}$ , 则  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ 。 cdf 有以下性质:

- 1. F(x) 单调(非严格)递增
- 2.  $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- 3. F(x) 右连续

以上性质也是 F(x) 成为 cdf 的充要条件。

### 5.2.4 离散分布

### 概率质量函数 (pmf)

定义为 
$$f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$$
。

### 期望和方差

期望  $E(X) \triangleq \sum_i x_i f(x_i)$ ; 方差  $Var(X) \triangleq \sum_i (x_i - E(X))^2 f(x_i) = E(X - E(X)^2)$ 。

- 1. 若用 X 的函数 g(X) 定义 Y,则  $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) f(x_i) \neq g(E(X))$
- 2. E(X+Y) = E(X) + E(Y); 若 X, Y 独立,则 Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)

### 5.2.5 常见离散分布

### Bernoulli 分布

• 
$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$
, 记为  $X \sim B(p)$ 

• 
$$E(X) = p$$
,  $Var(X) = p(1-p)$ 

### 二项分布

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , 记为  $X \sim B(n, p)$
- X 为 n 次伯努利试验中试验成功的次数
- E(X) = np, Var(X) = np(1-p)

# Poisson 分布

- $f(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ , 记为  $X\sim P(\lambda)$
- $E(X) = \lambda$ ,  $Var(X) = \lambda$
- 对于  $X \sim B(n,p)$ , n 非常大而 np 较小时, X 近似服从 P(np)
- $P(\lambda)$  多用于当 X 表示一定时间内出现的小概率时间的次数时

39

# 5.2.6 连续分布

### 概率密度函数 (pdf)

若存在  $f \ge 0$ ,使得  $\forall$  可测集  $I \subset R$  都有

$$P(X \in I) = \int_{I} f(x) dx$$

,则 X 为连续型随机变量,f 为 X 的概率密度函数

1. 
$$P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

2. 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

3. 
$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = E(X^2) - E(X)^2$$

# 5.2.7 常见连续分布

#### 均匀分布

• 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$
,  $i \exists h \ X \sim U(a,b)$ 

• 
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
,  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 

#### 正态分布

• 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$
,记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 

• 
$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

• 
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

### 指数分布

• 
$$f = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

• 
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

• 
$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- X 一般刻画寿命或者等待时间
- 无记忆性:

$$P(X > x + t | X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t} = f(t)$$

# 5.3 联合分布

### 5.3.1 随机向量

 $(X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \to \mathbb{R}^n$ ,其中  $X_i$  为随机变量,定义(联合)累积分布函数

$$F(x_1,\ldots,x_n) \triangleq P(X_1 \le x_1,\ldots,X_n \le x_n), (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

# 5.3.2 离散分布

若  $\forall 1 \leq i \leq n, X_i$  为离散型随机变量,则  $(X_1, \ldots, X_n)$  为离散型随机向量。定义 pmf 为  $f(x_1, \ldots, x_n) \triangleq P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ 。

# 5.3.3 连续分布

若对一切可测集  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , $P((X_1,\ldots,X_n) \in Q) = \int_Q f(x_1,\ldots,x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ ,则  $(X_1,\ldots,X_n)$ 为连续型随机向量,f 为其 pdf。

以 
$$n=2$$
 为例, $F(a,b)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ,反过来有  $f(a,b)=\frac{\partial^{2}F}{\partial x\partial y}$ 

### 二元正态分布

$$X, Y \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho), |\rho| < 1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right] \right\}$$
(5.5)

### 5.3.4 边际分布

对于的连续随机变量, 定义  $X_i$  的边际累积分布函数 (cdf)

$$F_i(x) \triangleq P(X_i \le x) = P(X_i \le x, -\infty < X_j < \infty (j \ne i)) \tag{5.6}$$

以 n=2 为例, $F_X(x)=\lim_{y\to\infty}P(X\leq x,Y\leq y)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$ 。

定义  $X_i$  的边际密度函数 (pdf)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

### 5.3.5 条件分布

对于 n=2 的连续型随机变量,求其条件密度函数

$$P(X \le x | y \le Y \le y + dy) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \left( \int_{y}^{y+dy} f(t, s) dq \right) dp}{\int_{y}^{y+dy} f_{Y}(q) dq}$$

$$P(X = x | y \le Y \le y + \mathrm{d}y) = \frac{\int_{y}^{y + \mathrm{d}y} f(t, s) \mathrm{d}q}{\int_{y}^{y + \mathrm{d}y} f_{Y}(q) \mathrm{d}q} \to \frac{f(x, y)}{f_{Y}(y)} (\mathrm{d}y \to 0)$$
$$f_{X}(x | y) \triangleq \frac{f(x, y)}{f_{Y}(y)} \tag{5.7}$$

定义  $f_X(x|y)$  的累积分布函数 (cdf) 为  $F(a|y) = \int_{-\infty}^a f_X(x|y) dx$ 

(1) (乘法法则)  $f(x,y) = f_X(x|y)f_Y(y) = f_Y(y|x)f_X(x)$ 

(2) (全概率公式)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x|y) f_Y(y) dy$ 

对于二元正态分布,

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{[y - (\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1))]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right\}$$
(5.8)

$$\mathbb{H} \ Z = (Y|x) \sim N(\mu_2 + 
ho rac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), (1-
ho^2)\sigma_2^2)$$

# 5.3.6 独立性

若  $F(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ , 则称  $X_1, ..., X_n$  相互独立。该条件完全等价于  $f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ 。

- 1. 若  $X_1,\ldots,X_n$  相互独立,则  $Y_1=g_1(X_1,\ldots,X_m)$  与  $Y_2=g_2(X_{m+1},\ldots,X_n)$  相互独立
- 2. 若 pdf  $f(x_1,...,x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n), \forall x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$ ,则  $X_1, X_2,..., X_n$  相互独立,且  $f_i$  与  $g_i$  相差常数倍

### 5.3.7 多个随机变量的函数

#### ★密度函数变换法

设存在由随机变量 X1, X2 到  $Y_1, Y_2$  的可逆映射  $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases}$ ,逆为  $\begin{cases} X_1 = h(Y_1, Y_2) \\ X_2 = h(Y_1, Y_2) \end{cases}$  对于  $X_1, X_2$  上的区域 A,若其在  $Y_1, Y_2$  上的映射为 B,则显然有

$$P((X_1, X_2) \in A) = P((Y_1, Y_2) \in B)$$

$$P((Y_1, Y_2) \in B) = \int_B \mathscr{F}(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

$$P((X_1, X_2) \in A) = \int_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_B f(h(y_1), h(y_2)) \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} \right| dy_1 dy_2$$

因此

$$\mathscr{F}(Y_1, Y_2) = f(h(Y_1), h(Y_2)) \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} \right|$$
(5.9)

# 5.4 随机变量的数学特征

### 5.4.1 期望

- 1. 刻画分布的集中趋势
- 2.  $X_1, ..., X_n$  独立时, $E(X_1 X_2 ... X_n) = E(X_1) ... E(X_n)$

# 5.4.2 分位数

 $\forall \alpha \in (0,1)$ ,若  $P(X \leq a) \geq \alpha$  且  $P(X \geq a) \geq 1 - \alpha$ ,则称 X = a 为 X 的  $\mathbf{r} \alpha$ -分位数。

- 1. 若 cdf 连续,则  $F(a) = \alpha$
- 2. 分位数不一定唯一

# 5.4.3 方差

- 1. 刻画分布的集中程度
- 2.  $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- 3.  $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E[(X \mu_1)(Y \mu_2)]$

### 5.4.4 协方差与相关系数

定义协方差  $Cov(X,Y) \triangleq E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)]$ 

- 1. Cov(X, X) = Var(X)
- 2. Cov(X, Y) = E(XY) E(X)E(Y)
- 3.  $Cov(aX_1 + bX_2 + c, Y) = aCov(X_1, Y) + bCov(X_2, Y)$

定义相关系数  $Corr(X,Y) \triangleq \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = E(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}) = \rho$ 

- 1. X, Y 独立  $\Longrightarrow Cov(X, Y) = 0$ ,反之不一定
- $2. |Corr(X,Y)| \leq 1$
- 3.  $\rho$  实际上是线性相关系数,不能表达高维的相关关系

# 5.4.5 矩 (Moment)

<u>定义</u> 将  $E[(X-C)^n]$  称为 X 关于 C 的 n 阶矩。当 C=E(X) 时,称为中心矩;当 C=0 时,称为原点矩;标准化后的矩  $E[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^n]$  称为 n 阶标注矩。

# 偏度系数

定义 3 阶标准矩又称偏度系数。

- 1. 偏度系数小于零,左偏;大于零,右偏
- 2. 相对于 5 阶以上的奇数阶矩, 3 阶矩容易计算且噪声的影响小

# 峰度系数

定义 4阶标准矩又称峰度系数。

- 1. 正态分布峰度恒为3
- 2. 超值峰度定义为  $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4$ ]
- 3. 超值峰度为正,一般相对于正态分布峰更尖,尾部更扁

# 5.4.6 矩母函数

定义 (moment generating function, mgf)  $M_X(t) \triangleq E(e^{tX})$  若在 t=0 的某个邻域内  $M_X(t)$  存在,则称其为 X 的矩母函数,否则称 X 的矩母函数不存在。**注意标明 t 的取值范围。** 对于  $X \sim Exp(\lambda)$ ,

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$$
 (5.10)

对于  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} \tag{5.11}$$

对于 Y = aX + b,

$$M_Y(t) = E(e^{aX+b}) = e^{tb}E(e^{taX}) = e^{tb}M_X(ta)$$
 (5.12)

定理 矩母函数确定矩:

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0) (5.13)$$

证明.

$$M_X(t) = \sum_{n \ge 0} M_X^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = E\left(\sum_{n \ge 0} \frac{(tx)^n}{n!}\right) = \sum_{n \ge 0} E(t^n) \frac{x^n}{n!}$$

由于  $M_X(t)$  泰勒展开唯一, 故  $M_X^{(n)} = E(t^n)$ 

例 对于  $X \sim N(0,1)$ ,

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n>0} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n>0} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

故  $E(X^{2n}) = \frac{(2n!)}{2^n n!}, E(X^{2n-1}) \equiv 0$ 

定理 矩母函数确定分布。若存在 a>0,使得  $M_X(t)=M_Y(t), t\in (-a,a)$ ,则 X,Y 同分

布。

**REMARK** 矩存在的时候,矩母函数不一定存在(即泰勒展式不收敛),因此各阶矩完全相同也无法说明两个随机变量同分布。

例 取服从对数正态分布的变量 Y 于另一变量 Z

$$y = f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{\log^2 x}{2}}, x > 0$$
$$z = f_2(x) = f_1(x)[1 + \sin(2\pi \log x)], x > 0$$

则它们的 n 阶矩存在以下关系:

$$E(Z^n) - E(Y^n) = \int_0^\infty x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) dx = T$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{n(t+n)} e^{-\frac{1}{2}(t+n)} e^{-\frac{1}{2}(t+n)^2} \sin(2\pi(t+n)) e^{t+n} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}(n+t)(n+t+1)\right] dt$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{8}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}(n+t+t+1)\right] dt = 0$$

因此对一切 n, Y, Z 的 n 阶矩相等。但是由于

$$e^{tx}f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{tx - \frac{\log^2 x}{2}}$$

对于一切的 t>0 都有  $\lim_{x\to\infty}e^{tx}f_1(x)=+\infty$ ,因此无法积分, $M_Y(t)$  不存在。故即使各阶矩完全相同,实际上也不是同分布。

### 独立随机变量和的分布

对于相互独立的  $X_1, X_2, \ldots, X_n$ , 有

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$
 (5.14)

对于联合分布  $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ , 定义矩母函数为多元函数

$$M_{X_1,\dots,X_n}(t_1,t_2,\dots,t_n) = E(e^{t_1X_1+\dots+t_nX_n})$$
 (5.15)

若该函数在原点的邻域  $B(0,\sigma),\sigma>0$  内有定义,则称联合分布的矩母函数存在;若两组联合分布的矩母函数在  $B(0,\sigma)$  内恒等,则这两组联合分布同分布。

## 5.4.7 条件期望

定义

$$E(Y|X=x) = \begin{cases} \sum_{i} y_i P(Y=y_i|X=x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|X=x) dy \end{cases}$$

定理 E(Y) = E(E(Y|X))

<u>定理</u>  $E((Y-g(X))^2) \geq E[(Y-E(Y|X))^2]$ ,这意味着 E(Y|X) 是均方误差意义下的最优预测。均方最优: $E[(Y-c)^2] \geq E[(Y-E(Y))^2]$ ,这是因为  $\frac{\partial E[(Y-c)^2]}{\partial c} = 2E[Y-c]\big|_{c=E(Y)} = 0$ 。

# 5.5 不等式与极限定理

# 5.5.1 概率不等式

# Markov 不等式

若  $Y \ge 0$ ,则  $\forall a > 0$ ,有

$$P(Y \ge a) \le \frac{E(Y)}{a} \tag{5.16}$$

证明. 令 
$$I=\begin{cases} 1,Y\geq a\\ 0,Y< a \end{cases}$$
 ,则不论  $Y$  的取值,均有  $I\leq \frac{Y}{a}$  故  $P(Y\geq a)=E(I)\leq E(\frac{Y}{a})=\frac{E(Y)}{a}$   $\square$ 

### Chebyshef 不等式

若 Var(Y) 存在,则  $\forall a > 0$ 

$$E(|Y - E(Y)| \ge a) \le \frac{Var(Y)}{a^2} \tag{5.17}$$

证明. 在(5.16)中代入  $P[|Y - E(Y)| \ge a] = P[(Y - E(Y))^2 \ge a^2] = E[Var(Y) \ge a^2]$  即可。  $\square$ 

# Chernoff 不等式

$$\forall a > 0, t > 0$$
 有

$$P(Y \ge a) \le \frac{E(e^{tY})}{e^{ta}} \tag{5.18}$$

### 5.5.2 大数定律

设  $X_1, X_2, \ldots, X_n$  独立同分布, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  ,则

# Khinchin 弱大数定律

 $\forall \varepsilon > 0$  有

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) = 1 \tag{5.19}$$

证明.

$$P(|\bar{X} - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{Var(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0 (n \to \infty)$$

若  $P(|\bar{X} - \mu| \ge \varepsilon) \le \alpha$ , 则称  $\alpha$  为置信水平,  $\varepsilon$  为精度。

# Kolmogorov 强大数定律

 $\bar{X}$  几乎必然收敛到  $\mu$ 

$$\forall \varepsilon > 0, \ P(\lim_{n \to \infty} |\bar{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$$
 (5.20)

# 5.5.3 中心极限定理 (CLT)

若  $E(X_i), Var(X_i)$  均存在,则

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x) = \Phi(X) \sim N(0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$$
 (5.21)

# 6.1 Bernoulli 过程与 Poisson 过程

### 6.1.1 基本概念

定义  $\Rightarrow (\omega, \mathcal{J}, P)$  为概率空间,T 为指标集,S 为状态空间(相空间), $\forall t \in T, \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$ ,  $X_t$  为随机变量, $\{X_t : t \in T\}$  称为一个**随机过程(stochastic process)**; $\forall \omega_0 \in \Omega$ ,  $X_t(\omega_0)$  称为一个样本轨道(sample path)。

定义 随机变量  $\{N(t): t \geq 0\}$  称为计数过程,如果满足

- 1.  $N(t) \ge 0$ , 取整数值
- 2.  $\forall t > s \ge 0, N(t) \ge N(s)$
- 3. N(t) N(s) 表示时间 (s,t] 时间内的事件数

一般记第 n 次到达的时间为  $Y_n$ ,则有到达时间序列  $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; 定义  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,满足  $T_1=Y_1,\ T_i=Y_i-Y_{i-1}(i>1)$ 。

### **REMARK:**

- 1.  $X_t$  记为 X(t) 时强调函数性质
- 2. T 通常解释为时间,可以为离散或者连续
- $3. X_t$  称为过程在 t 时刻的状态,S 可以为离散或者连续
- 4.  $X_t(\omega) = X(t,\omega)$  视为  $(t,\omega)$  的函数

### 6.1.2 Bernoulli 过程

<u>定义</u> T 为离散时间,记为  $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ 。  $X_1,X_2,\ldots$  独立同分布且  $X_i\sim B(p)$ ,  $X_i$  可以视为第 i 次实验成功与否。  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  记为 Bernoulli 过程。

#### **REMARK:**

- 1.  $X_1, X_2, \ldots$  相互独立  $\iff \forall n, X_1, X_2, \ldots, X_n$  相互独立
- 2.  $\forall$ certain n,  $\{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$  仍为 Bernoulli 过程。

## 6.1.3 Bernoulli 过程的性质

首次到达(相邻两次到达)的分布:几何分布

 $\underline{ 定义}$  令 T = 首次试验成功的时间,则  $P(T = m) = p(1-p)^{m-1}(m = 1, 2, ...)$ 

性质 无记忆性

$$P(T-n=m|T>m) = \frac{P(T=n+m,T>n)}{P(T>n)} = \frac{p(1-p)^{n+m}}{1-\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}} = p(1-p)^{m-1} = P(T=m)$$
(6.1)

# 第 k 次到达时间的分布: 负二项分布

定义 对于 Bernoulli 过程  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 令

$$P(Y_k = m) = P(第 m 次成功, 且前 m 次成功了 k 次) = {m-1 \choose k-1} p^k (1-p)^{m-k}$$

### Bernoulli 过程的分裂

若每次到达的时间以q的概率保留下来,则保留下来的过程为Bernoulli 过程,参数为pq。

### Bernoulli 过程的合并

两个独立的 Bernoulli 过程合并,结果仍为 Bernoulli 过程,且参数为 p+q-pq。

# 6.1.4 Poisson 过程

### 平稳增量过程

定义 如果增量  $X(t+\tau) - X(t)$  的分布仅与  $\tau$  有关,而与 t 无关,则称为平稳增量过程。

# 独立增量过程

<u>定义</u> 时刻 t 以前发生的事件数 [即 N(t)] 必须独立于时刻 t 与 t+s 之间发生的事件数 [N(t+s)-N(t)],则该过程为独立增量过程。

### Poisson 过程

定义 1 计数过程  $\{N(t): t \geq 0\}$  称为 Poisson 过程,如果满足

- 1. N(0) = 0
- 2. 过程有平稳独立增量
- 3. 存在  $\lambda > 0$ ,满足  $h \to 0$  时, $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- 4.  $P(N(h) \ge 2) = o(h)$

### 定义 2

- 1. N(0) = 0
- 2. 过程有独立增量
- 3.  $\forall s, t \ge 0, P\{N(t+s) N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

# 6.1.5 Poisson 过程的性质

### Poisson 过程的分裂

<u>定理</u> 假设 Poisson 过程过程中每次发生的事件分为 I 型和 II 型,以概率 p 为 I 型,否则为 II 型。 $N_1(t),N_2(t)$  分别表示 (0,t] 内两种事件的数目,则

- 1.  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
- 2.  $\{N_1(t): t \geq 0\}, \{N_2(t): t \geq 0\}$  为 Poisson 过程,且到达率分别为  $\lambda p, \lambda (1-p)$
- 3. 这两个过程相互独立

### Poisson 过程的合并

<u>定理</u> 已知  $\{N_1(t): t \geq 0\}, \{N_2(t): t \geq 0\}$  为相互独立的 Poisson 过程,到达率分别为  $\lambda_1, \lambda_2$ ,令  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ ,则  $\{N(t): t \geq 0\}$  为 Poisson 过程,其到达率为  $\lambda_1 + \lambda_2$ 。且 时间  $N_1$  先发生的概率为  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ,事实上,对于每个发生的事件,其属于  $N_i$  的概率为  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 。

#### 条件作用

已知 [0,t] 内发生了一次事件,则该事件发生在  $[0,s](s \le t)$  上的概率为

$$P(Y_1 \le s | N(t) = 1) = \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$
$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

 $\implies N(t) = 1$  条件下, $Y_1 \sim U(0,t)$ 。

<u>定理</u>  $N(t_2) = n$  的条件下,对于  $t_1 < t_2$ , $N(t_1) \sim B(n, \frac{t_1}{t_2})$ 。相当于在  $[0, t_2]$  上均匀分布随机放置 n 个到达点,第 j 次到达即为第 j 阶次序统计量。

<u>定理</u> N(t) = n 的条件下,事件发生的 n 个时刻  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  的联合 pdf 为

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \tag{6.2}$$

证明. 已知条件等价于

$$T_1 = 1, T_2 = t_2 - t_1, \dots, T_n = t_n - t_{n-1}, T_{n+1} > t - t_n$$

这里  $T_i$  为间隔事件, $T_i \stackrel{iid}{\sim} Exp(\lambda)$ 。 $Y_1, \ldots, Y_n$  的 pdf 就等价于  $T_1, \ldots, T_n$  的 pdf

$$f(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{f(t_1, \dots, t_n, n)}{P(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1} \dots \lambda e^{-\lambda (t_n - t_{n-1})} \cdot e^{-\lambda (t - t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{n!}{t^n}$$

因此有生成 Poisson 过程的另一种方式:

- 1. 根据  $N(t) \sim P(\lambda t)$  生成 (0,t] 内事件发生数
- 2. 假定 N(t) = n,则取  $U_1, \ldots, U_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, t)$
- 3.  $\diamondsuit Y_j = U_{(j)}, j = 1, 2, \dots, n$

### 次序统计量

设有  $X_1, \ldots, X_n$  独立同分布,令  $X_{(i)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$   $(1 \le i \le n)$ ,则  $X_{(i)}$  为 i 阶次序统计量。

设  $X_i$  的 pdf 为 f(x), cdf 为 F(x), 则

 $X_{(j)}=x\iff X_1,\ldots,X_n$  中有 j-1 个取值 < x,且有 n-j 个取值 > x,可以不严格 地推导出  $X_{(j)}$  的 pdf。

$$P(x \le X_{(j)} \le x + dx) \approx \binom{n}{j-1, n-j, 1} F^{j-1}(x) (1 - F(x))^{n-j} f(x) dx$$
$$f_j(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} F^{j-1}(x) (1 - F(x))^{n-j} f(x)$$
(6.3)

由此定义联合分布 pdf...

### 6.1.6 Poisson 过程的推广

### 非齐次 Poisson 过程

定义 计数过程  $\{N(t): t \geq 0\}$  称为到达率为  $\lambda(t)(\lambda(t) > 0)$  的 Poisson 过程,如果

- 1. N(0) = 0
- 2. 具有独立增量
- 3.  $P(N(t+h) N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
- 4. P(N(t+h) N(t) > 2) = o(h)

若令  $m(t) = \int_0^t \lambda(k) dk$ ,则

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{m(t+s) - m(t)} \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!}$$

其中 m(t+s)-m(t) 即为这段时间内的期望事件数。该过程没有平稳增量性质。

### 复合 Poisson 过程

<u>定义</u>  $\{N(t): t \geq 0\}$  为 Poisson 过程, $X_i$  iid 且与 N(t) 相互独立,令  $Z(t) \triangleq \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ ,则  $Z_t$  为复合 Poisson 过程。定理

- 1. Z(t) 有独立增量性质
- 2. 若  $E(X_i^2) \leq \infty$ ,则  $E(Z(t)) = \lambda t E(X_i), Var(Z(t)) = \lambda t E(X_i^2)$  (用矩母函数证明)

# 条件 Poisson 过程

定义 设  $\Lambda > 0$  为随机变量,当  $\Lambda = \lambda$  时,计数过程  $\{N(t): t \geq 0\}$  为到达率为  $\lambda$  的 Poisson 过程,则称 N(t) 为条件 Poisson 过程。 N(t) 不是一个 Poisson 过程。

<u>定理</u>  $E(\Lambda) < \infty$ ,则  $E(N(t)) = tE(\Lambda), Var(N(t)) = t^2 Var(\Lambda) + tE(\Lambda)$ 

若事件间隔  $X_i$  的分布不限定为指数分布,则计数过程称为更新过程

₹ 0.1: Summary		
到达过程	Bernoulli 过程	Poisson 过程
到达时间	离散	连续
到达率	p 每次试验	λ 单位时间
相邻两次到达间隔	几何分布	指数分布
t 内到达次数的分布	二项分布	Poisson 分布
第 k 次到达	负二项分布	Gamma 分布

表 6.1: Summary

# 6.2 离散时间 Markov 链

### 6.2.1 基本概念

指标集 T 离散,不妨记  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

状态空间 S 离散,不妨记  $T = \{0,1,2,...\}$ 

<u>定义</u> (Markov 链)  $\{X_n, n = 0, 1, ...\}$  为随机过程,  $X_i \in S$ , 若  $\forall n \geq 0$  及任意状态  $i, j, i_0, ..., i_{n-1}$ , 有

$$P(X_{n+1} = j | X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$
(6.4)

则称  $\{X_n, n=0,1,\dots\}$  为离散时间 Markov 链。可以导出:

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$$

$$= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$= \dots$$

$$= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \dots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0)$$

<u>定义</u>  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  称为 Markov 链的(一步) <u>转移概率</u>。当它与 n 无关时,称 Markov 链关于时间是**齐次** 的,记

$$P_{ij}^{(n)} = P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$
(6.5)

将  $P \triangleq (P_{ij})$  称为转移概率矩阵。

- 1. 状态有限(无限)时,对应称为有(无)限链
- 2. 路径概率  $P(X_k = i_k) = P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$
- 3. 转移概率矩阵描述了一个 n 个点带自环的完全图

<u>例</u> (随机游走)  $S = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, p \in (0, 1)$ 。  $P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p$ ,令  $Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ ,则  $\{Y_n\}$  称为随机游走模型。  $P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = 1 - p$ 。

例 (赌博模型)  $S = \{0, 1, ..., n\}$ , 0 和 n 为吸收态, $P_{0,0=1}, P_{n,n} = 1$ 。此模型称为具有吸收壁的有限随机游走。

### 6.2.2 C-K 方程

定义 n 步转移概率为  $P_{ij}^{(n)} riangleq P(X_n = j | X_0 = i)$ ,由于时间齐次性, $P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P_{ij}^{(n)}$ ,即与 m 无关。规定  $P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$ 。

<u>定理</u> (Chapman-Kolmogorov 方程)  $\forall m, n \geq 0, \forall i, j \in S$ , 有

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$
(6.6)

证明. 
$$P(X_{m+n} = j | X_0 = i_0, \dots, X_m = k) = P(X_{m+n} = j | X_m = k)$$

<u>定理</u> 若记  $P^{(n)} \triangleq (P_{ij}^{(n)})$ , 则  $P^{(n)} = P^n, P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$ 。

**计算**  $X_n$  的边际分布

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P(X_n = j | X_0 = i)$$

$$= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) P_{ij}^n$$
(6.7)

矩阵形式: 记 $\vec{\beta}_n = (\beta_{n_1}, \beta_{n_2} \dots), \beta_{n_i} \triangleq P(X_n = i)$ ,则 $\vec{\beta}_n = \vec{\beta}_0 P^n$ 。

# 6.2.3 状态的分类

称状态 i 可达状态 j,若  $\exists n \geq 0, P_{ij}^{(n)} > 0$ 。若相互可达,则记为  $i \leftrightarrow j$ 。 定义(可达)

- 1. 自返性:  $i \leftrightarrow i$
- 2. 对称性:  $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
- 3. 传递性

显然, $\leftrightarrow$  定义了一个 S 上的等价关系,将所有状态划分为若干个等价类。若一条 Markov 链 上仅有一个类,则称其为不可约的。

记  $f_{ij}^{(n)}$  表示从 i 经过 n 次转移后,<mark>首次</mark>到达 j 的概率。则**首达**概率

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n - 1 | X_0 = i)$$

额外定义平凡情况  $f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ 。 注意区别  $P_{ij}^{(n)}$  与  $f_{ij}^{(n)}$ 。

 $f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$  表示从 i 出发经有限步可达 j 的概率。

若  $f_{ii} = 1$ ,则称状态 i 为**常返** (recurrent),否则 i 为**瞬时** (transient) 的。

### ★定理(常返态的等价判定)

- i 为常返态  $\iff$   $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$  i 为瞬时态  $\iff$   $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{i:}}$

证明. 引理:  $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$ 

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = P_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$$

$$= P_{ii}^{(0)} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)}\right)$$

$$= 1 + f_{ii} \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$$

$$= \frac{1}{1 - f_{ii}} (\stackrel{\text{dif}}{\leftarrow} f_{ii} < 1)$$

因此  $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$ 收敛  $\iff f_{ii} < 1$ 。

### 性质(常返态的命运)

1. 令  $I_n = [X_n = i]$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty}$  为经过状态 i 的次数,

$$E(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(I_n = 1 | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

为从 i 出发的链回到 i 的期望次数

- 2. 若 i 常返,则从 i 出发时以概率 1 有限步回到 i
- 3. 若 i 非常返,则从 i 出发以概率  $P = 1 f_i i > 0$  回不到 i,从而从 i 出发的链恰好经过 i 的次数为 k 的概率为  $f_{ii}^{k-1}(1 f_{ii})$  (几何分布),所以只能返回有限次,最后永远离开

### **★定理(常返态的事实)**

- 1. 若  $i \leftrightarrow j$ , 则 i 和 j 同时为常返态或者非常返态
- 2. 常返态 i 所能到达的一切状态均与 i 相互可达,即**从常返态出发不能到达非常返态**
- 3. 在一个有限 Markov 链上,从任意非常返态出发,最终必然到达常返态
- 4. 一个有限 Markov 链至少有一个常返态
- 5. 一个有限 Markov 链若不可约,则所有状态均为常返态

<u>例子</u> (随机游走) 当  $p = \frac{1}{2}$  时常返, 当  $p \neq \frac{1}{2}$  时非常返。

<u>定理</u> 若  $i \leftrightarrow j$ ,且 i 为常返态,则  $f_{ji} = 1$ 

定义 若集合  $\{n|n \ge 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$  非空,则其最大公约数 d = d(i) 称为状态 i 的周期。若 d > 1,则称状态 i 是周期的;若 d = 1 则称 i 是非周期的。若链中所有状态的周期都为 d,则称 d 为该链的周期。若链中所有状态周期都为 1,则称该链是非周期的;否则称其为周期的。

**定理** 若  $i \leftrightarrow j$ , 则 i 的周期与 j 相等。

<u>定理</u> 若一个不可约 Markov 链周期为 d,其状态空间 S 存在唯一的**划分**  $\{S_1, S_2, \ldots, S_d\}$ ,且使得从  $S_r$  中任意状态出发,任 1 步转移必然进入  $S_{r+1}$  中。实际上,若将状态 i 固定在  $S_d$  中,则有

$$S_r = \{j | \exists n \in \mathbb{N}, s.t. P_{ij}^{(nd+r)} > 0\}$$

对于任意 Markov 链,其状态空间存在划分  $\{C_0, C_1, C_2, \dots\}$ ,其中  $C_0$  为所有非常返态构成的集合, $C_n (n \ge 1)$  不可约。

### 6.2.4 稳态性质

定义  $\vec{\beta} = (\beta_i)_{i \in S}$  为概率分布,若

$$\vec{\beta}P = \vec{\beta} \ (i.e.\beta_j = \sum_{i \in S} \beta_i P_{ij})$$

则称  $\vec{\beta}$  为该 Markov 链的**平稳分布 (stationary distribution)**。

若  $\vec{\beta}$  为  $X_0$  的分布 (即  $P(X_0 = j) = \beta_j$ ),则  $X_n (n \ge 1)$  的分布都为  $\vec{\beta}$ ,从而  $\{X_n : n \ge 0\}$  为**平稳过程**。

平稳分布为边际分布,不是条件分布,一般地有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij} \neq P(X_{n+1} = j)$$

<u>定义</u> 设 i 为常返态,定义  $\mu_i \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$  为由 i 出发再返回 i 所需的平均时间(步数)。 若  $\mu_i < +\infty$ ,则称 i 为正常返的 (positive recurrent);

若  $\mu_i = +\infty$ ,则称 i 为零常返的 (null recurrent)。  $\mu_i$  越小,返回越频繁。

★定理 若 i 常返且周期为 d , 则

$$\lim_{n \to \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \tag{6.8}$$

当  $\mu_i = +\infty$  时, $\frac{d}{\mu_i} = 0$ 。(不证) <u>定理</u> i 为零常返态或非常返态  $\iff \lim_{n \to \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ 

证明. 
$$i$$
 为零常返  $\Longrightarrow \mu_i = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P_{ii}^{(nd)} = 0$   
又知  $P_{ii}^{(m)} = 0, m$  不被  $d$  整除,故  $\lim_{n \to \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$   
 $i$  非常返  $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ 

 $i \leftrightarrow j$ , 常返, 则 i = j 同时为正常返或零常返。 定理

<u>定理</u> 若 j 为非常返或零常返,则  $\forall i \in S$  都有  $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ 。有限链不可能又零常返态,从而不可约有限 Markov 链所有状态都是正常返的。若 Markov 链有零常返态

若 i 正常返且周期为 1,则称 i 为**遍历的 (ergodic)**;若一个 Markov 链中所有状态 都是遍历的,则称该链是遍历的。

★定理 对于不可约、非周期的 Markov 链,

- (1) 若它是遍历的,则  $\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$  是该链的唯一平稳分布
- (2) 若状态都是非常返的或是零常返的,则平稳分布不存在

#### 某次课 6.3

1. 若它是遍历的,则  $\pi_j = \lim_{n \to \infty}$ 

 $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ 

证明.

$$\forall M, \sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = 1$$

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj} \geq \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

$$P_{ij}^{(n)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj} = 1$$

 $\underline{\underline{c}\,\underline{\mathsf{V}}}$  若  $\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$  存在,则  $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  称为该链的**极限分布**。 性质

1. 
$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)} = \lim_{n \to \infty} P^n = \begin{bmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- 2. 对于一切初始分布  $\vec{\beta}$ ,  $\lim_{n\to\infty} \vec{\beta}P^n = \vec{\pi}$
- 3. 一个链具有平稳分布并不意味着有极限分布
- 4. 若链不可约且遍历,则极限分布式链唯一的平稳分布
- 5. 可以证明,有限链总存在平稳分布;若其不可约,则平稳分布唯一

# 6.3.1 可逆性

(平稳分布当状态空间规模非常大时难以计算)

<u>定义</u>  $\pi_j \ge 0, \sum_i \pi_i = 1$ , 若满足以下<u>可逆性条件</u>:

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i, j \in S \tag{6.9}$$

则称该链对于 元 可逆。

定理 若 P 相对于  $\pi$  可逆, 则  $\pi$  为链的平稳分布。

证明. 
$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j (\sum_i P_{ji}) = \pi_j \implies \vec{\pi} P = \vec{\pi}$$

# 7.1 基本事实

- $rank(A) + rank(B) < rank(AB) n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \cdots, a_n + a_1$ 可逆  $\Longrightarrow$  n为奇数
- $Q^TQ = I_n \iff Q$ 为保距变换  $\iff$  为保内积变换
- Housholder 变换 (关于面反射):  $I_n 2vv^T, ||v|| = 1$
- $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A^T)$
- $P_{\mathcal{M}} = QQ^T, \operatorname{span}(Q) = \mathcal{M}$
- $P_A = A(A^TA)^{-1}A^T$ , A 列线性无关
- 实对称矩阵  $S = Q\Lambda Q^T$

# 7.2 例题

# 练习 1.6.17-(5)

若  $A^2 - I_n = O$  , 证明:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}, \ s.t. \ (A - I_n)\boldsymbol{x} = (A + I_n)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

证明.

$$(A+I_n)(A-I_n)=0$$
  
构造  $oldsymbol{x}=rac{A+I_n}{2}oldsymbol{v},oldsymbol{y}=rac{-A+I_n}{2}oldsymbol{v}$ 

# 练习 1.7.10

证明:  $A \in \mathbb{R}^{m*n}, B \in \mathbb{R}^{n*m}, I_m + AB$  可逆  $\iff I_n + BA$  可逆. 证明.

构造矩阵 
$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$I_n - BA 可逆 \iff \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$
可逆  $\iff I_m - AB$  可逆 
$$\exists I_m - AB$$
 
$$\exists I_m - AB$$

### 7.2.1 正交矩阵

### 7.2.2 特征值与特征向量

### 练习 5.2.23

给定 m 阶方阵  $A_1$ , n 阶方阵  $A_2$  和  $m \times n$  矩阵 B, 证明若  $A_1$  和  $A_2$  没有相同的特征值,则关于  $m \times n$  矩阵 X 的矩阵方程  $A_1X - XA_2 = B$  有唯一解.

证明. 因为 X 与 B 规格相同,所以只要证明该变换是单射即可证明是双射. 即证:  $A_1X = XA_2$  仅有零解

$$A_1^2 X = (A_1 X) A_2 = X A_2^2$$

$$A_1^3 X = (A_1 X) A_2^2 = X A_2^3$$

$$\vdots$$

$$A_1^n X = (A_1 X) A_2^{n-1} = X A_2^n$$

$$(*)$$

考虑上述等式的线性组合,则

$$f(A_1)X = Xf(A_2)$$

恒成立.

不妨令  $f=p_A$ ,则  $f(A_1)=O$ . 令  $\lambda_i$  为  $A_1$  的特征值,则  $\det(\lambda_i I_n-A_2)\neq 0$ ,所以

$$\det(f(A_2)) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i I_n - A_2) \neq 0$$
 (\*\*)

故  $f(A_2)$  可逆, 因此

$$X = f(A_1)X [f(A_2)]^{-1} = O$$

7.2.3 实对称矩阵

对实对称矩阵, A 正定

 $\iff$  A 的特征值都是正数

 $\iff A = TT^T, T$  可逆

 $\Longleftrightarrow A = LDL^T$ 

 $\iff$  A 的顺序主子式都是正数

• gbk (gbk 不能解码的特殊字符,用更高级的 GB18030)