第一章　微积分 A1 ：一元微积分与常微分方程

1.1　极限

1.1.1　基本事实 & 可避免的错误

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$，$\frac{n}{n+1} < \theta < 1$
- Taylor 展开 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，不可忘记除以 $n!$
- **(Leibniz)** 两个函数之积的高阶导数

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

1.1.2　例题

课本 p.57-9(14)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-x^2}) \\
=&\lim_{x\to\infty}(x\sqrt{1+\frac{2}{x}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}) \\
=&\lim_{x\to\infty}(\frac{(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}) - \lim_{x\to\infty}(\frac{(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}) \\
=&2 * \frac{1}{2} - (-1) * \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

《数学分析习题课讲义》2.3.2-6

求证：

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\ (p > 1) \tag{1.1}$$

收敛

证明.

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p} = r$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=r^2$$

$$\therefore S_n\le S_{2^n-1}<1+r+r^2+\cdots+r^n<\frac{1}{1-r}$$

又 $\because \{S_n\}$单调递增 $\therefore \{S_n\}$收敛.

□

习题课 1-1

求证：

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})=\frac{1}{2} \tag{1.2}$$

证明. 该式本质是 n 的多项式

$$\text{let } x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1},\ y_n=(p+1)n^p$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p-n^p)}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}n^k}{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}n^k}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k-\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p+1}{k}n^k+\frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}}{(p+1)\sum\limits_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k}n^k+p(p+1)n^{p-1}}\\
\text{(只考虑最高次项)}\ &=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

习题课 4-6(4)

已知 $f(n)=x^n\ln n$，求 $f^{(n)}(x)$.

解. 直接用 Leibniz 公式会得到复杂的交错和，因此考虑递推.

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\left(f'(x)\right)^{(n-1)}=\left(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}\right)^{(n-1)}\\
&=\left(nx^{n-1}\ln x\right)^{(n-1)}+(n-1)!=n\cdot\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n-1)}+n!\frac{1}{n}\\
&=n\cdot\left((n-1)x^{n-2}\ln x+x^{n-2}\right)^{(n-2)}+n!\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-1)\cdot\left(x^{n-2}\ln x\right)^{(n-2)} + n!\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= n(n-1)\cdot\left((n-2)x^{n-3}\ln x + x^{n-3}\right)^{(n-3)} + n!\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= n(n-1)(n-2)\cdot\left(x^{n-3}\ln x\right)^{(n-3)} + n!\left(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\\
&= \cdots = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

习题课 4-7

定义

$$P_{n,m}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$$

，求 $P_{n,m}(1)$.

解.

$$
\begin{aligned}
P_{n,m}(1) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x)^n(1+x^2+\cdots+x^{m-1})^n\\
\text{（用 Leibniz 定理展开）} &= (-1)^n n!\cdot m^n
\end{aligned}
$$

*$(1-x)^n$ 求至少 n 阶导数才非 0.

微积分 A 期中讲座

定义 $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = \sin a_n$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n^2 = 3$.

证明. 用 stolz 定理表现类等差数列 $\frac{1}{a_n^2}$ 公差趋向 $\frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2 a_n}{a_n^2\sin^2 a_n}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))(x+x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^4} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

1.2 Taylor 展开、Cauchy 中值定理

课本 p.125-10

设函数 $y = f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，$f''(0)\neq 0$. $\forall x\in(-1,1), x\neq 0$，$\exists\ \theta(x)$ 满足 $f(x)-f(0) = xf'(x\cdot\theta(x))$，证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$

证明. 用 Cauchy 中值定理将 $\theta(x)$ 分离出来.

$$\begin{aligned}
f^{''}(\zeta_x)\cdot\theta(x)x &= f^{'}(x\cdot\theta(x)) - f^{'}(0) \\
f^{''}(\zeta_x)\cdot\theta(x)x &= \frac{f(x)-f(0)}{x} - f^{'}(0) \\
\theta(x) &= \frac{1}{f^{''}(\zeta_x)}\cdot\frac{f(x)-f(0)-f^{'}(0)x}{x^2} \\
&= \frac{1}{f^{''}(\zeta_x)}\cdot\frac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{2x} \\
&= \frac{f^{''}(0)}{2f^{''}(0)} = \frac{1}{2}\ (x\to 0)
\end{aligned}$$

□

习题课 6-2-1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f^{''}(\xi)$$

证明. 令 $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

则 $\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = g'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}$

而 $f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$

故 $g'(\eta)=\frac{1}{2}f''(\xi)$ □

1.3　凸函数

- 开区间上的凸函数连续，闭区间上的凸函数未必连续
- 开区间上的凸函数处处存在两个单侧导数，且对于下凸函数，满足 $f'_{-}(x)\le f'_{+}(x)$，但是导数不一定存在

1.4　积分

1.4.1　基本定理

- $f(x)$ 在 J 上非一致连续 $\Longleftrightarrow$
  $\exists\varepsilon_0>0,\ x_n,x_n'\in J$, 满足 $|x_n-x_n'|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n)-f(x_n')|>\varepsilon_0,\forall n\ge 1$
- 有界闭区间上的连续函数、单调函数黎曼可积，可积必有界

- **(Lebesgue)** $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 可积 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集为零测集
- **(Cauchy-Schwarz)**
$$\left(\int_a^b f\cdot g\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$
- **(积分中值定理)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
- 可积函数 $f(x)$ 的变上限积分 $g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 连续，且若 $f(x)$ 在 x_0 处**连续**，即有 $g'(x_0) = f(x_0)$
- 导函数不一定可积，如：

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \\ F'(x) &= \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2}), & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界，不可积.

1.4.2 常见不定积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{a}}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\sec^2 t - 1}\mathrm{d}(\sec t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\sin^2 t\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^4 t} \\ &= \int \frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{4}\left(\frac{u}{(1-u)^2} - \frac{u}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \ln\frac{1-u}{1+u}\right) + C \\ (u=\sin t) \quad &= \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin t}{\cos t} + C \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\cos t = \frac{1}{x}) \qquad &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x - \sqrt{x^2-1}) + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \qquad &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\
J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x \qquad &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\mathrm{d}(\sin x) = \cos^{n-1} x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2} \Longrightarrow J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}
$$

1.4.3　例题

Lijun Yang: Nov.18 P25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f(a)=0$. 证明:

$$
\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t \\
f^2(x) &= \left(\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\
(\text{Cauchy}) &\le \left(\int_a^x 1\cdot \mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t\right) \\
&\le (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t \\
\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x &\le \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

□

习题课 8-4-4.4

设 $k,n\in\mathbb{Z}_+$，求证：

$$
\int_0^{\pi} \cos nx \cos kx\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k=n \\ 0, & k\ne n \end{cases} \tag{1.3}
$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos nx \cos kx &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos((n+k)x)+\cos((n-k)x))\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+k)x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-k)x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}[n=k]\end{aligned}$$

□

1.5　积分的应用

- 极坐标下的面积
$$S=\int_a^n \frac{1}{2}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$
- 弧长
$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$$
- 极坐标下曲线的弧长
$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$
- 曲率
$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{[x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$
或
$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
REMARK: 圆的曲率为 $\frac{1}{R}$
- 绕 x,y 轴的旋转体体积
$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x, V_y=\int_a^b 2\pi x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$
- 绕 x,y 轴的旋转体表面积
$$S_x=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x, S_y=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$$
- 曲线的形心（质量均匀时即为质心）
$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}{\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}, \bar{y}=\frac{\int_a^b y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}{\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t}$$

- 平面图形的形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}t}, \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}t}$$

- (Guldin,I,II)
  - 曲线绕直线旋转所得的旋转面的侧面积，等于曲线的弧长，乘以形心绕直线旋转一周的周长
  - 封闭图形绕直线旋转所得的旋转面的体积，等于图形的面积，乘以形心绕直线旋转一周的周长

1.6　广义积分

1.6.1　定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有唯一瑕点 b，且 $\forall b' \in (a,b)$，$f(x)$ 在 $[a,b')$ 上可积，则 $f(x)$ 在该区间上**内闭可积**.

1.6.2　Dirichlet 判敛

设有：

1. $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上**内闭可积**，且存在 $M > 0$，使得 $|\int_a^{b'} f(x)\mathrm{d}x| < M, \forall b' \in [a,b)$
2. $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上**单调**且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

1.6.3　Abel 判敛

设有：

1. $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上**内闭可积**，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
2. **(ii)** $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上**单调有界**

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

1.7　常微分方程

1.7.1　常数变易法

1. 求解 $f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$,

2. 先解 $f'(x)+p(x)f(x)=0$，得 $f(x)=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$

3. 进一步设原方程解为 $f(x)=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$

4. $C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$

5. $f(x)=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}+C)$

1.7.2 特殊可降阶高阶常微分方程

方程中不显含自变量 x，可以表示为 $F(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2})=0$.

令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

，问题转化为函数 p 关于自变量 y 的一阶常微分方程 $F(y,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})$.

1.7.3 二阶线性常系数齐次方程

设 p,q 为实常数，则对常微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

，称 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 为特征方程，令 $\Delta=p^2-4q$，设方程的根为 $\lambda_{1,2}$.

- $\Delta>0$，$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
- $\Delta=0$，$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$
- $\Delta<0$，有二虚根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

1.7.4 Euler 方程

设 $a_0,a_1,\dots,a_n$ 为实常数，则方程

$$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=0$$

称为 **Euler 方程**，一般作变量替换 $t=\log|x|$ 将方程化为以 t 为自变量的常系数方程，第 k 项转化为：

$$\begin{aligned}a_kx^ky^{(k)}&=a_kx^k\cdot\boldsymbol{y}(t(x))^{(k)}\\&=a_kx^k\cdot(\boldsymbol{y}'(t)\cdot\frac{1}{x})^{(k-1)}\\&=a_kx^k\cdot(y''(t))^{(k-2)}\\&=\dots\end{aligned}$$