Notes on 15-213

Jingze Xing

2021 年 6 月 22 日

目录

1 Bits, Bytes, and Integers

1.1 Integer representation: two's complement

补码等价于原数在 mod 2^w 意义下的无符号二进制表示

$$Byte2Signed(X) = -x_{w-1} \cdot 2^{w-1} + \sum_{i=0}^{w-2} x_i 2^i$$

在 C 中，`signed` 转化为 `unsigned` 类型时不改变其 `bit pattern`，但是改变了解释的方式；包含 `unsigned` 类型的运算会将 `signed` 自动转换为 `unsigned` 类型。

$$x' = Unsigned2Signed(x) = x_{w-1} \cdot 2^w + x$$

1.2 Integer arithmetics

补码的特殊性质使得 $\underbrace{x_{w-1} \dots x_{w-1}}_{k\ copies} x_{w-1}x_{w-2} \dots x_0 = x_{w-1}x_{w-2} \dots x_0$，即通过**符号扩展（用符号位补足最高位）**来扩展字长，能够保持数值不变。

在对 `signed` 进行右移操作时，同样使用符号位补充，例如 $-6 = \underline{1010} \to 1\underline{101} = -3$。

无符号整数加法溢出时，计算得到 $s = x + y - 2^w$；发生溢出当且仅当 $s < x$（或者等价的 $s < y$）。

符号整数乘法的结果的后 w 位与有符号整数乘法的结果相同，因为 $x' \equiv x + 2^w \equiv x \pmod{2^w}$。整数乘法不发生溢出的充要条件是 `x == 0 || (x * y) / x == y`。

1.3 Memory organization

计算机硬件模拟了一个足够长的 0/1 序列，每八个组成一个**字节 (Byte)**，Byte 是最小的可寻址单元，内存中的变量可能占据多个字节，约定其地址为其首个 Byte 的地址。

大端法：**最高**有效位放在**最小**地址处；小端法：**最低**有效位放在**最小**地址处。

2 Floating point