第一章　离散数学

1.1　数理逻辑

1.1.1　命题逻辑与运算

等值定理

设 $\Phi(A)$ 是含命题公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用命题公式 B 置换了 $\Phi(A)$ 中的 A 之后得到的命题公式，如果 A = B，则 $\Phi(A) = \Phi(B)$.

常见等值公式

$$P \to Q = \neg P \vee Q \qquad \text{蕴含等值式} \tag{1.1}$$

$$P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R \qquad \text{前提合并提取} \tag{1.2}$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P) \qquad \text{等价等值式} \tag{1.3}$$

$$P \to Q = (\neg Q) \to (\neg P) \qquad \text{假言易位} \tag{1.4}$$

$$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) = \neg P \qquad \text{归谬论} \tag{1.5}$$

$$P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R) \qquad \text{前提交换} \tag{1.6}$$

真值表还原命题公式

考察真值表中取 1 的所有 m 行，则可以将命题公式表示为

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m = (\ \wedge\ ) \vee (\ \wedge\ ) \vee \cdots \vee (\ \wedge\ )$$

其中 $Q_i = (R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n)$，若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = P_i$，否则 $R_i = \neg P_i$.

连结词的完备集

设 C 是一个联结词的集合，如果可以仅用集合中的连结词构造出所有的 n 元映射，称 C 是完备的联结词集合. 典型的完备集有：

$$\{\neg,\wedge\},\ \{\neg,\vee\},\ \{\neg,\to\},\ \{\uparrow\}(\text{与非}),\ \{\downarrow\}(\text{或非})$$

对偶式

将给定的命题公式 A 中出现的 $\vee$，$\wedge$，T，F 分别以 $\wedge$，$\vee$，F，T 代换，得到公式 A^*，即为公式 A 的对偶式.

另记 $A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$，则有

$$\neg(A^*) = (\neg A)^* \tag{1.7}$$

$$\neg(A^-) = (\neg A)^- \tag{1.8}$$

$$\neg A = (A^*)^- \tag{1.9}$$

（归纳法证明）

对偶原理

- 若 $A = B$，则 $A^* = B^*$.

$$A = B \implies \neg A = \neg B \implies A^{*-} = B^{*-} \implies A^* = B^* \tag{1.10}$$

- 若 $A \to B$ 永真，必有 $B^* \to A^*$ 永真

$$A \to B \implies \neg B \to \neg A \implies B^{*-} \to A^{*-} \implies B^* \to A^* \tag{1.11}$$

- A 永真 $\Leftrightarrow$ A^- 永真（$\neg A$ 永真 $\Leftrightarrow$ A^* 永真）；A 永真 $\Leftrightarrow$ A^* 矛盾

范式存在定理

命题变项及其否定式统称**文字**，由文字的合（析）取所组成的公式称为**合（析）取式**

★形如 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 的公式为**析取范式**，其中 A_i 为合取式.

★形如 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 的公式为**合取范式**，其中 A_i 为析取式.

（范式的关键在于嵌套只有两层）

任一命题公式**都存在**与之等值的合取范式和析取范式，但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一. (PROOF)

主范式

极小项：指合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_n$，$Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$
主析取范式：每个$\underline{\text{一级命题变项}}$ 都是极小项，且两两不相同
极大项：指析取式 $Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots Q_n$，$Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$
主合取范式：每个$\underline{\text{一级命题变项}}$ 都是极大项，且两两不相同

极小项性质

1. 任意极小项仅在**一个**解释下为真
2. 极小项两两不等值，两两不同时为真
3. 对于任意一个解释，2^n 个极小项中**有且仅有**一个为真
4. 若一个基本变项不在于合取式中，则可以拆分成 $(Q_1 \wedge Q_2 \wedge P_3) \vee (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \neg P_3)$

主范式定理

任一命题公式**都存在**与之等值的**唯一**主合取范式和主析取范式.　　（与多项式插值类似）

两种主范式的转换

引入二进制表示，如 $m_5 = P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$（极小项），$M_5 = P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$（极大项）

设有基于 n 个命题变量的主合取范式 $A = \bigwedge M_{i_1,\ldots,i_k}$，则由于 M_i $(0 \le i < 2^n)$ 中有且仅有一个为假，故

$$
\begin{aligned}
\neg A &= \bigwedge M_{(0,1,\ldots,2^n-1)\setminus(i_1,\ldots,i_k)} \\
A &= \left(\bigwedge M_{(0,1,\ldots,2^n-1)\setminus(i_1,\ldots,i_k)}\right)^{*-} \\
&= \bigvee m_{\mathrm{bitinv}[(0,1,\ldots,2^n-1)\setminus(i_1,\ldots,i_k)]}
\end{aligned} \tag{1.12}
$$