第一章　线性代数

1.1　线性映射和矩阵

1.1.1　线性映射

定义　<u>线性运算</u>指向量的加法与数乘。

定义　<u>向量空间</u>为带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$ 被称为向量空间。

定义　映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 若满足

1. 任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x'})$
2. 任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, 都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

则 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 <u>线性映射</u>。

定义　从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为<u>线性变换</u>.

定义　若线性映射 f 有 $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^m$，则矩阵 $A = [\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}]$ 即为标准坐标向量下的 <u>线性映射的表示矩阵</u>，且满足 $A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a_i}$。

定理　（线性映射的线性运算）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $k\boldsymbol{A}$ 也是同样范畴上的线性映射。

定理　$\boldsymbol{AB}$ 表示线性映射 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的复合 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$。需要注意，$\boldsymbol{AB} = 0$ 也不能推出 $\boldsymbol{A} = 0$ 或 $\boldsymbol{B} = 0$。

理解　矩阵乘法 $A\boldsymbol{x}$ 视为这样一种运算：按照 $\boldsymbol{x}$ 指定的系数，将 $\boldsymbol{A}$ 的列进行线性组合。

定义　<u>反对称矩阵</u>：$A = -A^T$，反对称矩阵对角线必定为 0。

定义 若一个上三角矩阵对角线上全为 0，则称为**严格上三角矩阵**。

定义 将阶梯形矩阵，从下向上消元，并单位化**主元**，得到的矩阵每个非零行上，主变量为 1 而其他列的元素均为 0，称这个矩阵为 **行简化阶梯形矩阵**。

定理 对于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} = trace(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T)$。

1.1.2 线性方程式组

定理 对于方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，将 $[A\ \boldsymbol{b}]$ 简化为阶梯型后，若

1. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数比 A 多 $\mathbf{1}$，则方程组无解（$0 \neq 1$）
2. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数与 A 相等，则方程组有解
   (a) 若阶梯数等于未知数个数，则有唯一解
   (b) 若阶梯数小于未知数个数，则有无穷多组解

定义 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 称为**齐次线性方程组**，$\vec{0}$ 为其**平凡解**，除此之外的解称为**非平凡解**。

1.1.3 可逆矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则 A 为 **可逆矩阵** 或 **非奇异矩阵**，B 为 A 的逆。

定理 以下命题等价

1. A 可逆
2. 任意 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解唯一
3. 其次方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 仅有零解
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵是 I_n
6. A 能表示为有限个初等矩阵的乘积（即消元至行简化阶梯形矩阵的逆过程）

定义 若矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$,则称其为 **（行）对角占优矩阵**。

定理 对角占优矩阵必然可逆。

定义 若矩阵 A 通过若干初等**行变换**可以变为矩阵 B，则称 A, B **左相抵**。即存在可逆矩阵 P，使得 $PA = B, A = P^{-1}B$。所有和 A 相抵的矩阵中，最简单的是其行简化阶梯形，它被称

为 A 的<u>左相抵标准形</u>。

定理 左相抵构成等价关系。

定理 **(Sherman-Morrison)** 设 A 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 n 阶向量，则 $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 可逆 $\iff 1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$，且此时

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^TA^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{1.1}$$

若将 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 改为 $n\times k$ 的矩阵，则类似地有

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\boldsymbol{u}(I_k+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{v}^TA^{-1} \tag{1.2}$$

1.1.4 LU 分解

定理 若 n 阶方阵 A 仅通过倍加矩阵做行变化即可化为阶梯形，则存在<u>单位下三角矩阵</u>（主对角线均为 1）L 与上三角矩阵 U，使得 $A=LU$，此即 <u>**LU 分解**</u>。

定义 方阵 A 左上角的 $k\times k$ 块为第 k 个<u>顺序主子阵</u>。

定理 可逆矩阵 A 存在 LU 分解，当且仅当 A 的所有顺序主子阵均可逆，此时 LU 分解唯一。（满足在消元过程中不需要行的调换）

定理 若可逆矩阵 A 存在 LU 分解，则存在对角线均不为 0 的对角矩阵 D、单位下三角矩阵 L、单位上三角矩阵 U，满足 $A=LDU$，且该分解**唯一**。此即 <u>**LDU 分解**</u>。

定理 若可逆对称阵 A 有 LDU 分解，则 $L=U^T$。

定理 可逆矩阵 A 存在分解 $A=PLU$，P 为置换矩阵，显然该分解不唯一。

技巧 将 A 分解成对称阵 $X=\frac{1}{2}(A+A^T)$ 与反对称阵 $Y=\frac{1}{2}(A-A^T)$。

1.2 子空间和维数

1.2.1 基本概念

定义 映射 $A:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的<u>像集</u>

$$\mathcal{R}(A)=\{A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}\subseteq\mathbb{R}^m \tag{1.3}$$

显然 $\mathcal{R}(A)$ 必是子空间，即 A 的**列（向量）空间**。

命题　$\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m \iff A$ 为满射。

定义　映射 $A:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的**原像**

$$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\in\mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

显然 $\mathcal{N}(A)$ 必是子空间，即 A 的**零空间（也称解空间）**。

命题　$\mathcal{N}(A)=\{\boldsymbol{0}\} \iff A$ 是单射 $\iff \forall\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2,\ A(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\neq 0$。

定义　将 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 的全体线性组合为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，记为

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n):=\{k_1\boldsymbol{a}_1,\dots,k_n\boldsymbol{a}_n|k_1,\dots,k_n\in\mathbb{R}\} \tag{1.5}$$

定理　$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

1.2.2　基和维数

定义　向量组 S 的任一**极大线性无关组**中向量的个数称为 S 的**秩 (rank)**；子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基的向量数目称为**维数**，记为 $\dim\mathcal{M}$。

定理　**（基存在定理）**给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}\neq\{0\}$，则 $\mathcal{M}$ 存在一组基，且基向量个数不超过 m。

定理　**（基扩充定理）**若 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能够**扩充**成 $\mathcal{N}$ 的一组基。

定理　对于方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A$ 可逆 $\iff A$ 是单射 $\iff A$ 是满射。

1.2.3　矩阵的秩

定义　执行 Gauss 消去法将矩阵化为阶梯型后，主元所在的列对应主变量的系数，称为**主列**；其他列对应自由变量的系数，称为**自由列**。

定理　若矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$ 左相抵，则

1. 部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\dots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{b}_{i_1},\dots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 线性无关。
2. $\boldsymbol{a}_j=k_1\boldsymbol{a}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_{i_r} \iff \boldsymbol{b}_j=k_1\boldsymbol{b}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_{i_r}$

二级结论

- $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\right)\leq \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}A & X\\ O & B\end{bmatrix}\right)$。因而当 A,B 可逆时，上述两个分块矩阵都可逆
- $\mathrm{rank}(A+B)\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$
- $\mathrm{rank}(AB)\leq \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$
- 反对称矩阵的秩必定是偶数
- $\mathcal{R}(AB)\subseteq\mathcal{R}(A)$

定义　$\mathcal{R}(A^T)$ 为 A 的行（向量）空间；$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$；$\mathrm{rank}(A)=n$ 定义为列满秩，同理有行满秩。

定理　对于 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，

- A 是满射 $\iff$ A 行满秩
- A 是单射 $\iff$ A 列满秩

定义　通过行列初等变换，能将矩阵 A 变换为相抵标准型 $\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$。

1.2.4　线性方程组的解

方法　（求零空间的一组基）矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，求其行简化阶梯形，考虑依次将各个自由元取为 1，同时维持其他自由元为 0（即只让其中一个自由列在线性组合中系数非零），由于主列都是单位向量，从而容易根据自由列的系数计算出零解。这样求出的解（由于自由元的取值特点）构成零空间的一组基，继而有 $\dim\mathcal{N}(A)=n-\mathrm{rank}(A)$。

1.3　内积和正交性

定义　$\boldsymbol{b}$ 向 $\boldsymbol{a}$ 的垂直投影 为 $\hat{x}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$；向量 $\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 向直线 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a})$ 的投影。

定理　**（Cauchy-Schwarz 不等式）** $|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}|\leq\|a\|\|b\|$。

定义　设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，若它的一组基是正交向量组，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组正交基；若是正交单位向量组，则称为 $\mathcal{M}$ 的标准正交基。

定义　**（Gram-Schmidt 正交化）**从 $\mathcal{M}$ 的任意一组基 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$ 出发，执行如下操作

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_k=\boldsymbol{a}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^T\boldsymbol{a}_k}{\widetilde{\boldsymbol{q}}_j^T\widetilde{\boldsymbol{q}}_j}\widetilde{\boldsymbol{q}}_j\quad(k=1,2,\dots,r)\tag{1.6}$$

即得到一组正交基。

1.3.1　正交矩阵和 QR 分解

定义　若方阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 为 n 阶正交矩阵；Q 的行、列向量各自构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。

定理　方阵 Q 的以下叙述等价

1. Q 是正交矩阵
2. Q 为保距变换，即 $\|Q\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
3. Q 为保内积变换，即 $Q\boldsymbol{x} \cdot Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

保距变换一定也是保角变换。