

# 第一章 微积分 A1 : 一元微积分与常微分方程

## 1.1 极限

### 1.1.1 基本事实 & 可避免的错误

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \frac{n}{n+1} < \theta < 1$
- Taylor 展开  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ , 不可忘记除以  $n!$
- (Leibniz) 两个函数之积的高阶导数

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

### 1.1.2 例题

课本 p.57-9(14)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(1 + \frac{2}{x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= 2 * \frac{1}{2} - (-1) * \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

《数学分析习题课讲义》2.3.2-6

求证:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad (p > 1) \quad (1.1)$$

收敛

证明.

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p} = r$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p} = r^2$$

$$\therefore S_n \leq S_{2^n-1} < 1 + r + r^2 + \cdots + r^n < \frac{1}{1-r}$$

又  $\because \{S_n\}$  单调递增  $\therefore \{S_n\}$  收敛.

□

### 习题课 1-1

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

证明. 该式本质是  $n$  的多项式

$$\begin{aligned} \text{let } x_n &= (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}, \quad y_n = (p+1)n^p \\ \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p - n^p)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p+1) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k - \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} n^k}{(p+1) \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} n^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p+1) \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} n^k - \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p+1}{k} n^k + \frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}}{(p+1) \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} n^k + p(p+1)n^{p-1}} \\ (\text{只考虑最高次项}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

### 习题课 4-6(4)

已知  $f(n) = x^n \ln x$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

解. 直接用 Leibniz 公式会得到复杂的交错和, 因此考虑递推.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (f'(x))^{(n-1)} = (nx^{n-1} \ln x + x^{n-1})^{(n-1)} \\ &= (nx^{n-1} \ln x)^{(n-1)} + (n-1)! = n \cdot (x^{n-1} \ln x)^{(n-1)} + n! \frac{1}{n} \\ &= n \cdot ((n-1)x^{n-2} \ln x + x^{n-2})^{(n-2)} + n! \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1) \cdot (x^{n-2} \ln x)^{(n-2)} + n! \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\
&= n(n-1) \cdot ((n-2)x^{n-3} \ln x + x^{n-3})^{(n-3)} + n! \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\
&= n(n-1)(n-2) \cdot (x^{n-3} \ln x)^{(n-3)} + n! \left( \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \cdots = n! \left( \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

## 习题课 4-7

定义

$$P_{n,m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x^m)^n$$

, 求  $P_{n,m}(1)$ .

解.

$$P_{n,m}(1) = \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^n (1+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$$

$$(\text{用 Leibniz 定理展开}) = (-1)^n n! \cdot m^n$$

\* $(1-x)^n$  求至少  $n$  阶导数才非 0.

## 微积分 A 期中讲座

定义  $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = \sin a_n$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n^2 = 3$ .证明. 用 stolz 定理表现类等差数列  $\frac{1}{a_n^2}$  公差趋向  $\frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - \sin^2 a_n}{a_n^2 \sin^2 a_n} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(x + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^4} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

## 1.2 Taylor 展开、Cauchy 中值定理

## 课本 p.125-10

设函数  $y = f(x)$  在  $(-1, 1)$  内二阶可导,  $f''(0) \neq 0$ .  $\forall x \in (-1, 1), x \neq 0$ ,  $\exists \theta(x)$  满足  $f(x) - f(0) = xf'(x \cdot \theta(x))$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$

证明. 用 Cauchy 中值定理将  $\theta(x)$  分离出来.

$$\begin{aligned} f''(\zeta_x) \cdot \theta(x)x &= f'(x \cdot \theta(x)) - f'(0) \\ f''(\zeta_x) \cdot \theta(x)x &= \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \\ \theta(x) &= \frac{1}{f''(\zeta_x)} \cdot \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} \\ &= \frac{1}{f''(\zeta_x)} \cdot \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \\ &= \frac{f''(0)}{2f''(0)} = \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

□

### 习题课 6-2-1

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 证明  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明. 令  $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\text{则 } \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = g'(\eta) = \frac{f'(\eta)(\eta-a) - (f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}$$

$$\text{而 } f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$$

$$\text{故 } g'(\eta) = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

□

## 1.3 凸函数

- 开区间上的凸函数连续, 闭区间上的凸函数未必连续
- 开区间上的凸函数处处存在两个单侧导数, 且对于下凸函数, 满足  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ , 但是导数不一定存在

## 1.4 积分

### 1.4.1 基本定理

- $f(x)$  在  $J$  上非一致连续  $\iff$   
 $\exists \varepsilon_0 > 0, x_n, x'_n \in J$ , 满足  $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ , 但  $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon_0, \forall n \geq 1$
- 有界闭区间上的连续函数、单调函数黎曼可积, 可积必有界

- (Lebesgue)  $[a, b]$  上的有界函数  $f(x)$  可积  $\iff f(x)$  在  $[a, b]$  上的间断点集为零测集

- (Cauchy-Schwarz)

$$\left( \int_a^b f \cdot g \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

- (积分中值定理) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

- 可积函数  $f(x)$  的变上限积分  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$  连续, 且若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 即有  $g'(x_0) = f(x_0)$
- 导函数不一定可积, 如:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

其中  $F'(x)$  在  $[0, 1]$  上无界, 不可积.

### 1.4.2 常见不定积分

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C \\ \int \frac{1}{x^2+a} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\tan \frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C \\ \int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \sqrt{\sec^2 t - 1} d(\sec t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \int \frac{\sin^2 t d(\sin t)}{\cos^4 t} \\ &= \int \frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2} du = \int \frac{1}{4} \left( \frac{u}{(1-u)^2} - \frac{u}{(1+u)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \ln \frac{1-u}{1+u} \right) + C \\ (u = \sin t) \quad &= \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin t}{\cos t} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos t = \frac{1}{x}) &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x - \sqrt{x^2-1}) + C \\
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\
J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d(\sin x) = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \\
\Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2} &\Rightarrow J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}
\end{aligned}$$

## 1.4.3 例题

Lijun Yang: Nov.18 P25

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微, 且  $f(a) = 0$ . 证明:

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

证明.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \\
f^2(x) &= \left( \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \right)^2 \\
(\text{Cauchy}) &\leq \left( \int_a^x 1 \cdot dt \right) \cdot \left( \int_a^x [f'(t)]^2 dt \right) \\
&\leq (x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt \\
\int_a^b f^2(x) dx &\leq \int_a^b (x-a) dx \int_a^b [f'(t)]^2 dt \\
&\leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx
\end{aligned}$$

□

## 习题课 8-4-4.4

设  $k, n \in \mathbb{Z}_+$ , 求证:

$$\int_0^\pi \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (1.3)$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos nx \cos kx &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x))dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+k)x)dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-k)x)dx \\ &= \frac{\pi}{2}[n=k]\end{aligned}$$

□

## 1.5 积分的应用

- 极坐标下的面积

$$S = \int_a^n \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta$$

- 弧长

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- 极坐标下曲线的弧长

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

- 曲率

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

或

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

REMARK: 圆的曲率为  $\frac{1}{R}$

- 绕  $x, y$  轴的旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx, V_y = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) dx$$

- 绕  $x, y$  轴的旋转体表面积

$$S_x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, S_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- 曲线的形心（质量均匀时即为质心）

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}, \bar{y} = \frac{\int_a^b y(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}$$

- 平面图形的形心

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dt}{\int_a^b f(x) dt}, \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dt}{\int_a^b f(x) dt}$$

- (Guldin, I, II)

- 曲线绕直线旋转所得的旋转面的侧面积，等于曲线的弧长，乘以形心绕直线旋转一周的周长
- 封闭图形绕直线旋转所得的旋转面的体积，等于图形的面积，乘以形心绕直线旋转一周的周长

## 1.6 广义积分

### 1.6.1 定义

设  $f(x)$  在  $[a, b)$  上有唯一瑕点  $b$ ，且  $\forall b' \in (a, b)$ ， $f(x)$  在  $[a, b']$  上可积，则  $f(x)$  在该区间上内闭可积。

### 1.6.2 Dirichlet 判敛

设有：

1.  $f(x)$  在  $[a, b)$  上内闭可积，且存在  $M > 0$ ，使得  $|\int_a^{b'} f(x) dx| < M, \forall b' \in [a, b)$
2.  $g(x)$  在  $[a, b)$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$

则广义积分  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  收敛

### 1.6.3 Abel 判敛

设有：

1.  $f(x)$  在  $[a, b)$  上内闭可积，且  $\int_a^b f(x)dx$  收敛
2. (ii)  $g(x)$  在  $[a, b)$  上单调有界

则广义积分  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  收敛

## 1.7 常微分方程

### 1.7.1 常数变易法

1. 求解  $f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$ ,



2. 先解  $f'(x) + p(x)f(x) = 0$ , 得  $f(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$
3. 进一步设原方程解为  $f(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$
4.  $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$
5.  $f(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C)$

### 1.7.2 特殊可降阶高阶常微分方程

方程中不显含自变量  $x$ , 可以表示为  $F(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$ .

令  $p = \frac{dy}{dx}$ , 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

, 问题转化为函数  $p$  关于自变量  $y$  的一阶常微分方程  $F(y, p, p\frac{dp}{dy})$ .

### 1.7.3 二阶线性常系数齐次方程

设  $p, q$  为实常数, 则对常微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

, 称  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  为特征方程, 令  $\Delta = p^2 - 4q$ , 设方程的根为  $\lambda_{1,2}$ .

- $\Delta > 0$ ,  $y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$
- $\Delta = 0$ ,  $y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$
- $\Delta < 0$ , 有二虚根  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ,  $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

### 1.7.4 Euler 方程

设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  为实常数, 则方程

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1xy' + a_0y = 0$$

称为 **Euler 方程**, 一般作变量替换  $t = \log|x|$  将方程化为以  $t$  为自变量的常系数方程, 第  $k$  项转化为:

$$\begin{aligned} a_k x^k y^{(k)} &= a_k x^k \cdot \mathbf{y}(t(x))^{(k)} \\ &= a_k x^k \cdot (\mathbf{y}'(t) \cdot \frac{1}{x})^{(k-1)} \\ &= a_k x^k \cdot (\mathbf{y}''(t))^{(k-2)} \\ &= \dots \end{aligned}$$