第一章　随机过程

1.1　Bernoulli 过程与 Poisson 过程

1.1.1　基本概念

<u>定义</u>　　令 $(\omega, \mathscr{J}, P)$ 为概率空间,T 为指标集,S 为状态空间（相空间）,$\forall t \in T, \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$，$X_t$ 为随机变量，$\{X_t : t \in T\}$ 称为一个<u>随机过程</u>**(stochastic process)**；$\forall \omega_0 \in \Omega$，$X_t(\omega_0)$ 称为一个<u>样本轨道</u>**(sample path)**。

<u>定义</u>　　随机变量 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 称为<u>计数过程</u>，如果满足

1. $N(t) \geq 0$，取整数值
2. $\forall t > s \geq 0, N(t) \geq N(s)$
3. $N(t) - N(s)$ 表示时间 $(s, t]$ 时间内的事件数

一般记第 n 次到达的时间为 Y_n，则有到达时间序列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$；定义 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $T_1 = Y_1$，$T_i = Y_i - Y_{i-1} (i > 1)$。

REMARK:

1. X_t 记为 $X(t)$ 时强调函数性质
2. T 通常解释为时间，可以为离散或者连续
3. X_t 称为过程在 t 时刻的状态，S 可以为离散或者连续
4. $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ 视为 (t, ω) 的函数

1.1.2　Bernoulli 过程

<u>定义</u>　　T 为离散时间，记为 $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$。$X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布且 $X_i \sim B(p)$，X_i 可以视为第 i 次实验成功与否。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 记为 Bernoulli 过程。

REMARK:

1. $X_1, X_2, \ldots$ 相互独立 $\iff \forall n, X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立
2. $\forall$certain n，$\{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\}$ 仍为 Bernoulli 过程。

1.1.3　Bernoulli 过程的性质

首次到达（相邻两次到达）的分布：几何分布

<u>定义</u>　令 $T=$ 首次试验成功的时间，则 $P(T=m)=p(1-p)^{m-1}(m=1,2,\dots)$
<u>性质</u>　无记忆性

$$P(T-n=m|T>m)=\frac{P(T=n+m,T>n)}{P(T>n)}=\frac{p(1-p)^{n+m}}{1-\sum_{k\geq1}p(1-p)^{k-1}}=p(1-p)^{m-1}=P(T=m) \tag{1.1}$$

第 k 次到达时间的分布：负二项分布

<u>定义</u>　对于 Bernoulli 过程 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$P(Y_k=m)=P(\text{第 } m \text{ 次成功，且前 } m \text{ 次成功了 } k \text{ 次})=\binom{m-1}{k-1}p^k(1-p)^{m-k}$$

Bernoulli 过程的分裂

若每次到达的时间以 q 的概率保留下来，则保留下来的过程为 Bernoulli 过程，参数为 pq。

Bernoulli 过程的合并

两个独立的 Bernoulli 过程合并，结果仍为 Bernoulli 过程，且参数为 $p+q-pq$。

1.1.4　Poisson 过程

平稳增量过程

<u>定义</u>　如果增量 $X(t+\tau)-X(t)$ 的**分布**仅与 τ 有关，而与 t 无关，则称为平稳增量过程。

独立增量过程

<u>定义</u>　时刻 t 以前发生的事件数 [即 $N(t)$] 必须独立于时刻 t 与 $t+s$ 之间发生的事件数 $[N(t+s)-N(t)]$，则该过程为独立增量过程。

Poisson 过程

<u>定义 1</u>　计数过程 $\{N(t):t\geq0\}$ 称为 Poisson 过程，如果满足

1. $N(0)=0$
2. 过程有平稳独立增量
3. 存在 $\lambda>0$，满足 $h\to0$ 时，$P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$
4. $P(N(h)\geq2)=o(h)$

定义 2

1. $N(0)=0$
2. 过程有独立增量
3. $\forall s,t\geq 0, P\{N(t+s)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

1.1.5 Poisson 过程的性质

Poisson 过程的分裂

定理　假设 Poisson 过程过程中每次发生的事件分为 I 型和 II 型，以概率 p 为 I 型，否则为 II 型。$N_1(t), N_2(t)$ 分别表示 $(0,t]$ 内两种事件的数目，则

1. $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$
2. $\{N_1(t):t\geq 0\},\{N_2(t):t\geq 0\}$ 为 Poisson 过程，且到达率分别为 $\lambda p, \lambda(1-p)$
3. 这两个过程相互独立

Poisson 过程的合并

定理　已知 $\{N_1(t):t\geq 0\},\{N_2(t):t\geq 0\}$ 为相互独立的 Poisson 过程，到达率分别为 λ_1,λ_2，令 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$，则 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为 Poisson 过程，其到达率为 $\lambda_1+\lambda_2$。且时间 N_1 先发生的概率为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，事实上，对于每个发生的事件，其属于 N_i 的概率为 $\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$。

条件作用

已知 $[0,t]$ 内发生了一次事件，则该事件发生在 $[0,s](s\leq t)$ 上的概率为

$$\begin{aligned}P(Y_1\leq s|N(t)=1)&=\frac{P(N(s)=1,N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}=\frac{P(N(s)=1)P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}\\&=\frac{\lambda se^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda te^{-\lambda t}}=\frac{s}{t}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $N(t)=1$ 条件下，$Y_1\sim U(0,t)$。

定理　$N(t_2)=n$ 的条件下，对于 $t_1<t_2$，$N(t_1)\sim B(n,\frac{t_1}{t_2})$。相当于在 $[0,t_2]$ 上均匀分布随机放置 n 个到达点，第 j 次到达即为第 j 阶次序统计量。

定理　$N(t)=n$ 的条件下，事件发生的 n 个时刻 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 的联合 pdf 为

$$f(t_1,\ldots,t_n)=\frac{n!}{t^n} \tag{1.2}$$

证明. 已知条件等价于

$$T_1=1,T_2=t_2-t_1,\ldots,T_n=t_n-t_{n-1},T_{n+1}>t-t_n$$

这里 T_i 为间隔事件，$T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$。$Y_1,\ldots,Y_n$ 的 pdf 就等价于 $T_1,\ldots,T_n$ 的 pdf

$$\begin{aligned} f(t_1,\ldots,t_n|N(t)=n) &= \frac{f(t_1,\ldots,t_n,n)}{P(N(t)=n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1}\cdots\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\cdot e^{-\lambda(t-t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{n!}{t^n} \end{aligned}$$

□

因此有生成 Poisson 过程的另一种方式：

1. 根据 $N(t)\sim P(\lambda t)$ 生成 $(0,t]$ 内事件发生数
2. 假定 $N(t)=n$，则取 $U_1,\ldots,U_n \overset{iid}{\sim} U(0,t)$
3. 令 $Y_j = U_{(j)}, j=1,2,\ldots,n$

次序统计量

设有 $X_1,\ldots,X_n$ 独立同分布，令 $X_{(i)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$ $(1\le i\le n)$，则 $X_{(i)}$ 为 i 阶次序统计量。

设 X_i 的 pdf 为 $f(x)$，cdf 为 $F(x)$，则

$X_{(j)}=x \iff X_1,\ldots,X_n$ 中有 $j-1$ 个取值 $<x$，且有 $n-j$ 个取值 $>x$，可以不严格地推导出 $X_{(j)}$ 的 pdf。

$$\begin{aligned} P(x\le X_{(j)}\le x+\mathrm{d}x) &\approx \binom{n}{j-1,n-j,1}F^{j-1}(x)(1-F(x))^{n-j}f(x)\mathrm{d}x \\ f_j(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}F^{j-1}(x)(1-F(x))^{n-j}f(x) \qquad (1.3) \end{aligned}$$

由此定义联合分布 pdf ...

1.1.6 Poisson 过程的推广

非齐次 Poisson 过程

定义　计数过程 $\{N(t):t\ge 0\}$ 称为到达率为 $\lambda(t)(\lambda(t)>0)$ 的 Poisson 过程，如果

1. $N(0)=0$
2. 具有独立增量
3. $P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t)h+o(h)$
4. $P(N(t+h)-N(t)\ge 2)=o(h)$

若令 $m(t)=\int_0^t \lambda(k)\mathrm{d}k$，则

$$P(N(t+s)-N(t)=n)=e^{m(t+s)-m(t)}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

其中 $m(t+s)-m(t)$ 即为这段时间内的期望事件数。该过程没有平稳增量性质。

复合 Poisson 过程

定义　$\{N(t):t\geq 0\}$ 为 Poisson 过程，X_i iid 且与 $N(t)$ 相互独立，令 $Z(t)\triangleq\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$，则 Z_t 为复合 Poisson 过程。**定理**

1. $Z(t)$ 有独立增量性质
2. 若 $E(X_i^2)\leq\infty$，则 $E(Z(t))=\lambda tE(X_i),Var(Z(t))=\lambda tE(X_i^2)$（用矩母函数证明）

条件 Poisson 过程

定义　设 $\Lambda>0$ 为随机变量，当 $\Lambda=\lambda$ 时，计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为到达率为 λ 的 Poisson 过程，则称 $N(t)$ 为条件 Poisson 过程。$N(t)$ 不是一个 Poisson 过程。
定理　$E(\Lambda)<\infty$，则 $E(N(t))=tE(\Lambda),Var(N(t))=t^2Var(\Lambda)+tE(\Lambda)$
若事件间隔 X_i 的分布不限定为指数分布，则计数过程称为更新过程

表 1.1: **Summary**

到达过程	Bernoulli 过程	Poisson 过程
到达时间	离散	连续
到达率	p 每次试验	λ 单位时间
相邻两次到达间隔	几何分布	指数分布
t 内到达次数的分布	二项分布	Poisson 分布
第 k 次到达	负二项分布	Gamma 分布

1.2　离散时间 Markov 链

1.2.1　基本概念

指标集 T 离散，不妨记 $T=\{0,1,2,\ldots\}$。

状态空间 S 离散，不妨记 $T=\{0,1,2,\ldots\}$

定义　(Markov 链) $\{X_n,n=0,1,\ldots\}$ 为随机过程，$X_i\in S$，若 $\forall n\geq 0$ 及任意状态 $i,j,i_0,\ldots,i_{n-1}$，有

$$P(X_{n+1}=j|X_1=1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \tag{1.4}$$

则称 $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ 为离散时间 Markov 链。可以导出：

$$\begin{aligned}
&P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)\\
=&P(X_n=i_n|X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1})P(X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1})\\
=&P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})P(X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1})\\
=&\dots\\
=&P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})\dots P(X_1=i_1|X_0=i_0)P(X_0=i_0)
\end{aligned}$$

<u>定义</u>　$P(X_{n+1}=j|X_n=i)$ 称为 Markov 链的（一步）<u>转移概率</u>。当它与 n 无关时，称 Markov 链关于时间是<u>齐次</u> 的，记

$$P_{ij}^{(n)}=P_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \tag{1.5}$$

将 $P\triangleq(P_{ij})$ 称为<u>转移概率矩阵</u>。

1. 状态有限（无限）时，对应称为有（无）限链
2. 路径概率 $P(X_k=i_k)=P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}$
3. 转移概率矩阵描述了一个 n 个点带自环的完全图

<u>例</u>　(随机游走) $S=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}, p\in(0,1)$。$P(X_i=1)=p, P(X_i=0)=1-p$，令 $Y_n=\sum_0^n X_i$，则 $\{Y_n\}$ 称为随机游走模型。$P_{i,i+1}=p, P_{i,i-1}=1-p$。
<u>例</u>　(赌博模型) $S=\{0,1,\dots,n\}$，0 和 n 为**吸收态**，$P_{0,0=1}, P_{n,n}=1$。此模型称为**具有吸收壁的有限随机游走**。

1.2.2 C-K 方程

<u>定义</u>　n 步转移概率为 $P_{ij}^{(n)}\triangleq P(X_n=j|X_0=i)$，由于时间齐次性，$P(X_{m+n}=j|X_m=i)=P_{ij}^{(n)}$，即与 m 无关。规定 $P_{ij}^{(n)}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}=\delta_{ij}$。
<u>定理</u>　(Chapman-Kolmogorov 方程) $\forall m,n\geq 0, \forall i,j\in S$，有

$$P_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}P_{ik}^{(m)}P_{kj}^{(n)} \tag{1.6}$$

证明. $P(X_{m+n}=j|X_0=i_0,\dots,X_m=k)=P(X_{m+n}=j|X_m=k)$ □

<u>定理</u>　若记 $P^{(n)}\triangleq(P_{ij}^{(n)})$，则 $P^{(n)}=P^n, P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)}$。
<u>计算</u>　X_n 的边际分布

$$\begin{aligned}
P(X_n=j)&=\sum_{i\in S}P(X_0=i)P(X_n=j|X_0=i)\\
&=\sum_{i\in S}P(X_0=i)P_{ij}^n
\end{aligned} \tag{1.7}$$

矩阵形式：记 $\vec{\beta}_n=(\beta_{n_1},\beta_{n_2}\dots),\beta_{n_i}\triangleq P(X_n=i)$，则 $\vec{\beta}_n=\vec{\beta}_0P^n$。

1.2.3 状态的分类

<u>定义（可达）</u> 称状态 i **可达**状态 j，若 $\exists n \geq 0, P_{ij}^{(n)} > 0$。若相互可达，则记为 $i \leftrightarrow j$。

1. 自返性：$i \leftrightarrow i$
2. 对称性：$i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
3. 传递性

显然，$\leftrightarrow$ 定义了一个 S 上的**等价关系**，将所有状态划分为若干个**等价类**。若一条 Markov 链上仅有一个类，则称其为<u>不可约的</u>。

<u>定义</u> 记 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 经过 n 次转移后，首次到达 j 的概率。则**首达**概率

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \ldots, n-1 | X_0 = i)$$

额外定义平凡情况 $f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$。**注意区别 $P_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$**。

<u>定义</u> $f_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发经有限步可达 j 的概率。

<u>定义</u> 若 $f_{ii} = 1$，则称状态 i 为**常返 (recurrent)**，否则 i 为**瞬时 (transient)** 的。

<u>★定理（常返态的等价判定）</u>

- i 为常返态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$
- i 为瞬时态 $\iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$

证明. 引理：$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} &= P_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)} \\
&= P_{ii}^{(0)} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)}\right) \\
&= 1 + f_{ii}\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)} \\
&= \frac{1}{1-f_{ii}} (\text{若 } f_{ii} < 1)
\end{aligned}$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$收敛 $\iff f_{ii} < 1$。 □

<u>性质（常返态的命运）</u>

1. 令 $I_n = [X_n = i]$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 为经过状态 i 的次数，

$$E(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(I_n = 1 | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

为从 i 出发的链回到 i 的期望次数

2. 若 i 常返，则从 i 出发时以概率 1 有限步回到 i
3. 若 i 非常返，则从 i 出发以概率 $P = 1 - f_i i > 0$ 回不到 i，从而从 i 出发的链恰好经过 i 的次数为 k 的概率为 $f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii})$（几何分布），所以只能返回有限次，最后永远离开

★定理（常返态的事实）

1. 若 $i \leftrightarrow j$，则 i 和 j 同时为常返态或者非常返态
2. 常返态 i 所能到达的一切状态均与 i 相互可达，即**从常返态出发不能到达非常返态**
3. 在一个**有限** Markov 链上，从任意非常返态出发，最终必然到达常返态
4. 一个**有限** Markov 链至少有一个常返态
5. 一个**有限** Markov 链若**不可约**，则所有状态均为常返态

例子　（随机游走）当 $p = \frac{1}{2}$ 时常返，当 $p \neq \frac{1}{2}$ 时非常返。

定理　若 $i \leftrightarrow j$，且 i 为常返态，则 $f_{ji} = 1$

定义　若集合 $\{n|n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空，则其最大公约数 $d = d(i)$ 称为状态 i 的**周期**。若 $d > 1$，则称状态 i 是**周期的**；若 $d = 1$ 则称 i 是**非周期的**。若链中所有状态的周期都为 d，则称 d 为该**链的周期**。若链中所有状态周期都为 1，则称该链是**非周期的**；否则称其为**周期的**。

定理　若 $i \leftrightarrow j$，则 i 的周期与 j 相等。

定理　若一个**不可约** Markov 链周期为 d，其状态空间 S 存在唯一的**划分** $\{S_1, S_2, \ldots, S_d\}$，且使得从 S_r 中任意状态出发，任 1 步转移必然进入 S_{r+1} 中。实际上，若将状态 i 固定在 S_d 中，则有

$$S_r = \{j|\exists n \in \mathbb{N}, s.t. P_{ij}^{(nd+r)} > 0\}$$

对于任意 Markov 链，其状态空间存在划分 $\{C_0, C_1, C_2, \ldots\}$，其中 C_0 为所有非常返态构成的集合，$C_n (n \geq 1)$ 不可约。

1.2.4 稳态性质

定义　$\vec{\beta} = (\beta_j)_{j \in S}$ 为概率分布，若

$$\vec{\beta} P = \vec{\beta} \quad (i.e. \beta_j = \sum_{i \in S} \beta_i P_{ij})$$

则称 $\vec{\beta}$ 为该 Markov 链的**平稳分布 (stationary distribution)**。

若 $\vec{\beta}$ 为 X_0 的分布 (即 $P(X_0 = j) = \beta_j$)，则 $X_n (n \geq 1)$ 的分布都为 $\vec{\beta}$，从而 $\{X_n : n \geq 0\}$ 为**平稳过程**。

平稳分布为边际分布，不是条件分布，一般地有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij} \neq P(X_{n+1} = j)$$

定义　设 i 为常返态，定义 $\mu_i \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为由 i 出发再返回 i 所需的平均时间（步数）。

若 $\mu_i < +\infty$，则称 i 为**正常返的 (positive recurrent)**；

若 $\mu_i = +\infty$，则称 i 为**零常返的 (null recurrent)**。

μ_i 越小，返回越频繁。

★定理 若 i 常返且周期为 d，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \tag{1.8}$$

当 $\mu_i = +\infty$ 时，$\frac{d}{\mu_i} = 0$。（不证）

定理 i 为零常返态或非常返态 $\iff \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

证明. i 为零常返 $\implies \mu_i = +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = 0$

又知 $P_{ii}^{(m)} = 0, m$ 不被 d 整除，故 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$

i 非常返 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$ □

定理 $i \leftrightarrow j$，常返，则 i 与 j 同时为正常返或零常返。

定理 若 j 为非常返或零常返，则 $\forall i \in S$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$。有限链不可能又零常返态，从而不可约有限 Markov 链所有状态都是正常返的。若 Markov 链有零常返态

定义 若 i 正常返且周期为 1，则称 i 为**遍历的 (ergodic)**；若一个 Markov 链中所有状态都是遍历的，则称该链是遍历的。

★定理 对于不可约、非周期的 Markov 链，

(1) 若它是遍历的，则 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 是该链的唯一平稳分布

(2) 若状态都是非常返的或是零常返的，则平稳分布不存在

1.3 某次课

1. 若它是遍历的，则 $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty}$

$\vec{\pi} P = \vec{\pi}$

证明.

$$\forall M, \sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} \le \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = 1$$

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj} \ge \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

$$P_{ij}^{(n)} \ge \sum_{k=0}$$

□

<u>定义</u>　　若 $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 存在，则 $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ 称为该链的**极限分布**。

<u>性质</u>

1. $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \\ \vdots \end{bmatrix}$
2. 对于一切初始分布 $\vec{\beta}$，$\lim_{n\to\infty} \vec{\beta} P^n = \vec{\pi}$
3. 一个链具有平稳分布并不意味着有极限分布
4. 若链不可约且遍历，则极限分布式链唯一的平稳分布
5. 可以证明，有限链总存在平稳分布；若其不可约，则平稳分布唯一

1.3.1　可逆性

（平稳分布当状态空间规模非常大时难以计算）

<u>定义</u>　　$\pi_j \geq 0, \sum_i \pi_i = 1$，若满足以下<u>**可逆性条件**</u>：

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i, j \in S \tag{1.9}$$

则称该链对于 $\vec{\pi}$ 可逆。

<u>定理</u>　　若 P 相对于 $\vec{\pi}$ 可逆，则 $\vec{\pi}$ 为链的平稳分布。

证明. $\sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j (\sum_i P_{ji}) = \pi_j \implies \vec{\pi} P = \vec{\pi}$ □