第一章　微积分 A2 ：多元函数微积分与级数

1.1　多元函数的连续、可导与可微

1.1.1　基本定理

- $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续 $\iff$
  动点 (x,y) 以任意路径趋向 (x_0,y_0) 时的极限全部等于 $f(x_0,y_0)$

- $f(x,y)$在(x_0,y_0)可微 $\iff$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

- 函数是否连续与偏导数是否存在无关

- 函数可微 $\Longrightarrow$ 偏导数存在
  偏导数连续 $\Longrightarrow$ 函数可微
  o 邻域上偏导数有界 $\Longrightarrow$ 函数可微
  邻域上偏导数只有一个不一致连续 $\Longrightarrow$ 函数可微

- 梯度的定义

$$\mathrm{grad}f(\boldsymbol{X}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{X}_0}$$

- $\boldsymbol{J}(f\circ g)=\boldsymbol{J}(f)\cdot\boldsymbol{J}(g)$（一阶微分形式不变）
  $\mathrm{d}f(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{X}$

- 多元隐函数的偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{X},y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{X},y)}$$

- 向量值隐函数的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{X})=\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=-\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$$

理解：记 $G_k(\boldsymbol{X}) = f_k(\boldsymbol{X}, y_1(\boldsymbol{X}), \ldots, y_m(\boldsymbol{X})) \equiv 0$

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} + \frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\partial(G_1,\ldots,G_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = 0$$

- 隐函数的逆映射：对于 $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{x}), f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，当 $\det(\boldsymbol{J}f(X_0))$ 非零时，有：

$$\boldsymbol{J}f^{-1}(Y_0) = [\boldsymbol{J}f(Y_0)]^{-1}, Y_0 = f(X_0)$$

★ Taylor 展开

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^k f(x_0,y_0) + o\left((\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^n\right)$$

★ **（多元函数的中值定理）**设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数，则 $\forall a, b \in \Omega$，$\exists\, \theta \in (0,1)$，s.t.

$$f(b) - f(a) = \nabla f(a + (b-a)\theta)\cdot(b-a)$$

* 定理不能推广到向量值函数的情形

1.1.2　极值与条件极值

★ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极值的条件

（必要）$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$（极值点必为驻点）

（必要）$H(x_0,y_0)$ 非不定

（充分）$H(x_0,y_0)$ 正定（极小值）或负定（极大值）

（充分）在 (x_0,y_0) 的某个邻域上 $H(x_0,y_0)$ 半正定（极小值）或半负定（极大值）

- **（条件极值的必要条件）**设原问题的 Lagrange 函数对应无约束问题 $\max(\min)\ L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$，则原问题的每个解必然对应着无约束问题的一个驻点。即答案必然在无约束问题的驻点中

1.1.3　几何应用

- 平面及其法线（直线及其法平面）公式
  记 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处法线方向向量为 $\vec{n} = (A,B,C)$，则法线为

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

法平面使得 $\vec{P_0P}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，即点积为零

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

因此，只要求出法线方向向量即可快速表达法线及切平面

- 空间曲面的表达方式及法向量

◦ 空间曲面可以看做是二维空间到三维欧氏空间投影的像，故可以用以 x,y 为自变量确定 z 的隐函数方程表示

$$F(x,y,z)=0,\vec{n}=\mathrm{grad}F(P_0)$$

由于沿任何**在该点切平面内的**方向向量都使函数值保持不变，故均与梯度垂直，即梯度为法向量，表示函数 $F(x,y,z)$ 变化最快的方向.

◦ 借助辅助变量 $P=(u,v)$ 表示

$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$　注意：这与 $F(x,y,z)=0$ 完全不同

化曲为平，切平面的参数方程：$\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\y'_u & y'_v\\z'_u & z'_v\end{pmatrix}_{P_0}\begin{pmatrix}\Delta u\\\Delta v\end{pmatrix}$

- 空间曲线的表达方式及切向量

◦ $\mathcal{L}:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(y)\end{cases}$　$\vec{n}=(x'(t),y'(t),z'(t))$

◦ $\mathcal{L}:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$　曲线可以视作**两空间曲面的交**，其**切线**为两**切平面的交**，即**垂直于**两个**法向量**，因而可用叉积确定 $\vec{n}=\mathrm{grad}F(P_0)\times\mathrm{grad}G(P_0)$

1.1.4　例题

课本 p.66-3(4)

以下方程确定了 $z=f(x,y)$：$\begin{cases}x=u\cos v\ (\bigstar)\\y=u\sin v\ (\star)\\z=v\end{cases}$，计算：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解.

将 x,y 视为自变量，将 u,v 视作 $u=\boldsymbol{u}(x,y),v=\boldsymbol{v}(x,y)$，则

$$z=\boldsymbol{z}(u,v)=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u}(x,y),\boldsymbol{v}(x,y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

对 (★) 与 (☆) 两边依次求 x, y 的偏导

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos v - u\frac{\partial v}{\partial x}\sin v$$
$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\sin v + u\frac{\partial v}{\partial x}\cos v$$
$$0 = \frac{\partial u}{\partial y}\cos v - u\frac{\partial v}{\partial y}\sin v$$
$$1 = \frac{\partial u}{\partial y}\sin v + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos v$$

从而 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \cos v,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin v$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin v}{u}\right) = \frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos v}{u}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sin 2v}{u^2}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin v}{u}\right) = \frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\cos v}{u}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}$$

注：最后仍可用 u, v 表示。

1.2 （广义）含参积分

1.2.1 累次积分

- $f(x,y)$ 在有界闭域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上连续 $\implies f(x,y)$ 在 Ω 上**一致连续**.
- **（积分号下可求极限）**$f(x,y)$ 为矩形有界闭域 D 上的**连续函数**时，积分运算和极限运算可以交换顺序.
- **（积分号下可求导）**设 $f(x)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上**连续**，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\mathrm{d}x$$
若要将 b 改为 $+\infty$，则需等式右侧的积分关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.
- **（积分号下求积分公式）**$f(x,y)$ 在 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上**连续**，则
$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$
若要将 b 改为 $+\infty$，则需 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

1.2.2 广义积分

- **（连续性定理）**设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)\times K \subset \mathbb{R}^2$，其中 K 为某一区间。那么，若广义含参积分
$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$
关于 $y \in K$ 一致收敛，则 $J(y)$ 在区间 K 上连续.

1.2.3　例题

课本 p.110-5(2)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right)$$

1.3　重积分

1.3.1　基本定理

- 若 $f(x, y)$ 在闭矩形域 K 上可积，则它在 K 上有界.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集合，则 D 有面积 $\iff$ ∂D 为零测集.
  一个平面集合不可求面积与面积为零是两回事.
- **（平面变换的面积公式）**当 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ **可微、正则且一一对应**时，面积微元
  $$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
  体积微元的变换类似.
- 球坐标系体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，$\varphi$ 为 $\vec{r}$ 与 z 轴的夹角.
  柱坐标系体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
- **Euler-Poisson 积分**
  $$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ I^2 &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r \quad \text{（注意 } x, y > 0 \text{ 对应的 } \theta \text{ 范围）} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\ I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

1.4　场论初步 (Green, Gauss & Stokes)

1.4.1　曲线积分与曲面积分

- **（第一型曲线积分）**设曲线 C 有正则参数表达 $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$，则
  $$\int_C f(x, y, z)\mathrm{dl} \triangleq \int_a^b f(r(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

- **（第二型曲线积分）**设向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=(M(\dots),N(\dots),P(\dots))$，$C^+$ 有正则表示 $r(t)=(x(t),y(t),z(t)),t:a\to b$，则

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{r} &\triangleq \int_C \mathbf{F}\cdot\tau \mathrm{d}l && \text{定义}\\ &=\int_C \mathbf{F}(r(t))\cdot r'(t)\mathrm{d}t && \text{计算公式}\\ &=\int_C [Mx'(t)+Ny'(t)+Pz'(t)]\mathrm{d}t && \text{内积展开}\\ &=\int_C M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y+P\mathrm{d}z && \text{上式的缩写}\end{aligned}$$

- **（第一型曲面积分）**设曲面 S 有正则的参数表示 $r=r(u,v),(u,v)\in D$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \triangleq \iint_D f(r(u,v))|r_u\times r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

  对显式曲面 $z=z(x,y)$，面积微元为 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$

- **（第二型曲面积分）**设向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=(M(\dots),N(\dots),P(\dots))$

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \mathrm{d}\vec{S} &\triangleq \iint_S (\mathbf{F}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S\\ &=\iint_D \mathbf{F}(r(u,v))\cdot(r_u\times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &=\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

  其中 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为面积微元 $\mathrm{d}S$ 在 xy 平面上的投影
  现考虑其中一个分量，若 S^+ 正法向向上，D 为 S 在 xy 平面上的投影，则

$$\iint_{S^+} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_D R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  将第二型曲面积分转换为二重积分.

- 为什么 $\mathrm{d}\vec{S}=(r_u\times r_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$：
  S 在 (u,v) 对应的点处近似于平行四边形的小平面，该平面的两条邻边分别为 $r_u\mathrm{d}u$ 与 $r_v\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}\vec{S}$ 即对应该小平面的有向面积

1.4.2　向量场

- **散度 (divergence)**：表征在某点处的单位体积内散发出来的矢量的**通量**

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **旋度 (curl)**：表示三维向量场对某一点附近的微元造成的**旋转程度**，旋度向量的方向表示向量场在这一点附近**旋转度最大的环量的旋转轴**

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})$$

- **单连通 (simply connected)**：Ω 中的任意一条简单闭曲线都可以**连续地在 Ω 中**收缩成一点.

- 几种特殊的场：

  – **（保守场）**$L(A,B)$ 逐段光滑，则 $\int_{L(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，只与起终点有关.
  等价表述：对 D 内任意一条逐段光滑的封闭曲线 l_+,

$$\oint_{l_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

  – **（梯度场）**$\mathbf{F} = \nabla u = (u_x, u_y, u_z)$，且 u 与 $\mathbf{F}$ 的定义域相同.

  – **（无旋场）**$\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$，二维平面上，$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

  保守场 $\iff$ 梯度场 $\implies$ 无旋场（对二维、三维欧氏空间均成立）
  无旋场 & 平面单连通区域 $\iff$ 保守场

- 设 D 为单连通有界闭域，$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，则任两点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) \in D$，

$$\int_{L(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(x,y)\Big|_A^B$$

- **（Green 定理）**在平面有界闭区域 D 上，对于向量场 $\mathbf{F}$，沿闭路 ∂D^+ 的环量（通量）等于闭域 D 上各点旋度（散度）的积分.

  – 环量 (circulation) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{\tau})\mathrm{d}l = \iint_D \mathrm{rot}\mathbf{F}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  – 通量 (flux) 形式

$$\oint_{\partial D^+} (\mathbf{F} \cdot \vec{n})\mathrm{d}l = \iint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  更一般的，可以记为

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- （**Gauss 定理**）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为空间有界闭域，$\mathbf{F}=(P,Q,R)$ 为 Ω 上的连续可微向量场，则

$$\iint_{\partial\Omega^+}(\mathbf{F}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}(\mathrm{div}\mathbf{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- （**Stokes 定理**）设 S^+ 是空间中的一个定向曲面，分片正则，∂S^+ 为分段正则的空间闭曲线，S^+ 与 ∂S^+ 定向协调，则

$$\int_{\partial S^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_{S^+}\mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}S$$

1.5　常数项级数

1.5.1　非负项级数的收敛性

- （**Cauchy 积分判敛法**）设 $f\in C[1,+\infty]$ **非负递减**，$u_n=f(n)$，则
$\sum_{n=1}^{+\infty}$ 收敛 $\iff$ $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

- 设 $\{u_n\}$ 是非负递减数列，则
$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n u_{2^n}$ 敛散性相同

- （**根值判敛法**）若对正项级数 $\{u_n\}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

　　若 $\rho<1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

　　若 $\rho>1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散

　此外，将极限分别更换为上极限与下极限，也有类似的结果

- （**Raabe 判敛法**）若存在 $\rho>1$，使得当 n 足够大时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geq\rho$$

　则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.
　若 n 充分大时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leq 1$$

　则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散.

- （**Leibniz 定理**）若交错项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ 满足 $\{u_n\}$ 非负递减，则该级数收敛，且 $S\leq u_1$.

1.5.2　任意项级数的收敛性

- （**Dirichlet 判敛法**）若 $\sum_{i=1}^{n} u_n$ 有界，v_n 单调趋近于 0，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛
- （**Abel 判敛法**）若 $\sum_{i=1}^{n} u_n$ 收敛，v_n 单调有界，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 收敛、
- 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\iff$ $\sum_{i=m}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛
  其中 m 为充分大的正整数

1.5.3　函数项级数的收敛性

- （**Weierstrass**）若存在非负常数项级数，使得集合 I 上，

  $$|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, \ldots;\ x \in I$$

  且 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛
- （**Dirichlet 判敛法**）若有：
  - $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ **单调**，且在 I 上**一致趋于 0**
  - 部分和数列 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ **一致有界**

    $$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M, n = 1, 2, \ldots;\ x \in I$$

  则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛
- （**Abel 判敛法**）若有：
  - $v_n(x)$ 对任意固定的 $x \in I$ **单调**，且在 I 上**一致有界**，即

    $$|v_n(x)| \leq M, n = 1, 2, \ldots;\ x \in I$$

  - $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 在 I 上**一致收敛**

  则函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛