第一章　线性代数

1.1　线性映射和矩阵

1.1.1　线性映射

<u>定义</u>　　<u>线性运算</u> 指向量的加法与数乘。
<u>定义</u>　　<u>向量空间</u> 为带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$ 被称为向量空间。
<u>定义</u>　　映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 若满足

1. 任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x'})$
2. 任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, 都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$

则 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 <u>线性映射</u>。
<u>定义</u>　　从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为<u>线性变换</u>.
<u>定义</u>　　若线性映射 f 有 $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{e_i} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^m$，则矩阵 $A = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ 即为标准坐标向量下的 <u>线性映射的表示矩阵</u>，且满足 $A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{a_i}$。
<u>定理</u>　　（线性映射的线性运算）若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 与 $k\boldsymbol{A}$ 也是同样范畴上的线性映射。
<u>定理</u>　　$\boldsymbol{AB}$ 表示线性映射 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的复合 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$。需要注意，$\boldsymbol{AB} = 0$ 也不能推出 $\boldsymbol{A} = 0$ 或 $\boldsymbol{B} = 0$。
<u>定义</u>　　<u>反对称矩阵</u>：$A = -A^T$，反对称矩阵对角线必定为 0。<u>定义</u>　　若一个上三角矩阵对角线上全为 0，则称为<u>严格上三角矩阵</u>。
<u>定义</u>　　将阶梯形矩阵，从下向上消元，并单位化主元，得到的矩阵每个非零行上，主变量为 1 而其他列的元素均为 0，称这个矩阵为 <u>行简化阶梯形矩阵</u>。
<u>定理</u>　　对于 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = trace(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T)$。

1.1.2　线性方程式组

<u>定理</u>　　对于方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，将 $[A\ \boldsymbol{b}]$ 简化为阶梯型后，若

1. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数比 A 多 $\mathbf{1}$，则方程组无解
2. $[A\ \boldsymbol{b}]$ 阶梯数与 A 相等，则方程组有解

(a) 若阶梯数等于未知数个数，则有唯一解

(b) 若阶梯数小于未知数个数，则有无穷多组解

<u>定义</u> $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 称为<u>齐次线性方程组</u>，$\vec{0}$ 为其<u>平凡解</u>，除此之外的解称为<u>非平凡解</u>。

1.1.3 可逆矩阵

<u>定义</u> 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=I_n$，则 A 为 <u>可逆矩阵</u> 或 <u>非奇异矩阵</u>，B 为 A 的逆。

<u>定理</u> 以下命题等价

1. A 可逆
2. 任意 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解唯一
3. 其次方程组 $A\boldsymbol{x}=0$ 仅有零解
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵是 I_n
6. A 能表示为有限个初等矩阵的乘积（即消元至行简化阶梯形矩阵的逆过程）

<u>定义</u> 若矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 对于 $i=1,2,\ldots,n$ 都有 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$,则称其为<u>（行）对角占优矩阵</u>。

<u>定理</u> 对角占优矩阵必然可逆。

<u>定义</u> 若矩阵 A 通过若干初等**行变换**可以变为矩阵 B，则称 A,B <u>左相抵</u>。即存在可逆矩阵 P，使得 $PA=B,A=P^{-1}B$。所有和 A 相抵的矩阵中，最简单的是其行简化阶梯形，它被称为 A 的<u>左相抵标准形</u>。

<u>定理</u> 左相抵构成等价关系。

<u>定理</u> **(Sherman-Morrison)** 设 A 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 n 阶向量，则 $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 可逆 $\iff 1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$，且此时

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^TA^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{1.1}$$

若将 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 改为 $n\times k$ 的矩阵，则类似地有

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\boldsymbol{u}(I_k+\boldsymbol{v}^TA^{-1}\boldsymbol{u})^{-1}\boldsymbol{v}^TA^{-1} \tag{1.2}$$

1.1.4 LU 分解

<u>定理</u> 若 n 阶方阵 A 仅通过倍加矩阵做行变化即可化为阶梯形，则存在<u>单位下三角矩阵</u>（主对角线均为 1）L 与上三角矩阵 U，使得 $A=LU$，此即 <u>**LU 分解**</u>。

<u>定义</u> 方阵 A 左上角的 $k\times k$ 块为第 k 个<u>顺序主子阵</u>。

<u>定理</u> 可逆矩阵 A 存在 LU 分解，当且仅当 A 的所有顺序主子阵均可逆，此时 LU 分解唯一。（满足在消元过程中不需要行的调换）

定理　若可逆矩阵 A 存在 LU 分解，则存在对角线均不为 0 的对角矩阵 D、单位下三角矩阵 L、单位上三角矩阵 U，满足 $A = LDU$，且该分解**唯一**。此即 **LDU 分解**。
定理　若可逆对称阵 A 有 LDU 分解，则 $L = U^T$。
定理　可逆矩阵 A 存在分解 $A = PLU$，P 为置换矩阵，显然该分解不唯一。**技巧**　将 A 分解成对称阵 $X = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 与反对称阵 $Y = \frac{1}{2}(A - A^T)$。

1.2　子空间和维数

定义　映射 $A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的**像集**

$$\mathcal{R}(A) = \{A\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m \tag{1.3}$$

显然 $\mathbf{0} \in \mathcal{R}(A)$ 总是成立。
(∗) $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m \iff A$ 为满射。
定义　映射 $A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的**原像**

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

(∗) $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\} \iff A$ 是单射。