Løsningsforslag Øving 5
TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

Oppgave 4-33

Løsning For et gitt hastighetsfelt skal vi utlede et uttrykk for strømlinjene.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er todimensjonal i x-y-planet.

Analyse Det stasjonære, todimensjonale hastighetsfeltet i oppgave 4-16 er

$$Hastighetsfelt: \qquad \vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j} \tag{1}$$

For en todimensjonal strømning i x-y-planet er strømlinjene gitt med

$$\textit{Strømlinjer i x-y-planet} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{langs en strømlinje}} = \frac{v}{u} \tag{2}$$

Vi setter u og v fra (1) inn i (2) og får

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by}{U_0 + bx}$$

Vi løser differensialligningen over ved separasjon av variablene

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{bdx}{U_0 + bx}$$

Ved å integrere får vi

$$\ln y = -\ln\big(U_0 + bx\big) + \ln C \tag{3}$$

hvor vi har satt integrasjonskonstanten lik den naturlige logaritmen til konstanten C for å gjøre algebraen enklere. Vi bruker at $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ og $-\ln a = \ln(1/a)$, og gjør om (3) til

$$\textit{Uttrykk for strømlinjene}: \qquad y = \frac{C}{(U_0 + bx)} \tag{4}$$

Diskusjon Ved å bruke ulike verdier for konstanten C får vi ulike, unike strømlinjer for strømningen.

For løsningen av MatLab-oppgaven se MatLab_LF5.m på It'sLearning

---

Oppgave 4-52

Løsning For et gitt hastighetsfelt skal vi finne et uttrykk for x-posisjonen til en fluidpartikkel som beveger seg langs x-aksen som en funksjon av tid.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er todimensjonal i x-y-planet.

Analyse Hastighetsfeltet er

$$Hastighetsfelt: \qquad \vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j} \tag{5}$$

Dersom vi følger en fluidpartikkel langs x-aksen, har vi

$$x\text{-komponenten av hastigheten til en fluidpartikkel:} \qquad \frac{dx_{\text{partikkel}}}{dt} = u = U_0 + bx_{\text{partikkel}} \tag{6}$$

hvor vi har satt inn u fra (5). Vi separerer variablene og fjerner partikkelnotasjonen

$$\frac{dx}{U_0 + bx} = dt \tag{7}$$

Ved å integrerere på begge sider får vi

$$\frac{1}{b}\ln(U_0 + bx) = t - \frac{1}{b}\ln C_1 \tag{8}$$

Igjen har vi satt integrasjonskonstanten lik den naturlige logaritmen til en konstant C_1 multiplisert med konstanten $1/b$ for å gjøre algebraen enklere. Vi bruker at $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, og gjør om (8) til

$$\ln\big(C_1(U_0 + bx)\big) = bt$$

og får

$$U_0 + bx = C_2 e^{bt} \tag{9}$$

hvor $C_2 = 1/C_1$ er en ny konstant, definert for å gjøre uttrykket enklere. Vi setter videre inn den kjente initialbetingelsen $x(t = 0) = x_A$ for å finne konstanten C_2 i (9). Etter litt algebra får vi

$$\textit{Fluid partikkelens x-posisjon ved tid t:} \qquad x = x_{A'} = \frac{1}{b}\Big[(U_0 + bx_A)e^{bt} - U_0\Big] \tag{10}$$

Diskusjon Vi kan se at $x = x_A$ for $t = 0$ i (10).

Oppgave 4-58

Løsning Vi skal vise at en strømning med et gitt hastighetsfelt er inkompressibel ved å bruke uttrykket for volum endringshastighet (*volumetric strain rate*).

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er todimensjonal i x-y-planet.

Analyse Hastighetsfeltet er

$$Hastighetsfelt: \qquad \vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$$

Vi bruker uttrykket for volum endringshastighet i kartesiske koordinater og setter inn for u og v.

Volum endringshastighet

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = b + (-b) + 0 = 0$$

hvor $\epsilon_{zz} = 0$ siden strømningen er todimensjonal. Volum endringshastigheten er null overalt, altså er strømningen inkompressibel.

Diskusjon Fluidpartikkelen strekkes i den horisontale retningen og komprimeres i den vertikale retningen, men totalvolumet endres ikke.

Oppgave 4-75

Løsning Vi skal finne vinkelhastigheten til en tank som roterer om sin egen vertikalakse.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** z-aksen er vertikalaksen.

Analyse Virvlingen $\vec{\zeta}$ er det dobbelte av vinkelhastigheten $\vec{\omega}$.

$$Vinkelhastighet: \qquad \vec{\omega} = \frac{\vec{\zeta}}{2} = \frac{-45.4\vec{k}\,\text{rad/s}}{2} = -22.7\vec{k}\,\text{rad/s}$$

hvor $\vec{k}$ er enhetsvektoren langs z-aksen. Vinkelhastigheten er definert som positiv mot klokken, hvilket betyr at bevegelsen går med klokken i dette tilfellet. Vi regner om vinkelhastigheten til omdreininger per minutt:

$$\dot{n} = -22.7\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}}\right)\left(\frac{\text{rev}}{2\pi\,\text{rad}}\right) = -216.769\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cong -\mathbf{217\,rpm}$$

Diskusjon Vannet roterer som et fast legeme fordi virvlingen er konstant i hele tanken.

Oppgave til forberedning til Lab

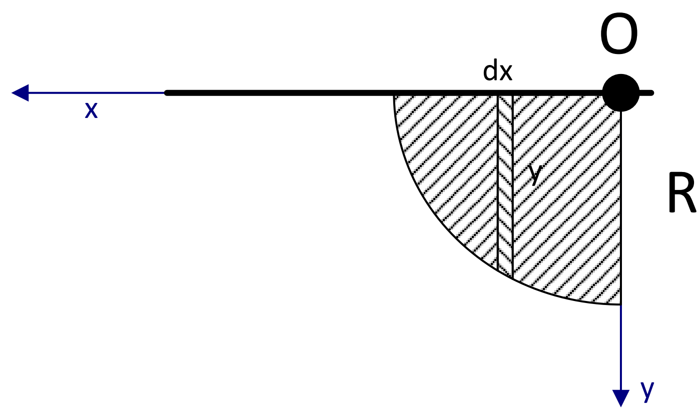

Figure 1

a) Oppdriftskraften på kvartsirkelen er

$$F_B = \gamma U = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L$$

der $\gamma = \rho g$ er den spesifikke vekten av vannet.
Del opp arealet av kvartsirkelen i vertikale striper, hver av bredde dx og høyde $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, og ta flatemomentet av arealet omkring O:

$$A \cdot x_{CG} = \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx, \quad A = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

Med substitusjon $u = R^2 - x^2$ blir integralet

$$\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} \sqrt{u}du = \frac{1}{3}R^3.$$

Det gir

$$x_{CG} = \frac{4R}{3\pi},$$

og kraftmomentet M omkring O blir

$$M = F_B \cdot x_{CG} = \frac{1}{3}\gamma R^3 L.$$

Diskusjon Oppdriften på kvartsirkelen utøver et dreiemoment om O, med aksen pekende ut av pappiret

$$\vec{M_O} = -M\vec{k} = -\frac{1}{3}\gamma R^3 L$$

dvs. kvartsirkelen vil dreie med klokken.

b) Sigden er differansen mellom en kvartsirkel med radius R og en halvsirkel med radius $R/2$. Sigdens volum

$$V = [\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi(R/2)^2]L = \frac{1}{8}\pi R^2 L.$$

Altså blir oppdriftskraften på sigden

$$F_B = \gamma V = \frac{1}{8}\gamma\pi R^2 L.$$

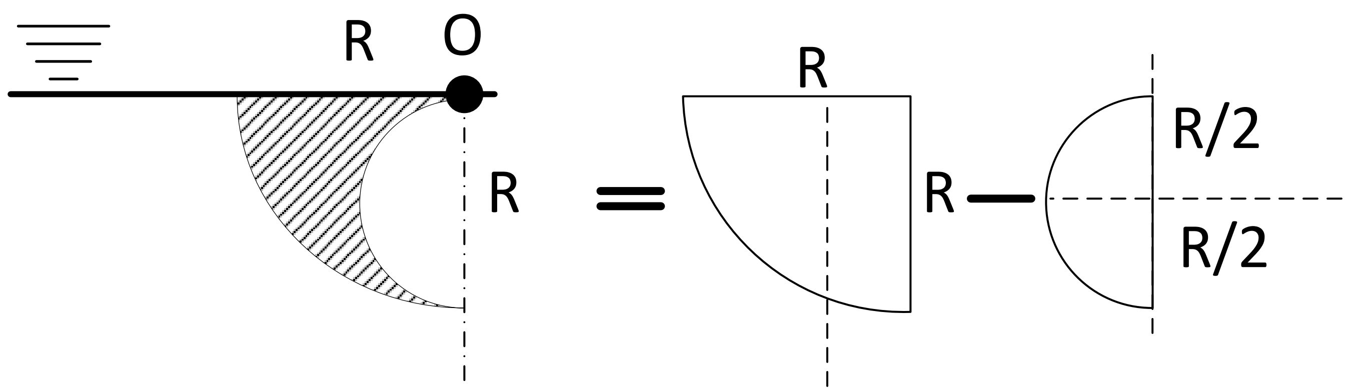

Figure 2

Kraftmomentet omkring O kan skrives $M = M_1 - M_2$, hvor M_1 er momentet for kvartsirkelen

$$M_1 = \frac{1}{3}\gamma R^3 L,$$

som før. For halvsirkelen ytterst til høyre i figur 2 er volumet (se over)

$$V_2 = \frac{1}{2}\pi(R/2)^2 L = \frac{1}{8}\pi R^2 L,$$

og avstanden til angrepslinjen er

$$x_{CG2} = \frac{4R/2}{3\pi} = \frac{2R}{3\pi}.$$

Det betyr at

$$M_2 = F_{B2} \cdot x_{CG2} = \frac{1}{8}\gamma\pi R^2 L \cdot \frac{2R}{3\pi} = \frac{1}{12}\gamma R^3 L,$$

og dermed

$$M = M_1 - M_2 = \frac{1}{4}\gamma R^3 L.$$

Diskusjon Kraftmomentet omkring O er mindre for sigden enn for kvartsirkelen, men retningen av dreiemomentet om aksen er den samme.