TMA4245 Statistikk
Vår 2013

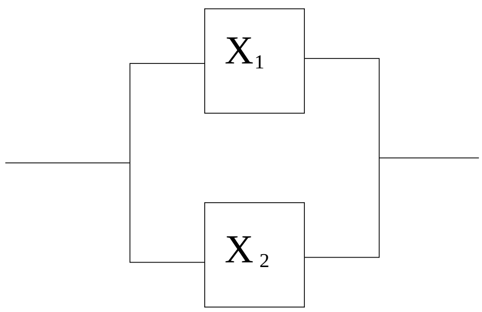
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Øving nummer 7, blokk I**
**Løsningsskisse**

**Oppgave 1**

Betrakt et parallellsystem av to uavhengige komponenter, der levetiden til hver av komponentene er eksponensialfordelt med parameter $\lambda$, dvs

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \text{ for } x \geq 0.$$




Figur 1: Paralellkopling av to komponenter

Da komponentene danner et paralellsystem, vil systemet fungere dersom minst en av komponentene fungerer. Vi lar dermed levetiden til systemet betegnes ved $V = \max(X_1, X_2)$, og fordelingen til $V$ finnes ved å benytte at komponenten med lengst levetid er mindre eller lik $v$ hvis og bare hvis begge komponentene er mindre eller lik $v$:

$$F_V(v) = \mathrm{P}(V \leq v) = \mathrm{P}(\max(X_1, X_2) \leq v) = \mathrm{P}(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v)$$

$$\stackrel{Uavh.}{=} \mathrm{P}(X_1 \leq v) \cdot \mathrm{P}(X_2 \leq v) = (F_X(v))^2 = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda v})^2 = 1 - 2\mathrm{e}^{-\lambda v} + \mathrm{e}^{-2\lambda v}.$$

Vi har videre

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda v} - 2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-2\,\lambda v}.$$

Forventningen til V er gitt ved

$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)\, dv.$$

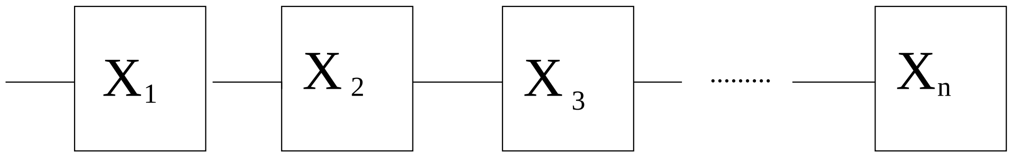
Ved delvis integrasjon får vi dermed

$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)\, dv = \int_{0}^{\infty} (2\,\lambda\, v\, \mathrm{e}^{-\lambda v} - 2\,\lambda\, v\, \mathrm{e}^{-2\,\lambda v})\, dv = \frac{3}{2\lambda}.$$

**Oppgave 2**

Betrakt et seriesystem sammensatt av $n$ uavhengige komponenter der levetiden til hver komponent følger en Weibull-fordeling med skalaparameter $\lambda$ og formparameter $\alpha$, gitt ved

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda\, x)^{\alpha}} \text{ for } x \geq 0.$$




Figur 2: Seriekopling av n komponenter

Da vi har et seriesystem, vil systemet fungere frem til første komponent svikter. Vi lar dermed levetiden til systemet betegnes ved $U = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

$$F_U(u) = \mathrm{P}(U \leq u) = \mathrm{P}(\min(X_1, X_2, ..., X_n) \leq u) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, X_2, ..., X_n) > u)$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > u \cap X_2 > u \cap \cdots \cap X_n > u) \stackrel{Uavh.}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > u)$$

$$= 1 - (1 - F_X(u))^n = 1 - (1 - (1 - \mathrm{e}^{-(\lambda\, x)^{\alpha}}))^n$$

$$= 1 - (\mathrm{e}^{-(\lambda\, x)^{\alpha}})^n = 1 - \mathrm{e}^{-(n^{1/\alpha}\,\lambda\, x)^{\alpha}}.$$

Dette er en Weibull-fordeling med skalaparameter $n^{1/\alpha}\lambda$ og formparameter $\alpha$.

**Oppgave 3**

**a)** $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{\sqrt{10}}{2}}) = \underline{\underline{0.206}}$

$$\begin{aligned} P(X>20|X>10) &= \frac{P(X>20\cap X>10)}{P(X>10)} = \frac{P(X>20)}{P(X>10)} \\ &= \frac{1-F(20)}{1-F(10)} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{20}}{2}}}{e^{-\frac{\sqrt{10}}{2}}} = \underline{\underline{0.519}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\theta}\sqrt{x}e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}}dx \overset{formel}{=} \frac{1}{2\theta}2\theta^{2\frac{1}{2}+2}\Gamma(2\cdot\frac{1}{2}+2) \\ &= \frac{1}{\theta}\theta^3\Gamma(3) = \underline{\underline{2\theta^2}} \end{aligned}$$

**b**) $U = \min(X_A, X_B)$, og $X_A$ og $X_B$ er uavhengige.

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U\le u) &= 1-P(U>u) = 1-P(min(X_A,X_B)>u) \\ &= 1-P(X_A>u\cap X_B>u) \overset{uavh.}{=} 1-P(X_A>u)P(X_B>u) \\ &= 1-(1-F_{X_A}(u))(1-F_{X_B}(u)) = 1-e^{-\frac{\sqrt{u}}{\theta_A}}e^{-\frac{\sqrt{u}}{\theta_B}} \\ &= 1-e^{-\sqrt{u}(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= F_U'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})e^{-\sqrt{u}(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-\sqrt{u}(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})}\ ,\ u>0}} \end{aligned}$$

Gjenkjenner dette som same fordelinga som $X$ og $Y$ kjem frå, men med $\theta = (\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})^{-1}$. Følgjer då frå a) at:
$\mathrm{E}(U) = 2(\frac{1}{\theta_A}+\frac{1}{\theta_B})^{-2} = \underline{\underline{2(\frac{\theta_A\theta_B}{\theta_A+\theta_B})^2}}$

## Oppgave 4

**a**) Vi må i tillegg anta at hver gjennomlesning av teksten er uavhengig av hverandre.

Vi har $\lambda = 2$ og $s = 8$ og ønsker å finne sannsynligheten for at antall trykkfeil, $N$, er større enn 10. Vi har $\mu = \lambda s = 2\cdot 8 = 16$

$$\begin{aligned} P(N>10) &= 1-P(N\le 10) \\ &= 1-\sum_{i=1}^{10}P(N=i) \\ &= 1-0.0774 \\ &= 0.923. \end{aligned}$$

Vi har nå gitt $N = 12$ og $p = 0.6$ og ønsker å finne sannsynligheten for at korrekturleseren oppdager alle trykkfeilene.

$$\begin{aligned} P(X = 12|N = 12) &= \binom{12}{12} \cdot 0.6^{12} \cdot 0.4^{0} \\ &= 0.6^{12} \\ &= 0.0022. \end{aligned}$$

**b)** $Y_k$ = antall trykkfeil som gjenstår etter $k$ uavhengige gjennomlesninger. Vi finner først simultanfordelingen til $Y_1$ og $N$.
Vi har

$$P(X = x|N = n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, ..., n$$

Simultanfordelingen til $Y_1$ og $N$ er da gitt ved

$$\begin{aligned} P(Y_1 = u, N = n) &= P(Y_1 = u|N = n) \cdot P(N = n) \\ &= P(N - X = u|N = n) \cdot P(N = n) \\ &= P(X = n - u|N = n) \cdot P(N = n) \\ &= \binom{n}{n-u} p^{n-u} (1-p)^u \cdot P(N = n) \end{aligned}$$

for $u = 0, 1, \ldots$ og $n = u, u + 1, \ldots$.

Vi finner deretter marginalfordelingen til $Y_1$.

$$\begin{aligned} P(Y_1 = u) &= \sum_{n=u}^{\infty} P(Y_1 = u, N = n) \\ &= \sum_{n=u}^{\infty} \binom{n}{n-u} p^{n-u} (1-p)^u e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+u}{n} p^n (1-p)^u e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^{n+u}}{(n+u)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!u!} p^n (1-p)^u e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n+u} \\ &= \frac{(\lambda s)^u e^{-\lambda s}}{u!} (1-p)^u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p s)^n}{n!} \\ &= \frac{(\lambda s)^u e^{-\lambda s}}{u!} (1-p)^u e^{\lambda p s} \\ &= \frac{(\lambda s(1-p))^u}{u!} e^{-\lambda s(1-p)}. \end{aligned}$$

Vi ser at marginalfordelingen til $Y_1$ er $Y_1 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p))$.

Siden fordelingen for $Y_1$ er den samme som for $N$ bortsett fra at parameteren er endret, vil mønsteret gjenta seg slik at også $Y_2$ blir poissonfordelt, og parameteren i fordelinga til $Y_2$ blir $\lambda s(1-p)(1-p) = \lambda s(1-p)^2$. Tilsvarende blir $Y_3 \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p)^3)$ og generelt $Y_k \sim \text{Poisson}(\lambda s(1-p)^k)$.