TTK4100 Kybernetikk introduksjon
Øving 1

Oppgave 1: AUV

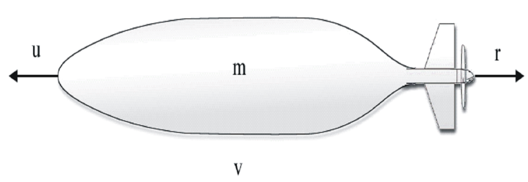
En AUV (Autonomous Underwater Vehicle) er et ubemannet undervannsfartøy som kan utføre selvstendige oppdrag under vann. I denne oppgaven skal vi se på den horisontale hastigheten til et slikt fartøy.

Figur 1.1: Kongsberg Maritimes AUV Hugin.

I vår forenklede modell skal vi kun se på to krefter i det horisontale plan; drivkraften u fra propellene, og motstanden r fra vannet. Det antas at hydrodynamisk demping (motstand i vannet) r er proporsjonal med hastigheten v til fartøyet, det vil si

$$r = kv$$

Vi skal bruke at kraften r virker i motsatt retning av u. Proporsjonalitetskonstanten k har benevning kg/s, og AUV'en har masse m.



Figur 1.2: AUV med horisontale krefter.

a) Sett opp kraftbalansen for AUV'ens horisontale bevegelse (vha Newtons 2. lov). Benytt hastigheten v som tilstand. Hva er på draget i modellen? Av hvilken orden er modellen?

b) Utled den eksplisitte løsningen til differensiallikningen som framkommer i 1 a). Du kan foreløpig betrakte propellkraften u som en konstant.

c) Finn et uttrykk for tidskonstanten til systemet. Hva beskriver tidskonstanten i et dynamisk system? Hva skjer med tidskonstanten hvis vi øker k? Hva skjer med tidskonstanten hvis vi øker massen til AUV'en? Forklar også med ord hva som skjer.

d) Du kan nå betrakte u som pådrag. Det vil si at den generelle differensialligningen er på formen $\dot{x} = ax + bu$. Løsningen er imidlertid den samme som du fant i b). Finn et uttrykk for forsterkningen til systemet. Hva skjer med forsterkningen hvis vi øker k? Forklar også med ord hva som skjer.

Anta videre i oppgaven at $m = 200\,kg$ og $k = 100\,kg/s$.

e) Hva blir tallverdiene til tidskonstanten og forsterkningen? Hva betyr dette i praksis?

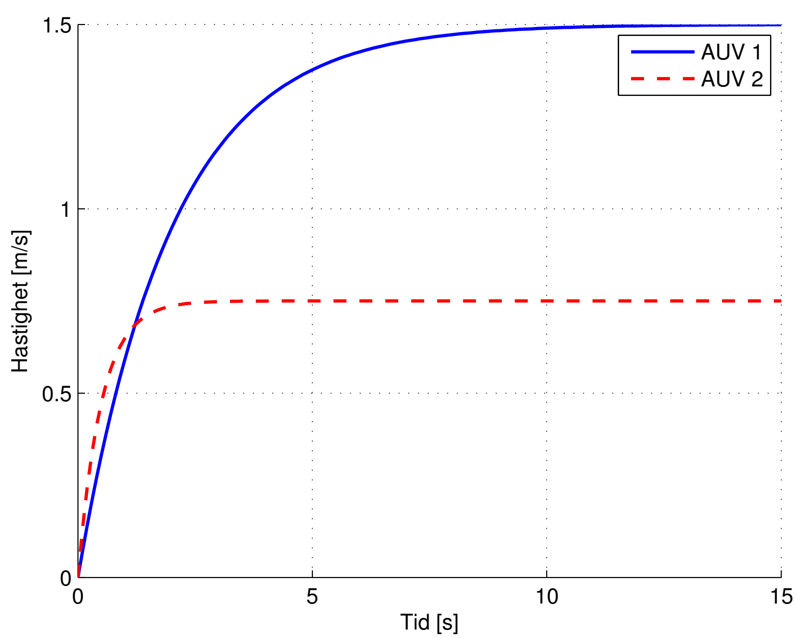
f) Vi antar at u er konstant lik $500\,N$. Anta starthastighet $v_0 = 0\,m/s$. Skisser hastigheten i et diagram fra $t = 0\,s$ til $t = 15\,s$ enten ved hjelp av kalkulator/Matlab eller for hånd.

g) Skisser forløpet også for $v_0 = 15\,m/s$ og $v_0 = -5\,m/s$. Hvordan blir sluttverdien (stasjonærverdien) i et 1. ordens system påvirket av initialverdien?

h) Vi ønsker at hastigheten til AUV'en skal holde seg konstant på $3\,m/s$. Finn ut hva pådraget u må være ved:

1. Å regne på forsterkningen til systemet.
2. Ved å anta at den deriverte i 1 a) er null

i) Figur 1.3 viser tidsresponsen til to forskjellig typer AUV'er som påtrykkes samme pådrag. Nevn noen praktisk relevante forskjeller mellom de to AUV'ene. Se spesielt på forskjeller i forsterkning og tidskonstant, og forklar med ord hva dette innebærer.

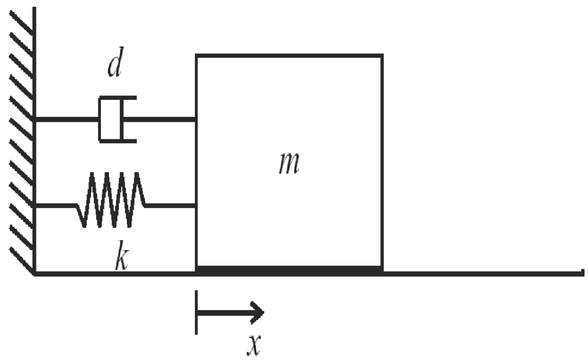


Figur 1.3: Tidsrespons

j) Anta igjen $m = 200\,kg$ og $k = 100\,kg/s$, og $v_0 = 0\,m/s$. Skisser AUV'ens hastighet fra $t = 0\,s$ til $t = 15\,s$ med $u = 200\,N$. Sett deretter $u = 0\,N$ og tegn videre fra $t = 15\,s$ til $t = 30\,s$ (husk å bruke riktig initialverdi ved $t = 15\,s$). Kjenner du igjen figuren fra et vanlig eksempel i kretsteknikk? Hvilket eksempel?

Oppgave 2: Masse-fjær-demper system

Masse-fjær-demper systemet, illustrert i Figur 1.4, er et eksempel dere vil møte flere ganger i løpet av studiet, siden det er en forholdsvis enkel modell som kan brukes til å beskrive en rekke ulike fenomener. Mange ny-utdannede kyb-ere har dessuten fått i oppgave å analysere slike systemer på jobb-intervjuer, så det er et eksempel det blir forventet at man kjenner til når man er Master i kybernetikk.



Figur 1.4: Masse-fjær-demper system

Systemet består av en kloss med masse m som er festet i en vegg via en fjær og en demper. Fjæren trekker i klossen med en kraft gitt av $F_f = kx$, hvor $k\ \left[kg/s^2\right]$ er fjærens stivhet og x er posisjonen til klossen. Ved $x = 0$ er klossen i ro, det vil si ingen fjærkraft virker på klossen. Demperen gir en kraft som er proporsjonal med klossens hastighet $\dot{x}$, det vil si $F_d = d\dot{x}$. Vi ser bort fra friksjon mellom bordet og klossen, som vil komplisere systemet ved at det introduserer ulineære effekter.

a) Sett opp èn differensiallikning for posisjonen til klossen ved hjelp av Newtons andre lov. Vis at denne kan skrives på formen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

Av hvilken orden er differensial-likningen? Hvor mange initialverdier trengs for å finne løsningen til systemet?

b) Sett $m = 2$, $d = 4$ og $k = 6$. Finn røttene til den karakteristiske ligningen for systemet. Hint: $\sqrt{-8} = 2i\sqrt{2}$.

c) Løsningen på differensialligningen er på formen

$$x\left(t\right) = e^{at}\left(C\cos bt + D\sin bt\right), \tag{1}$$

hvor C og D er konstanter, og a og b er røttene til den karakteristiske ligningen. Ved tiden $t = 0\,s$ holdes klossen i ro ($\dot{x}\left(0\right) = 0$) 1 meter ut fra origo ($x\left(0\right) = 1$). Finn konstantene C og D i ligning 1.

d) Vis at systemet kan skrives på formen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ved å innføre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og $\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$. Hva kalles ω_0 og ζ? Når sier vi at et andreordens system på denne formen er henholdsvis overdempet, underdempet og kritisk dempet? Hvilken kategori tilhører systemet i denne oppgaven? Hint: sett inn og finn tallverdi for ζ.
Skisser $x\left(t\right)$ i en graf med initialverdiene gitt i c).

e) Klossen vil svinge seg inn til sin stasjonærverdi. Med hvilken frekvens vil klossen svinge?

f) Gjør om svaret i a) til et system av to førsteordens differensiallikninger. Hva blir tilstandene i systemet?