Løsningsforslag Øving 7

TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

Oppgave 5-18

Løsning Vinden blåser med konstant hastighet 8 m/s. Vi ønsker å finne den mekaniske energien per masseenhet i vindstrømmen, samt det totale og det utnyttbare effektpotensialet i vinden.

Antagelser **1** Vindstrømmen er stasjonær med konstant og uniform hastighet. **2** Vindturbinens virkningsgrad er uavhengig av hastighet.

Egenskaper Luftens tetthet er $\rho = 1.25\,\mathrm{kg/m^3}$.

Analyse Den mekaniske energien i vinden er lik den kinetiske energien, og den kan i sin helhet omdannes til arbeid. Vindens energipotensial er derfor lik den kinetiske energien, som er lik $V^2/2$ per masseenhet og vindens effektpotensial er $\dot{m}V^2/2$ for en gitt massestrøm.

$$e_{mek} = ke = \frac{V^2}{2} = \frac{(8\,\mathrm{m/s})^2}{2} = 32\,\mathrm{J/kg} = \mathbf{0.032\,kJ/kg}$$

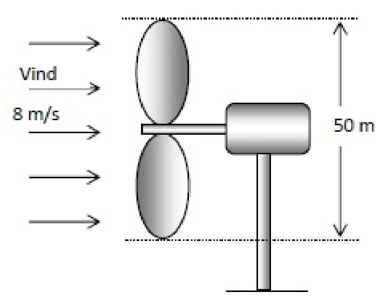
$$\dot{m} = \rho V A = \rho V \frac{\pi D^2}{4} = (1.25\,\mathrm{kg/m^3})(8\,\mathrm{m/s})\frac{\pi(50\,\mathrm{m})^2}{4} = 19635\,\mathrm{kg/s}$$

$$\dot{W}_{maks} = \dot{E}_{mek} = \dot{m}e_{mek} = (19635\,\mathrm{kg/s})(32\,\mathrm{J/kg}) = 6.28\cdot 10^5\,\mathrm{W} = \mathbf{628\,kW}$$

Den mekaniske energien per masseenhet er lik 0.032 kJ/kg og det totale effektpotensialet er lik 628 kW. Den produserte elektriske effekten finnes ved å multiplisere det totale effektpotensialet med vindturbinens virkningsgrad.

$$\dot{W}_{\mathrm{elektrisk}} = \eta_{\mathrm{vindturbin}}\dot{W}_{maks} = (0.30)(6.28\cdot 10^5\,\mathrm{W}) = 1.88\cdot 10^5\,\mathrm{W} = \mathbf{188\,kW}$$

Totalt 188 kW elektrisk effekt kan genereres av denne vindturbinen under de angitte vindforhold.



Diskusjon Generert elektrisk effekt varierer proporsjonalt med vindhastigheten i tredje potens. Effekten vil derfor variere kraftig med endrede vindforhold.

For løsningsforslag til MatLab-oppgaven, se MatLab_LF7.m på It'sLearning.

Oppgave 5-45

Løsning Et fly flyr på en bestemt høyde med en gitt hastighet. Trykket på stagnasjonspunktet på nesen til flyet skal bestemmes, og tilnærmingen ved høye hastigheter skal diskuteres.

Antagelser **1** Luftstrømmen over flyet er stasjonær, inkompressibel og virvlingsfri med neglisjerbare friksjonseffekter (slik at Bernoulli ligningen kan brukes). **2** Standard atmosfæreegenskaper gjelder. **3** Vindeffekter er neglisjerbare.

Egenskaper Tettheten til den atmosfæriske luften ved en høyde på 12000 m er $\rho = 0.312\,\mathrm{kg/m^3}$, se tabell A-11 på side 933 i boken.

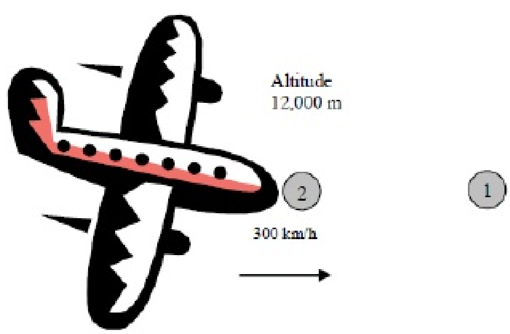
Analyse Vi lar punkt 1 være langt foran flyet på samme høyde som flynesen, og punkt 2 ved nesen hvor strømningen stagnerer. Merk at punkt 2 er et stagnasjonspunkt, og derfor er $V_2 = 0$ og $z_1 = z_2$, vi bruker Bernoulli ligningen mellom punkt 1 og 2

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} \quad \rightarrow \quad \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_{stag} - P_{atm}}{\rho} = \frac{P_{stag,\mathrm{overtrykk}}}{\rho}$$

Vi løser for $P_{stag,\mathrm{overtrykk}}$

$$P_{stag,\mathrm{overtrykk}} = \frac{\rho V_1^2}{2} = \frac{(0.312\,\mathrm{kg/m^3})(300/3.6\,\mathrm{m/s})^2}{2} = 1083\,\mathrm{N/m^2} = \mathbf{1083\,Pa}$$

Siden $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$ og $1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$.



Diskusjon En flyhastighet på $1050\,\mathrm{km/h} = 292\,\mathrm{m/s}$ tilsvarer et machtall mye større enn 0.3 (lydens hastighet er omtrent $340\,\mathrm{m/s}$ ved romtilstander, og lavere høyere opp, og derfor er machtallet minst $292/340 = 0.86$). Derfor kan ikke strømningen lenger antas å være inkompressibel, og Bernoulli ligningen gitt over kan ikke brukes. Dette problemet kan løses ved å bruke den modifiserte Bernoulli ligningen som tar hensyn til kompressibilitet, som antar isentropisk strømning.

Oppgave 5-50

Løsning En gitt luftstrøm strømmer oppover gjennom et skrånet rør med diameter som reduseres gjennom en innsnevring. Høydeforskjellen mellom fluidnivåene i de to armene på et vannmanometer festet på tvers av innsnevringen skal bestemmes.

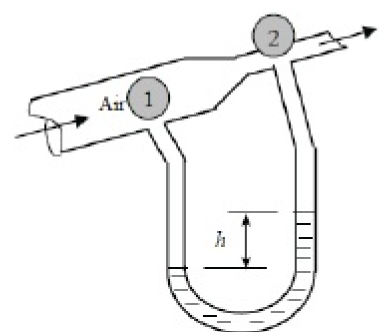
Antagelser **1** Strømningen gjennom kanalen er stasjonær, inkompressibel og virvlingsfri med neglisjerbare friksjonseffekter (slik at Bernoulli ligningen kan brukes) **2** Luft er en ideell gass. **3** Effekten av luftkolonnen på trykkforandringen er neglisjerbar på grunn av luftens lave tetthet. **4** Luftstrømningen er parallell med innløpet til hver av manometerarmene, og derfor har vi ingen dynamiske effekter.

Egenskaper Vi lar tettheten til vann være $\rho_{\text{vann}} = 1000\,\text{kg/m}^3$. Gasskonstanten til luft er $R = 287\,\text{Pa}{\cdot}\text{m}^3/\text{kg}{\cdot}\text{K}$.

Analyse Vi lar punkt 1 og 2 være ved henholdsvis det lave og det høye fastepunktet til manometeret, og lar det lave festepunktet være referansenivået. Effekten av høydeforskjellen på trykkforandringen til en gass er neglisjerbar. Bernoulli ligningen mellom punkt 1 og 2 gir

$$\frac{P_1}{\rho_{\text{luft}} g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_{\text{luft}} g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho_{\text{luft}} \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

hvor $\rho_{\text{luft}} = \frac{P}{RT} = \frac{1.10{\cdot}10^5\,\text{Pa}}{(287\,\text{Pa}{\cdot}\text{m}^3/\text{kg}{\cdot}\text{K})(50\,\text{K}+273\,\text{K})} = 1.19\,\text{kg/m}^3$



$$V_1 = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_1} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D_1^2/4} = \frac{0.045\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.06\,\text{m})^2/4} = 15.9\,\text{m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_2} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D_2^2/4} = \frac{0.045\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.04\,\text{m})^2/4} = 35.8\,\text{m/s}$$

Vi setter inn verdier

$$P_1 - P_2 = (1.19\,\text{kg/m}^3)\frac{(35.8\,\text{m/s})^2 - (15.9\,\text{m/s})^2}{2} = 612\,\text{N/m}^2 = 612\,\text{Pa}$$

Høydeforskjellen i vannmanometeret tilsvarer denne trykkendringen og bestemmes fra $\Delta P = \rho_{\text{vann}} g h$

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{vann}} g} = \frac{612\,\text{N/m}^2}{(1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)} = 0.0624\,\text{m} = \mathbf{6.24\,cm}$$

Diskusjon Når effekten av luftkolonnen på trykket tas med i beregningene blir trykkendringen

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \frac{\rho_{\text{luft}}(V_2^2 - V_1^2)}{2} + \rho_{\text{luft}} g (z_2 - z_1) \\ &= (1.19\,\text{kg/m}^3)\left[\frac{(35.8\,\text{m/s})^2 - (15.9\,\text{m/s})^2}{2} + (9.81\,\text{m/s}^2)(0.2\,\text{m})\right] \\ &= (612 + 2)\,\text{N/m}^2 = 614\,\text{N/m}^2 = 614\,\text{Pa} \end{aligned}$$

Denne trykkforandringen mellom de to resultatene (612 og 614 Pa) er mindre enn 1 prosent. Derfor er effekten fra luftkolonnen på trykket neglisjerbar, som antatt. Med andre ord skyldes trykkforandringen til luft i kanalen nesten utelukkene hastighetsforandringen, og effekten av høydeforskjellen er neglisjerbar. Hvis vi skulle ta hensyn til Δz for luftstrømningen ville det vært bedre å ta hensyn til Δz for luft i manometeret ved å bruke $\rho_{\text{vann}} - \rho_{\text{luft}}$ i stedet for ρ_{vann} når vi fant h. Den ekstra luftkolonnen i manometeret utligner trykkforandringen på grunn av høydeforskjellen i dette tilfellet.

Oppgave 5-51

Løsning Luft strømmer gjennom et venturimeter med kjent diameter og trykk. Vi skal finne et uttrykk for volumstrømmen og sette inn verdier for å få et tallsvar.

Antagelser **1** Strømningen gjennom venturimeteret er stasjonær, inkompressibel og virvlingsfri. Friksjon kan også neglisjeres, slik at vi kan anvende Bernoullis ligning. **2** Vi antar at trykket er konstant over et tverrsnitt av venturimeteret, fordi tettheten til luft er såpass lav. (Trykket varierer ikke med høyden.) **3** Strømningen er horisontal.

Egenskaper Tettheten til luft er $\rho = 1.2\,\text{kg/m}^3$.

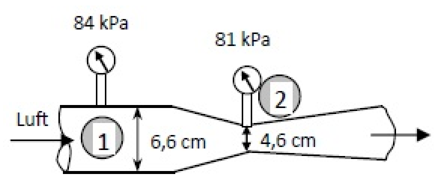
Analyse Vi velger punkt 1 i første del av røret, hvor diameteren er konstant i strømningsretningen, og punkt 2 i strupen hvor diameteren er minst. Begge punkt plasseres på rørets senterlinje for å følge en strømlinje. Vi ser at $z_1 = z_2$, så Bernoulli ligningen for punkt 1 og 2 kan skrives på formen

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

Vi har antatt at strømningen er inkompressibel, så tettheten er konstant. Konservering av masse gir at massestrømmen $\rho A V =$ konstant. Vi kan stryke ρ og får da uttrykket for volumstrøm:

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = \dot{\mathcal{V}}_2 = \dot{\mathcal{V}} \quad \rightarrow \quad A_1 V_1 = A_2 V_2 = \dot{\mathcal{V}} \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_1} \;\text{ og }\; V_2 = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_2}$$

Vi setter dette inn i uttrykket for trykkdifferansen



$$P_1 - P_2 = \rho \frac{(\dot{\mathcal{V}}/A_2)^2 - (\dot{\mathcal{V}}/A_1)^2}{2} = \frac{\rho \dot{\mathcal{V}}^2}{2A_2^2}\left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)$$

Vi løser for $\dot{\mathcal{V}}$ og får

$$\dot{\mathcal{V}} = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

Volumstrømmen for dette tilfellet kan regnes ut ved å sette inn verdier

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho[1-(D_2/D_1)^4]}} = \frac{\pi(0.046\,\text{m})^2}{4}\sqrt{\frac{2(84-81)\cdot 10^3\,\text{N/m}^2}{(1.2\,\text{kg/m}^3)[1-(0.046/0.066)^4]}} = \mathbf{0.134\,m^3/s}$$

Diskusjon Man kan benytte et venturimeter for å finne volumstrømmen til gasser og væsker på en enkel måte. Man trenger kun å måle trykkdifferansen $P_1 - P_2$. Den reelle volumstrømmen vil dog være noe lavere enn svaret man får ved å benytte ligningen vi har utledet, på grunn av friksjonstap. Men forskjellen kan være så liten som 1 % i et godt venturimeter. Vi kan ta høyde for friksjonstapet ved å innføre en tapskoeffisient for utsrømning C_d for venturimeteret

$$\dot{\mathcal{V}} = C_d A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho[1-(A_2/A_1)^2]}}$$

C_c har en verdi under 1 og kan være så høy som 0.99 for et godt venturimeter. Koeffisienten øker også med Reynolds-tallet, og for $Re > 10^5$ er koeffisienten som regel større enn 0.96.

Oppgave 5-57

Løsning Et pitotstatisk rør utstyrt med et vannmanometer holdes parallellt til en luftstrømning, og høydeforskjellen til vannkolonnene måles. Strømningshastigheten til luft skal bestemmes.

Antagelser **1** Strømningen av luft er stasjonær, inkompressibel og virvlingsfri med neglisjerbare friksjonseffekter (slik at Benoullis ligning kan brukes). **2** Effekten til luftkolonnen på trykkforandringen er neglisjerbar på grunn av luftens lave tetthet, og derfor kan luftkolonnen i manometeret utelates i utregningene.

Egenskaper Vi lar tettheten til vann være $\rho_{\text{vann}} = 1000\,\text{kg/m}^3$. Tettheten til luft er gitt til $\rho_{\text{luft}} = 1.25\,\text{kg/m}^3$.

Analyse Vi lar punkt 1 være på siden av røret hvor innløpet er parallellt med strømningen og er festet til den statiske armen til det pitotstatiske røret, og punkt 2 være på tuppen av røret, hvor innløpet står normalt på strømningen og er festet til den dynamiske armen til det pitotstatiske røret. Punkt 2 er et stagnasjonspunkt, derfor er $V_2 = 0$ og $z_1 = z_2$, Bernoullis ligning mellom punkt 1 og 2 gir

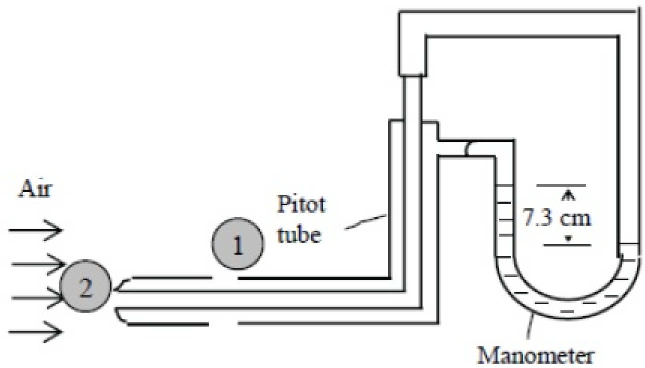
$$\frac{P_1}{\rho_{\text{luft}} g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_{\text{luft}} g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{P_1}{\rho_{\text{luft}} g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho_{\text{luft}} g} \quad \rightarrow \quad V_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho_{\text{luft}}}}$$

Trykkøkningen ved tuppen av det pitotstatiske røret tilsvarer trykkforandringen som vises av høydeforskjellen i vannkolonnene i manometeret.

$$P_2 - P_1 = \rho_{\text{vann}} g h$$

Vi setter dette inn i uttrykket for V_1 og får

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{vann}} g h}{\rho_{\text{luft}}}} = \sqrt{\frac{2(1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(0.073\,\text{m})}{1.25\,\text{kg/m}^3}} = \mathbf{33.8\,m/s}$$



Diskusjon Merk at strømningshastigheten i et rør eller i en kanal kan måles enkelt med et pitotstatisk system ved å sette det pitotstatiske systemet inn i røret eller kanalen parallellt med strømningen, og måle høydeforskjellen i manometerarmene. Merk også at dette er hastigheten ved pitotrøret. Målinger ved ulike posisjoner i et tverrsnitt kan brukes til å bestemme den gjennomsnittlige strømningshastigheten.