Løsningsforslag Øving 9

TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

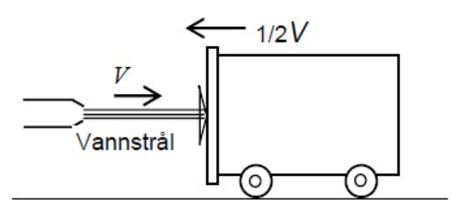
Oppgave 6-18

Løsning En vannstråle med hastighet V treffer en plate som beveger seg mot vannstrålen med hastighet $1/2V$. Vi skal finne kraften som trengs for å flytte platen mot vannstrålen, uttrykt ved hjelp av kraften F som virker på platen når den er stasjonær.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Platen er vertikal og vannstrålen treffer normalt på platen. **3** Trykket på kontrollflaten rundt strålen og platen er lik atmosfæretrykket. **4** Friksjonstap neglisjeres. **5** Platen akselerer ikke. **6** Vannet spruter ut i et plan som er normalt på vannstrålen når den treffer platen. **7** Vannstrålen har et tverrsnittsareal A. **8** Vannstråler i luft er tilnærmet uniforme, så vi kan sette korreksjonsfaktoren for bevegelsesmengde $\beta \cong 1$.

Analyse Vi definerer et kontrollvolum som omslutter platen og beveger seg med samme fart som denne mot venstre. Relativ hastighet mellom den stasjonære platen og vannet i strålen er V når platen er stasjonær, og $1.5V$ når platen har en hastighet $1/2V$ mot strålen. Impulssatsen for stasjonær strømning på algebraisk form er

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{ut}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{inn}} \beta \dot{m} \vec{V}$$



Med positiv retning med vannstrålen blir x-komponenten av kraften fra platen på vannstrålen

$$F_{Rx} = -\dot{m}_i V_i$$

Det vil si at denne kraften er rettet i negativ x-retning. Absoluttverdien $F_R = |-F_{Rx}|$ blir $F_R = \dot{m}_i V_i$.

Stasjonær plate:

$$(V_i = V \quad \text{og} \quad \dot{m}_i = \rho A V_i = \rho A V) \quad \rightarrow \quad F_R = \rho A V^2 = F$$

Plate i bevegelse:

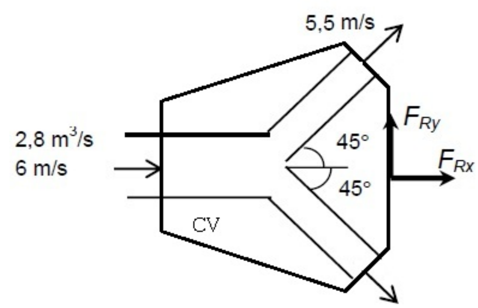
$$(V_i = 1.5V \;\; \text{og} \;\; \dot{m}_i = \rho A V_i = \rho A(1.5V)) \;\; \rightarrow \;\; F_R = \rho A(1.5V)^2 = 2.25\rho A V^2 = 2.25F$$

Vi ser at kraften som trengs for å bevege platen mot strålen med en hastighet $1/2V$ er **2.25 ganger større** enn når platen holdes i ro.

Diskusjon Merk at den faktiske vannstrålehastigheten er konstant lik V, men vi kan benytte at den relative hastigheten blir $1.5V$ når kontrollvolumet beveger seg med hastighet $0.5V$ mot vannstrålen. Massestrømmen som treffer platen blir dermed 50% større enn når platen er i ro.

Oppgave 6-25

Løsning En vannstråle deles slik at halvparten av vannet strømmer videre med en vinkel 45°, mens den andre halvparten strømmer videre med en vinkel -45° i forhold til den opprinnelige retningen. Vi skal finne kraften som trengs for å holde deleren på plass.



Antagelser **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Atmosfæretrykket virker over hele kontrollvolumet. **3** Vi ser bort fra tyngdekraften. **4** Vannstråler i luft er tilnærmet uniforme, så vi kan sette korreksjonsfaktoren for bevegelsesmengde $\beta \cong 1$.

Egenskaper Vi setter tettheten til vann lik $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Analyse Massestrømmen til vannstrålen er

$$\dot{m} = \rho\dot{\mathcal{V}} = (1000\,\mathrm{kg/m^3})(2.8\,\mathrm{m^3/s}) = 2800\,\mathrm{kg/s}$$

Vi definerer et kontrollvolum rundt et vertikalt tverrsnitt av den store vannstrålen og rundt tuppen av deleren. Vi gir innstrømmen navnet 1 og begge utstrømmene får navnet 2 (begge har lik hastighet og massestrøm). Positiv x-retning er den samme som retningen til innløpshastigheten. Positiv y-retning er oppover. Impulssatsen for stasjonær strømning på algebraisk form er

$$\sum \vec{F} = \sum_{\mathrm{ut}} \beta\dot{m}\vec{V} - \sum_{\mathrm{inn}} \beta\dot{m}\vec{V}$$

Vi lar x- og y-komponentene av kraften som holder deleren være F_{Rx} og F_{Ry}. Vi ser at $\dot{m}_2 = \frac{1}{2}\dot{m}$ og definerer delevinkelen $\theta = 45°$. Dette gir oss følgende ligninger for henholdsvis x- og y-retning

$$F_{Rx} = 2\big(\tfrac{1}{2}\dot{m}\big)V_2\cos\theta - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_2\cos\theta - V_1)$$
$$F_{R_y} = \tfrac{1}{2}\dot{m}\big(V_2\sin\theta\big) + \tfrac{1}{2}\dot{m}\big(-V_2\sin\theta\big) - 0 = 0$$

Vi setter inn tall og får kraftkomponentene

$$F_{Rx} = (2800\,\mathrm{kg/s})(5.5\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(45°) - 6\,\mathrm{m/s}) = -5910.56\,\mathrm{N} \cong -\mathbf{5910\,N}$$
$$F_{Ry} = \mathbf{0}$$

Vi ser at vi må påføre deleren en kraft på **5910 N** i motsatt retning av retningen til innløpshastigheten. Ingen kraft er nødvendig i den vertikale retningen, noe vi også kunne se ut fra symmetri.

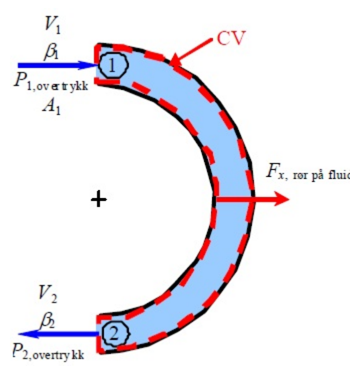
Diskusjon I virkeligheten ville gravitasjonskrefter føre til at den oppadgående strømmen hadde sakket ned, mens den nedadgående strømmen hadde fått større fart. Disse effektene kan neglisjeres for en kort distanse etter delingen.

Oppgave 6-37

Løsning Et buet rør endrer retningen til en strømning. Vi ønsker å finne horisontalkraften på røret, fra fluidet.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Korreksjonsfaktoren for impulsen skal ta hensyn til friksjonseffekter og ikke-uniform hastighetsprofil.

Egenskaper Tettheten til fluidet er $\rho = 998.2\,\mathrm{kg/m^3}$. Viskositet blir ikke tatt med i beregningen.



Analyse (a) Vi definerer fluidet inne i røret som kontrollvolumet og gir innløpet nummer 1 og utløpet nummer 2. Horisontalkomponenten kalles x og er definert positiv mot høyre. Systemet har ett innløp og ett utløp og massebevarelse gir dermed $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$. Massestrømmen er $\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$, og gjennomsnittshastigheten for utløpet er $V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{\rho V_1 A_1}{\rho A_2} = \frac{V_1 A_1}{A_2}$. Ettersom $A_1 = A_2$ for dette problemet, blir $V_2 = V_1$. Impulsligningen for stasjær strømning i x-retning er $\sum F_{x \text{ på CV}} = \sum_{\text{ut}} \beta \dot{m} u - \sum_{\text{inn}} \beta \dot{m} u$, der u er horisontalkomponenten av hastigheten: $u_1 = V_1$ og $u_2 = -V_1$. Kreftene på kontrollvolumet består av trykkrefter på innløp og utløp og summen av alle krefter fra rørveggen. Vi kaller kraften fra røret $F_{x,\text{ rør på fluid}}$, og definerer den positiv i positiv x-retning. Vi får dermed

$$P_{1,\text{ overtrykk}} A_1 + P_{2,\text{ overtrykk}} A_2 + F_{x,\text{ rør på fluid}} = \dot{m}\beta_2(-V_1) - \dot{m}\beta_1 V_1$$

Merk at det er viktig å være forsiktig med fortegn for krefter og hastigheter. Vi løser for $F_{x,\text{ rør på fluid}}$, setter inn $\dot{m} = \rho V_1 A_1$ og får

$$F_{x,\text{ rør på fluid}} = -\big(P_{1,\text{ overtrykk}} + P_{2,\text{ overtrykk}}\big)A_1 - \rho V_1^2 A_1(\beta_1 + \beta_2)$$

Kraften fra fluidet på røret er lik minus denne kraften, altså

$$F_x = F_{x,\text{ fluid på rør}} = -F_{x,\text{ rør på fluid}} = \big(P_{1,\text{ overtrykk}} + P_{2,\text{ overtrykk}}\big)A_1 + \rho V_1^2 A_1(\beta_1 + \beta_2)$$

(b) Vi setter inn for tallverdier for å kontrollere uttrykket

$$\begin{aligned} F_x &= \left(78470\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + 65230\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)(0.025\,\mathrm{m}^2) + \left(998.2\;\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(10\;\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2(0.025\,\mathrm{m}^2)(1.01+1.03) \\ &= 8683.3\,\mathrm{N} \cong \mathbf{8680\,N} \end{aligned}$$

Den totale kraften på fluidet på røret er lik 8680 N mot høyre, angitt med tre gjeldende sifre.

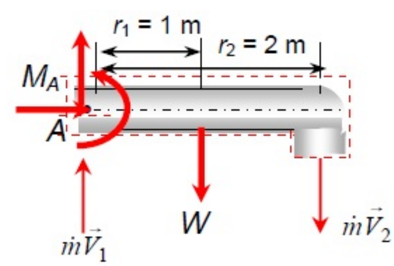
Diskusjon Retningen samsvarer med vår intuisjon. Fluidet prøver å presse røret mot høyre. Dersom vi hadde fått en negativ verdi, ville det betydd at kraften hadde virket mot venstre.

Oppgave 6-55

Løsning Vann pumpes gjennom et rør. Vi ønsker å finne momentet om punkt A når rørets utløp peker nedover, og når det peker oppover.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Utløpet er rettet ut mot atmosfærisk trykk. **3** Effekten av at vann faller nedover for tilfellet der røret peker oppover, er ikke tatt hensyn til. **4** Rørets diameter er liten sammenlignet med momentarmen, og vi kan derfor bruke middelverdier for radius og hastighet.

Egenskaper Vannets tetthet er lik 1000 kg/m^3.



Analyse Vi bruker hele røret som kontrollvolum og kaller innløpet 1 og utløpet 2. Massebevarelse for dette systemet med ett innløp og ett utløp gir $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$, og $V_1 = V_2 = V$ siden A_c =konstant. Massestrømmen og tyngden av det horisontale røret blir da

$$\dot{m} = \rho A_c V = (1000\,\mathrm{kg/m^3})[\pi(0.15\,\mathrm{m})^2/4](7\,\mathrm{m/s}) = 123.7\,\mathrm{kg/s}$$
$$W = mg = (15\,\mathrm{kg/m})(2\,\mathrm{m})(9.81\,\mathrm{m/s^2}) = 294.3\,\mathrm{N}$$

(a) Utløp nedover: For å bestemme momentet som virker på røret i punkt A, må vi se på momentet av alle krefter og nettostrømmen av spinn om punkt A. Dette er et stasjonært problem med uniform strømning, og der alle krefter og impulsstrømmer ligger i samme plan. Spinnsatsen kan da uttrykkes som $\sum M = \sum_{\mathrm{ut}} r\dot{m}V - \sum_{\mathrm{inn}} r\dot{m}V$, der r er momentarmen og alle moment er definert positive mot klokken.

Fritt-legeme-diagram for rørseksjonen er vist i figuren. Vi noterer at momentet om A fra krefter på innløpet og nettostrømmen av spinn om A over innløpet vil være lik null, og ser at den eneste kraften som vil gi et moment om A er tyngden av røret, og at den eneste strømmen av spinn om A som gir et bidrag er den over utløpet. Spinnsatsen om punkt A blir dermed

$$M_A - r_1 W = -r_2\dot{m}V_2$$

Vi løser for M_A og setter inn verdier

$$M_A = r_1 W - r_2 \dot{m} V_2 = (1\,\mathrm{m})(294.3\,\mathrm{N}) - (2\,\mathrm{m})(123.7\,\mathrm{kg/s})(7\,\mathrm{m/s}) = \mathbf{-1438\,Nm}$$

Det virker dermed et moment på 1438 Nm om punkt A, med klokken.

(b) **Utløp oppover**: Momentet fra utløpsstrømningen vil i dette tilfellet være positiv og vi får dermed at momentet om punkt A er

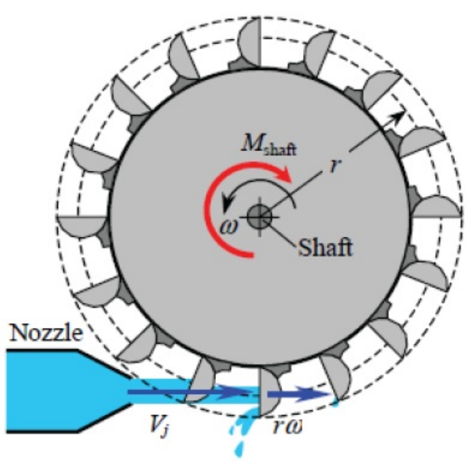
$$M_A = r_1 W + r_2 \dot{m} V_2 = (1\,\mathrm{m})(294.3\,\mathrm{N}) + (2\,\mathrm{m})(123.7\,\mathrm{kg/s})(7\,\mathrm{m/s}) = \mathbf{2026\,Nm}$$

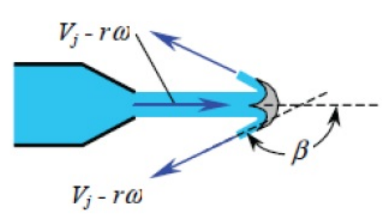
Det virker dermed et moment på 2026 Nm om punkt A, mot klokken.

Diskusjon Det er verdt å merke seg at retningen på utløp kan gjøre stor forskjell i moment som virker på et rørsystem. Denne oppgaven viser viktigheten av å også ta hensyn til strømmen av spinn når man beregner moment for å dimensjonere rørsystemer.

Oppgave 6-63

Løsning Et Pelton-hjul vurderes for et vannkraftverk. Et uttrykk for effekten hjulet yter og den numeriske verdien skal finnes.





Antagelser **1** Strømningen er uniform og syklisk stasjonær. **2** Vannet slippes ut til atmosfæren og derfor er overtrykket i dysen lik null. **3** Friksjon og tap som skyldes luftmotstand til roterende komponenter er neglisjerbart. **4** Dysens diameter er liten sammenlignet med momentarmen, og vi bruker derfor gjennomsnittsverdier til radien og hastigheten ved utløpet.

Egenskaper Vi lar tettheten til vann være $1000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{kg/L}$.

Analyse Den tangentielle hastigheten til bladene svarer til en vinkelhastighet $\omega = 2\pi\dot{n}$ er $V_{blad} = r\omega$. Da blir den relative hastigheten til strålen (relativt til bladet)

$$V_r = V_j - V_{blad} = V_j - r\omega$$

Vi forestiller oss peltonhjulet som en sylinder, og lar dette være kontrollvolumet. Innløpshastigheten til fluidet inn i kontrollvolumet er V_r, og komponenten av utløpshastigheten som står normalt på momentarmen er $V_r \cos\beta$. Spinnsatsen kan uttrykkes som $\sum M = \sum_{\mathrm{ut}} r\dot{m}V - \sum_{\mathrm{in}} r\dot{m}V$, hvor momentet er positivt mot klokken. Spinnsatsen om rotasjonsaksen blir

$$-M_{aksling} = r\dot{m}V_r\cos\beta - r\dot{m}V_r \quad \text{eller} \quad M_{aksling} = r\dot{m}V_r(1-\cos\beta) = r\dot{m}(V_j - r\omega)(1-\cos\beta)$$

$M_{aksling}$ er momentet fra vannstrålen på akslingen til Pelton-hjulet. Vi ser at $\dot{W}_{aksling} = 2\pi\dot{n}M_{aksling} = \omega M_{aksling}$ og $\dot{m} = \rho\dot{\mathcal{V}}$, effekten på akslingen til Pelton-hjulet er

$$\dot{W}_{aksling} = \rho\dot{\mathcal{V}}r\omega(V_j - r\omega)(1-\cos\beta)$$

For de gitte verdiene blir effekten

$$\dot{W}_{aksling} = (1000\,\mathrm{kg/m^3})(10\,\mathrm{m^3/s})(2\,\mathrm{m})(15.71\,\mathrm{rad/s})(50\,\mathrm{m/s}-2\cdot 15.71\,\mathrm{m/s})(1-\cos 160^\circ) = \mathbf{11.3\,MW}$$

hvor $\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(150\,\mathrm{rev/min})\left(\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}}\right) = 15.71\,\mathrm{rad/s}$

Diskusjon Den reelle effekten vil være noe lavere på grunn av luftmotstand og friksjon. Merk at dette er *akslings*effekten; den elektriske effekten generert av generatoren koblet til akslingen er lavere på grunn av at generatorens virkningsgrad er lavere enn 100%.

Sepparat Oppgave i MatLab

Løsningsforslag til MatLaboppgaven finner du som vanlig på It'sLearning, *MatLab_LF9.m.*