NTNU
Institutt for teknisk kybernetikk

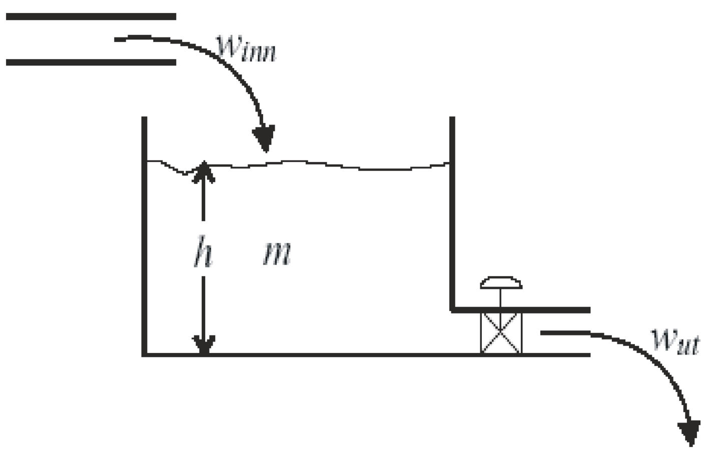
TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Øving 3 - Løsningsforslag

Denne øvingen består av to oppgaver. Oppgave 1 er en ren regneoppgave og kan med fordel gjøres før veiledningstimene på datasal. Oppgave 2 er en omfattende oppgave med simulering og regulering i Simulink. Det kan være lurt å bruke tiden på datasal til å gjøre simuleringsdelen. Det kan også lønne seg å finne modellene som skal implementeres på forhånd.

Oppgave 1

Figuren under viser en tank hvor nivået kan reguleres ved hjelp av massestrøm inn og ut av tanken. Den samlede massen i tanken er gitt av $m = \rho A h$, hvor ρ er tettheten til væsken, A er tverrsnittsarealet av tanken og h er væskenivået. Massestrømmen $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ ut av tanken er proporsjonalt med nivået i tanken, og kan dermed modelleres som $w_{ut} = kh$, hvor k er en konstant.



a) Sett opp en modell for væskenivået h i tanken basert på massebalanse. Hvilke antagelser og forenklinger må gjøres under modelleringen for å få modellen på førsteordens standardform? Hva er pådrag og pådragsorgan i prosessen?
Løsning:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \frac{d(\rho A h)}{dt} = w_{inn} - w_{ut} \\
\dot{h} &= \frac{1}{\rho A}(w_{inn} - w_{ut}) \\
w_{ut} &= kh,
\end{aligned}$$

som gir

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A}$$

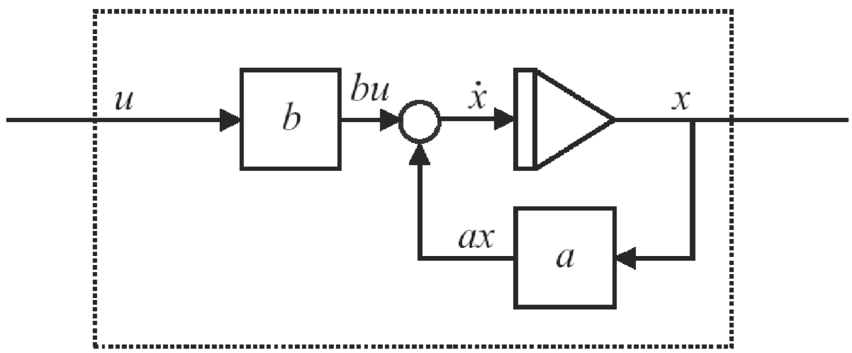
Merk: Systemet er på førsteordens standardform med $x = h,\ a = -k/\rho A,\ b = w_{inn}/\rho A$.

Forenklinger og antakelser:

ρ er konstant, god antakelse under små trykkendringer og ved inkompressible fluider/strømninger. Antar $w_{ut} = kh \implies$ Se remark 5 s. 18 i kompendiet.

b) Tegn blokkdiagram for modellen som framkommer i 1a). Er det noen naturlige tilbakekoblinger i modellen?

Løsning:



Løsning 2b): Blokkdiagrammet blir som for førsteordensligningen, med $a = -k/\rho A,\ b = 1/\rho A$.

Modellen har en naturlig tilbakekobling fra h, siden den er på formen $\dot{x} = ax + ...$.

c) Anta $w_{inn} = 0$. Hva skjer med nivået i tanken ettersom tiden går?
NB: Du trenger ikke løse differensialligningen. Prøv å se det ut fra ligningen (eventuelt ved å tenke logisk...). Er modellen stabil?
*Løsning: Fra differensialligningen ser vi at når $w_{inn} = 0$ så vil $\dot{h} < 0$. Vi kan dermed slutte at h synker. Dette er logisk: dersom det kun er massestrøm **ut** av tanken, vil nivået falle mot null. Siden tilstanden faller mot null er systemet stabilt.*

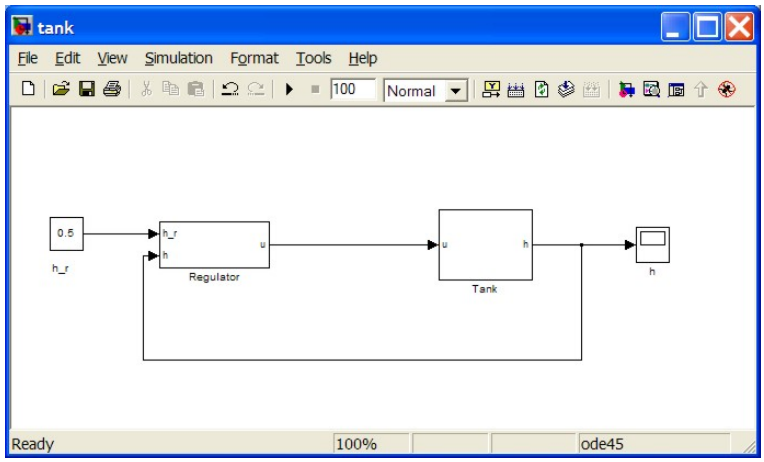
d) Anta $w_{inn} = 0$. Den naturlige tilbakekoblingen fra nivået i tanken er en *negativ* tilbakekobling på grunn av fortegnet foran leddet som inkluderer h. Hva ville skjedd hvis vi i stedet hadde en *positiv* tilbakekobling i systemet? Hvordan blir den fysikalske tolkningen i dette tilfellet? Er modellen stabil på denne formen?
Løsning: En positiv tilbakekobling ville gitt $\dot{h} > 0$, slik at nivået i tanken bare ville stige og stige. I det fysiske eksemplet har vi i realiteten endret utløpet til et innløp. Siden tilstanden stiger mot uendelig (tanken renner over..) er systemet ustabilt.

Oppgave 2: Simulering og regulering

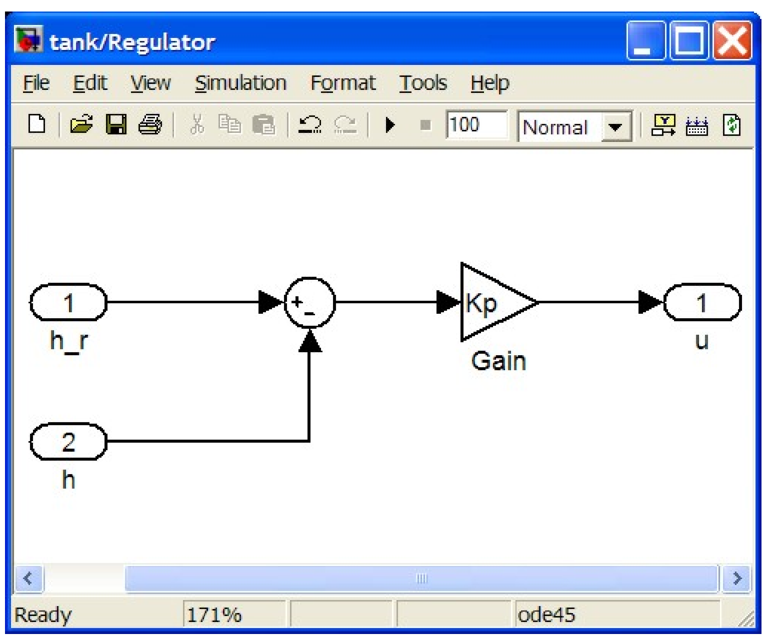
Du skal nå implementere en simulinkmodell for nivå regulering av tanken i oppgave 1. Bruk følgende numeriske verdier for tankmodellen:

$$\begin{aligned}
h_{max} &= 1\,m\ (tankens\,høyde\ -\ ikke\,nødvendig\,å\,ha\,med) \\
A &= 1\,m^2\ (tankens\ tverrsnittsareal) \\
k &= 1 \\
\rho &= 1000\,kg/m^3\ (vann)
\end{aligned}$$

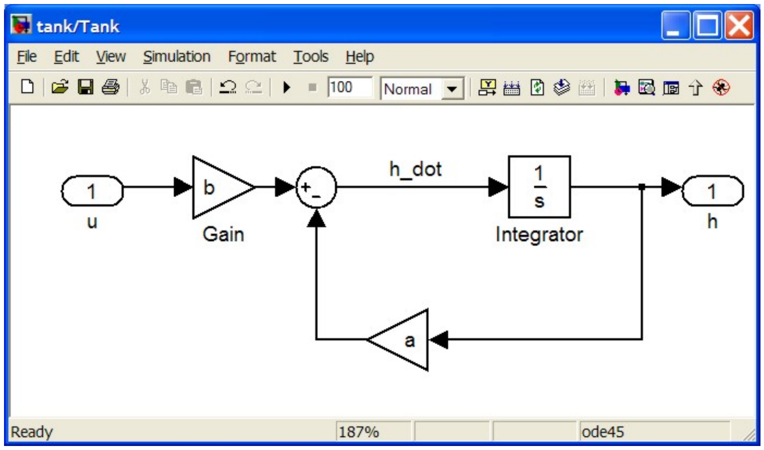
a) Implementer tankmodellen med $u = w_{inn}$ som pådrag i et simulinkdiagram, og innfør deretter proporsjonalregulering, slik at $w_{inn} = u = K_p\,(h_r - h)$. Nivået i tanken skal reguleres inn til en referanseverdi h_r.
Bruk initialverdi $h = 0\,m$, referanse $h_r = 0.5\,m$, regulatorforsterkning $K_p = 100$ og simuler i $100\,s$. Ta med bilde av simulinkdiagram og innsvingningsforløp for nivået som besvarelse.
Løsning:



Toppnivå i simulinkdiagram.



Subsystem for regulator



Subsystem for tankmodell.

Nivået svinger inn til h_{ref} med et lite stasjonæravvik.

b) Finn stasjonæravviket ved å regne på modellen.
Løsning:

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A} = 0 \\
\frac{w_{inn}}{\rho A} &= \frac{k}{\rho A}h \\
w_{inn} &= kh \\
K_p\left(h_r - h\right) &= kh \\
\frac{K_p}{k}h_r - \frac{K_p}{k}h &= h \\
h\left(1 + \frac{K_p}{k}\right) &= \frac{K_p}{k}h_r \\
h &= \frac{\frac{K_p}{k}}{\left(1 + \frac{K_p}{k}\right)}h_r \\
h &= \frac{K_p}{k + K_p}h_r
\end{aligned}$$

Med $k = 1$, $h_r = 0.5\,m$ *og* $K_p = 100$ *får vi* $h = \frac{K_p}{k+K_p}h_r = 0.49505$. *Altså blir stasjonæravviket* $\Delta h = h_r - h = 0.5 - 0.49505 = 0.00495$.

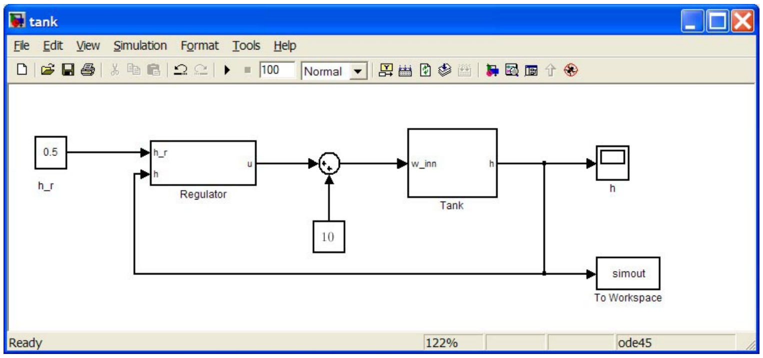
c) Finn stasjonæravviket ved å lese av i Matlab/Simulink. (Hint: For å kunne få en nøyaktig avlesning, kan man sende nivået h inn i en **To Workspace** blokk i Simulink og videre evaluere h nummerisk i MATLAB.) Hvordan stemmer denne verdien med det du fant i b)?
*Løsning: Bruker **To Workspace**-blokk og kjører følgende kommando i Command Window:*

>> 0.5-simout.signals.values(end)
ans =
0.0050
Dette stemmer meget bra med resultatene i b

d) Beskriv hvordan man kan unngå problemer med stasjonæravvik.
Løsning: Fra avsnitt 7.2 i kompendiet:

Når vi bruker en P-regulator vil pådraget bli mindre og mindre jo nærmere målingen kommer referansen. Dette følger direkte av uttrykket for P-regulatoren; $u = k(r - y)$. Dette fører til at referansen aldri nås. Regulatorer med integralvirkning er en type regulator som ikke har denne egenskapen. Feilen $(r - y)$ integreres slik at pådraget vil ha en verdi forskjellig fra null selv om feilen blir null. Dette vil løse problemet

e) I prosessen som tanken beskriver er det en støykilde i form av en innstrømning vi ikke har kontroll over. Denne modelleres som en konstant innstrømning i tanken. Innfør en konstant forstyrrelse $w_f = 10\,kg/s$ i tankmodellen. Hvor stort blir stasjonæravviket nå? Du trenger bare foreta en grov avlesning av scope i Simulink.
Løsning:



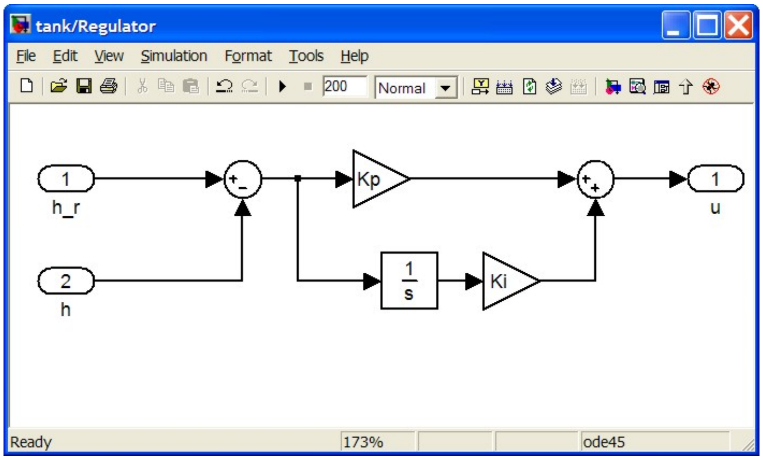
Toppnivå simulinkdiagram med støy. Tankmodell og regulator er samme som før.

Stasjonæravviket blir med forstyrrelse ca. $0.1\,m$.

f) I motsetning til når forstyrrelsen er tidsvarierende, hvor vi må ha foroverkobling for å motvirke den, kan konstant støy fjernes med integralvirkning i regulatoren.

Skriv opp det generelle uttrykket for en regulator med proporsjonal- og integralvirkning.
Løsning: En PI-regulator har formen $u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau)\,d\tau$, *hvor* e *er reguleringsfeilen.*

g) Utvid regulatoren i simulinkdiagrammet slik at den også inkluderer integralvirkning. Simuler det samme scenario som i e), men utvid simuleringstiden til $200\,s$. Finn selv en verdi for K_i som fungerer tilfredsstillende.
Løsning:



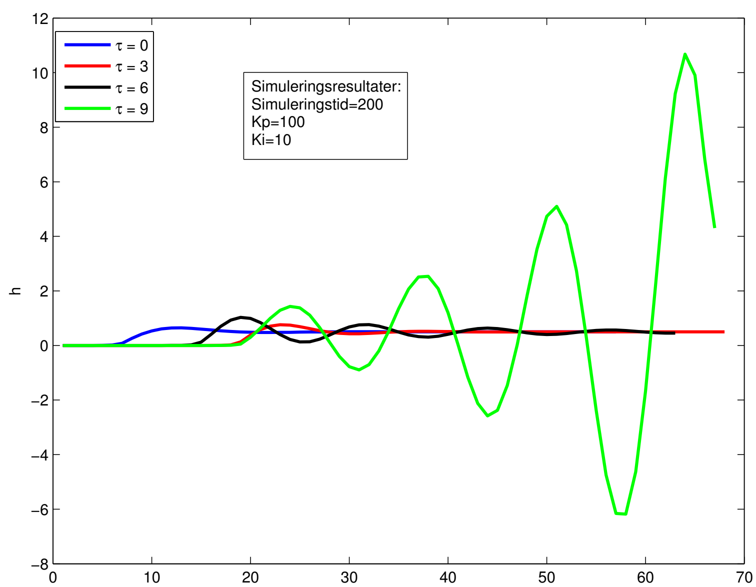
Subsystem for PI-regulator.

En passende verdi for K_i er $K_i = 10$, som gir et stasjonæravvik på $1.3821e-005$. Hvis vi simulerer over lengre tid vil feilen bli enda mindre.

h) Hva skjer når man øker integralvirkningen (prøv forskjellige verdier, $K_i = 1, 10, 100, 1000$)?
Løsning: En for stor økning av integralvirkningen fører til oscillerende nivå, uten at stasjonæravviket blir noe bedre.

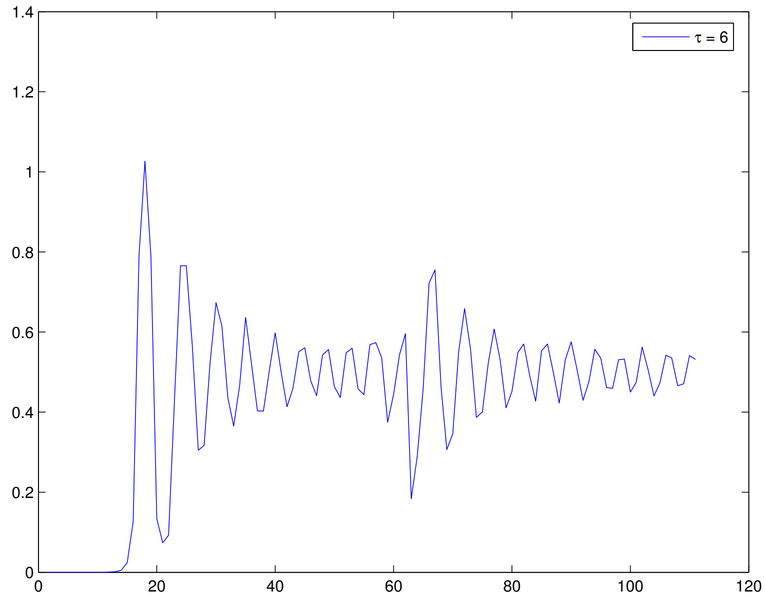
Støykilden kan nå fjernes fra diagrammet. I stedet skal vi innføre en transportforsinkelse på pådraget. Det vil si at det går en viss tid før pådraget når fram til prosessen. I dette tilfellet skyldes tidsforsinkelsen at det er en viss transporttid i røret som frakter pådraget inn til prosessen, og den modelleres som $\tau = \frac{\rho A_r L}{w}$, hvor A_r er tverrsnittsarealet av røret, L er lengden på røret og w er massestrømmen gjennom røret, det vil si $w = w_{inn} = u$. I vårt tilfelle skal vi simpelten implementere tidsforsinkelsen med en **Transport Delay**-blokk i Simulink.

i) Legg inn transportforsinkelse på pådraget i modellen. Simuler modellen med PI-regulator, men uten støy. Plot verdier med $\tau = 0, 3, 6$ og 9, og kommenter forskjellen. (Hint: For å sammenligne plotene kan det være greit å plotte i samme figur. Dette kan gjøres ved å bruke **To Workspace**-blokk og *simout.signals.values*, og plotte med forskjellig farge for hver kjøring i Simulink. Du kan få bruk for 'hold on'-kommandoen i Matlab.)
Løsning:



Nivå med ulik tidsforsinkelse τ.

j) I hvilke tilfeller for τ er modellen stabil/ustabil?
Løsning: Med $\tau = 0$ og $\tau = 3$ er systemet stabilt. Med $\tau = 6$ får vi svingninger, systemet er på grensen til å bli ustabilt. Med τ =9 er systemet tydelig ustabilt.



Simulering med $\tau = 6$ *over lengre tidsintervall; simulert i* $1000\,s$.