Løsningsforslag Øving 3

TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

Oppgave 3-75

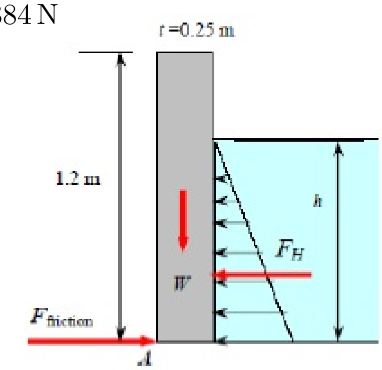
Løsning En sikkerhetsdemning for gjørmeskred skal konstrueres med rektangulære betongblokker. Gjørmehøyden som får blokkene til å begynne å gli samt gjørmehøyden som får blokkene til å velte skal bestemmes.

Antagelser Atmosfæretrykket virker på begge sider av demningen og kan derfor utelates i utregningene.

Egenskaper Tetthetene til gjørme og betongblokkene er henholdsvis 1800 kg/m^3 og 2700 kg/m^3.

Analyse *(a)* Vekten av betongveggen per enhet lengde ($L = 1$ m) og friksjonskraften mellom veggen og bakken er

$$W_{blokk} = \rho g \mathcal{V} = (2700\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.25 \cdot 1.2 \cdot 1\,\mathrm{m^3}) = 7946\,\mathrm{N}$$
$$F_{friksjon} = \mu W_{blokk} = 0.3(7946\,\mathrm{N}) = 2384\,\mathrm{N}$$



Den hydrostatiske kraften som virker på demningen fra gjørmen er

$$F_H = F_x = P_{avg}A = \rho g h_c A = \rho g(h/2)A$$
$$= (1800\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(h/2)(1\,\mathrm{m}\cdot h) = 8829h^2\,\mathrm{N/m^2}$$

Ved å sette den hydrostatiske kraften lik friksjonskraften får vi

$$F_H = F_{friksjon} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{F_{friksjon}}{\rho g \cdot 1\,\mathrm{m}/2}} = \sqrt{\frac{2384\,\mathrm{N}}{8829\,\mathrm{N/m^2}}} = \mathbf{0.52\,m}$$

(b) Angrepslinjen til den hydrostatiske kraften går gjennom trykksenteret, som er $2h/3$ under den frie overflaten fordi

$$y_p = y_c + \frac{I_{xx,c}}{y_c A} = \frac{h}{2} + \frac{1\,\mathrm{m}\cdot h^3/12}{(h/2)\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot h} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3}h$$

Angrepslinjen til vekten av demningen går gjennom midtpunktet til demningen. Ved å sette momentet om punkt A lik 0 får vi

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad W_{blokk}(t/2) = F_H(h/3) \quad \rightarrow \quad W_{blokk}(t/2) = (\rho g \cdot 1\,\mathrm{m}/2)h^3/3$$

Ved å løse for h finner vi gjørmehøyden

$$h = \left(\frac{3W_{blokk}t}{2 \cdot \rho g \cdot 1\,\mathrm{m}/2} \right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot 7946 \cdot 0.25\,\mathrm{Nm}}{2 \cdot 8829\,\mathrm{N/m^2}} \right)^{1/3} = \mathbf{0.70\,m}$$

Diskusjon Betongdemningen vil gli før den velter. Derfor er glidning mer kritisk enn velting i dette tilfellet.
For løsning av MatLaboppgave, se MatLab LF3.m på It's Learning

---

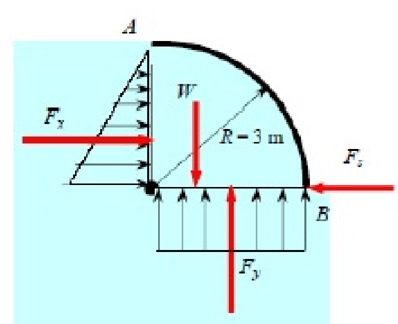
Oppgave 3-77

Løsning En kvart-sirkulær luke er hengslet om sin øvre kant og kontrollerer strømmen av vann over en vegg i punktet B, hvor luken holdes på plass av en fjær. Den minste kraften som kreves for å holde luken lukket når vannets høyde øker til A ved den øvre kanten av luken skal bestemmes.

Antagelser **1** Hengslene er friksjonsløse. **2** Atmosfæretrykket virker på begge sider av luken og kan derfor utelates i utregningene. **3** Vekten av luken er neglisjerbar.

Egenskaper Vi lar tettheten til vann være $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Analyse Vi tegner et fritt-legeme diagram av kreftene på væskesøylen som omkranser den kvart-sirkulære overflaten til luken og de vertikale og horisontale projeksjonene. De hydrostatiske kreftene som virker i vertikal- og horisontalplanet samt vekten av væskesøylen er funnet under



Horisontalkraften på den vertikale flaten:

$$F_H = F_x = P_{avg}A = \rho g h_C A = \rho g (R/2) A$$
$$= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(3/2\,\mathrm{m})(4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}) = 1.766 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$$

Vertikalkraften på den horisonte flaten (oppover):

$$F_y = P_{avg}A = \rho g h_C A = \rho g h_{bunn} A$$
$$= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{m})(4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}) = 3.532 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$$

Vekten av væskesøylen per 4 m lengde (nedover):

$$W = \rho g \mathcal{V} = \rho g [w \cdot \pi R^2/4]$$
$$= (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})[(4\,\mathrm{m})\pi(3\,\mathrm{m})^2/4] = 2.774 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$$

Summen av kreftene i vertikalretning (oppover) er derfor

$$F_V = F_y - W = 3.532 \cdot 10^5\,\mathrm{N} - 2.774 \cdot 10^5\,\mathrm{N} = 7.58 \cdot 10^4\,\mathrm{N}$$

Størrelsen og retningen på den hydrostatiske kraften som virker på overflaten til den 4 meter lange kvart-sirkulære seksjonen av luken blir

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(1.766 \cdot 10^5\,\mathrm{N})^2 + (7.58 \cdot 10^4\,\mathrm{N})^2} = 1.922 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$$
$$\tan\theta = \frac{F_V}{F_H} = \frac{7.58 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}{1.766 \cdot 10^5\,\mathrm{N}} = 0.429 \quad \rightarrow \quad \theta = 23.2^\circ$$

Størrelsen på den hydrostatisk kraften som virker på luken er derfor 192.2 kN, og angrepslinjen passerer gjennom sentrum til den sirkulære luken og utgjør en vinkel på 23.2° oppover fra horisontalen.

Fjærkraften finnes ved å ta momentet om punktet A, hvor luken er hengslet, og sette dette lik null

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad F_R R \sin(90^\circ - \theta) - F_{fjær} R = 0$$

Ved å løse for $F_{fjær}$ finner vi fjærkraften

$$F_{fjær} = F_R \sin(90^\circ - \theta) = (1.922 \cdot 10^5\,\mathrm{N}) \sin(90^\circ - 23.2^\circ) = 1.77 \cdot 10^5\,\mathrm{N} = \mathbf{177\,kN}$$

Diskusjon Mange variasjoner av dette designet er mulig. Kan du tenkte deg noen av dem?

Oppgave 3-90

Løsning Tettheten til en væske skal bestemmes ved å tegne målelinjer på et hydrometer når det senkes i vann og i væsken og måle avstanden mellom linjene.

Egenskaper Vi lar tettheten til rent vann være 1000 kg/m^3.

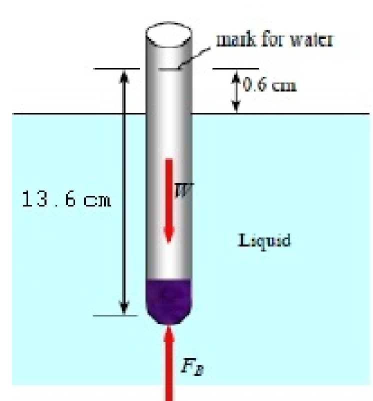
Analyse Et hydrometer flyter i vann i statisk likevekt, og oppdriften F_B som virker på hydrometeret fra væsken må alltid være lik vekten av hydrometeret, $F_B = W$.

$$F_B = \rho g \mathcal{V}_{sub} = \rho g h A_c$$

hvor h er høyden av den nedsenkede delen av hydrometeret og A_c er tverrsnittsarealet som er konstant.

I rent vann: $W = \rho_w g h_w A_c$

I væsken: $W = \rho_{væske} g h_{væske} A_c$



Vi setter uttrykkene over lik hverandre (siden begge er lik vekten av hydrometeret)

$$\rho_w g h_w A_c = \rho_{væske} g h_{væske} A_c$$

Deretter løser vi for tettheten til væsken

$$\rho_{væske} = \frac{h_w}{h_{væske}} \rho_w = \frac{0.136\,\text{m}}{(0.136 - 0.006)\text{m}} (1000\,\text{kg/m}^3) = 1046.15\,\text{kg/m}^3 \cong 1050\,\text{kg/m}^3$$

Diskusjon Merk at for et bestemt sylindrisk hydrometer er produktet av fluidets tetthet og høyden av den nedsenkede delen av hydrometeret konstant for alle fluider.

Oppgave 3-95

Løsning En usymmetrisk krone veies både i luft og i vann med en fjærvekt. Det skal bestemmes om kronen er laget av rent gull.

Antagelser **1** Oppdriften er neglisjerbar. **2** Kronen er fullstendig nedsenket i vann.

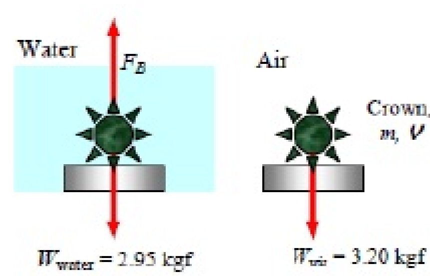
Egenskaper Vi lar tettheten til vann være $1000\,\text{kg/m}^3$. Tettheten til gull er gitt til $19300\,\text{kg/m}^3$.

Analyse Massen til kronen er

$$m = \frac{W_{luft}}{g} = \frac{31.4\,\text{N}}{9.81\,\text{m/s}^2} = 3.20\,\text{kg}$$

Forskjellen mellom vekten i luft og vann skyldes oppdriften i vannet

$$F_B = W_{luft} - W_{vann} = (31.4 - 28.9)\text{N} = 2.50\,\text{N}$$



Vi finner volumet til kronen ved å bruke uttrykket for oppdrift $F_B = \rho_{vann} g \mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \frac{F_B}{\rho_{vann} g} = \frac{2.50\,\text{N}}{(1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)} = 2.548 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$$

Videre er tettheten til kronen funnet

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}} = \frac{3.20\,\text{kg}}{2.548 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3} = 12560\,\text{kg/m}^3$$

som er betydelig mindre enn tettheten til gulll. **Kronen er derfor ikke laget av rent gull!**

Diskusjon Dette problemet kan også løses uten å veie kronen under vann. Vi kunne veie en bøtte som er halvfull med vann og senke kronen ned i bøtten. Etter at vi har merket av vannivået tar vi ut kronen og heller vann i bøtten til vannet stiger til merket. Vi veier bøtten igjen. Ved å dele vektforskjellen på tettheten til vann og g får vi volumet til kronen. Da vet vi både vekten og volumet av kronen og kan enkelt finne tettheten.

Oppgave for forberedelse til Lab

Karftmomentet om O:

Med klokken:	$F_B \cdot L + M,$
mot klokken:	$F_A \cdot L$

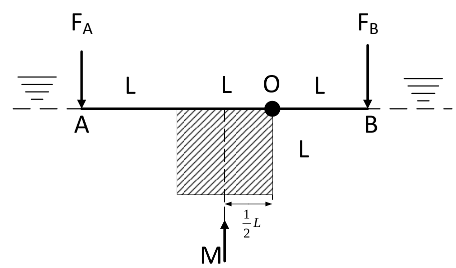
hvor M er kraftmomenter fra oppdriftskraften, $M = (\gamma \cdot V) \cdot arm$. Her er V volumet av neddykket legeme, 'arm' er avstanden fra O ut til angrepslinjen.
Momentbalanse: $\underline{F_B \cdot L + (\gamma \cdot V) \cdot arm = F_A \cdot 2L}$

a) Kvadratisk kloss,

$$V = L^2, arm = \frac{1}{2}L \Rightarrow$$

$$F_B \cdot L + \gamma L^2 \cdot \frac{1}{2}L = F_A \cdot 2L \text{ eller}$$

$$\underline{F_B + \frac{1}{2}\gamma L^2 = 2F_A}$$

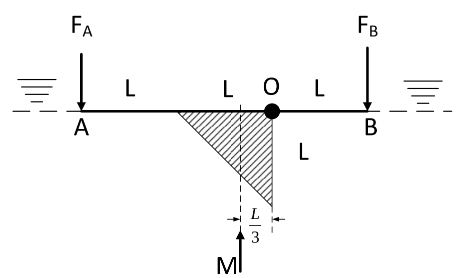


b) Rettvinklet trekant,

$$V = \frac{1}{2}L^2, arm = \frac{1}{3}L \Rightarrow$$

$$F_B \cdot L + \frac{1}{2}\gamma L^2 \cdot \frac{1}{3}L = F_A \cdot 2L \text{ eller}$$

$$\underline{F_B + \frac{1}{6}\gamma L^2 = 2F_a}$$



b) Kvartsirkel,

$$V = \frac{1}{4}\pi L^2, arm = \frac{4L}{3\pi} \Rightarrow$$

$$F_B \cdot L + \frac{1}{4}\gamma\pi L^2 \cdot \frac{4L}{3\pi} = F_A \cdot 2L \text{ eller}$$

$$\underline{F_B + \frac{1}{3}\gamma L^2 = 2F_a}$$