Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer 3, blokk I
Løsningsskisse

Oppgave 1

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=-2}^{2} xf(x) = -2 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.1}}$$

$$P(X \geq 0) = f(0) + f(1) + f(2) = \underline{\underline{0.8}}$$

$$P(X \geq 0 | X \leq 1) = \frac{P(X \geq 0 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{f(0) + f(1)}{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)} = \underline{\underline{0.78}}$$

Oppgave 2

Simultanfordelingen, $f(x, y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	y=0	y=1	y=2	f(x)
x=-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
x=0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
x=1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
f(y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Marginalfordelingen til X og til Y sees i tabellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } x = -1, 0, 1 \\ 0 & \textit{ellers.} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } y = 0, 1, 2 \\ 0 & \textit{ellers.} \end{cases}$$

Forvening og varians til X:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \underline{\underline{0}} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{3} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{3} \cdot (1-0)^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Forvening og varians til Y:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \underline{\underline{1}} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{3} \cdot (0-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (1-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (2-1)^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Kovarians:

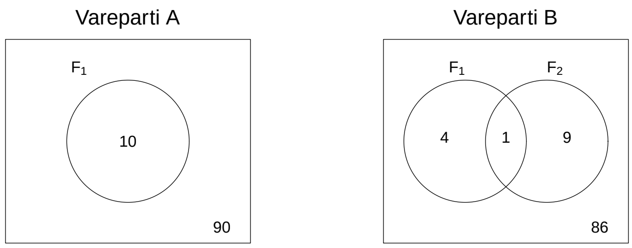
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \cdot Y) &= \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot 0 + \frac{1}{12} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot (-1) \cdot 2 \\ &+ \frac{1}{12} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 0 \cdot 2 \\ &+ \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{6} \\ \mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{6} - 0 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \end{aligned}$$

Siden kovariansen mellom X og Y ikke er null så kan ikke X og Y være uavhengige. Vi ser også at simultanfordelingen til X og Y ikke er lik produktet av de to marginalfordelingene, noe som ville vært tilfellet hvis X og Y hadde vært uavhengige.

Oppgave 3

a) $f(x) = F'(x) = \frac{x}{\alpha} exp(-\frac{x^2}{2\alpha})$

$f'(x) = \frac{1}{\alpha} exp(-\frac{x^2}{2\alpha}) + \frac{x}{\alpha}(-\frac{x}{\alpha}) exp(-\frac{x^2}{2\alpha}) = (\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2}) exp(-\frac{x^2}{2\alpha})$
Setter deriverte lik null, og løser ut mhp α.
$\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 0 \qquad x = \sqrt{\alpha}$



Figur 1: Venn-diagram for hver av de to varepartiene A og B

b) Hendelsen D er gitt ved at A og minst en av B eller C fungerer. Dette betyr $D = A \cap (B \cup C)$. Denne delmengden kan deles i tre biter som vi kan finne sannsynligheten for.

$p(D) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B) + p(A)p(C) - p(A)p(B)p(C)$

Vi har: $p(A) = p(B) = p(C) = 1 - F(2) = exp(-\frac{2^2}{2 \cdot 1}) = 0.135$.

$p(D) = 0.135^2 + 0.135^2 - 0.135^3 = 0.034$

Oppgave 4

a) Trekker en boks fra vareparti B

$$P(F_1) = \frac{5}{100} = \underline{\underline{0.05}}$$

Trekker to bokser fra vareparti B

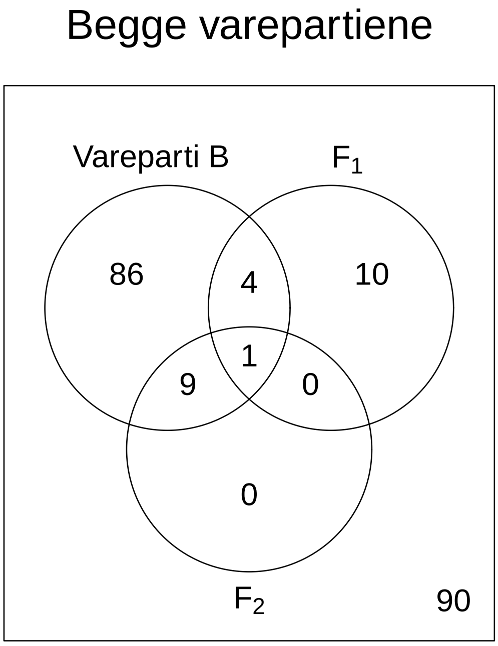
$$P(\text{En med kun } F_1 \text{ og en med kun } F_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{9}{1}}{\binom{100}{2}} = \underline{\underline{0.00727}}$$

b) Trekker tre bokser, alle fra vareparti A eller alle fra vareparti B. La **A** være å trekke fra A, **B** være å trekke fra B og **C** være å trekke en boks med kun F_1-feil og to feilfrie bokser.

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.1690}}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{10}{1}\binom{90}{2} + \binom{4}{1}\binom{86}{2}} = \underline{\underline{0.7326}}$$



Figur 2: Venn-diagram for de to varepartiene A og B sammen

Merk: I 'Fasit' er det brukt færre desimaler.

c) Forventet inntekt ved å

1. selge alle de resterende boksene

Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
feilfri	$90 + 86 - 2 = 174$	10	1740
F_1	$14 - 1 = 13$	$10 - 10 = 0$	0
F_2	9	$10 - 10 - 150 = -150$	-1350
$F_1 \cap F_2$	1	$10 - 10 - 150 = -150$	-150

gir $1740 + 0 - 1350 - 150 = \underline{\underline{240}}$.

2. selge de resterende boksene fra den stabelen boksene kom fra

Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	$90 - 2 = 88$	10	880
	F_1	$10 - 1 = 9$	$10 - 10 = 0$	0
B	feilfri	$86 - 2 = 84$	10	840
	F_1	$4 - 1 = 3$	$10 - 10 = 0$	0
	F_2	9	$10 - 10 - 150 = -150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10 - 10 - 150 = -150$	-150

gir

$$880 \cdot P(A|C) + (840 - 1350 - 150) \cdot P(B|C) = 880 \cdot 0.7337 - 660 \cdot 0.2663 = \underline{\underline{470}}.$$

3. selge boksene fra den andre stabelen enn det boksene fra

Parti	Type	Antall	Gevinst pr. boks	Totalt
A	feilfri	90	10	900
	F_1	10	$10 - 10 = 0$	0
B	feilfri	86	10	860
	F_1	4	$10 - 10 = 0$	0
	F_2	9	$10 - 10 - 150 = -150$	-1350
	$F_1 \cap F_2$	1	$10 - 10 - 150 = -150$	-150

gir

$$900 \cdot P(B|C) + (860 - 1350 - 150) \cdot P(A|C) = 900 \cdot 0.2663 - 640 \cdot 0.7337 = \underline{\underline{-230}}.$$

4. ikke selge noen bokser gir $\underline{\underline{0}}$.

Den beste beslutningen er nummer $\underline{\underline{2}}$.