Løsningsforslag Øving 11

TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

Oppgave 9-37

Løsning Vi ønsker å finne z-komponenten av hastigheten ved å bruke gitte uttrykk for u og v.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er inkompressibel.

Analyse Vi anvender den stasjonære inkompressible kontinuitetsligningen for det gitte hastighetsfeltet,

$$\textit{Kriterium for inkompressibilitet:} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2a+by} - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-bz^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2a - by + bz^2$$

Uttrykket integreres så med hensyn på z. Ettersom man benytter partiell integrasjon må man legge til en funksjon av x og y i stedet for en integrasjonskonstant. z-komponenten av hastigheten kan dermed uttrykkes som

$$\textit{Løsning}: \qquad w = -2az - byz + \frac{bz^3}{3} + f(x,y)$$

Diskusjon Ettersom det er ingen deriverte av w med hensyn på x eller y i kontinuitetsligningen, vil enhver funksjon $f(x,y)$ tilfredsstille ligningen.

Oppgave 9-42

Løsning For en gitt strømfunksjon skal vi finne uttrykk for hastighetskomponentene.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er todimensjonal i r-θ-planet.

Analyse Vi deriverer ψ for å finne hastighetskomponentene i sylinderkoordinater,

$$\textit{Radiell hastighetskomponent:} \qquad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\textit{Tangentiell hastighetskomponent:} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Diskusjon Den radielle hastighetskomponenten er lik null ved sylinderoverflaten ($r = a$), men den tangentielle er ikke det. Denne tilnærmingen tilfredsstiller derfor ikke heftbetingelsen ved overflaten. Se kapittel 10 for en mer detaljert diskusjon rundt bruken av slike forenklinger.

Oppgave 9-58

Løsning Vi skal regne ut hvor stor prosentandel av strømningen som går gjennom den øvre kanalen etter splittelsen.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er inkompressibel. **3** Strømningen er todimensjonal i x-y-planet.

Analyse For todimensjonal inkompressibel strømning har vi at differansen mellom strømfunksjonens verdi mellom to strømlinjer er lik volumstrømmen per breddeenhet.

Før splittelsen: $$\left.\frac{\dot{\mathcal{V}}}{W}\right|_{\text{før}} = \psi_{\text{øvre vegg}} - \psi_{\text{nedre vegg}} = (4.35 - 2.03)\,\mathrm{m^2/s} = 2.32\,\mathrm{m^2/s}$$

Øvre kanal: $$\left.\frac{\dot{\mathcal{V}}}{W}\right|_{\text{øvre}} = \psi_{\text{øvre vegg}} - \psi_{\text{splittede vegg}} = (4.35 - 2.80)\,\mathrm{m^2/s} = 1.55\,\mathrm{m^2/s}$$

Vi finner prosentandelen av volumstrøm gjennom den øvre kanalen:

$$\frac{\dot{\mathcal{V}}_{\text{øvre}}}{\dot{\mathcal{V}}_{\text{før}}} = \frac{\left.\frac{\dot{\mathcal{V}}}{W}\right|_{\text{øvre}}}{\left.\frac{\dot{\mathcal{V}}}{W}\right|_{\text{før}}} = \frac{1.55\,\mathrm{m^2/s}}{2.32\,\mathrm{m^2/s}} = 0.66810 \cong \mathbf{66.8\%}$$

Diskusjon Ingen dimensjoner er oppgitt, så vi kan ikke regne ut hastigheter.

Oppgave 9-85

Løsning Vi skal finne volumstrømmen av olje mellom to plater, og finne Reynolds-tallet.

Antagelser **1** Strømningen er stasjonær. **2** Oljen er inkompressibel. **3** Vi antar todimensjonal strømning i x-y-planet, på grunnlag av at avstanden mellom platene er så liten i forhold til platenes størrelse. **4** Vi ignorerer inn- og utløpseffekter og antar at strømningen kan antas å være en fullt utviklet kanalstrømning i hele strømningsdomenet.

Egenskaper Viskositeten og massetettheten for ny motorolje ved $T = 60^o\mathrm{C}$ er henholdsvis $72.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/(ms)}$ og $864\,\mathrm{kg/m^3}$ (Tabell A-7, side 928).

Analyse Vi begynner med å anta laminær strømning. Hastighetskomponentene i en fullt utviklet laminær kanalstrømning er gitt som

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(y^2 - hy), \qquad v = 0$$

hvor dP/dx er konstant (Ligning (9) side 465, for $V = 0$).

Vi integrerer x-komponenten av hastigheten over kanalen for å få volumstrømmen:

$$\dot{\mathcal{V}} = \int_A u dA = \int_{y=0}^{y=h} \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}(y^2 - hy)W dy = -\frac{1}{12\mu}\frac{dP}{dx}h^3 W$$

Vi kan approksimere trykkgradienten ved å regne med de oppgitte overtrykkene:

$$\frac{dP}{dx} \approx \frac{P_{ut} - P_{inn}}{L} = \frac{(0-1)\,\text{atm}}{1.25\,\text{m}}\left(\frac{101300\,\text{N/m}^2}{\text{atm}}\right) = -81040\,\text{N/m}^3$$

Vi setter trykkgradienten inn i ligningen for volumstrømmen og får

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}} &= -\tfrac{1}{12(72.5\cdot 10^{-3}\,\text{kg/ms})}(-81040\,\text{N/m}^3)(0.00250\,\text{m})^3(0.750\,\text{m}) \\ &= 1.09159\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s} \cong 1.09\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}\end{aligned}$$

Oljens gjennomsnittshastighet gjennom kanalen er da

$$V = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{hW} = \frac{1.09159\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}}{(0.00250\,\text{m})(0.750\,\text{m})} = 0.582184\,\text{m/s} \cong 0.582\,\text{m/s}$$

Til slutt sjekker vi Reynolds-tallet:

$$D_h = \frac{4A_c}{p} = \frac{4hW}{2W} = 2h = 2\cdot 0.0025\,\text{m} = 0.005\,\text{m}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V 2h}{\mu} = \frac{(864\,\text{kg/m}^3)(0.582185\,\text{m/s})(0.005\,\text{m})}{72.5\cdot 10^{-3}\,\text{kg/ms}} = 34.7$$

Vi kan være sikre på at strømningen er laminær dersom Re < 2300.

Diskusjon Vi har gitt svarene med tre gjeldende sifre.

Oppgave 9-92

Løsning Vi skal finne hastighets- og trykkfeltene og skissere den dimensjonsløse hastighetsprofilen til en strømning med gitt geometri og randvilkår.

Antagelser

1 Veggen er uendelig i s-y-planet (y er ut av arket for høyrehånds koordinatsystemer).

2 Strømningen er stasjonær, det vil si at $\frac{\partial}{\partial t}\bullet = 0$

3 Strømningen er parallell og fullt utviklet (vi antar at normalkomponenten av hastigheten, u_n, er null).

4 Fluidet er inkompressibelt og newtonsk, og strømningen er laminær

5 Trykket $P =$ konstant $= P_{atm}$ ved den frie overflaten. Med andre ord er det ingen påsatt trykkgradient, og gravitasjonskrefter balanserer de viskøse kreftene langs veggen. Atmosfæretrykket er konstant overalt, siden vi neglisjerer trykkforandringen som skyldes luftkolonnen.

6 Hastighetsfeltet er todimensjonalt, som impliserer at $v = 0$ og $\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \vec{0}$

7 Tyngdekraften virker i negativ z-retning. Dette kan uttrykkes som $\vec{g} = -g\vec{k}$. I s-n-planet er $g_s = g \sin\alpha$ og $g_n = -g\cos\alpha$.

Analyse Vi kan finne hastighets- og trykkfeltene ved hjelp av den følgende stegvise prosedyren

Steg 1 Sett opp problemet og geometrien. Se oppgaveteksten.

Steg 2 Sett opp antagelser og randbetingelser. Antagelsene er listet over. Randbetingelsene er (1) heftebetingelsen ved veggen: ved $n = 0$, $u_s = v = u_n = 0$. (2) Ved den frie overflaten ($n = h$) er det ingen skjærspenninger, som i dette koordinatsystemet betyr at $\partial u_s/\partial n = 0$ ved den frie vertikale overflaten. (3) $P = P_{atm}$ for $n = h$.

Steg 3 Skriv ut og forenkle differensial ene. Vi starter med kontinuitetsligningen i modifiserte kartesiske koordinater, (s, y, n) og (u_s, v, u_n),

$$\textit{Kontinuitet}: \qquad \frac{\partial u_s}{\partial s} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{antagelse 6}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_n}{\partial n}}}_{\text{antagelse 3}} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{\partial u_s}{\partial s} = 0 \tag{1}$$

Dette viser at u_s ikke er en funksjon av s. Med andre ord kan origo settes hvor som helst, strømningen er den samme for alle s-posisjoner. Siden u_s ikke er en funksjon av tid eller y kan vi konkludere at u_s bare kan være en funksjon av n,

$$\textit{Resultat av kontinuitet:} \qquad u_s = u_s(n) \tag{2}$$

Vi forenkler hver komponent i Navier-Stokes-ligningen så mye som mulig. Siden $v = 0$ overalt og tyngdekraften ikke virker i y-retning, er impulssatsen for y-komponenten automatisk oppfylt (alle leddene er lik null). Siden $u_n = 0$ overalt er de eneste leddene som er ulik null i impulssatsen for n-komponenten trykkleddet og gravitasjonsleddet. n-komponenten av impulssatsen reduseres da til

$$\rho \underbrace{\cancel{\frac{Du_n}{Dt}}}_{\text{antagelse 2}} = -\frac{\partial P}{\partial n} + \underbrace{\rho g_n}_{-\rho g\cos\alpha} + \mu \underbrace{\cancel{\nabla^2 u_n}}_{\text{antagelse 3}} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho g \cos\alpha \tag{3}$$

Vi integrerer og løser for trykket

$$Trykk: \qquad P = -\rho g n \cos\alpha + f(s) \tag{4}$$

hvor vi har lagt til en funksjon av s som integrasjonskonstant siden vi integrerer med hensyn på n. Fra antagelse 5 (randbetingelse (3) i steg 2) har vi at $P = P_{atm}$ ved $n = h$. Da får vi at $f(s) = P_{atm} + \rho g h \cos\alpha$. Med andre ord er ikke $f(s)$ noen funksjon av s, men en konstant. Uttrykket for trykket er derfor

$$P = P_{atm} + \rho g(h-n)\cos\alpha \tag{5}$$

Impulssatsen for s-komponenten reduseres til

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u_s}{\partial t}}}_{\text{antagelse 2}} + \underbrace{\cancel{u_s\frac{\partial u_s}{\partial s}}}_{\text{kontinuitet}} + \underbrace{\cancel{v\frac{\partial u_s}{\partial y}}}_{\text{antagelse 6}} + \underbrace{\cancel{u_n\frac{\partial u_s}{\partial n}}}_{\text{antagelse 3}}\right) = \underbrace{\cancel{-\frac{\partial P}{\partial s}}}_{\text{ligning (5)}} + \underbrace{\rho g_s}_{\rho g \sin\alpha}$$

$$+\mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2}}}_{\text{kontinuitet}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2}}}_{\text{antagelse 6}} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2}\right) \quad \text{eller} \quad \frac{d^2 u_s}{dn^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \tag{6}$$

Vi har gått fra den partiellderiverte $(\partial/\partial n)$ til den totalderiverte (d/dn) i ligning (6) som et resultat av ligning (2), som gir en reduksjon fra en PDE til en ODE.

Steg 4 Løs differensialligningene. Kontinuitetsligningen og impulssatsene for n- og y-koordinatene har allerede blitt løst. Ligning (6) integrert to ganger gir

$$u_s = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} n^2 + C_1 n + C_2 \tag{7}$$

Steg 5 Vi bruker randbetingelsene (1) og (2) fra steg 2 for å finne konstantene C_1 og C_2

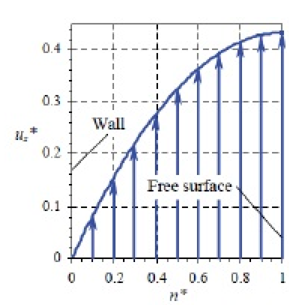
$$\textit{Randbetingelse 1:} \qquad u_s = 0 + 0 + C_2 \ \text{ ved } \ n = 0 \to C_2 = 0$$

og

$$\textit{Randbetingelse (2):} \qquad \left.\frac{du_s}{dn}\right|_{n=h} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} h + C_1 = 0 \ \to \ C_1 = \frac{\rho g h \sin\alpha}{\mu}$$

Ligning (7) blir da

$$\textit{Resultat for hastighetsfeltet:} \quad u_s = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} n(2h - n) \tag{8}$$



Siden $n < h$ i filmen er u_s positiv overalt som forventet (strømningen er nedover).

Steg 6 Verifiser resultatene. Du kan sette inn hastighetsfeltet i differensialligningene og randbetingelsene, og vise at disse holder.

Når $\alpha = 90°$ er $\sin\alpha = 1$ og ligning (8) blir ekvivalent med ligning (5) i eksempel 9-17 i læreboken (fortegnene er motsatt siden s peker nedover mens z peker oppover). Ligning (5) på forrige side reduseres til $P = P_{atm}$ overalt når $\alpha = 90°$ siden $\cos\alpha = 0$; dette stemmer også med resultatet fra eksempel 9-17. Vi kan gjøre ligning (8) dimensjonsløs ved å sette $n^* = n/h$ og $n_s^* = u_s\mu/(\rho g h^2)$. Ligning (8) blir da

$$\textit{Dimensjonsløs hastighetsprofil:} \qquad u_s^* = \frac{n^*}{2}(2 - n^*)\sin\alpha \tag{9}$$

Figuren over viser en skisse av hastighetsfeltet for $\alpha = 60°$.

Diskusjon Formen på hastighetsprofilen er identisk med hastighetsprofilen i eksempel 9-17, men skaleres med en faktor $\sin\alpha$. Dette problemet kunne også vært løst i normale kartesiske koordinater (x, y, z), men algebraen ville da blitt mer komplisert.

Løsningsforslag til tilleggsoppgaven i MatLab finnes i filen MatLab_LF11.m på It'sLearning