Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving nummer 6, blokk I
Løsningsskisse

Oppgave 1

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x\exp(-x^2) & x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi bruker i oppgavene teorem 7.3.

a) Vi har

$$U = X - 2 = g(X); x \geq 0$$

slik at

$$X = U + 2 = h(U)$$

med

$$h'(u) = 1.$$

Funksjonen $g(x) = x - 2$ er strengt monoton og deriverbar for alle x. Vi har dermed

$$\begin{aligned} f_U(\,u) &= f_X(\,h(u))\,|h'(u)| \\ &= 2\,(u+2)\,\exp(-\,(u+2)^2)\cdot 1 \\ &= 2\,(u+2)\,\exp(-\,(u+2)^2); u \geq -2. \end{aligned}$$

b) Vi har her

$$V = -2X = g(X); x \geq 0$$

der

$$X = -\tfrac{1}{2}V = h(V)$$

med

$$h'(v) = -\tfrac{1}{2}.$$

Funksjonen $g(x) = -2x$ er strengt monoton og deriverbar for alle x. Dette gir

$$\begin{aligned} f_V(\,v) &= f_X(\,h(v))\,|h'(\,v)| \\ &= 2\,(-\tfrac{1}{2}\,v)\ \exp(-\,(-\tfrac{1}{2}\,v)^2)\cdot\tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\,v\ \exp(-\,(\tfrac{1}{2}\,v)^2); v \le 0. \end{aligned}$$

c) Vi har

$$W = X^2 = g(X); x \ge 0$$

som gir

$$X = \sqrt{W} = h(W)$$

med

$$h'(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}.$$

Funksjonen $g(x) = x^2$ er strengt monoton og deriverbar for alle $x \ge 0$.

$$\begin{aligned} f_W(\,w) &= f_X(\,h(\,w))\,|h'(\,w)| \\ &= 2\,\sqrt{w}\ \exp(\,-w)\tfrac{1}{2\sqrt{w}} \\ &= \exp(-w); w \ge 0. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vi benytter den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten. Regner først ut sannsynligheten for generell verdi av β, for så å regne ut for $\beta = \pi/8$. Dette gir

$$\mathrm{P}(Y > \pi/4) = 1 - \mathrm{P}(Y \le \pi/4) = 1 - \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.1192}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\pi/4 < Y < \pi/3) = \mathrm{P}(Y < \pi/3) - \mathrm{P}(Y < \pi/4) &= \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} - \frac{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}-\exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.0671}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y > \pi/4 | Y < \pi/3) = \frac{\mathrm{P}(Y > \pi/4 \cap Y < \pi/3)}{\mathrm{P}(Y < \pi/3)} &= \frac{0.0671}{\left(1-\exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}\right)/\left(1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}\right)} \\ &= \underline{\underline{0.0708}}. \end{aligned}$$

b) Siden Y er en kontinuerlig, kan vi finne sannsynlighetstettheten ved å derivere den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten

$$f(y;\beta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y;\beta) = \frac{1}{1-\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}\left(0 - \left(-\frac{1}{\beta}\right)\exp\left\{-\frac{y}{\beta}\right\}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\beta - \beta\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}\exp\left\{-y/\beta\right\}}}$$

Fra figuren i oppgaveteksten har vi at $\tan(Y) = X$, altså har vi en-til-en relasjon mellom vinkelen Y og avstanden X. Det betyr at vi kan benytte transformasjon av variable (kap 7.2 i læreboka) til å finne fordelingen til X. La $y = \arctan(x) = w(x)$, altså den omvendte funksjonen av funksjonen over. Vi har da at sannsynlighetsfordelingen til X, $g(x;\beta)$, er gitt ved

$$g(x;\beta) = f(w(x);\beta)\cdot|w'(x)|.$$

Opplysningen i oppgaven eller oppslag i Rottmann gir at $w'(x) = 1/(1+x^2)$ som gir

$$\underline{\underline{g(x;\beta) = \frac{1}{\beta - \beta\exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}\exp\left\{-\arctan(x)/\beta\right\}\cdot\frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0.}}$$

Oppgave 3

a) Sannsynligheten for at et batteri virker etter 130 timer er

$$p = P(T > 130) = 1 - P(\leq 130) = 1 - P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} \leq \frac{130 - 117.2}{10}\right)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003$$

Vi har $n = 8$ slike batterier og de er uavhengig av hverandre. Hvis X er antall batterier som virker etter 130 timer, har vi at X består av n uavhengige forsøk, hver med sannsylighet p for 'suksess', X er derfor binomisk fordelt. Radioen virker dersom minst 4 batterier:

$$P(\text{Radioen virker}) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} p(x; n = 8, p = 0.1) = 1 - 0.995 = \underline{\underline{0.005}}$$

b)

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}p(x;n,p) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x} = (pe^t + 1 - p)^n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(pe^t+1-p)^{n-1}(pe^t)\big|_{t=0}\\ &= n(p+1-p)^{n-1}p = \underline{\underline{np}}\end{aligned}$$

Oppgave 4

$$\begin{aligned}M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}g(x;p) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}pq^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty}(e^t)^x pq^x q^{-1}\\ &= \sum_{x=1}^{\infty}(qe^t)^x\frac{p}{q} = \sum_{x=0}^{\infty}(qe^t)^x\frac{p}{q} - \frac{p}{q} = \left(\frac{1}{1-qe^t}-1\right)\frac{p}{q} \quad \text{for} \quad |qe^t|<1\\ &= \frac{1-1+qe^t}{1-qe^t}\cdot\frac{p}{q} = \frac{pe^t}{1-qe^t} \quad \text{for} \quad t < -\ln q.\end{aligned}$$

Siden $|qe^t| < 1 \Leftrightarrow qe^t < 1 \Leftrightarrow \ln q + t < 0 \Leftrightarrow t < -\ln q$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t(1-qe^t)-pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right|_{t=0}\\ &= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2] &= \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\right|_{t=0}\\ &= \left.\frac{pe^t(1-qe^t)^2-pe^t\cdot 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4}\right|_{t=0} = \left.\frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}\right|_{t=0}\\ &= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{p(1+1-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2 = \frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1-p}{p^2}}}$$

Oppgave 5

I denne oppgåva er det fleire alternative løysningar, tre løysningar er gitt her:

Alternativ 1:

Finn først fordelingsfunksjonen:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X_1 + X_2 \leq y) \\
&= \int\int_{x_1+x_2 \leq y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&\overset{uavh.}{=} \int\int_{x_1+x_2 \leq y} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^y \int_0^{y-x_2} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_2} (1 - e^{-\lambda(y-x_2)}) dx_2 \\
&= \int_0^y (\lambda e^{-\lambda x_2} - \lambda e^{-\lambda y}) dx_2 \\
&= 1 - e^{-\lambda y} - y\lambda e^{-\lambda y}
\end{aligned}$$

D.v.s. tettleiken er:

$$\begin{aligned}
f(y) &= F'_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} - \lambda e^{-\lambda y} + y\lambda^2 e^{-\lambda y} \\
&= \underline{\underline{\lambda^2 y e^{-\lambda y}}}, \; y > 0
\end{aligned}$$

som skulle visast.

Alternativ 2:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\text{talet på hendingar i } [0, y] \geq 2) \\
&= P(Z \geq 2) \qquad\qquad \text{der } Z \sim P_0(\lambda y) \\
&= 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 1 - \frac{(\lambda y)^0}{0!} e^{-\lambda y} - \frac{(\lambda y)!}{1!} e^{-\lambda y} \\
&= 1 - e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y}
\end{aligned}$$

D.v.s. tettleiken er:

$$\begin{aligned}
f(y) &= F'_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} - \lambda e^{-\lambda y} + \lambda^2 y e^{-\lambda y} \\
&= \underline{\underline{\lambda^2 y e^{-\lambda y}}}, \; y > 0
\end{aligned}$$

som skulle visast.

Alternativ 3:

Finn først momentgenererande funksjon (MGF) til den aktuelle gamma-fordelinga:

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) = \mathrm{E}(e^{tY}) &= \int_0^\infty e^{ty}\lambda^2 y e^{-\lambda y} dy \\
&= \int_0^\infty \lambda^2 y e^{-(\lambda - t)y} dy \\
&= \frac{\lambda^2}{(\lambda - t)^2} \int_0^\infty (\lambda - t)^2 y e^{-(\lambda - t)y} dy \\
&= (\frac{\lambda}{\lambda - t})^2
\end{aligned}
$$

For $Y = X_1 + X_2$ har vi at:

$$M_Y(t) = M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)$$

Frå tabellen har vi at $M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, d.v.s. $M_Y(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^2$.

Då $Y = X_1 + X_2$ har same MGF som gammafordalinga med parameter $\alpha = 2$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$ har vi vist at Y har denne gammafordelinga.