# Løsningsforslag Øving 10

## TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

---

### Oppgave 8-30

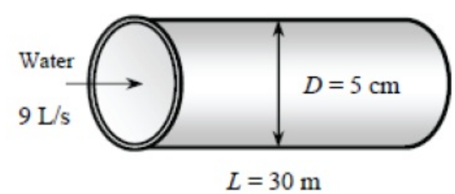
**Løsning** Volumstrømmen av vann gjennom et rør er gitt. Trykkfallet, tapshøyden og pumpens effekt skal bestemmes.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Innløpseffekter er neglisjerbare, strømningen antas med andre ord å være fullt utviklet. **3** Røret er rett og har ingen ventiler eller koplinger. **4** Det er ingen pumper eller turbiner i rørsystemet.

***Egenskaper*** Tettheten og viskositeten til vann er gitt til henholdsvis $\rho = 999.1\,\mathrm{kg/m^3}$ og $\mu = 1.138 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms}$. Overflateruheten i rustfritt stål er $0.002\,\mathrm{mm}$.

***Analyse*** Først regner vi ut gjennomsnittshastigheten og Reynolds-tallet for å bestemme strømningsregimet

$$V = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_c} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D^2/4} = \frac{0.009\,\mathrm{m^3/s}}{\pi(0.05\,\mathrm{m})^2/4} = 4.584\,\mathrm{m/s}$$
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(999.1\,\mathrm{kg/m^3})(4.584\,\mathrm{m/s})(0.05\,\mathrm{m})}{1.138 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms}} = 2.012 \cdot 10^5$$




som er større enn 4000. Strømningen er derfor turbulent. Den relative overflateruheten til røret er

$$\epsilon/D = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{0.05\,\mathrm{m}} = 4 \cdot 10^{-5}$$

Friksjonsfaktoren kan bestemmes fra Moody-diagrammet, men for å unngå avlesningsfeil finner vi friksjonsfaktoren fra Colebrook-ligningen, som løses numerisk (for eksempel med Matlab-funksjonen SOLVE)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{4 \cdot 10^{-5}}{3.7} + \frac{2.51}{2.012 \cdot 10^5 \sqrt{f}}\right)$$

som gir $f = 0.01594$. Da blir trykktapet, tapshøyden og pumpens effekt

$$\Delta P = \Delta P_{tap} = f\frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} = 0.01594\frac{30\,\mathrm{m}}{0.05\,\mathrm{m}}\frac{(999.1\,\mathrm{kg/m^3})(4.584\,\mathrm{m/s})^2}{2} = 1.004 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cong \mathbf{100\,kPa}$$
$$h_{tap} = \frac{\Delta P_{tap}}{\rho g} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.01594\frac{30\,\mathrm{m}}{0.05\,\mathrm{m}}\frac{(4.584\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.81\,\mathrm{m/s^2})} = \mathbf{10.2\,m}$$
$$\dot{W}_{\mathrm{pumpe}} = \dot{\mathcal{V}}\Delta P = (0.009\,\mathrm{m^3/s})(1.004 \cdot 10^5\mathrm{Pa}) = 904\,\mathrm{W} = \mathbf{0.904\,kW}$$

Pumpen må derfor levere en effekt på 0.904 kW for å overvinne friksjonstapene i røret.

***Diskusjon*** Friksjonsfaktoren kan også bestemmes enkelt fra Haalands ligning. Det vil gi $f = 0.01574$, som er akseptabelt når vi sammenligner med 0.01594. Friksjonsfaktoren som svarer til $\epsilon = 0$ er $f = 0.01562$, som viser at rør av rustfritt stål i dette tilfellet kan antas å være glatte med en feil på omtrent 2%. Pumpens effektbruk bestemmes av den mekaniske effekten som kreves for å motvirke trykktapet i strømningen. Akseleffekten vil være høyere fordi pumpens virkningsgrad er lavere enn 100%, det elektriske effektbehovet vil være enda høyere, fordi motoren også har en virkningsgrad lavere enn 100%.
**For løsningsforslag til MatLab-oppgaven, se MatLab_LF10.m på It'sLearning.**

---

## Oppgave 8-37

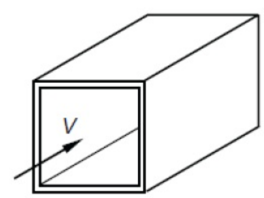
**Løsning** Laminær strømning i en kvadratisk kanal skal studeres, og vi ønsker å finne endringen i tapshøyde når hastigheten dobles.

***Antagelser*** **1** Strømningen er laminær til enhver tid. **2** Strømningen er fullt utviklet og dermed ikke påvirket av innløpseffekter.

***Analyse*** Friksjonsfaktoren for fullt utviklet laminær strømning i kvadratiske kanaler er (se Tabell 8-1, s. 348)

$$f = \frac{56.92}{\mathrm{Re}}, \quad \text{hvor} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho V D_h}{\mu}$$

Da kan tapshøyden uttrykkes som




$$h_{tap,1} = f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = \frac{56.92}{\mathrm{Re}}\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = \frac{56.91\mu}{\rho V D_h}\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = 28.46V\frac{\mu L}{\rho g D_h^2}$$

som viser at tapshøyden er proporsjonal med gjennomsnittshastigheten. Tapet vil derfor dobles når hastigheten dobles. Dette kan også vises ved

$$h_{tap,2} = 28.46V_2\frac{\mu L}{\rho g D_h^2} = 28.46(2V)\frac{\mu L}{\rho g D_h^2} = 2\left(28.46V\frac{\mu L}{\rho g D_h^2}\right) = 2h_{tap,1}$$

***Diskusjon*** Resultatet er også gyldig for laminær strømning i andre rør og kanaltverrsnitt.

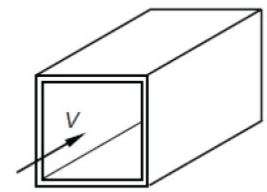
---

## Oppgave 8-38

**Løsning** Turbulent strømning i en kvadratisk kanal skal studeres, og vi ønsker å finne endringen i tapshøyde når hastigheten dobles.

***Antagelser*** **1** Strømningen er alltid turbulent. **2** Innløpseffektene er neglisjerbare, strømningen er med andre ord fullt utviklet. **3** Rørets innside er glatt.

***Analyse*** Friksjonsfaktoren er gitt som




$$f = 0.184\text{Re}^{-0.2}, \quad \text{hvor} \quad \text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Vi kan da uttrykke tapshøyden for turbulent strømning som

$$h_{tap,1} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.184\text{Re}^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.184\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.184\left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{V^{1.8}}{2g}$$

Vi ser at tapshøyden er proporsjonal med gjennomsnittshastigheten opphøyd i 1.8. Derfor vil tapshøyden øke med en faktor $2^{1.8} = 3.48$ når hastigheten dobles. Dette kan også vises som

$$\begin{aligned} h_{tap,2} &= 0.184\left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{V_2^{1.8}}{2g} = 0.184\left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{(2V)^{1.8}}{2g} \\ &= 2^{1.8}\left[0.184\left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^{-0.2}\frac{L}{D}\frac{V^{1.8}}{2g}\right] = 2^{1.8}h_{tap,1} = 3.48h_{tap,1} \end{aligned}$$

For en fullt utviklet turbulent strømning i et rør med stor overflateruhet, er friksjonsfaktoren uavhengig av Reynolds-tallet. Derfor ville tapshøyden øke med en faktor 4 ved en dobling av hastigheten. Det kan vi se fra

$$h_{tap} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

hvor tapshøyden altså er proporsjonal med kvadratet av hastigheten når $f$, $L$ og $D$ holdes konstant.

***Diskusjon*** De fleste strømninger i virkeligheten er fullt utviklet turbulente strømninger. Derfor antar man som regel at tapshøyden er proporsjonal med kvadratet av gjennomsnittshastigheten. Merk at vi har benyttet oss av at den hydrauliske diameteren $D_h$ for et kvadratisk rør er lik $D$, som her tilsvarer lengden av en side i rørets tverrsnitt.

---

## Oppgave 8-81

**Løsning** Vann blir transportert til et boligområde gjennom betongrør, og man vurderer å fore innsiden av røret med et belegg for å redusere friksjonstap. Vi ønsker å bestemme prosentvis endring i nødvendig pumpeeffekt.

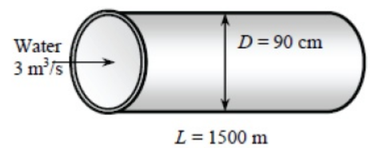
***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Innløpseffekter kan neglisjeres og strømningen er dermed fullt utviklet. **3** Røret er rett og har ingen ventiler eller koblinger som forårsaker tap.

***Egenskaper*** Tettheten og den kinematiske viskositeten til vann er gitt til henholdsvis $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ og $\mu = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Overflateruheten er 3 mm for betong og 0.04 mm for belegget.

***Analyse*** **Tilfelle 1** (Betongrør, $D = 0.90\,\mathrm{m}$). Gjennomsnittshastigheten og Reynolds-tallet blir

$$V = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D^2/4} = \frac{3\,\mathrm{m^3/s}}{\pi(0.90\,\mathrm{m})^2/4} = 4.7157\,\mathrm{m/s} \tag{1}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(4.7157\,\mathrm{m/s})(0.90\,\mathrm{m})}{1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 4.2441 \cdot 10^6 \tag{2}$$




som er større enn 4000, strømningen er derfor turbulent. Den relative overflateruheten til røret er

$$\epsilon/D = \frac{3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{0.90\,\mathrm{m}} = 3.333 \cdot 10^{-3}$$

Friksjonsfaktoren kan bestemmes ved bruk av Moody diagrammet, men for å unngå avlesingsfeil bruker vi Colebrooks ligning, som løses numerisk

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{3.333 \cdot 10^{-3}}{3.7} + \frac{2.51}{4.2441 \cdot 10^6 \sqrt{f}}\right)$$

som gir $f = 0.02699$. Fa blir tapshøyden og nødvendig pumpeeffekt

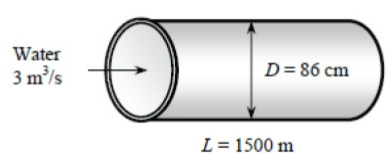
$$h_{tap} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.02699 \frac{1500\,\mathrm{m}}{0.90\,\mathrm{m}} \frac{(4.7157\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.81\,\mathrm{m/s^2})} = 50.985\,m \cong \mathbf{51.0\,m}$$

$$W_{pumpe} = \dot{\mathcal{V}}\rho g h_{tap} = (3\,\mathrm{m^3/s})(1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.81\,\mathrm{m/s^2})(50.985\,\mathrm{m}) = 1.5005 \cdot 10^6\,\mathrm{W} \cong \mathbf{1500\,kW}$$

**Tilfelle 2** (Rør med belegg, $D = 0.86\,\mathrm{m}$). Gjennomsnittshastigheten og Reynolds-tallet er

$$V = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D^2/4} = \frac{3\,\mathrm{m^3/s}}{\pi(0.86\,\mathrm{m})^2/4} = 5.1646\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(5.1646\,\mathrm{m/s})(0.86\,\mathrm{m})}{1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 4.4415 \cdot 10^6$$



Strømningen er turbulent siden Re > 4000. Den relative overflateruheten i røret er

$$\epsilon/D = \frac{4 \cdot 10^{-5}\,\text{m}}{0.86\,\text{m}} = 4.6512 \cdot 10^{-5}$$

Vi bruker Colebrooks formel for å finne friksjonsfaktoren

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{4.6512 \cdot 10^{-5}}{3.7} + \frac{2.51}{4.4415 \cdot 10^{6}\sqrt{f}}\right)$$

som gir $f = 0.01110$. Tapshøyden og nødvendig pumpeeffekt er

$$h_{tap} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.01110\frac{1500\,\text{m}}{0.86\,\text{m}}\frac{(5.1646\,\text{m/s})^2}{2(9.81\,\text{m/s}^2)} = 26.320\,\text{m} \cong \mathbf{26.3\,m}$$

$$\dot{W}_{pumpe} = \dot{\mathcal{V}}\rho g h_{tap} = (3\,\text{m}^3/\text{s})(1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(26.320\,\text{m}) = 7.7460 \cdot 10^5\text{W} \cong \mathbf{775\,kW}$$

Den nødvendige pumpeeffekten endrer seg med $(774.6 - 1500.5)/1500.5 = -0.4838$, altså en reduksjon på 48.4%.

***Diskusjon*** Nødvendig pumpeeffekt blir nesten halvert når innsiden av røret blir foret. Dette viser hvor viktig det er å ha en glatt overflate på innsiden av rør.

---

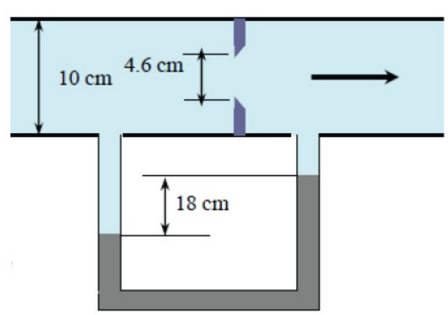
## Oppgave 8-115

**Løsning** Volumstrømmen av vann skal måles med en blendemåler. For et gitt trykkfall over blenden skal volumstrømmen, gjennomsnittshastigheten og tapshøyden bestemmes.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Tapskoeffisienten for utstrømning er $C_d = 0.61$.

***Egenskaper*** Tettheten og den kinematiske viskositeten til vann er gitt til henholdsvis $\rho = 999.1\,\text{kg/m}^3$ og $\mu = 1.138 \cdot 10^{-3}\,\text{kg/ms}$. Vi lar tettheten til kvikksølv være $13600\,\text{kg/m}^3$.

***Analyse*** Forholdet mellom blendediameteren og rørdiameteren $\beta$, samt arealet av blenden er




$$\beta = \frac{d}{D} = \frac{4.6}{10} = 0.46$$

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.046\,\text{m})^2}{4} = 0.001662\,\text{m}^2$$

Trykkfallet over blenden er

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (\rho_{Hg} - \rho_f)gh$$

Volumstrømmen kan nå uttrykkes som

$$\dot{\mathcal{V}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(1-\beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho_f)gh}{\rho_f(1-\beta^4)}} = A_0 C_d \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg}/\rho_f - 1)gh}{1-\beta^4}}$$

Vi setter inn verdier og får

$$\dot{\mathcal{V}} = (0.001662\,\mathrm{m}^2)(0.61)\sqrt{\frac{2(13.600/999.1 - 1)(9.81\,\mathrm{m/s}^2)(0.18\,\mathrm{m})}{1 - 0.46^4}} = \mathbf{0.006923\,m^3/s}$$

Vi finner gjennomsnittshastigheten i røret ved å dividere volumstrømmen på tverrsnittsarealet til røret

$$V = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_c} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D^2/4} = \frac{0.006923\,\mathrm{m^3/s}}{\pi(0.10\,\mathrm{m})^2/4} = \mathbf{0.8815\,m/s}$$

Tapshøyden mellom måleseksjonene kan estimeres ut fra energiligningen. Siden $z_1 = z_2$ kan uttrykket for tapshøyden forenkles til

$$\begin{aligned} h_{tap} &\approx \frac{P_1 - P_2}{\rho_f g} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{(\rho_{Hg} - \rho_f)gh_{Hg}}{\rho_f g} - \frac{[(D/d)^4 - 1]V_1^2}{2g} \\ &= (13.6 - 1)\cdot 0.18\,\mathrm{m} - \frac{[(10/4.6)^4 - 1](0.8815\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.81\,\mathrm{m/s}^2)} = \mathbf{1.43\,m\,H_2O} \end{aligned}$$

***Diskusjon*** Reynolds-tallet for strømningen gjennom røret er

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(999.1\,\mathrm{kg/m^3})(0.8815\,\mathrm{m/s})(0.10\,\mathrm{m})}{1.138\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms}} = 7.74\cdot 10^4$$

Hvis vi setter inn $\beta$ og Re verdier i uttrykket for tapskoeffisienten for utstrømning

$$C_d = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.184\beta^8 + \frac{91.71\beta^{2.5}}{\mathrm{Re}^{0.75}}$$

får vi $C_d = 0.605$, som er veldig nært den antatte verdien 0.61. Ved å bruke den nye verdien av $C_d$ vil volumstrømmen bli $0.006866\,\mathrm{m^3/s}$, som er under 1% fra det originale resultatet. Derfor er det praktisk å bruke den anbefalte verdien $C_d = 0.61$ i analyser, og deretter verifisere den antatte verdien.