Løsningsforslag teoriøving 1 – Nivå- og temperaturmåling

Nivåmåling - Strømsignal

a) Hele målestrømmen på 4-20mA går gjennom R. Vi kan derfor enkelt benytte Ohms lov for å finne R som gir en spenning på 1V over R ved 20mA.
$R = \frac{U}{I} = \frac{1\,[V]}{20\times10^{-3}[A]} = \mathbf{50\Omega}$

b) Måleområdet er på 0-700mm, som tilsvarer 4-20mA. Vi regner først 0-700mm om til volum, siden det er dette vi skal bruke i svaret.
$\Delta V = \Delta hA = \Delta h\pi\mathrm{r}^2 = 0.7\times\pi\times0.2^2 \approx 0{,}088\mathrm{m}^3 = 88\mathrm{l}$
Vi regner så dette om til volum/spenning
$\frac{\Delta V}{\Delta U} = \frac{\Delta V}{\Delta IR} = \frac{\Delta V}{(I_{max} - I_{min})R} = \frac{0.088}{(0.02 - 0.004)\times50} = 0.11\,m^3/V = 110\,l/V$
Til slutt multipliserer vi med ADC'ens spenning/LSB, som er 1/(2^12)[V/LSB]
$\frac{\Delta V}{LSB} = \frac{\Delta V}{\Delta U}\times\frac{\Delta U}{LSB} = 0.11\times\frac{1}{2^{12}} \approx 2.69\times10^{-5}\,m/LSB = \mathbf{26{,}9\,ml/LSB}$
Detter er en meget omstendelig måte å gjøre det på, alternativt kan vi bare dele antall liter i tanken på *antall trinn* på ADC'en *i måleområdet*. *Antall trinn i måleområdet* er 80% av 2^12 (3278.8), siden vi kun bruker 0.2-1V inn på måleomformeren, istedet for 0-1V (altså vi bruker kun 80% av ADC'ens totale område). Vi får da
$\frac{\Delta V}{LSB} \approx \frac{0.088}{0.8\times2^{12}} = \cdots$

Nivåmåling – Trykkmåling

Her er poenget at væsken beveger seg, mens målesystemet "tror" at den er i ro. Dette vil føre til en målefeil. Ved hjelp av Bernoullis likning kan vi først beregne trykket i målepunktet, og så regne dette om til høyde igjen.

Først regner vi ut trykket i målepunktet. Bernoullis gir

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = konstant$$

som gir at

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gz_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gz_2 + p_2 \qquad (1.1)$$

der variabler med subscript 1 beskriver systemet når væsken er i ro, og variabler med subscript 2 beskriver systemet når væsken er i bevegelse (v=2m/s). Fra oppgaven har vi

$$z_1 = z_2, v_1 = 0\,m/s\,, v_2 = 2\,m/s$$

som vi kan sette inn i (1), vi får da

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\rho\overline{v}_2^2 + p_2 \Rightarrow p_2 = p_1 - \tfrac{1}{2}\rho\overline{v}_2^2 \qquad (1.2)$$

(Vi merker her om v_2 til $\overline{v}_2$ for å skille den fra senere bruk av v_2)

Vi setter nå opp Bernoullies likning på nytt, men denne gangen med antakelsene målesystemet vårt gjør, altså at væsken ikke beveger seg. Det vil si

$$z_1 \neq z_2, v_1 = v_2 = 0\,m/s$$

Vi putter dette inn i (1.1), sammen med det nye uttrykket for trykk vi fant i (1.2) og får

$$\rho gz_1 + p_1 = \rho gz_2 + p_1 - \frac{1}{2}\rho\overline{v}_2^2 \Rightarrow z_1 = z_2 - \frac{\overline{v}_2^2}{2g} = 0.5 - \frac{2^2}{2\times9.81} \approx 0.3m = \mathbf{300mm}$$

Vi måler altså 200mm for lite når væskehastigheten er 2m/s.

Nivåmåling – måling med vektcelle

Fra lab-heftet har vi

$$V_{ut} \approx \frac{k_f}{R_0} V_{inn} \times F \qquad (2.1)$$

Vi har oppgitt V_{inn}, så vi trenger å finne $\frac{k_f}{R_0}$ (vi trenger ikke å finne k_f og R_o invidueelt) og F.

Først finner vi $\frac{k_f}{R_0}$. Oppgaven spesifiserer at "følsomheten til målebroen" er $k = \frac{2mV}{V}$ ved $F_{max} = 2{,}5kN$. Det gir oss

$$\frac{k_f}{R_0} F_{max} = k \Rightarrow \frac{k_f}{R_0} = \frac{k}{F_{max}} \qquad (2.2)$$

Så finner vi F, som et utrykk av høyde (nivå). Den totale kraften fra tanken er gitt av

$$F_{tot} = mg = V\rho g = Ah\rho g = \pi r^2 h \rho g$$

Der alle variabler utenom h er kjent. Dette uttrykket deler vi på 3, siden vi kun har vektcelle på ett av totalt tre bein tanken står på, vi har da

$$F = \frac{\pi r^2 \rho g}{3} h \qquad (2.3)$$

Vi kan nå sette (2.2) og (2.3) inn i (2.1), og får

$$V_{ut} = \frac{kV_{inn}}{F_{max}} \times \frac{\pi r^2 \rho g}{3} \times h \approx \frac{0.002 \times 15}{2500} \times \frac{3.14 \times 0.2^2 \times 1000 \times 9.81}{3} \times h$$

$$\approx 4{,}93 \times 10^{-3} h = \boldsymbol{4.93h\ mV/m}$$

Nivåmåling – ultralyd

Fra lab-heftet har vi at

$$c = 331{,}5 \times \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}} \qquad (3.1)$$

Der T er temperatur i °C.

Vi setter opp et uttrykk for målt (feil) avstand $d_{målt}$

$$d_{målt} = \frac{\tau_{målt} c_{20°C}}{2} \qquad (3.2)$$

der $\tau_{målt}$ er gangtiden (tiden det tar for lydbølgen å vandre fra kilden til vannflaten og tilbake) og $c_{20°C}$ er lydhastigheten ved 20°C. Vi deler på 2 siden lyden må vandre avstanden vi er ute etter å måle 2 ganger (tur/retur).

Nå finner vi et uttrykk for $\tau_{målt}$

$$\tau_{målt} = \frac{2d}{c_{0°C}} \qquad (3.3)$$

Her er d den faktiske avstanden og $c_{0°C}$ lydhastigheten ved 0°C.

Vi setter (3.3) inn i (3.2) og får

$$d_{målt} = \frac{\frac{2d}{c_{0°C}} c_{20°C}}{2} = \frac{c_{20°C}}{c_{0°C}} d \qquad (3.4)$$

Vi kan nå bruke (3.1) til å regne ut $c_{0°C}$ og $c_{20°C}$, og sette svarene inn i (3.4), eller vi kan sette inn (3.1) i (3.4) og får da

$$d_{målt} = \frac{331{,}5 \times \sqrt{1 + \frac{20}{273{,}15}}}{331{,}5 \times \sqrt{1 + \frac{0}{273{,}15}}} d = \sqrt{1 + \frac{20}{273{,}15}} 0{,}5 \approx \boldsymbol{0.518m}$$

altså måler vi avstanden mellom måler og vannflaten til å være 18mm for stor, og dermed nivået i tanken til å være 18mm *for lavt.*

Temperaturmåling – motstandsfølere

a) Ohmsk effekt er gitt av $P = UI = RI\hat{}2$, vi får da
$P_{10\mu A} = 10nW, P_{1mA} = 100\mu W, P_{10mA} = 10mW$

b) Fra lab-heftet har vi følgende likning for varmeledning
$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\kappa A(T_{varm} - T_{kaldt})}{d}$$
(ΔQ og Δt *er ikke av interesse her*)
Vi kan stokke om på denne likningen for å få et uttrykk for $\Delta T = T_{varmt} - T_{kaldt}$
$$\Delta T = \frac{P}{A} \times \frac{d}{\kappa} \qquad (4.1)$$
P har vi fra a) og $\frac{\kappa}{d}$ (som vi enkelt regner om til $\frac{d}{\kappa}$) er oppgitt. Arealet for en sylinder er
$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$
Vi detter dette, og $\frac{\kappa}{d}$, inn i (4.1), og får
$$\Delta T = \frac{P}{2\pi r(r + h) \times \frac{\kappa}{d}} \approx \frac{P}{2 \times 3.14 \times 0.001(0.001 + 0.005) \times 100} = \frac{P}{3{,}768 \times 10^{-3}}$$
som gir
$\Delta T_{10\mu A} \approx 2{,}65\mu K, \Delta T_{1mA} \approx 0{,}265K, \Delta T_{10mA} \approx 2{,}65K$
Alternativt kan vi bruke
$A = 2\pi rh$
(se bort i fra endestykkene på sylinderen)

c) Vi har fra lab-heftet
$V_{rms} = \sqrt{4k_b TR\Delta f}$
Fyller vi inn gitte verdier får vi
$$V_{rms} = \sqrt{4k_b TR\Delta f} = \sqrt{4 \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 273{,}15 \times 100 \times 10} \approx \mathbf{3,88nV}$$

d) Ohms lov gir oss
$U = RI = 0.39 \times I$
som gir oss
$$\frac{U_{10\mu A}}{T} = 3{,}9\, \mu V/K, \frac{U_{1mA}}{T} = 390\, \mu V/K, \frac{U_{10mA}}{T} = 3{,}9\, mV/K$$

e) Den totale spenningen vi måler er gitt
$$V_{målt} = R_0 I_{målestrøm} + AI_{målestrøm}T + V_{støy}$$
der A er følsomheten til elementet (390mΩ/K). Vi får følgende uttrykk for temperatur
$$T = \frac{1}{AI_{målestrøm}}\left(V_{målt} - R_0 I_{målestrøm} - V_{støy}\right)$$
Viss vi antar at leddene er ukorrulerte, kan vi finne variansen til hvert ledd inviduelt. Vi er kun interesert i variansen i temperaturen som stammer fra støy
$$T_{støy} = \frac{V_{støy}}{AI_{målestrøm}}$$
Ved å bruke noen grunleggende statistiske regler, har vi
$$Var[T_{støy}] = Var\left[\frac{V_{støy}}{AI_{målestrøm}}\right] = \frac{Var[V_{støy}]}{(AI_{målestrøm})^2}$$
Viss vi antar at $V_{støy}$ har middelverdi 0, har vi
$$Var[V_{støy}] = \left(V_{støy,RMS}\right)^2 = V_{rms}^2$$

som vi har fra c), og derved har vi

$$Var[T_{støy}] = \frac{V_{RMS}^2}{(AI_{målestrøm})^2} \Rightarrow SD[T_{støy}] = \sqrt{\frac{V_{RMS}^2}{(AI_{målestrøm})^2}} = \frac{V_{rms}}{AI_{målestrøm}}$$

$$\approx \frac{3.88\times10^{-9}}{0.39\times I_{målestrøm}} \approx \frac{10^{-8}}{I_{målestrøm}}$$

og vi kan nå regne ut standardavviket for de tre målestrømmene

$SD[T_{støy}]_{10\mu A} = 1mK, SD[T_{støy}]_{1mA} = 10\mu K, SD[T_{støy}]_{10mA} = 1\mu K$

Kortversjon: Vi dividert svaret i c) på svarene i d). Det er greit å ha mindre utledninger enn i eksemplet her, så lenge man forstår hva man gjør.

f) Vi bruker samme formel som i e)

$$Var[T_{støy}] = \frac{V_{rms}}{AI_{målestrøm}}$$

og setter bare inn ny V_{rms}, da har vi

$$Var[T_{støy}] = \frac{V_{rms}}{AI_{målestrøm}} = \frac{28\times10^{-6}}{0.39\times I_{målestrøm}} \approx \frac{71.8\times10^{-6}}{I_{målestrøm}}$$

og har da

$$SD[T_{støy}]_{10\mu A} = 7{,}18K, SD[T_{støy}]_{1mA} = 71{,}8mK, SD[T_{støy}]_{10mA} = 7{,}18mK$$

Temperaturmåling – Termoelement

a) Et termoelement måler ikke absolutt temperatur, men temperaturforskjellen mellom målepunktet og tilkoblingsklemmen. For å beregne temperaturen i målepunktet måler vi også temperaturen ved tilkoblingsklemmen (typisk med en motstandsføler) og legger denne til den målte temperaturforskjellen. Måletemperaturen kan derfor skrives

$T_{abs} = T_{ref} + T(V_{målt})$

der $T(V_{målt})$ er en funksjon

Viss vi bytter polaritet på tilkoblingen får vi istedet

$T_{abs} = T_{ref} + T(-V_{målt}) = T_{ref} - T(V_{målt})$

vi får altså (med antakelsen at $T(V_{målt})$ er en odde funksjon $f(x) = -f(-x)$) at temperaturforskjellen mellom målepunkt og tilkobling trekkes fra temperaturreferansen istedet for å legges til.

Eksempel: Målepunktet holder 100°C, og temperaturen ved tilkoblingsklemmene er 20°C. Vi bytter polaritet på tilkoblingene. Vi får da

$$T_{målt} = T_{ref} - T(V_{målt}) = T_{ref} - \Delta T = T_{ref} - (T_{målepunkt} - T_{ref}) = 2T_{ref} - T_{målepunkt}$$
$$= 2\times20 - 100 = -60°C$$

b) Siden koblingene mellom tilkoblingsterminalene og volmeteret er av samme matriale blir det generert samme Seebeckspenning i begge lederene VISS temperaturen er den samme på begge tilkoblingsterminalene. Siden spenningene er de samme over begge lederene, vil de kanselere hverandre ut, og ikke bidra til målefeil.

Antakelsen at temperaturen er lik i begge tilkoblingsterminalene er som regel grei, siden terminalene er meget nærme hverandre.

Temperaturmåling – Pyrometer

a) Stefan-Boltzmanns lov (se lab-hefte) gir

$$P = \varepsilon\sigma A(T^4 - T_c^4) \Rightarrow T^4 - T_c^4 = \frac{P}{\varepsilon\sigma A} \Rightarrow T^4 = \frac{P}{\varepsilon\sigma A} + T_c^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\varepsilon\sigma A} + T_c^4}$$

ved å bruke $A = \pi r^2$ får vi en formel vi kan sette inn kjente tall i

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\varepsilon\sigma A} + T_c^4} = \sqrt[4]{\frac{P}{\varepsilon\sigma\pi r^2} + T_c^4} \approx \sqrt[4]{\frac{1000}{0.9\times5.67\times10^{-8}\times3.14\times0.15\text{^}2} + 293.15^4}$$
$$\approx \mathbf{730.50K = 457.35°C}$$

b) Vi bruker samme formel, og bytter kun ut emittansen

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\varepsilon\sigma\pi r^2} + T_c^4} \approx \sqrt[4]{\frac{1000}{0.1\times5.67\times10^{-8}\times3.14\times0.15\text{^}2} + 293.15^4} \approx \mathbf{1257.90K}$$
$$= \mathbf{984.75°C}$$

c) Strålingsitensisteten til et objekt er gitt (se lab-hefte)

$$W = \varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4) \qquad (5.1)$$

Denne skriver vi om til

$$T_{målt} = \sqrt[4]{\frac{W}{\varepsilon_0\sigma} + T_c^4} \qquad (5.2)$$

og erstatter W med (5.1) (der vi setter $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.4$)

$$T_{målt} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_1\sigma(T^4 - T_c^4)}{\varepsilon_0\sigma} + T_c^4} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}(T^4 - T_c^4) + T_c^4}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{0.4}{0.1}(973.15^4 - 293.15^4) + 293.15^4} \approx \mathbf{1374.11K = 1100.96°C}$$

d) Fra labheftet finner vi

$$W = \sigma(\varepsilon T^4 + \rho T_c^4) = \sigma(\varepsilon T^4 + (1-\varepsilon)T_c^4)$$

Fyller vi inn, får vi

$$W = \sigma(\varepsilon T^4 + (1-\varepsilon)T_c^4) = 5.67\times10^{-8}(0.7\times373.15^4 + (1-0.7)\times293.15^4)$$
$$\approx \mathbf{895.13W/m^2}$$

e) Fra formelen oppgitt i oppgaven får vi

$$W = \varepsilon\sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{W}{\varepsilon\sigma}}$$

Vi setter inn W fra d) og oppgitt ε og σ og får

$$T = \sqrt[4]{\frac{W}{\varepsilon\sigma}} \approx \sqrt[4]{\frac{895.13}{0.7\times5.67\times10^{-8}}} \approx \mathbf{389.53K = 114.38°C}$$

Når objektets temperatur er 0°C får vi

$$W = \sigma(\varepsilon T^4 + (1-\varepsilon)T_c^4) = 5.67\times10^{-8}(0.7\times273.15^4 + (1-0.7)\times293.15^4)$$
$$\approx 346.57W/m^2$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{W}{\varepsilon\sigma}} \approx \sqrt[4]{\frac{346.57}{0.7\times5.67\times10^{-8}}} \approx \mathbf{305.87K = 32.54°C}$$