NTNU

Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Øving 1 - Løsningsforslag

Oppgave 1: AUV

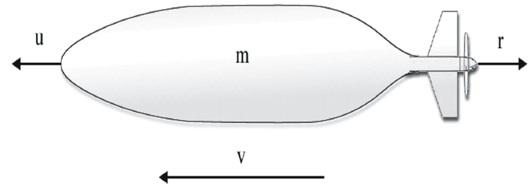
En AUV (Autonomous Underwater Vehicle) er et ubemannet undervannsfartøy som kan utføre selvstendige oppdrag under vann. I denne oppgaven skal vi se på den horisontale hastigheten til et slikt fartøy.

Figur 1.1: Kongsberg Maritimes AUV Hugin.

I vår forenklede modell skal vi kun se på to krefter i det horisontale plan; drivkraften u fra propellene, og motstanden r fra vannet. Det antas at hydrodynamisk demping (motstand i vannet) r er proporsjonal med hastigheten v til fartøyet, det vil si

$$r = kv$$

Vi skal bruke at kraften r virker i motsatt retning av u. Proporsjonalitetskonstanten k har benevning kg/s, og AUV'en har masse m.



Figur 1.2: AUV med horisontale krefter.

a) Sett opp kraftbalansen for AUVens horisontale bevegelse (vha Newtons 2. lov). Benytt hastigheten v som tilstand. Hva er på draget i modellen? Av hvilken orden er modellen?
Løsning: Newtons andre lov gir

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= \sum F \\ m\dot{v} &= u - kv \\ \dot{v} &= \tfrac{1}{m}u - \tfrac{k}{m}v \end{aligned}$$

der u er pådrag. Dette er en 1. ordens modell.

b) Utled den eksplisitte løsningen til differensiallikningen som framkommer i 1a). Du kan foreløpig betrakte propellkraften u som en konstant.
Løsning: Svaret i a) er på formen $\dot{x} = ax + b$, der

$$x = v, \quad a = -\frac{k}{m}, \quad b = \frac{u}{m}.$$

Utledningen blir derfor som ligning (3.12) og (3.13) i kompendiet

$$x\left(t\right) = x_0 e^{at} + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)$$

Innsatt for koeffisientene i a) gir dette

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{\frac{u}{m}}{-\frac{k}{m}}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) = e^{-\frac{k}{m}t}(v_0 - \frac{u}{k}) + \frac{u}{k}$$

c) Finn et uttrykk for tidskonstanten til systemet. Hva beskriver tidskonstanten i et dynamisk system? Hva skjer med tidskonstanten hvis vi øker k? Hva skjer med tidskonstanten hvis vi øker massen til AUV'en? Forklar også med ord hva som skjer.
Løsning: Tidskonstanten blir $T = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-\frac{k}{m}} = \frac{m}{k}$. Utrykket viser at når k øker minsker tidskonstanten, og når m øker så øker tidskonstanten. Tidskonstanten forteller noe om hvor hurtig et system svinger seg inn til sin stasjonære verdi(likevekt). En høyere k tilsier at vannet yter en større motkraft, og vil derfor bidra til at AUVen når sin likevektstilstand raskere(mindre T). For en gitt hastighet har man en viss motstandskraft R. Dersom massen øker vil akselerasjonen a synke(siden $R = ma$), slik at systemet vil nå sin likevekt tregere (større T). En lett farkost er raskere å akselerere enn en tung farkost med den samme kraften.

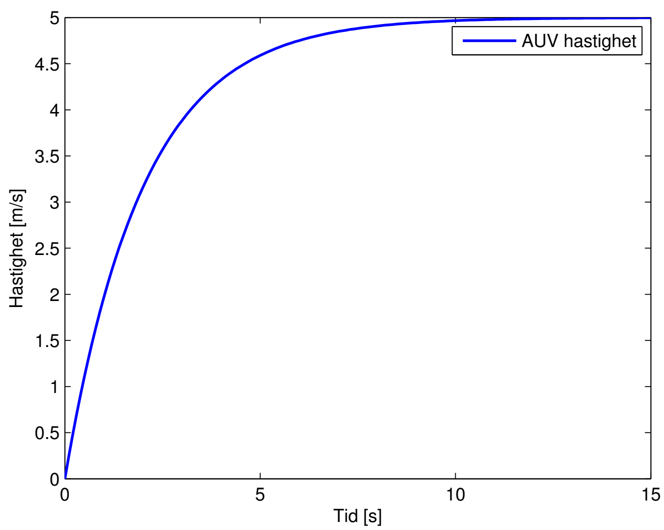
d) Du kan nå betrakte u som pådrag. Det vil si at den generelle differensialligningen er på formen $\dot{x} = ax + bu$. Løsningen er imidlertid den samme som du fant i b). Finn et uttrykk for forsterkningen til systemet. Hva skjer med forsterkningen hvis vi øker k? Forklar også med ord hva som skjer.
Løsning: Fra (4.3) i kompendiet har vi $K = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}$. Dette viser at når k øker minker forsterkningen. Dette kan forklares med at når k øker, øker motstanden i vannet. Man vil derfor oppnå likevekt ved en

lavere hastighet, dvs lavere forsterkning.

Anta videre i oppgaven at $m = 200\,kg$ og $k = 100\,kg/s$.

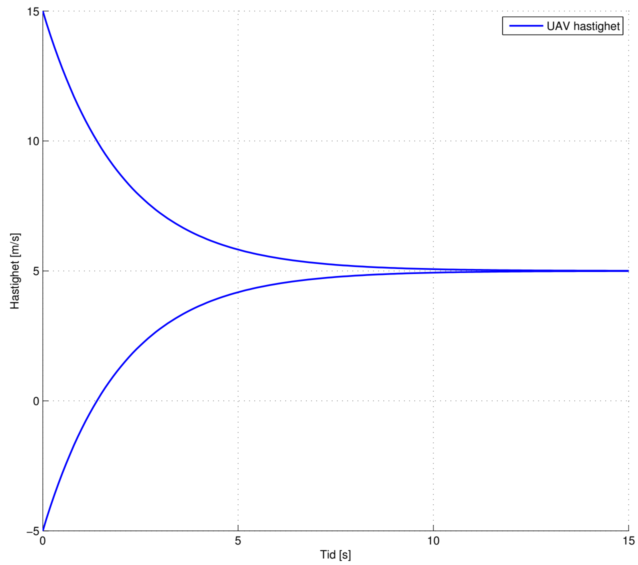
e) Hva blir tallverdiene til tidskonstanten og forsterkningen? Hva betyr dette i praksis?
Løsning: $T = \frac{200\,kg}{100\,kg/s} = 2\,s$. *Dette innebærer at etter en endring på inngangen(u) vil utgangen/tilstanden(v) nå* 63% *av sin nye stasjonære verdi etter 2 sekunder. Dette følger av definisjonen av tidskonstanten; tidskonstanten er tiden signalet bruker på å nå* 63% *av sin sluttverdi.* $K = \frac{1}{k} = \frac{1}{100\,kg/s} = 0.01\,\frac{s}{kg}$. *Dette betyr at dersom man påtrykker systemet et konstant inngangssignal(u), vil det stasjonære utgangssignalet bli* 1/100 *av dette. For eksempel, dersom man påtrykker* $100\,N$, *blir den stasjonære hastigheten til farkosten* $1\,m/s$.

f) Vi antar at u er konstant lik $500\,N$. Anta starthastighet $v_0 = 0\,m/s$. Skisser hastigheten i et diagram fra $t = 0\,s$ til $t = 15\,s$ enten ved hjelp av kalkulator/Matlab eller for hånd.
Løsning:



Hastigheten skal svinge inn til sin stasjonærverdi $v = 5\,m/s$. *Etter* $2\,s$ *skal den ha* $v = 0.63 \cdot 5\,m/s = 3.15\,m/s$

g) Skisser forløpet også for $v_0 = 15\,m/s$ og $v_0 = -5\,m/s$. Hvordan blir sluttverdien (stasjonærverdien) til et 1. ordens system påvirket av initialverdien?
Løsning:



Figuren viser at sluttverdien er uavhengig av initialverdien. I oppgave 1d) så vi jo også at forsterkningen kun er avhengig av k, ikke massen eller initialverdien.

h) Vi ønsker at hastigheten til AUV'en skal holde seg konstant på $3\,m/s$. Finn ut hva pådraget u må være ved:

1. Å regne på forsterkningen til systemet.
2. Ved å anta at den deriverte i 1 a) er null

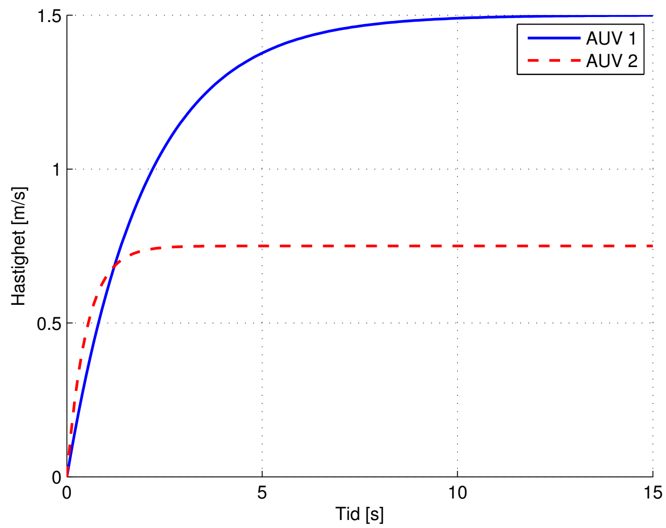
Løsning:
1. Forsterkning:

$$x_s = Ku \implies u = \frac{x_s}{K} = \frac{3\,m/s}{0.01\,s/kg} = 300\,kg \cdot m/s^2 = 300\,N$$

2. Derivasjon:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}v = 0 \implies \frac{1}{m}u = \frac{k}{m}v \\ u &= kv = 100\,kg/s \cdot 3\,m/s = 300\,kg \cdot m/s^2 = 300\,N\end{aligned}$$

i) Figur 1.3 viser tidsresponsen til to forskjellig typer AUV'er som påtrykkes samme pådrag. Nevn noen praktisk relevante forskjeller mellom de to AUV'ene. Se spesielt på forskjeller i forsterkning og tidskonstant, og forklar med ord hva dette innebærer.



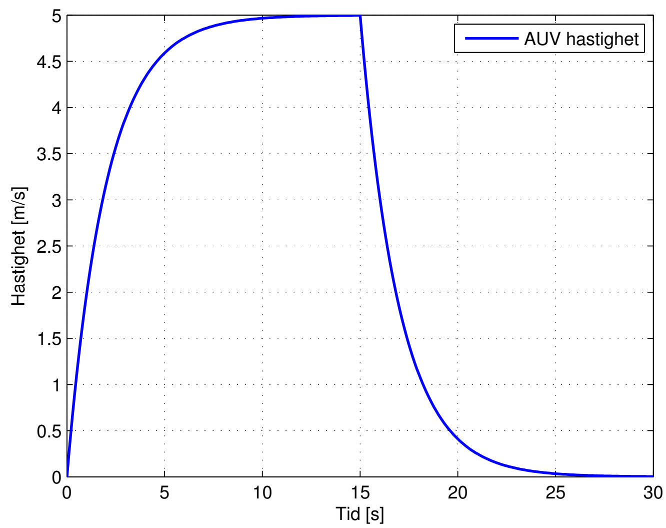
Figur 1.3: Tidsrespons

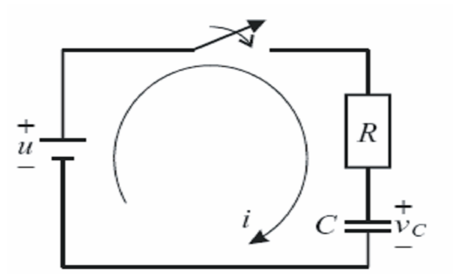
Løsning: AUV 1 har dobbelt så høy forsterkning som AUV 2. Dette betyr at AUV 2 krever dobbelt så stort pådrag, og dermed mer energi, for å holde samme hastighet som AUV 1. Av svaret i 1 d) kan vi slutte at k_1 *(for AUV 1) er mindre enn* k_2 *(for AUV 2). Dette kan for eksempel komme av at AUV 2 har mindre effektive propeller eller dårligere hydrodynamisk profil.*

Tidskonstant:
Ved å undersøke når grafene treffer ca 60 % av sin sluttverdi, ser vi at AUV 2 har mindre tidskonstant enn AUV 1. AUV2 har dermed raskere respons enn AUV1 gitt at samme pådrag u benyttes i de to AUVene.

Konklusjon:
AUV 2 er mer energikrevende enn AUV 1, men også mer egnet for oppdrag som krever raske fartsendringer.

j) Anta igjen $m = 200\,kg$ og $k = 100\,kg/s$, og $v_0 = 0\,m/s$. Skisser AUV'ens hastighet fra $t = 0\,s$ til $t = 15\,s$ med $u = 200\,N$. Sett deretter $u = 0\,N$ og tegn videre fra $t = 15\,s$ til $t = 30\,s$(obs: benytt riktig initialverdi ved $t = 15\,s$). Kjenner du igjen figuren fra et vanlig eksempel i kretsteknikk? Hvilket eksempel?
Løsning:

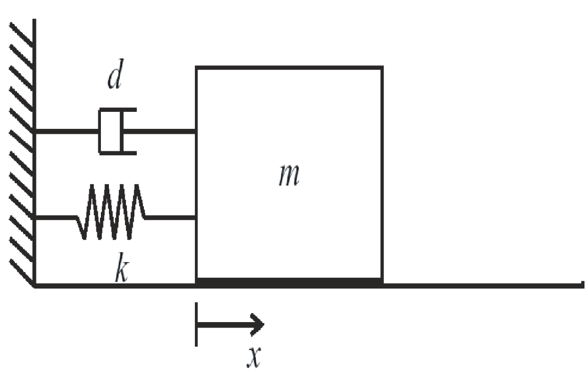




Innsvingningsforløpet bør være kjent fra RC-kretsen i kretsteknikk: Disse eksemplene er analoge, hvis vi sier at inngangen til systemene er propellkraften/spenningskilden, og tilstanden (utgangen) er farkosthastigheten/spenningen over kondensatoren. Eksemplet tilsvarer da en RC-krets der spenningkilden skrus på (og kondensatoren lades opp) fram til $t = 15\,s$, og deretter skrus av (kondensatoren lades ut).

Oppgave 2: Masse-fjær-demper

Masse-fjær-demper systemet, illustrert i Figur 1.4, er et eksempel dere vil møte flere ganger i løpet av studiet, siden det er en forholdsvis enkel modell som kan brukes til å beskrive en rekke ulike fenomener. Mange ny-utdannede kyb-ere har dessuten fått i oppgave å analysere slike systemer på jobb-intervjuer, så det er et eksempel det blir forventet at man kjenner til når man er Master i kybernetikk.



Figur 1.4: Masse-fjær-demper system

Systemet består av en kloss med masse m som er festet i en vegg via en fjær og en demper. Fjæren trekker i klossen med en kraft gitt av $F_f = kx$, hvor k $\left[kg/s^2\right]$ er fjærens stivhet og x er posisjonen til klossen. Ved $x = 0$ er klossen i ro, det vil si ingen fjærkraft virker på klossen. Demperen gir en kraft som er proporsjonal med klossens hastighet $\dot{x}$, det vil si $F_d = d\dot{x}$. Vi ser bort fra friksjon mellom bordet og klossen, som vil komplisere systemet ved at det introduserer ulineære effekter.

a) Sett opp èn differensiallikning for posisjonen til klossen ved hjelp av Newtons andre lov. Vis at denne kan skrives på formen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

Av hvilken orden er differensial-likningen? Hvor mange initialverdier trengs for å finne løsningen til systemet?
Løsning: Se eksempel 14 og 19 i kompendiet.

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ -kx - d\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

Systemet er av 2. orden $\Longrightarrow$ trenger 2 initialverdier for å finne løsningen til systemet.

b) Sett $m = 2$, $d = 4$ og $k = 6$. Finn røttene til den karakteristiske ligningen for systemet. Hint: $\sqrt{-8} = 2i\sqrt{2}$.
Løsning:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-\frac{d}{m} + \sqrt{\left(\frac{d}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = -1 + i\sqrt{2} \\ r_2 &= \frac{-\frac{d}{m} + \sqrt{\left(\frac{d}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} = -1 - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

c) Løsningen på differensialligningen er på formen

$$x\left(t\right) = e^{at}\left(C cos\, bt + D sin\, bt\right), \tag{1}$$

hvor C og D er konstanter, og a og b er røttene til den karakteristiske ligningen. Ved tiden $t = 0\,s$ holdes klossen i ro ($\dot{x}\left(0\right) = 0$) 1 meter ut fra origo ($x\left(0\right) = 1$). Finn konstantene C og D i ligning 1.
Løsning: Løsning på formen $x\left(t\right) = e^{at}\left(C cos\, bt + D sin\, bt\right)$ (3.23) med $a = -1$ og $b = \sqrt{2}$ gir at

$$\begin{aligned} x\left(0\right) &= C \Longrightarrow C = 1 \\ D_t x\left(t\right) &\triangleq g\left(t\right) = D\sqrt{2}e^{-t} cos\, t\sqrt{2} - D\sqrt{2}e^{-t} sin\, t\sqrt{2} - \sqrt{2}e^{-t} sin\, t\sqrt{2} - e^{-t} cos\, t\sqrt{2} \\ g\left(0\right) &= D\sqrt{2} - 1 = 0 \Longrightarrow D = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

d) Vis at systemet kan skrives på formen

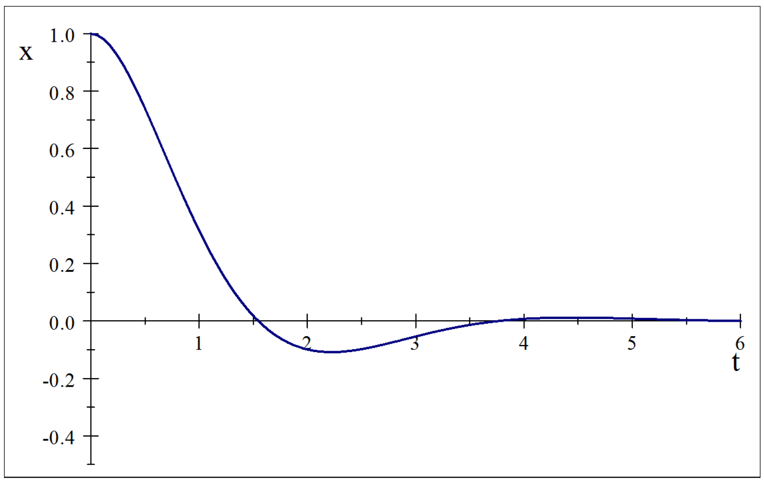
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ved å innføre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, og $\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$. Hva kalles ω_0 og ζ? Når sier vi at et andreordens system på denne formen er henholdsvis overdempet, underdempet og kritisk dempet? Hvilken kategori tilhører systemet i denne oppgaven? Hint: sett inn og finn tallverdi for ζ.

Skisser $x(t)$ i en graf med initialverdiene gitt i c).
Løsning:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\
\ddot{x} + 2\frac{d}{2\sqrt{km}}\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\
\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0
\end{aligned}$$

Overdempet: $\zeta > 1$, *underdempet:* $0 < \zeta < 1$, *kritisk dempet* $\zeta = 1$.
Her: $\zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}} = \frac{4}{2\sqrt{6\cdot 2}} = 0.57735 \implies$ *underdempet.*



e) Klossen vil svinge seg inn til sin stasjonærverdi. Med hvilken frekvens vil klossen svinge?
Løsning: Klossen svinger med dempet resonansfrekvens $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\sqrt{km}}\right)^2} = \sqrt{2}$. *Se eksempel 19 i kompendiet.*

f) Gjør om svaret i a) til et system av to førsteordens differensiallikninger. Hva blir tilstandene i systemet?
Løsning: Velger posisjon og hastighet som tilstander: $x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$. *Systemet blir da*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{d}{m}x_2
\end{aligned}$$