NTNU

Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Øving 5 - Løsningsforslag

Oppgave 1: Sampling

a) Hva er nyquistfrekvensen?
Løsning: Den høyeste frekvensen i et signal (f_{max} i kompendiet) kalles Nyquistfrekvensen.
NB:

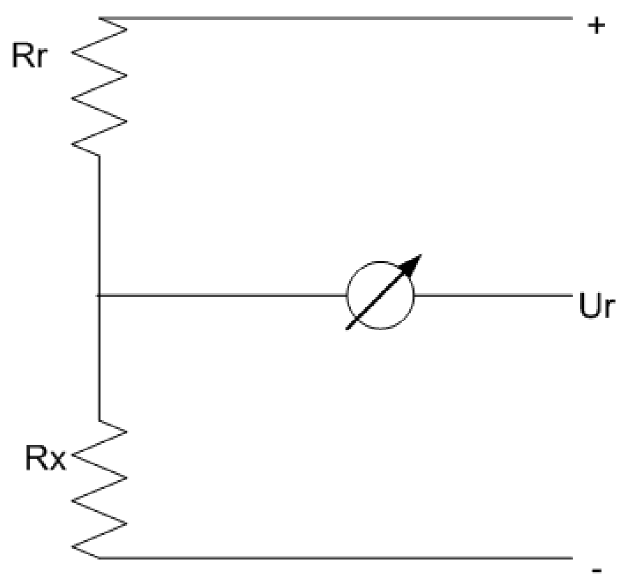
Det finnes ulike definisjoner av nyquistfrekvensen. En annen definisjoner at nyquistfrekvensen er frekvensen som man må sample et periodisk signal med for å kunne oppnå en perfekt rekonstruksjon av signalet.

b) Hva sier Samplingsteoremet?
Løsning: Samplingfrekvensen må være mer enn dobbelt så høy som den høyeste frekvenskomponenten vi ønsker å kunne registrere.

c) Hva skjer når et signal samples ved en for lav frekvens?
Løsning: Da oppstår nedfolding (Aliasing)

Oppgave 2: Resistans og kapasitans

a) Figur 1.1 viser et mye brukt måleprinsipp for å måle resistans av en ukjent motstand. Hva kalles mleoppsettet i denne figuren? Forklar virkemåten til denne måleren?



Figur 1.1: Oppsett for resistansmåling av ukjent motstand

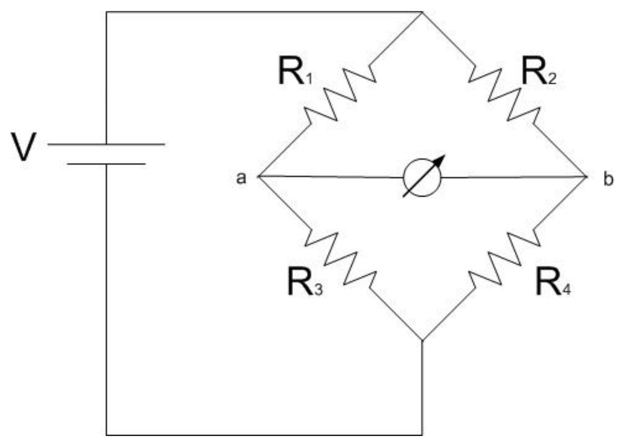
Løsning: Dette kalles en halvbro, og er basert på prinsippet om spenningsdeling. Ukjent motstand R_x seriekoblet med kjent motstand R_r. Spenningsdelingen gir uttrykk for resistansforholdet. Spenningen U sammenlignes med en referansespenning U_r. Vi antar at det ikke går strøm gjennom voltmeteret, slik at det går samme strøm i begge motstandene:

$$\begin{aligned}\frac{U-U_r}{R_r} &= \frac{U_r}{R_x}\\ R_x &= \frac{U_r}{U-U_r}R_r\end{aligned}$$

b) Hva er ulempen med denne måten å måle resistans på?
Løsning: Den ukjente motstanden er avhengig av forsyningsspenningen til broen, og varierer med varierende ledningsmotstand.

c) Skisser en utbedring til denne målemetoden, og forklar hvordan denne utbedringen virker.
Løsning: Bruk i stedet helbro.

d) Figur 1.2 viser en Wheatstone målebro med en DC spenningskilde, fire motstander og et voltmeter.



Figur 1.2: Wheatstone målebro

Vis at

$$V_{ab} = \Delta V = \frac{R_3R_2 - R_1R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}V$$

Voltmeteret på linjen a-b har uendelig impedans, det vil si at den kan betraktes som åpen.
Løsning:

$$\Delta V = V_a - V_b \tag{1}$$

hvor $V_a(V_b)$ er spenning mellom punkt a (b) og bunnen av broen. Videre har vi at V_a er forsyningsspenningen V delt mellom R_1 og R_3:

$$V_a = \frac{VR_3}{R_1+R_3} \tag{2}$$

Tilsvarende har vi at

$$V_b = \frac{VR_4}{R_2+R_4} \tag{3}$$

Ved å kombinere (1), (2) og (3) får vi at

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{VR_2}{R_1+R_2} - \frac{VR_4}{R_2+R_4} \\ &= V\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}\end{aligned}$$

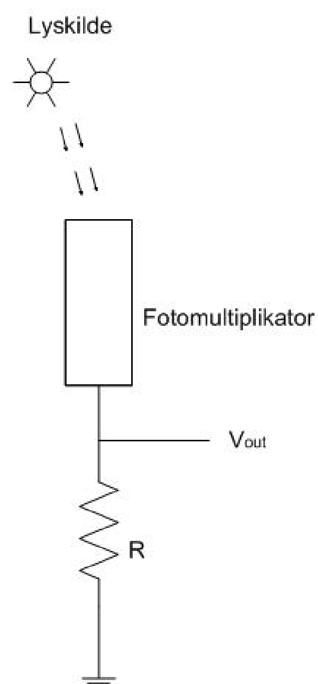
e) Kapasitans mellom to elektroder påvirkes både av avstanden mellom dem, og av mediet mellom. I hvilke typer målinger er det spesielt vanlig å benytte seg av dette prinsippet?

Løsning: Måling av mekanisk forskyvning og nivå i tanker.

f) Beskriv en vanlig metode for å måle kapasitans.
Løsning: Bortsett fra å bruke målebro, er en vanlig måte å la den inngå som frekvensbestemmende element i en oscillator.

Oppgave 3: Lys

a) Fotomultiplikator, et følsomt instrument for å måle lysintensitet, er omtalt i kompendiet.. I Figur 2.1 er måleren seriekoblet med en resistor R, slik at man kan måle spenningen V_{out} over resistoren, og dermed få et mål på lysintensiteten. Dette er oppsettet i et fotomultiplikatorrør.
Anta at det er plassert flere dynoder mellom katoden og anoden, slik at forsterkningen til måleren er gitt ved $k = 3 \cdot 10^6$. En svak lyskilde gir $50\, elektroner/s$ på katoden. Hvor stor må R være for at man måler $V_{ut} = 3\mu V$ fra denne lyspulsen? (Elektronets ladning er oppgitt å være $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\, C$)



Fotomultiplikatorrør

Løsning: $50\,elektroner/s$ *tilsvarer en strøm ved katoden lik*

$$\begin{aligned} i_k &= 50s^{-1} \cdot 1.60217733 \times 10^{-19} C \\ &= 8.0109 \times 10^{-18} \frac{C}{s} \\ &\approx 8.0 \times 10^{-18} A \end{aligned}$$

Med forsterkning som oppgitt får vi strøm ved anoden gitt av

$$\begin{aligned} i_a &= k i_k = 3 \times 10^6 \cdot 8.0 \times 10^{-18} A \\ &= 2.4 \times 10^{-11} A \end{aligned}$$

Fra Ohms lov kan vi da finne R:

$$\begin{aligned} R &= \frac{V_{ut}}{i_a} = \frac{3 \times 10^{-6} V}{2.4 \times 10^{-11} A} \\ &= 1.25 \times 10^5 \Omega \\ &= 125 k\Omega \end{aligned}$$

b) En CdS LDR (lysfølsom motstand av kadmiumsulfid) har en tidskonstant på $\tau = 73\,ms$ og en mørkemotstand på $150\,k\Omega$. En lyspuls med varighet $20\,ms$ treffer motstanden. Intensiteten er slik at den endelige motstanden ville vært $45\,k\Omega$ dersom motstanden hadde fått svingt seg inn til sin endelige verdi. Hva er $R\,(20\,ms)$? Plot motstandsverdien $R\,(t)$ for $0 < t < 100\,ms$.
Løsning: Motstandsverdien kan finnes ved generelt uttrykk for responsen fra en førsteordens sensor:

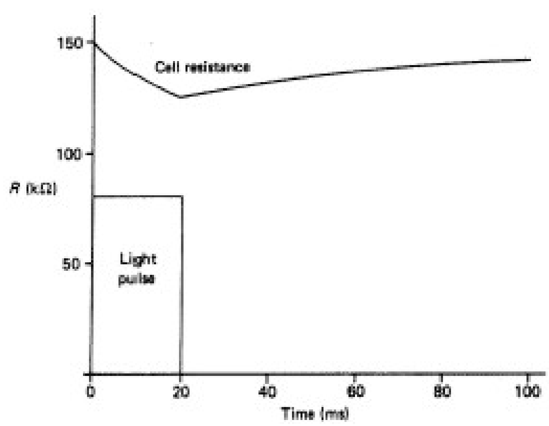
$$b(t) = b_i + (b_f - b_i)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

hvor b_i *er "initial sensor output", mens* b_f *er "final sensor output". Dette er løsningen på en andreordens differensialligning. I dette tilfellet får vi*

$$R(t) = R_i + (R_f - R_i)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

hvor R_i *er mørkemotstand, og* R_f *er resulterende resistans når motstanden utsettes for lyskilden. Innsatt for verdier får vi*

$$\begin{aligned} R(t) &= 150k\Omega + (45k\Omega - 150k\Omega)\left[1 - e^{-t/73ms}\right] \\ R(20\,ms) &= 150k\Omega + (45k\Omega - 150k\Omega)\left[1 - e^{-20ms/73ms}\right] \\ &= 124.8k\Omega \end{aligned}$$



Motstandsverdi som funksjon av tiden.

Oppgave 4: Vinkel og posisjon

a) Du har valgt å montere strekklapper for å måle endring i posisjon eller vinkel. Nominell resistans R, k-faktor og nominell lengde L er konstant og kjent. Finn et uttrykk for forlengelse av strekklappen som en funksjon av spenningsendringen dU, målestrøm gjennom strekklappen I og kjente størrelser.
Løsning: Vi tar utgangspunkt i

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= k\frac{dL}{L} \\ dL &= \frac{dR}{R}\frac{L}{k} \end{aligned}$$

Motstandsendringen kan regnes ut som funksjon av spenningsendringen:

$$dU = I \cdot dR \implies dR = \frac{dU}{I}$$

slik at

$$dL = \frac{L}{Rk}\frac{dU}{I}$$

hvor L, R og k er kjent.

b) Hva blir forlengelsen i lappen med numeriske verdier $R = 300\Omega$, $k = 3$ $L = 3mm$, med en målestrøm på $10\,mA$ og spenningsendring $dU = 50\mu V$? (NB: De numeriske verdiene er tilfeldig valgt)
Løsning:

$$dL = \frac{L}{Rk}\frac{dU}{I} = \frac{10\cdot 10^{-3}m}{300\Omega\cdot 3}\frac{50\cdot 10^{-6}V}{10\cdot 10^{-3}A} = 0.056\mu m.$$

Oppgave 5: Strømning

I en strømmende væske er sammenhengen mellom hastighet og trykk gitt gjennom energibevaring; summen av kinetisk og potensiell energi må være konstant. For et strømmende fluid kan dette skrives som

$$E_p + E_k = pV + \frac{1}{2}\rho V v^2$$

der

$$\begin{aligned} p &\;-\; Trykk\,[N/m^2] \\ V &\;-\; Volum\,[m^3] \\ \rho &\;-\; Tetthet\,[kg/m^3] \\ v &\;-\; Hastighet\,[m/s] \end{aligned}$$

Vis hvordan dette prinsippet kan benyttes til å måle strømning i rør ved hjelp av en differensial trykkmåler(trykkfallmåler).
Løsning: Vi setter opp Bernoullis likning og bruker at vi har konstant volum, slik at dette kan kortes bort

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Kontinuitetsligningen (massebevarelse) gir oss

$$A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

som igjen gir

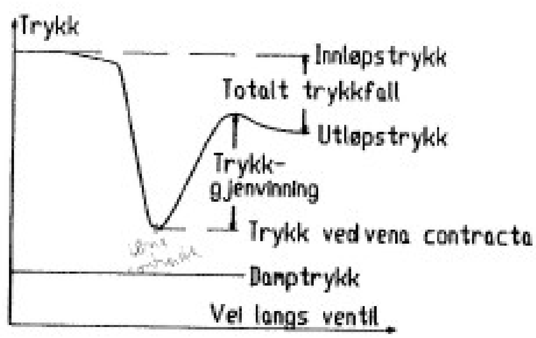
$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2.$$

Definer $m = A_2/A_1$. *Ved å sette dette inn i (4) får vi*

$$\begin{aligned}
p_1 + \frac{1}{2}\rho m^2 v_2^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
v_2^2 \left(\frac{1}{2}\rho m^2 - \frac{1}{2}\rho\right) &= (p_2 - p_1) \\
v_2^2 &= \frac{(p_2 - p_1)}{\frac{1}{2}\rho\,(m^2 - 1)} = \frac{2\,(p_2 - p_1)}{\rho\,(m^2 - 1)} \\
v_2 &= \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\rho\,(1 - m^2)}} \\
q &= A_2 v_2 = A_2 \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\rho\,(1 - m^2)}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6: Pådragsorganer og reguleringsventiler

Når væske som strømmer i et rør passerer en reguleringsventil eller et måleinstrument, vil restriksjonen som dette innfører føre til endringer i trykkforholdet i væsken. Skissèr trykkforholdet i væskebanen for en væske som strømmer gjennom en reguleringsventil. Indikèr i figuren hvor du ville ha plassert et måleinstrument for å måle varig trykkfall i væsken etter passering av ventilen.
Løsning:



Trykktap over ventil. Figur 17.2 i Olsen.

Varig trykkfall måles etter at trykket flater ut igjen, dvs etter vena contracta og "oversvinget".