# Løsningsforslag Øving 12

## TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

---

### Oppgave 9-89

**Løsning** Vi skal finne et uttrykk for trykket som funksjon av $x$ og $y$ i et gitt hastighetsfelt.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær. **2** Strømningen er inkompressibel. **3** Strømningen er todimensjonal i $x$-$y$-planet. **4** Gravitasjonen virker verken i $x$ eller $y$-retning.

***Analyse*** Strømningen må tilfredsstille kontinuitetsligningen og impuls (bevegelsesmengde) ligningene for stasjonær, todimensjonal og inkompressibel strømning. Vi ser først på kontinuitetsligningen:

$$\textit{Kontinuitet:} \qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0\ (2D)} = 0$$

Vi ser at kontinuitetsligningen er tilfredsstilt. Nå går vi videre til $x$-komponenten av Navier-Stokes-ligningen:

$$\textit{x-impuls:} \quad \rho\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{(stasjonær)}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{(ax+b)a} + \underbrace{v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}}_{(-ay+c)0} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{0\ (2D)}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\rho g_x}}_{0} + \mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{0\ (2D)}\right) \tag{1}$$

Ligningen reduseres til

$$\textit{x-impuls:} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \rho(-a^2x - ab) \tag{2}$$

$x$-komponenten av impulsligningen er tilfredsstilt for et trykkfelt som tilfredsstiller ligning (2). Ved hjelp av samme fremgangsmåte, reduserer vi ligningen for $y$-komponenten:

$$\textit{y-impuls:} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho(-a^2y + ac) \tag{3}$$

$y$-komponenten av impulsligningen er tilfredsstilt for et trykkfelt som tilfredsstiler ligning (3). Trykkfeltet $P(x,y)$ må være en glatt funksjon av $x$ og $y$. Hvis dette er tilfelle, skal det ikke ha noe å si om vi deriverer først med hensyn på $x$ og så $y$, eller omvendt. Vi sjekker dette ved å derivere henholdsvis ligning (3) og (2):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \tag{4}$$

Resultatet ble det samme, hvilket betyr at $P$ er en glatt funksjon av $x$ og $y$, og det er mulig for oss å finne et uttrykk for trykkfeltet. Vi kan velge fritt om vi vil ta utgangspunkt i ligning (2) eller (3) når vi skal integrere. Her velger vi ligning (2) og integrerer med hensyn på $x$.

*Integrering av x-impuls:*

$$P(x,y) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - abx\right) + g(y) \tag{5}$$

Merk at vi har lagt til en funksjon av $y$ (i stedet for en konstant). $P$ er en funksjon av både $x$ og $y$. Når vi utfører partiell derivasjon av $P$ med hensyn på $x$, blir eventuelle ledd som kun er en funksjon av $y$ lik null. Derfor må dette legges til igjen ved integrering. Nå partiellderiverer vi ligning (5) med hensyn på $y$ og setter resultatet lik det vi fikk i ligning (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = g'(y) = \rho(-a^2y + ac) \tag{6}$$

Herfra finner vi et uttrykk for $g(y)$ ved å integrere ligning (6):

$$g(y) = \rho\left(-\frac{a^2y^2}{2} + acy\right) + C \tag{7}$$

Her er $C$ en "vanlig" integrasjonskonstant, siden $g$ er en funksjon av kun $y$. Til slutt setter vi resultatet fra ligning (7) inn i ligning (5) og får det endelige uttrykket for $P(x,y)$:

*Løsning:*

$$P(x,y) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2y^2}{2} - abx + acy\right) + C \tag{8}$$

***Diskusjon*** Som en ekstra øvelse, og for å sjekke at svaret stemmer, kan du derivere ligning (8) med hensyn på henholdsvis $x$ og $y$, og sammenligne med ligning (2) og (3). Du kan også prøve å få en løsning ved å starte med ligning (3) i stedet for (2). Løsningen skal bli den samme. Trykkets absolutte størrelse er ikke viktig, så det gjør ikke noe at vi har en ukjent konstant i ligningen. Vi er som regel kun interessert i trykkgradienten eller overtrykket.

---

## Oppgave 9-90

**Løsning** For en gitt geometri og gitte randbetingelser, skal vi finne hastighetsfeltet og skissere et dimensjonsløst hastighetsprofil.

***Antagelser***

**1** Veggen har uendelig utstrekning i $y$-$z$-planet

**2** Strømningen er stasjonær, det vil si at alle tidsderiverte er lik null.

**3** Strømningen er parallell med veggen ($x$-komponenten av hastigheten, $u$, er lik null)

**4** Strømningen er inkompressibel og laminær. Fluiden er Newtonsk.

**5** Trykket $P$ er konstant og uniformt. Det er altså ingen trykkgradient som driver strømningen, og strømningen etableres som en balanse mellom tyngdekrefter og viskøse krefter.

**6** Hastighetsfeltet er todimensjonalt, hvilket betyr at $v = 0$ og at alle $y$-deriverte er lik null.

**7** Tyngdekraften virker i negativ $z$-retning Vi får dermed at $\vec{g} = -g\vec{k}$, eller $g_x = g_y = 0$ og $g_z = -g$.

***Analyse*** Vi finner hastighetsfeltet ved å følge en stegvis fremgangsmåte.

**Steg 1** Definer problemet og geometrien. Se oppgavetekst for problembeskrivelse.

**Steg 2** Definerer antagelser og randbetingelser. Randbetingelsene kommer fra heftbetingelsen langs veggen (a) ved $x = -h/2$, $u = v = w = 0$. (b) Ved $x = h/2$, $u = v = w = 0$.

**Steg 3** Skriver ut og forenkler differensialligningene. Vi starter med kontinuitetsligningen i kartesiske koordinater,

$$\textit{Kontinuitet:} \qquad \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{Antagelse 3}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{\text{Antagelse 6}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Ligning (1) forteller oss at $w$ ikke er en funksjon av $z$. Strømningen er altså fullt utviklet. Ettersom $w$ ikke er avhengig av tid (Antagelse 2), $z$ (Ligning (1)), eller $y$ (Antagelse 6), kan vi konkludere med at $w$ kun er en funksjon av $x$,

$$\textit{Fra kontinuitet:} \qquad w = w(x) \tag{2}$$

Vi forenkler så hver komponent av Navier-Stokes-ligningen så mye som mulig. Siden $u = v = 0$ og tyngdekraften ikke virker i $x$- eller $y$-retning, er alle ledd i $x$- og $y$-komponentene av ligningen lik null. $z$-komponenten av Navier-Stokes kan forenkles til

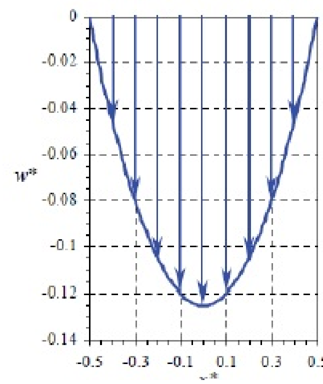
$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}_{\text{Antagelse 2}} + \underbrace{\cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}}}_{\text{Antagelse 3}} + \underbrace{\cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}}}_{\text{Antagelse 6}} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{Kontinuitet}}\right) = \underbrace{\cancel{-\frac{\partial P}{\partial z}}}_{\text{Antagelse 5}} + \underbrace{\rho g_z}_{-\rho g}$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}}_{\text{Antagelse 6}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}}_{\text{Kontinuitet}}\right) \quad \text{eller} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \tag{3}$$

Vi har endret fra partiell derivert ($\partial/\partial x$) til totalderivert ($d/dx$) i ligning (3) på grunn av resultatet i ligning (2). Den partielle differensialligningen er dermed redusert til en ordinær differensialligning.

**Steg 4** Løser differensialligningene. Ligning (3) integreres to ganger for å få

$$\textit{Integrasjon av z-komponenten av N-S:} \qquad w = \frac{\rho g}{2\mu}x^2 + C_1 x + C_2 \tag{4}$$

**Steg 5** Vi anvender randbetingelse (a) og (b) fra steg 2 for å finne konstantene $C_1$ og $C_2$,




Randbetingelse (a): $\quad 0 = \frac{\rho g}{8\mu}h^2 - C_1\frac{h}{2} + C_2$

og

Randbetingelse (b): $\quad 0 = \frac{\rho g}{8\mu}h^2 + C_1\frac{h}{2} + C_2$

Vi løser de to ligningene for å finne $C_1$ og $C_2$,

Integrasjonskonstanter: $\quad C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{-\rho g}{8\mu}h^2$

Ligning (4) blir dermed

$$\textit{Endelig resultat for hastighetsfelt:} \qquad w = \frac{\rho g}{2\mu}\left(x^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \tag{5}$$

Ettersom $-h/s < x < h/2$ alle steder, vil $w$ være negativ alle steder (strømmer nedover).

**Steg 6** Verifiser resultatene. Løsningen kan settes inn i differensialligningene for å bekrefte at de er tilfredsstilt.

Vi gjør ligning (5) dimensjonsløs ved å innføre $x^* = x/h$ og $w^* = w\mu/(\rho g h^2)$. Ligning (5) blir da

$$\textit{Dimensjonsløs hastighetsprofil:} \quad w^* = \frac{1}{2}\left((x^*)^2 - \frac{1}{4}\right) \tag{6}$$

Det dimensjonsløse hastighetsprofilet er skissert i figuren over. Hastighetsprofilet er parabolsk.

***Diskusjon*** Ligning (4) for $z$-komponenten av hastigheten er identisk med den i eksempel 9-17. Det eneste som skiller dette problemet fra eksempel 9-17 er randbetingelsene og plasseringen av origo.

---

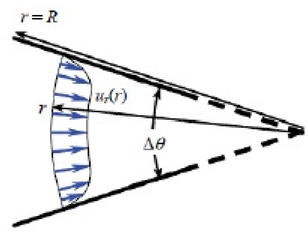
**Løsningsforslaget til MatLaboppgaven finner du i filen MatLabLF_12.m på It'sLearning**

### Oppgave 10-41

**Løsning** Vi skal finne et uttrykk for $u_r$ ut ifra en gitt volumstrøm. Vi antar ikke-viskøst fluid, og skal diskutere hvordan strømningen hadde vært i et virkelig (viskøst) fluid.

***Antagelser*** **1** Kun radiell strømning (ingen $u_\theta$-komponent). **2** Strømningen er stasjonær, todimensjonal og inkompressibel.

***Analyse*** For ikke-viskøst fluid kan vi ikke bruke heftbetingelsen ved veggene. Volumstrømmen må være lik for alle $r$:




$$\textit{Volumstrøm:} \qquad \dot{\mathcal{V}} = u_r r b \Delta\theta \tag{1}$$

hvor $\Delta\theta$ er vinkelen i innsnevringen (se figuren).

Vi finner et uttrykk for $u_r$:

$$u_r = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{rb\Delta\theta} \tag{2}$$

Ved radius $r = R$ får vi

$$\textit{Radiell hastighet ved } r = R\text{:} \qquad u_r(R) = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{Rb\Delta\theta} \tag{3}$$

Vi sammenligner ligning (3) og ligning (2) og eliminerer volumstrømmen:

$$\textit{Radiell hastighet for all } r\text{:} \qquad u_r = \frac{R}{r} u_r(R) \tag{4}$$

Vi ser at hastigheten vil stige kraftig etter hvert som vi nærmer oss innsnevringens utgangspunkt.

I en virkelig, viskøs strømning kunne vi ha ventet oss et hastighetsprofil hvor hastigheten i midten av innsnevringen er høyest, mens hastigheten går mot null ved veggene. På selve veggen ville hastigheten selvfølgelig vært null, som følge av heftbetingelsen. En skisse av et slikt hastighetsprofil finner du i figuren.

***Diskusjon*** I begge tilfeller vil den radielle hastigheten gå mot uendelig innerst i innsnevringen, altså når $r$ går mot null.

---

### Oppgave 10-42

**Løsning** Vi skal vise at et gitt strømningsområde er friksjonsfritt.

***Antagelser*** **1** Strømingen er stasjonær. **2** Strømningen er inkompressibel. **3** Strømningen er todimensjonal i $x$-$y$-planet.

$$\textit{Viskositetsleddet for x-komponenten:} \qquad \mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)=0$$

$$\textit{Viskositetsleddet for y-komponenten:} \qquad \mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)=0$$

Siden de viskøse leddene er lik null i begge komponentene av Navier-Stokes-ligningen kan dette området regnes som friksjonsløst.

***Diskusjon*** Uten de viskøse leddene reduseres Navier-Stokes-ligningen til Euler-ligningen.

---

## Oppgave 10-48

**Løsning** Vi ønsker å vise at virvlingskomponentene er lik null i en rotasjonsfri strømning.

***Analyse*** Den første komponenten av virvlingen blir

*r-komponent av virvlingsvektor:* $\quad \zeta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \theta} = 0$

som er gyldig så lenge $\phi$ er en glatt funksjon av $\theta$ og $z$. Tilsvarende for den andre komponenten av virvlingen

*$\theta$-komponent av virvlingsvektor:* $\quad \zeta_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} = 0$

som er gyldig så lenge $\phi$ er en glatt funksjon av $r$ og $z$. Den tredje komponenten av virvlingen blir

*z-komponent av virvlingsvektor:* $\quad \zeta_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} = 0$

som er gyldig så lenge $\phi$ er en glatt funksjon av $r$ og $z$. Dermed er alle tre komponentene av virvlingsvektoren lik null.

***Diskusjon*** Det skalare hastighetspotensialet er kun definert så lenge virvlingsvektoren er lik null. I tredimensjonal strømning må $\phi$ være en glatt funksjon av $r$, $\theta$, og $z$.