# Løsningsforslag Øving 8

## TEP4100 Fluidmekanikk, Vår 2013

---

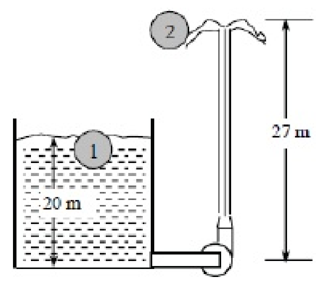
### Oppgave 5-77

**Løsning** En vannslange koblet til bunnen av en tank har en dyse som er rettet oppover. Trykket i slangen økes med en pumpe og høyden av vannsøylen blir målt. Vi ønsker å bestemme trykkøkningen pumpen må gi for at vannet skal kunne nå denne høyden.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Friksjon mellom vannet og luften, og friksjonen i røret kan neglisjeres. 3 Vannoverflaten er åpen mot atmosfæren.

***Egenskaper*** Tettheten til vann er $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$.

***Analyse*** Vi velger punkt 1 som den frie overflaten i vanntanken og punkt 2 som toppen av vannsøylen, der $V_2 = 0$ and $P_1 = P_2 = P_{atm}$. Referansehøyden er ved bunnen av tanken. Vi får da $z_1 = 20\,\text{m}$, $z_2 = 27\,\text{m}$, og setter $h_L = 0$ for å finne minste trykkøkning. Vi antar også at hastigheten ved den frie overflaten er svært lav ($V_1 \cong 0$). Energiligningen blir da




$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pumpe} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbin} + h_{tap}$$
$$\rightarrow \quad h_{pumpe} = z_2 - z_1$$

Setter inn tall og får

$$h_{pumpe} = 27\,\text{m} - 20\,\text{m} = 7\,\text{m}$$

En vannhøyde på 7 m tilsvarer en trykkøkning

$$\Delta P_{pumpe,min} = \rho g h_{pumpe} = (1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(7\,\text{m}) = 6.87 \cdot 10^4\,\text{N/m}^2 = \mathbf{68.7\,kPa}$$

Pumpen må derfor kunne gi en trykkøkning på minimum 68.7 kPa.

***Diskusjon*** Resultatet er en minste trykkøkning, og i praksis vil en større trykkøkning være nødvendig på grunn av tap til friksjon.

---

### Oppgave 5-80

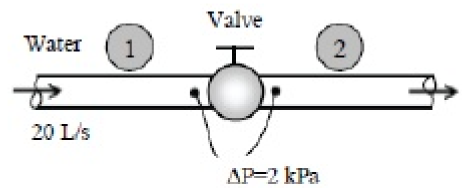
**Løsning** Vann strømmer gjennom et horisontalt rør med angitt volumstrøm. Trykktapet over en ventil er målt, og vi ønsker å finne det korresponderende høydetapet og nødvendig effekt for å overvinne dette tapet.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Røret er horisontalt. 3 Gjennomsnittshastigheten over innløp og utløp er like store, da diameteren er konstant.

***Egenskaper*** Tettheten til vann er $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$

***Analyse*** Vi velger ventilen som kontrollvolumet og punktene 1 og 2 som henholdsvis innløp og utløp. For $z_1 = z_2$ og $V_1 = V_2$, samt $\alpha_1 = \alpha_2$ fordi $u_1(r) = u_2(r)$, kan energiligningen forenkles som følger

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pumpe} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbin} + h_{tap}$$
$$\rightarrow \quad h_{tap} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$




Setter inn tallverdier

$$h_{tap} = \frac{2 \cdot 10^3\,\text{N/m}^2}{(1000\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)} = \mathbf{0.204\,m}$$

Pumpeeffekten som kreves for å overvinne dette trykktapet er

$$\dot{W}_{pumpe} = \dot{m} g h_{tap} = \rho \dot{\mathcal{V}} g h_{tap} = (1000\,\text{kg/m}^3)(0.020\,\text{m}^3\text{s})(9.81\,\text{m/s}^2)(0.204\,\text{m}) = \mathbf{40\,W}$$

Trykktapet over ventilen tilsvarer dermed en vannsøylehøyde på 0.204 m, og det vil minst kreve en pumpe som kan gi 40 W nyttig effekt for å overvinne trykktapet.

***Diskusjon*** Nødvendig pumpeeffekt kan også finnes fra

$$\dot{W}_{pumpe} = \dot{\mathcal{V}} \Delta P = (0.020\,\text{m}^3/\text{s})(2000\,\text{Pa}) = \mathbf{40\,W}$$

---

## Oppgave 5-86

**Løsning** Vann under trykk i en tank leveres via en slange til et tak. Vi skal finne volumstrømmen ut av slangen på taket, altså hvor mye vann som leveres per tidsenhet.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Korreksjonsfaktoren for kinetisk energi settes til $\alpha_2 = 1$ (vi ser nærmere på dette i diskusjonsdelen).

***Egenskaper*** Tettheten til vann er $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$.

***Analyse*** Vi velger punkt 1 på den frie overflaten i tanken og punkt 2 ved utløpet til slangen. Vi benytter oss av at hastigheten til den frie overflaten er veldig lav ($V_1 \cong 0$), og at trykket i utløpet av slangen må være likt det atmosfæriske trykket ($P_2 = P_{atm}$). Energiligningen kan da forenkles

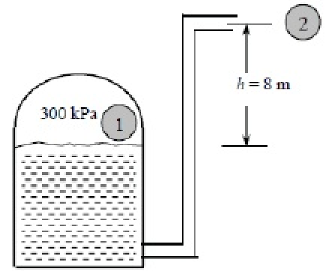
$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pumpe} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbin} + h_{tap} \quad \rightarrow \quad \frac{P_1 - P_{atm}}{\rho g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 - z_1 + h_{tap}$$

Vi løser for $V_2$ og setter inn tallverdier for å finne utløpshastigheten

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{\frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{2P_{1,overtrykk}}{\rho} - 2g(z_2 - z_1 + h_{tap})\right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1}\left[\frac{2 \cdot (3 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa})}{1000\,\mathrm{kg/m^3}} - 2(9.81\,\mathrm{m/s^2})(8\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m})\right]} \\ &= 20.095\,\mathrm{m/s} \cong 20.1\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Den initiale volumstrømmen blir da

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= A_{utløp} V_2 = \frac{\pi D^2}{4} V_2 = \frac{\pi (0.025\,\mathrm{m})^2}{4}(20.095\,\mathrm{m/s}) \\ &= 0.009864\,\mathrm{m^3/s} \cong \mathbf{9.86\,L/s} \end{aligned}$$




***Diskusjon*** Dette er volumstrømmen vi får helt i starten, når vannivået i tanken er på sitt høyeste. Utløpshastigheten vil naturlig nok reduseres etter hvert som trykket og vannivået i tanken minker. Hvis vi antar at strømningen i slangen er fullstendig utviklet og turbulent i utløpet, kan vi anslå $\alpha \approx 1.05$. Dette resulterer i at $V_2 \approx 19.6\,\mathrm{m/s}$, og $\dot{\mathcal{V}} \cong 9.63\,\mathrm{L/s}$, noe som tilsvarer rundt 2.4 % lavere volumstrøm.

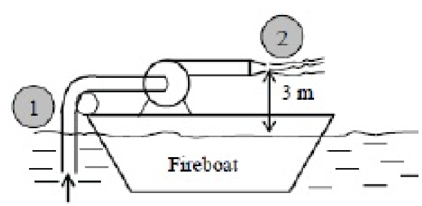
---

## Oppgave 5-91

**Løsning** En brannbåt slukker branner ved å suge opp sjøvann og spyle det ut av en dyse. Tapet i systemet, volumstrømmen og dysens høyde over sjøen er gitt. Vi skal finne nødvendig pumpeeffekt og utløpshastighet fra dysen.

***Antagelser*** **1** Strømningen er stasjonær og inkompressibel. **2** Korreksjonsfaktoren for kinetisk energi settes til $\alpha_2 = 1$.

***Egenskaper*** Sjøvannets tetthet er oppgitt til $\rho = 1030\,\mathrm{kg/m^3}$.




***Analyse*** Vi velger punkt 1 på den frie sjøoverflaten og punkt 2 i utløpet av dysen. Vi ser for oss en strømlinje som går fra den frie overflaten, ned til rørets innløp, og videre gjennom systemet. Trykket i begge punktene er lik atmosfæretrykket, $P_1 = P_2 = P_{atm}$, og $V_1 \cong 0$. Vi kan da løse energiligningen for pumpehøyden

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pumpe} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbin} + h_{tap} \quad \rightarrow \quad h_{pumpe} = z_2 - z_1 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{tap}$$

Utløpshastigheten finner vi ved hjelp av den oppgitte volumstrømmen

$$V_2 = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{A_2} = \frac{\dot{\mathcal{V}}}{\pi D_2^2/4} = \frac{0.1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi(0.05\,\mathrm{m})^2/4} = 50.9296\,\mathrm{m/s} \cong \mathbf{50.9\,m/s}$$

Ved innsetting finner vi pumpehøyden

$$h_{pumpe} = 3\,\mathrm{m} + 1 \cdot \frac{(50.9296\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.81\,\mathrm{m/s}^2)} + 3\,\mathrm{m} = 138.203\,\mathrm{m} \cong 138\,\mathrm{m}$$

Korresponderende effekt finner vi ved å multiplisere pumpehøyden med massestrømmen og gravitasjonskonstanten

$$\begin{aligned}\dot{W}_{pumpe} &= \rho\dot{\mathcal{V}}gh_{pumpe} = (1030\,\mathrm{kg/m}^3)(0.1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s})(138.203\,\mathrm{m}) \\ &= 1.39644 \cdot 10^5\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

Vi må ta høyde for pumpens virkningsgrad for å finne pumpens reelle akseleffekt

$$\dot{W}_{pumpe,aksling} = \frac{\dot{W}_{pumpe}}{\eta_{pumpe}} = \frac{1.39655 \cdot 10^5\,\mathrm{W}}{0.70} = 1.9949 \cdot 10^5\,\mathrm{W} \cong \mathbf{199\,kW}$$

***Diskusjon*** 30% av effekten som tilføres pumpen går tapt (70% virkningsgrad). Den resterende effekten benyttes først og fremst til å øke vannets bevegelsesenergi og bare en liten del går med til å løfte sjøvannet og dermed øke dets potensielle energi.

---

**Forberedelse til labøving 2 - løsning**

a) I overgangen I $\rightarrow$ II er

$$\Delta p = \rho_s gh = 800\mathrm{kg/m}^3 \cdot 9.81\mathrm{m/s}^2 \cdot 0.0325\mathrm{m} = 255\mathrm{Pa}$$

Bernoullis ligning

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2,$$

samt kontinuitetsligningen

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = \dot{\mathcal{V}}_2,$$

$$\frac{\pi}{4}D_1^2 V_1 = \frac{\pi}{4}D_2^2 V_2,$$

gir

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho V_1^2\left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right),$$

altså

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(1 - D_1^4/D_2^4)}} = 22.73\text{m/s},$$

$$V_2 = V_1 D_1^2/D_2^2 = 10.1\text{m/s}$$

b) Reynolds tall

$$\text{Re} = V_2 D_2/\nu = 40400$$

I rør II finnes ein trykkgradient på -7.85 Pa/m:

$$\frac{\text{dP}}{\text{dx}} = \frac{0.02\text{m} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 800\text{kg/m}^3}{20\text{m}} = -7.85\text{Pa/m},$$

c) Hastighet

$$V_3 = V_2 D_2^2/D_3^2 = 40.41\text{m/s}$$

Reynolds tall

$$\text{Re} = V_3 D_3/\nu = 80817.8$$

I rør III finnes ein trykkgradient på -333.54 Pa/m:

$$\frac{\text{dP}}{\text{dx}} = \frac{0.0425\text{m} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 800\text{kg/m}^3}{1\text{m}} = -333.5\text{Pa/m},$$

d) Trykkgradientene er negative i begge rørene, $dp/dx < 0$. I det trange røret er motstanden størst på grunn av den høye hastigheten, og dermed er $|dp/dx|$ størst her. Dersom ein bruker Bernoulli fra II til III og antar at summen av det statiske og dynamiske trykket er konstant må det statiske trykket avta når hastigheten øker. I tillegg vil vi såklart også ha eit bidrag til trykktapet fra friksjon i innsnevringen. Dersom rør II var 1m, altså like langt som rør III ville utlslaget på manometeret kun blitt på ca 1mm. På den skalaen vi har her ville det blitt vanskelig å lese av nøyaktig, derfor oppnår vi ei meir nøyaktig måling av trykkgradienten dersom vi bruker eit lengre rør. I labben vil du sjå at vi skråstiller manometeret for å oppnå ekstra nøyaktighet.