

# **Отчет по лабораторной работе №3**

**Дисциплина: Математическое моделирование**

Выполнил: Гаглыев Олег Мелорович

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>19</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>20</b>

## Список иллюстраций

4.1	Жесткая модель войны . . . . .	11
4.2	Фазовные траектории системы . . . . .	13
4.3	Код 1 . . . . .	14
4.4	Код 2 . . . . .	15
4.5	Модель боевых действий №1 . . . . .	16
4.6	Модель боевых действия №2 . . . . .	16
4.7	Модель №1 . . . . .	17
4.8	График №1 . . . . .	17
4.9	Модель №2 . . . . .	18
4.10	График №2 . . . . .	18

## Список таблиц

# 1 Цель работы

Создать модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica.  
Построить соответствующие графики двух случаев.

## 2 Задание

- Смоделировать два случая ведения боевых действий:
  1. Модель боевых действий между регулярными войсками;
  2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов;
- Построить графики изменения численности войск армии X и армии У для соответствующий случаев.

### 3 Теоретическое введение

К нашему вниманию представлены некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим два случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками;
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

**Первый случай:** численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

**Второй случай :** в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.



## 4 Выполнение лабораторной работы

Вариант 38

Условие задачи является следующим:

Между страной  $X$  и страной  $Y$  идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями  $x(t)$  и  $y(t)$ . В начальный момент времени страна  $X$  имеет армию численностью 882 000 человек, а в распоряжении страны  $Y$  армия численностью в 747 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты  $a, b, c, h$  постоянны. Также считаем, что  $P(t)$  и  $Q(t)$  - непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск в армии  $X$  и армии  $Y$  для следующих случаев:

- Модель боевых действий между регулярными войсками (формула [4.1]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.4x(t) - 0.67y(t) + \sin(3t) + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -0.77x(t) - 0.14y(t) + \cos(2t) + 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

- Модель ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (формула [4.2]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.24x(t) - 0.67y(t) + |\sin(2t)| \\ \frac{dy}{dt} = -0.47x(t)y(t) - 0.14y(t) + |\cos(2t)| \end{cases} \quad (4.2)$$

1. Первый случай.

Нам известно, что модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом (формула [4.3]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены  $-a(t)x(t)$  и  $-h(t)y(t)$ , члены  $-b(t)y(t)$  и  $-c(t)x(t)$  отражают потери на поле боя. Коэффициенты  $b(t)$  и  $c(t)$  указывают на эффективность боевых действий со стороны и соответственно,  $a(t)$ ,  $h(t)$  - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции  $P(t)$ ,  $Q(t)$  учитывают возможность подхода подкрепления к войскам и в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты  $b(t)$  и  $c(t)$  являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии  $x$  убивает за единицу времени  $c$  солдат армии  $y$  (и, соответственно, каждый солдат армии  $y$  убивает  $b$  солдат армии  $x$ ). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой  $(x, y)$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки,  $x$  и  $y$  - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (формула [4.4]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases} \quad (4.4)$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение ([4.5]):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{by}{cx} \\ cxdx &= bydy \\ cx^2 - by^2 &= C \end{aligned} \quad (4.5)$$

Эволюция численностей армий  $x$  и  $y$  происходит вдоль гиперболы, заданной

этим уравнением (рис. [4.1]). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

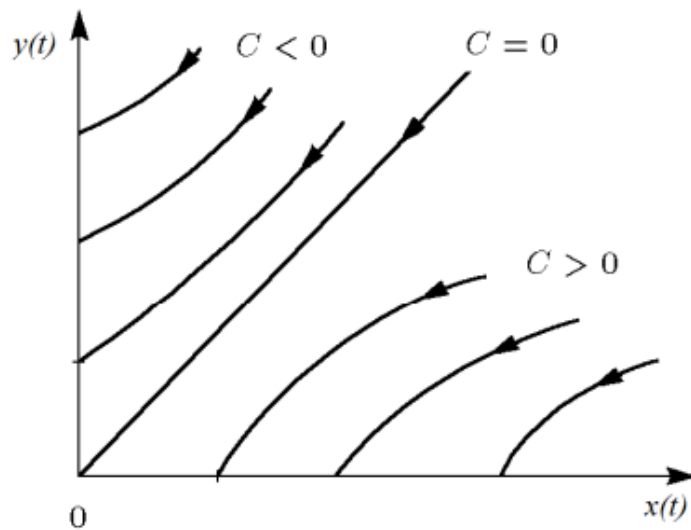


Рис. 4.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой  $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$ . Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось  $y$ . Это значит, что в ходе войны численность армии  $x$  уменьшается до нуля (за конечное время). Армия  $y$  выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия  $x$ . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

4. По условию задачи в первом случае мы имеем следующие начальные значения: Подставим значения из варианта
5. Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается,

что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (формула [4.6]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в системе [4.3].

С теми же упрощениями, что и в первом случае, модель [4.6] принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Эта система приводится к уравнению:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) \right) = 0 \quad (4.8)$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1 \quad (4.9)$$

Из рис. [4.2] видно, что при  $C_1 > 0$  побеждает регулярная армия, при  $C_1 < 0$  побеждают партизаны. Аналогично противостоянию регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При  $C_1 > 0$  получаем соотношение  $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$ . Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент  $c$  и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ( $x(0)$ ), должно расти не линейно, а пропорционально второй степени  $x(0)$ . Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении,

так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

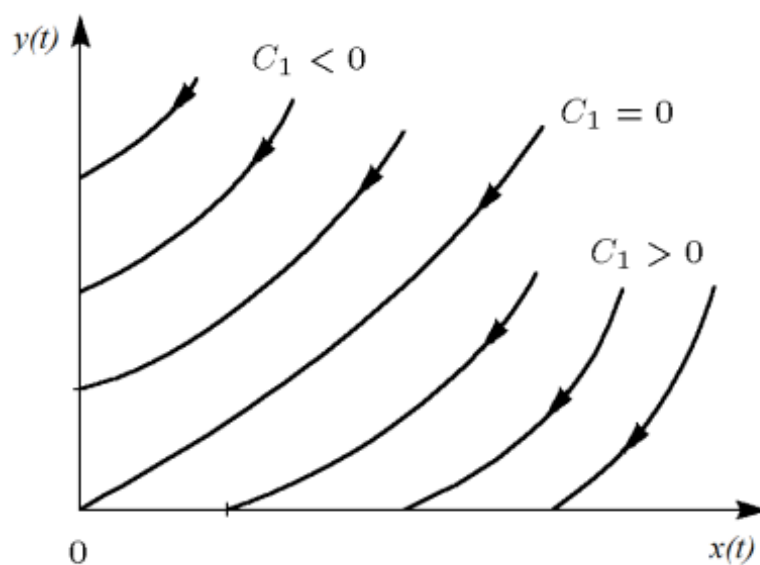


Рис. 4.2: Фазовые траектории системы

6. Подставим значения из варианта
7. Напишем код на Julia :

```

1  using DifferentialEquations
2  using Plots
3  x=882000
4  y=747000
5  a1=0.4
6  b1=0.67
7  c1=0.77
8  h1=0.14
9  T=(0.0,1)
10 u_0=[x,y]
11 """
12 function P1(t)
13     return sin(3t)+1
14 end
15 function Q1(t)
16     return cos(2t)+2
17 end
18
19
20 function F1!(du,u,p,t)
21     du[1]=-a1*u[1]-b1*u[2]+P1(t)
22     du[2]=-c1*u[1]-h1*u[2]+Q1(t)
23 end
24 prob1=ODEProblem(F1!,u_0,T)
25 sol_1=solve(prob1,saveat=0.01)
26
27 plt_1 = plot(
28     sol_1,
29     vars = (0, 1),
30     color =:red,
31     label = "Численность армии страны X",
32     title = "Модель боевых действий №1",
33     xlabel = "Время",
34     ylabel = "Численность"
35 )

```

Рис. 4.3: Код 1

```

37 plot!(
38     sol_1,
39     vars = (0, 2),
40     color =:blue,
41     label = "Численность армии страны Y"
42 )
43
44 savefig(plt_1, "model_1_julia.png")
45 """
46 a2=0.24
47 b2=0.67
48 c2=0.47
49 h2=0.14
50
51 function P2(t)
52     return abs(sin(2t))
53 end
54 function Q2(t)
55     return abs(cos(2t))
56 end
57 function F2!(du,u,p,t)
58     du[1]=-a2*u[1]-b2*u[2]+P2(t)
59     du[2]=-c2*u[1]*u[2]-h2*u[2]+Q2(t)
60 end
61 prob2=ODEProblem(F2!,u_0,T)
62 sol_2=solve(prob2,saveat=0.01)
63 plt_2 = plot(
64     sol_2,
65     vars = (0, 1),
66     color =:red,
67     label = "Численность армии страны X",
68     title = "Модель боевых действий №2",
69     xlabel = "Время",
70     ylabel = "Численность"
71 )
72
73 plot!(
74     sol_2,
75     vars = (0, 2),
76     color =:blue,
77     label = "Численность армии страны Y"
78 )

```

Рис. 4.4: Код 2

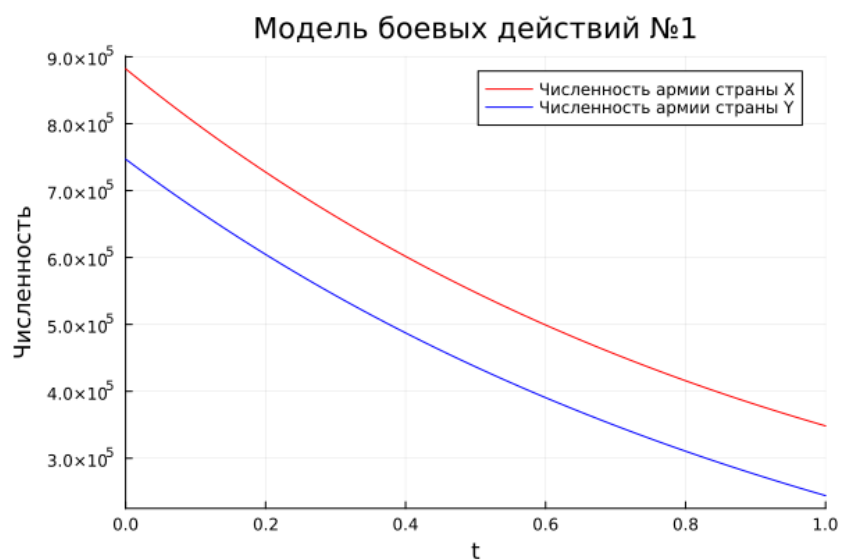


Рис. 4.5: Модель боевых действий №1

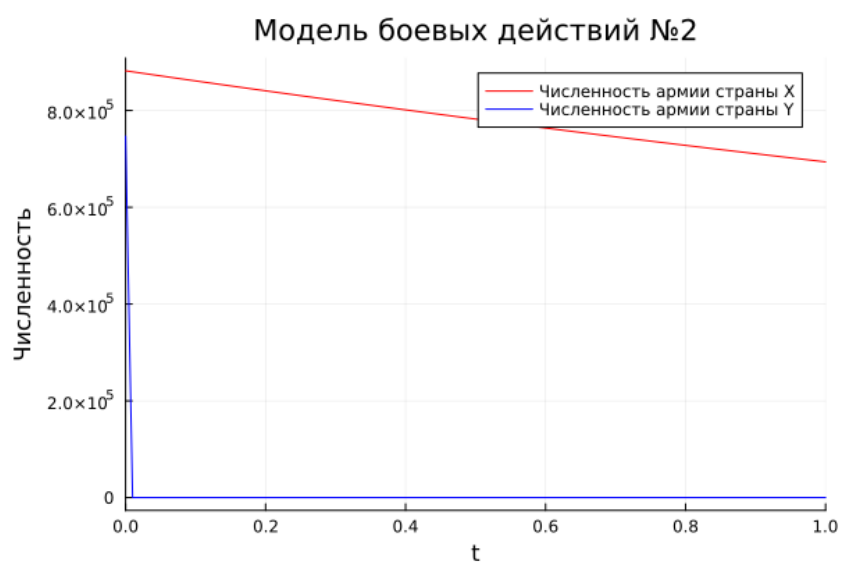


Рис. 4.6: Модель боевых действия №2

В обоих случаях побеждает страна X.

1. Напишем код на OpenModelica.

Для первой модели:



```

1  model Lab3_1
2      constant Integer x_0=882000;
3      constant Integer y_0=747000;
4      constant Real a=0.4;
5      constant Real b=0.67;
6      constant Real c=0.77;
7      constant Real h=0.14;
8      Real x(start=x_0);
9      Real y(start=y_0);
10     Real t=time;
11 equation
12     der(x)=-a*x-b*y+sin(3*t)+1;
13     der(y)=-c*x-h*y+cos(2*t)+2;
14     annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0));
15 end Lab3_1;

```

Рис. 4.7: Модель №1

График имеет следующий вид :

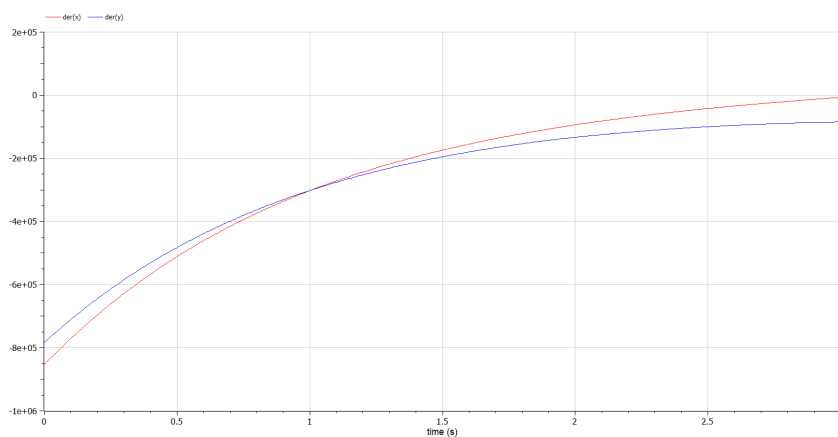


Рис. 4.8: График №1

Для второй модели:

```

1  model Lab3_2
2      constant Integer x_0=882000;
3      constant Integer y_0=747000;
4      constant Real a=0.24;
5      constant Real b=0.67;
6      constant Real c=0.47;
7      constant Real h=0.14;
8      Real x(start=x_0);
9      Real y(start=y_0);
10     Real t=time;
11     equation
12         der(x)=-a*x-b*y+abs(sin(2*t));
13         der(y)=-c*x*y-h*y+abs(cos(2*t));
14         annotation(experiment(StartTime = 0,StopTime = 1.0));
15     end Lab3_2;

```

Рис. 4.9: Модель №2

График имеет следующий вид :

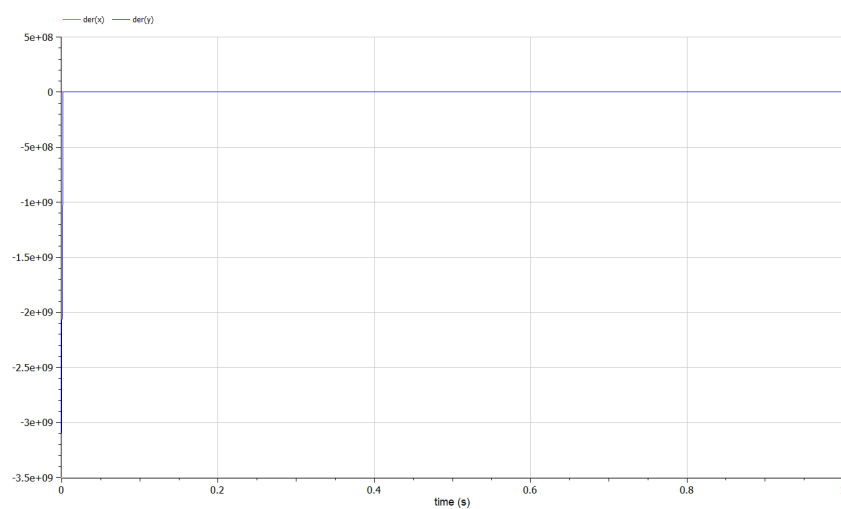


Рис. 4.10: График №2

Хоть на 2 графике и кажется, что всё слилось . В действительности, численность армии Y стала нулём, в то время как численность страны X отлична от нуля

## 5 Выводы

Я создал модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica.  
Построил соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

## **Список литературы**