Отчет по лабораторной работе №4 “Модель гармонических колебаний”

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил: Гаглоев Олег Мелорович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Создать модель гармонический колебаний по средствам языков Julia и OpenModelica.

2 Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для нескольких случаев на заданном интервале

3 Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид (формула [3.1]):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1}$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$)

Уравнение [3.1] есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения [3.1] получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени (формула [3.2]).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.2}$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка [3.2] необходимо задать два начальных условия вида:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Уравнение второго порядка [3.2] можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{3.4}$$

Начальные условия [3.3] для системы [-eq:04] примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

4 Выполнение лабораторной работы

1. К выполнению нам предлагается выполнить соответстующий номеру студенчесткого билета вариант: 1032201347 % 70 + 1 = 38

2. Задача предложенного варианта состоит в следующем:

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

- Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 21x = 0$
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2.2\dot{x} + 2.3x = 0$
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 2.5x = 0.2\sin(2.6t)$

На интервале $t \in [0; 72]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1.2, y_0 = -1.2$.

1. В общем виде можем записать наше однородное ОДУ второго порядка следующим образом:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx(t) = F(t) \tag{4.1}$$

где $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ - производная по времени:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx = F(t) \tag{4.2}$$

Можно сделать систему ОДУ:

$$\begin{gathered} y = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dy}{dt} + ay(t) + bx(t) = 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Тогда система для решения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -ay - bx \end{cases} \tag{4.4}$$

4. **Первый случай** - колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 21x = 0$.

Отсюда видим, что $a = 0$ и $F(t) = 0$.

Если $F(t) = 0$ и $b \neq 0$, значит есть трение и система затухнет.

Если $F(t) = 0$ и $b = 0$, то трения нет.

Если $F(t) \neq 0$, то система никогда не затухнет, но энергия будет уходить на силу трения за счет внешней силы.

Общий вид первого случая: $\ddot{x} + bx = 0$, где $b = \omega_0^2 = 21$.

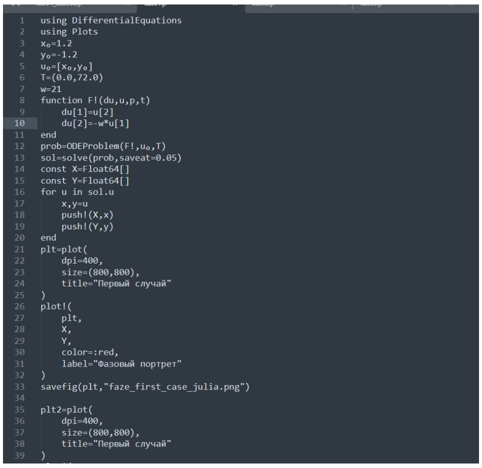
Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -21x \end{cases} \tag{4.5}$$

Код для первого случая на Julia (рис. 4.1)

График для первого случая - Julia (рис. 4.2):

Фазовый портрет Julia (рис. 4.3):



```
using DifferentialEquations
using Plots
xₒ=1.2
yₒ=-1.2
uₒ=[xₒ,yₒ]
T=(0.0,72.0)
w=21
function F!(du,u,p,t)
    du[1]=u[2]
    du[2]=-w*u[1]
end
prob=ODEProblem(F!,uₒ,T)
sol=solve(prob,saveat=0.05)
const X=Float64[]
const Y=Float64[]
for u in sol.u
    x,y=u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end
plt=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
    title="Первый случай"
)
plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:red,
    label="Фазовый портрет"
)
savefig(plt,"faze_first_case_julia.png")

plt2=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
    title="Первый случай"
)
```

Рис. 4.1: Код 1 Джулия

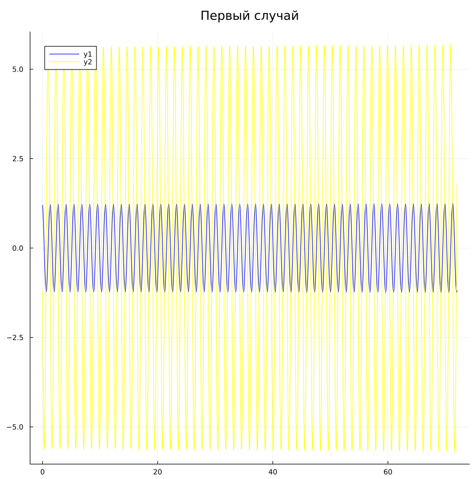


Рис. 4.2: График для первого случая

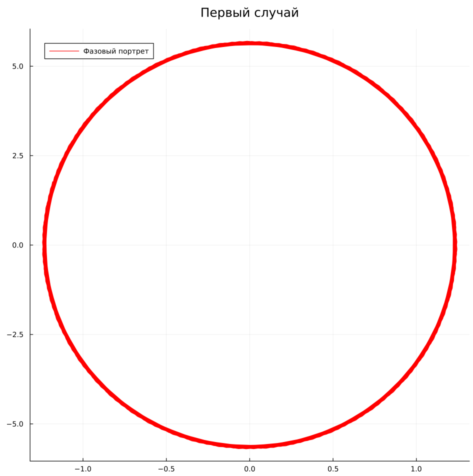
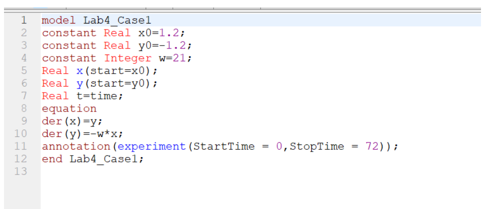


Рис. 4.3: Фазовый портрет для 1 случая



```
model Lab4_Case1
constant Real x0=1.2;
constant Real y0=-1.2;
constant Integer w=21;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
Real t=time;
equation
der(x)=y;
der(y)=-w*x;
annotation(experiment(StartTime = 0,StopTime = 72));
end Lab4_Case1;
```

Рис. 4.4: Код 1 Моделика

Код для первого случая на OpenModelica (рис. 4.4):

График для первого случая - OpenModelica (рис. 4.5):

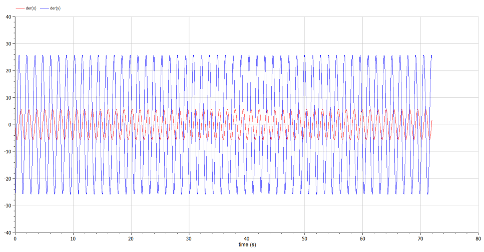


Рис. 4.5: График 1 Моделика

Фазовый портрет OpenModelica (рис. 4.6)

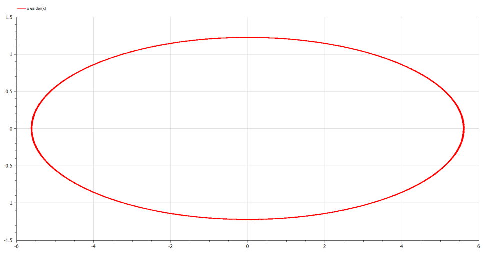


Рис. 4.6: Фазовый портрет для 1 случая

5. **Второй случай** - колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{2}.2x + 2.3x = 0$

Отсюда видим, что $F(t) = 0$.

Общий вид второго случая: $\ddot{x} + ay + bx = 0$, где $a = 2\gamma = 1$ и $b = \omega_0^2 = 10$.

Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2.2y - 2.3x \end{cases} \tag{4.6}$$

Код для второго случая на Julia(рис. 4.7) :

График для второго случая Julia(рис. 4.8) :

Фазовый портрет второго случая Julia(рис. 4.9):

```
using DifferentialEquations
using Plots
x₀=1.2
y₀=-1.2
u₀=[x₀,y₀]
T=(0.0,72.0)
g=2.2
w=2.3
function F!(du,u,p,t)
    du[1]=u[2]
    du[2]=-g*u[2]-w*u[1]
end
prob=ODEProblem(F!,u₀,T)
sol=solve(prob,saveat=0.05)
const X=Float64[]
const Y=Float64[]
for u in sol.u
    x,y=u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end
plt=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
    title="Второй случай"
)
plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:red,
    label="Фазовый портрет"
)
savefig(plt,"faze_second_case_julia.png")

plt2=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
    title="Второй случай"
)
plot!(
    plt2,
```

Рис. 4.7: Код2 Джулия

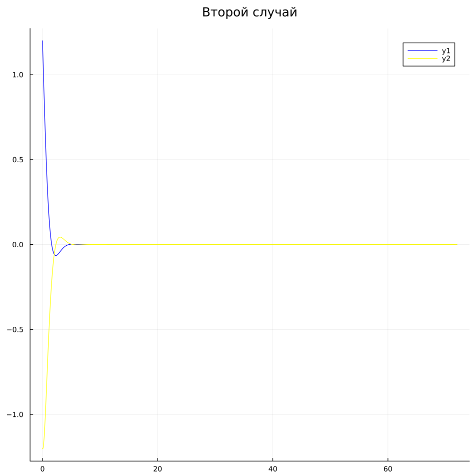


Рис. 4.8: График для 2 случая

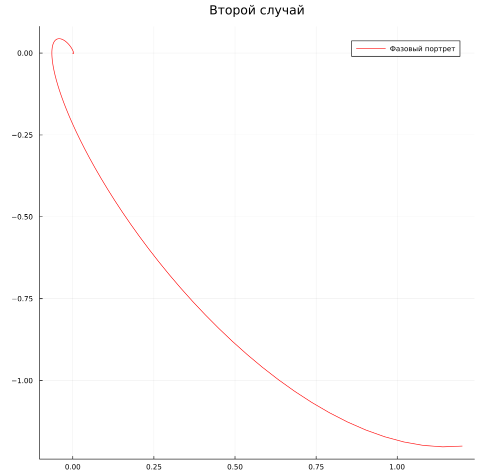
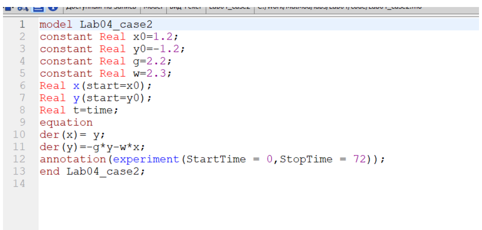


Рис. 4.9: Фазовый портрет для 2 случая



```
model Lab04_case2
constant Real x0=1.2;
constant Real y0=-1.2;
constant Real g=2.2;
constant Real w=2.3;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
Real t=time;
equation
der(x)= y;
der(y)=-g*y-w*x;
annotation(experiment(StartTime = 0,StopTime = 72));
end Lab04_case2;
```

Рис. 4.10: Код2 Моделика

Код для второго случая OpenModelica(рис. 4.10):

График для второго случая OpenModelica(рис. 4.11):

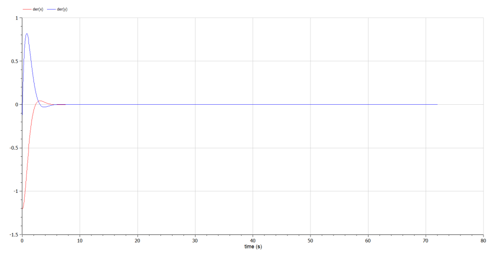


Рис. 4.11: График для 2 случая

Фазовый портрет второго случая OpenModelica (рис. 4.12):

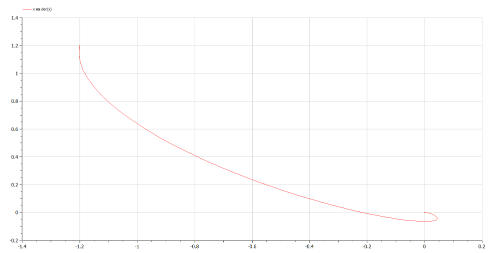


Рис. 4.12: Фазовый портрет

1. **Третий случай** - колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2\cos(t)$

Отсюда видим, что $F(t) = 0.2\sin(2.6t)$.

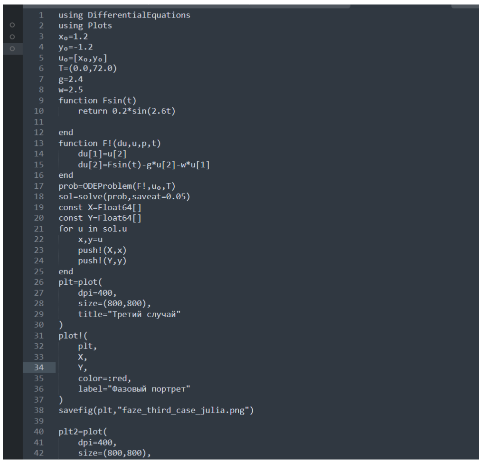
Общий вид третьего случая: $\ddot{x} + ay + bx = F(t)$, где $a = 2\gamma = 2.4$, $b = \omega_0^2 = 2.5$ и $F(t) = 0.2\sin(2.6t)$..

Тогда система ОДУ первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0.2\sin(2.6t) - 2.4y - 2.5x \end{cases} \tag{4.7}$$

Код для третьего случая Julia (рис. 4.13):

График для третьего случая Julia (рис. 4.14):



```julia
using DifferentialEquations
using Plots
x₀=1.2
y₀=-1.2
u₀=[x₀,y₀]
T=(0.0,72.0)
g=2.4
w=2.5
function Fsin(t)
    return 0.2*sin(2.6t)

end
function F!(du,u,p,t)
    du[1]=u[2]
    du[2]=Fsin(t)-g*u[2]-w*u[1]
end
prob=ODEProblem(F!,u₀,T)
sol=solve(prob,saveat=0.05)
const X=Float64[]
const Y=Float64[]
for u in sol.u
    x,y=u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end
plt=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
    title="Третий случай"
)
plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:red,
    label="Фазовый портрет"
)
savefig(plt,"faze_third_case_julia.png")

plt2=plot(
    dpi=400,
    size=(800,800),
```

Рис. 4.13: Код3 Джулия

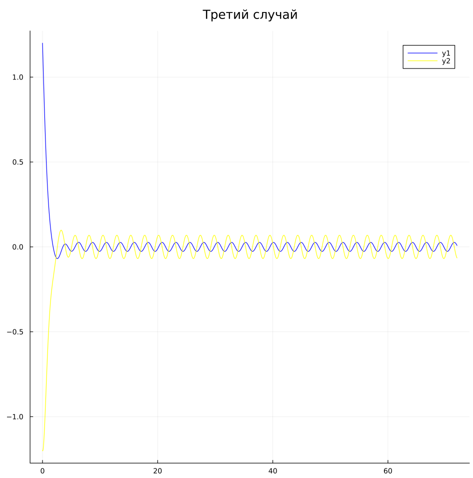


Рис. 4.14: График для 3 случая

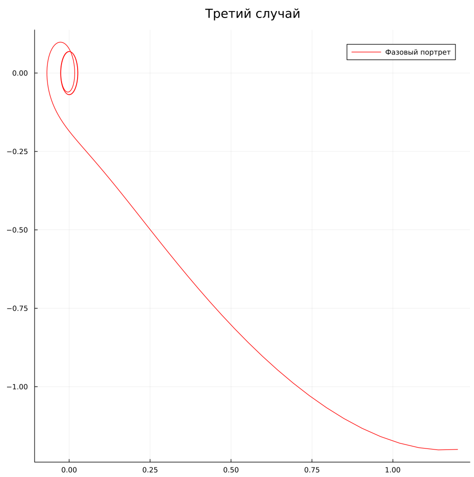
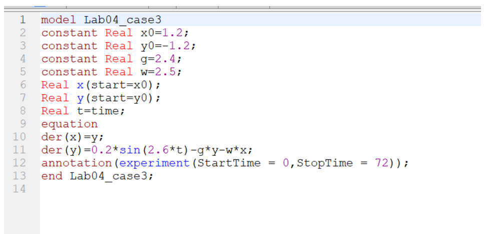


Рис. 4.15: Фазовый портрет для 3 случая

Фазовый портрет третьего случая Julia (рис. 4.15):

Код для 3 случая OpenMOdelica (рис. 4.16):



```
model Lab04_case3
constant Real x0=1.2;
constant Real y0=-1.2;
constant Real g=2.4;
constant Real w=2.5;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
Real t=time;
equation
der(x)=y;
der(y)=0.2*sin(2.6*t)-g*y-w*x;
annotation(experiment(StartTime = 0,StopTime = 72));
end Lab04_case3;
```

Рис. 4.16: Код 3 моделика

График для третьего случая OpenModelica (рис. 4.17):

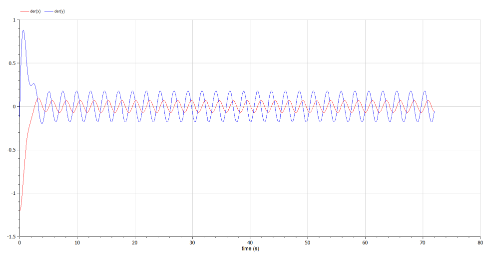


Рис. 4.17: График для 3 случая

Фазовый портрет третьего случая OpenModelica (рис. 4.18):

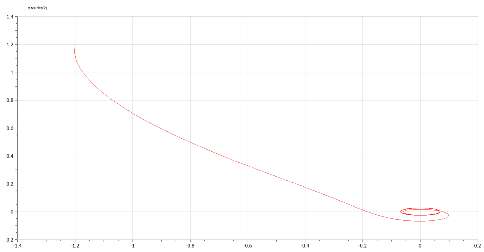


Рис. 4.18: Фазовый портрет третьего случая

5 Выводы

Я создал модель гармонический колебаний по средствам языков Julia и OpenModelica.

Список литературы