Отчет по лабораторной работе №3

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил: Гаглоев Олег Мелорович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Создать модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica. Построить соответствующие графики двух случаев.

2 Задание

- Смоделировать два случая ведения боевых действий:
  1. Модель боевых действий между регулярными войсками;
  2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов;
- Построить графики изменения численности войск армии X и армии У для соответствующий случаев.

3 Теоретическое введение

К нашему вниманию представлены некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим два случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками;
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

Первый случай: численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Второй случай : в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

4 Выполнение лабораторной работы

Вариант 38

Условие задачи является следующим:

Между страной и страной идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 882 000 человек, а в распоряжении страны армия численностью в 747 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем, что $P(t)$ и $Q(t)$ - непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск врмии X и армии Y для следующих случаев:

- Модель боевых действий между регулярными войсками (формула [4.1]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.4x(t) - 0.67y(t) + \sin(3t) + 1 \\ \frac{dy}{dt} = -0.77x(t) - 0.14y(t) + \cos(2t) + 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

- Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (формула [4.2]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.24x(t) - 0.67y(t) + |\sin(2t)| \\ \frac{dy}{dt} = -0.47x(t)y(t) - 0.14y(t) + |\cos(2t)| \end{cases} \tag{4.2}$$

1. Первый случай.

Нам известно, что модель боевых дейтсвий между регулярными войсками описывается следующим образом (формула [4.3]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны и соответственно, $a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам и в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (формула [4.4]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases} \tag{4.4}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение ([4.5]):

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx} \\ cxdx = bydy \\ cx^2 - by^2 = C \end{gathered} \tag{4.5}$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. [4.1]). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

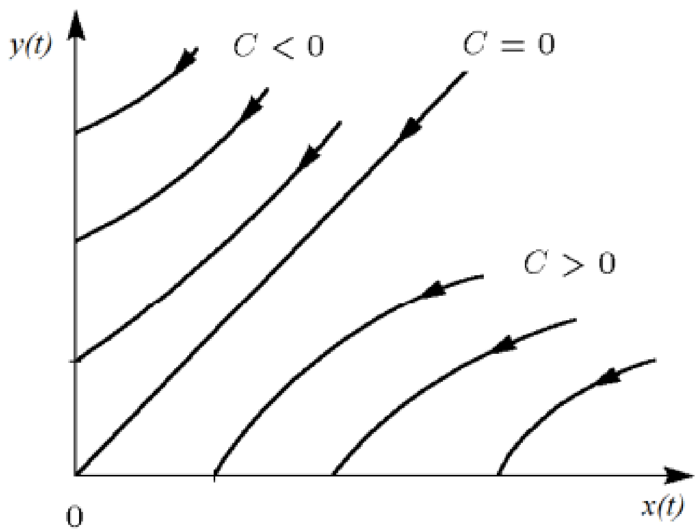

Рис. 4.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

4. По условию задачи в первом случае мы имеем следующие начальные значения: Подставим значения из варианта

5. Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается,

что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (формула [4.6]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + R(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

В этой системе все величины имею тот же смысл, что и в системе [4.3].

С теми же упрощениями, что и в первом случае, модель [4.6] принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

Эта система приводится к уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0 \tag{4.8}$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1 \tag{4.9}$$

Из рис. [4.2] видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент с и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$) , должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется прим меньшем росте начальной численности войск.

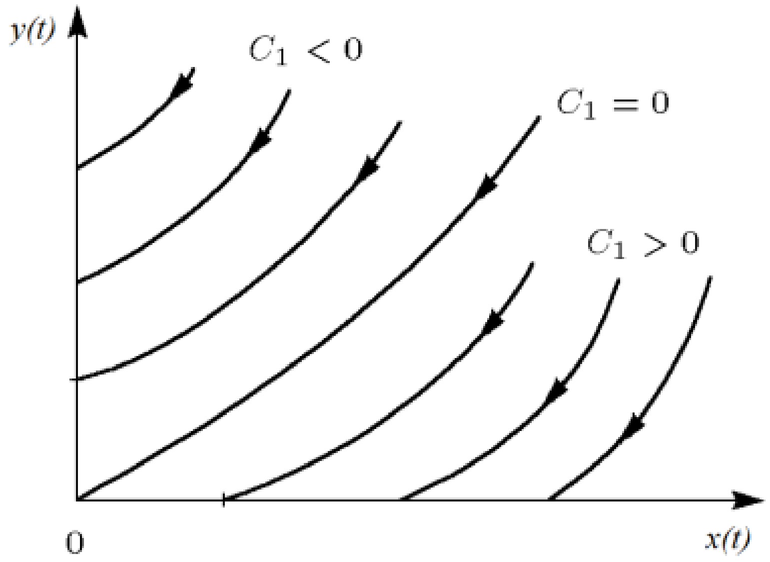

Рис. 4.2: Фазовные траектории системы

6. Подставим значения из варианта

7. Напишем код на Julia :

```julia
using DifferentialEquations
using Plots
x=882000
y=747000
a1=0.4
b1=0.67
c1=0.77
h1=0.14
T=(0.0,1)
u_0=[x,y]
"""
function P1(t)
    return sin(3t)+1
end
function Q1(t)
    return cos(2t)+2
end


function F1!(du,u,p,t)
    du[1]=-a1*u[1]-b1*u[2]+P1(t)
    du[2]=-c1*u[1]-h1*u[2]+Q1(t)
end
prob1=ODEProblem(F1!,u_0,T)
sol_1=solve(prob1,saveat=0.01)

plt_1 = plot(
    sol_1,
    vars = (0, 1),
    color =:red,
    label = "Численность армии страны X",
    title = "Модель боевых действий №1",
    xlabel = "Время",
    ylabel = "Численность"
)
```

Рис. 4.3: Код 1

```julia
plot!(
    sol_1,
    vars = (0, 2),
    color =:blue,
    label = "Численность армии страны Y"
)

savefig(plt_1, "model_1_julia.png")
"""
a2=0.24
b2=0.67
c2=0.47
h2=0.14

function P2(t)
    return abs(sin(2t))
end
function Q2(t)
    return abs(cos(2t))
end
function F2!(du,u,p,t)
    du[1]=-a2*u[1]-b2*u[2]+P2(t)
    du[2]=-c2*u[1]*u[2]-h2*u[2]+Q2(t)
end
prob2=ODEProblem(F2!,u_0,T)
sol_2=solve(prob2,saveat=0.01)
plt_2 = plot(
    sol_2,
    vars = (0, 1),
    color =:red,
    label = "Численность армии страны X",
    title = "Модель боевых действий №2",
    xlabel = "Время",
    ylabel = "Численность"
)

plot!(
    sol_2,
    vars = (0, 2),
    color =:blue,
    label = "Численность армии страны Y"
)
```

Рис. 4.4: Код 2

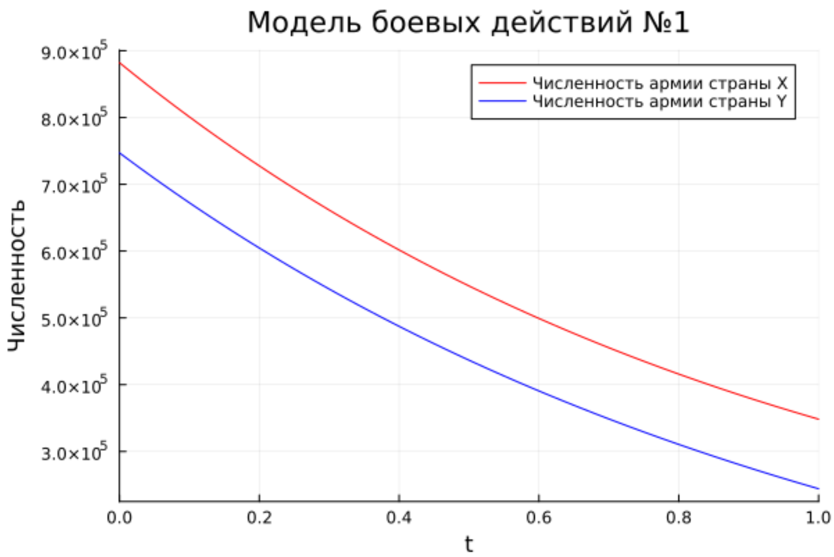

Рис. 4.5: Модель боевых действий №1

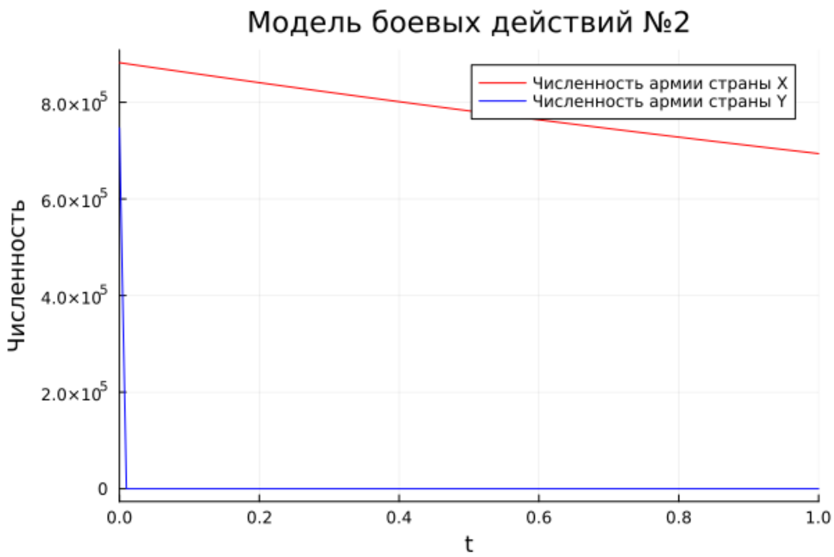

Рис. 4.6: Модель боевых действия №2

В обоих случаях побеждает страна X.

1. Напишем код на OpenModelica.

Для первой модели:

```
model Lab3_1
  constant Integer x_0=882000;
  constant Integer y_0=747000;
  constant Real a=0.4;
  constant Real b=0.67;
  constant Real c=0.77;
  constant Real h=0.14;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t=time;
equation
  der(x)=-a*x-b*y+sin(3*t)+1;
  der(y)=-c*x-h*y+cos(2*t)+2 ;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0));
end Lab3_1;
```

Рис. 4.7: Модель №1

График имеет следующий вид :

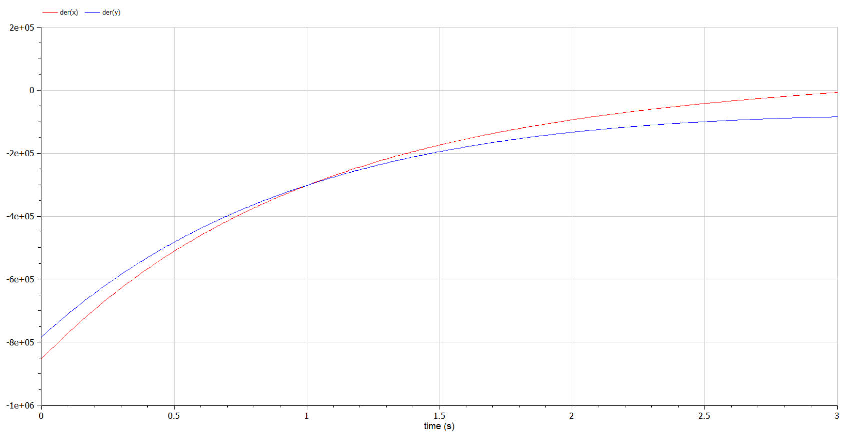

Рис. 4.8: График №1

Для второй модели:

```
model Lab3_2
  constant Integer x_0=882000;
  constant Integer y_0=747000;
  constant Real a=0.24;
  constant Real b=0.67;
  constant Real c=0.47;
  constant Real h=0.14;
  Real x(start=x_0);
  Real y(start=y_0);
  Real t=time;
equation
  der(x)=-a*x-b*y+abs(sin(2*t));
  der(y)=-c*x*y-h*y+abs(cos(2*t)) ;
  annotation(experiment(StartTime = 0,StopTime = 1.0));
end Lab3_2;
```

Рис. 4.9: Модель №2

График имеет следующий вид :

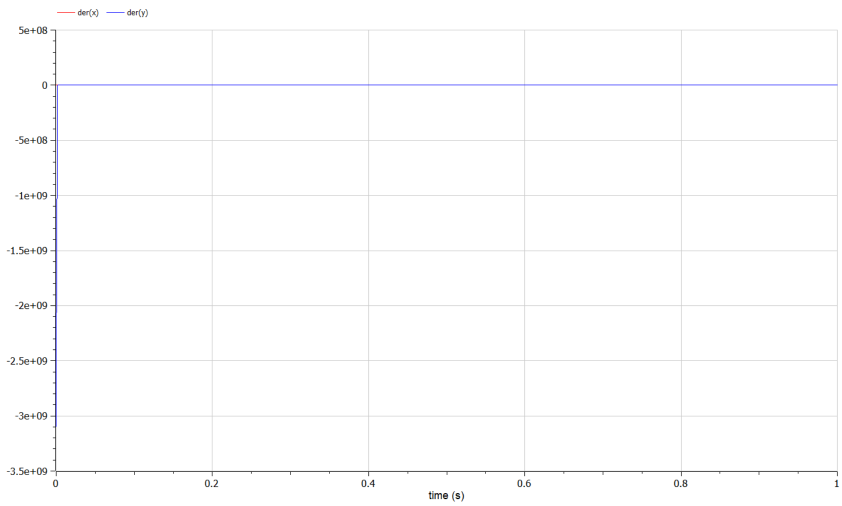

Рис. 4.10: График №2

Хоть на 2 графике и кажется, что всё слилось . В действительности, численность армии Y стала нулём, в то время как численность страны X отлична от нуля

5 Выводы

Я создал модель боевых действий по средствам языков Julia и OpenModelica. Построил соответствующие графики двух случаев ведения боевых действий.

Список литературы