局部环的分类意象

王进一

清华大学求真书院

2025 年春

Outline

Monique Hakim

- Monique Jafe-Hakim (1937–2013), 法国数学家, 师从 Grothendieck.
- 1967 年于巴黎大学完成博士论文 *Topos annelés et schémas relatifs* (环化意象与相对概形).
- 该文中一项突出的工作是讨论了万有局部环 (l'anneau local universel), 后人称之为局部环的分类意象 (topos classifiant).

意象

- 意象是以其上的层为基本要素的空间.

$$\underset{\text{点, 开集}}{\text{拓扑空间}} \xrightarrow{\text{忘却 “点”}} \underset{\text{开集}}{\text{位象 (locale)}} \xrightarrow{\text{推广}} \underset{\text{层}}{\text{意象 (topos)}}$$

$$X \qquad\qquad \mathrm{Open}(X) \qquad\qquad \mathrm{Sh}(X)$$

- 两种定义:
  - Grothendieck 意象, 即景 (site) 上的层范畴;
  - 使用范畴论结构和性质 (有限极限, 任意余极限, 拉回保持余极限, etc.) 来定义.
  - Giraud 定理 (1971) 指出两种定义等价.

意象

意象是谈论许多概念的共同场所.
一张粗略的地图 (还有许多路径没有画出):

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{概形} \arrow[dr, "(-)_{\text{ét}}, (-)_{\text{fppf}}, \cdots"] & & \text{代数叠} \arrow[dr] & \\
\text{拓扑空间} \arrow[rr, "\mathrm{Open}"] & & \text{景} \arrow[r, "\mathrm{Sh}"] & \text{意象} \arrow[r, "\mathrm{Sh}_\infty"] & \infty\text{-意象} \\
 & \text{群} \arrow[r, "\mathbf{B}"'] & \text{范畴} \arrow[ur, "\mathrm{Psh}"'] & \infty\text{-范畴} \arrow[ur, "\mathrm{Psh}"'] &
\end{tikzcd}
$$

意象

概念的历史 (有一些结点没有画出):

$$
\begin{tikzcd}
\substack{\text{直觉主义逻辑}\\ \text{Brouwer}\\ \text{1920s}} \arrow[r] & \substack{\text{范畴逻辑}\\ \text{Lawvere, Tierney}\\ \text{1970s}} \arrow[dr] & & \\
\substack{\text{层}\\ \text{Leray, Cartan, Serre}\\ \text{1940s}} \arrow[r] & \substack{\text{Grothendieck 意象}\\ \text{Grothendieck, Verdier}\\ \text{1960s}} \arrow[r] & \text{意象} \arrow[r] & \infty\text{-意象} \\
& & \infty\text{-范畴} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

意象

- 两种观点:
  - (gros topos) 意象 $\mathcal{E}$ 作为范畴, 其中一个对象是一个 (非标准的, 或带有某种结构的) "集合", 这是因为意象具有集合范畴 Set 的许多范畴论结构;
  - (petit topos) 意象 $\mathcal{E}$ 视为一个空间, 其对象是这个空间上的层, 即连续变化的一族集合, 这是因为意象态射的拉回保持许多范畴论结构 (尤其是对于开子意象, 拉回保持所有逻辑结构).
- 例: $\mathrm{Sh}(X)$ 中的环亦可视为沿 X 连续变化的一族环.

意象的态射

定义 (意象之间的态射)

意象 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的一个态射 $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是一对伴随函子

$$\mathcal{E} \underset{f_*}{\overset{f^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{F},$$

满足 f^* 保持有限极限.

- 例: 拓扑空间的连续映射给出对应的意象之间的态射.
- 由伴随函子定理, 只需提供保持有限极限和任意余极限的函子 f^*.

局部环

定义 (局部环)

局部环是满足如下条件的环 R: 对任意 $x \in R$, x 可逆或 $1 - x$ 可逆.

- 上述概念可定义在任何具有合适结构的范畴中.
- 含义: 如下两个态射构成覆盖, 即两个态射的像之并等于整个对象.

$$\begin{tikzcd}
\{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1\} \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"] & \\
& R \\
\{(x,y) \in R^2 \mid (1-x)y = 1\} \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

局部环

定义 (局部环)

局部环是满足如下条件的环 R: 对任意 $x \in R$, x 可逆或 $1 - x$ 可逆.

- 相比 “极大理想” 定义的优势: 仅使用一阶逻辑.
- 需要的结构:
  - 有限极限 (终对象, 拉回);
  - 态射的像, 且在拉回之下稳定;
  - 子对象的并, 且在拉回之下稳定.
- 特别地, 可以在任何意象中定义局部环.

局部环

例 (层范畴中的局部环)

概形 X 的结构层 $\mathcal{O}_X$ 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的局部环.

- 意义: 允许对 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的 $\mathcal{O}_X$-模等对象进行构造与论证, 就像对 Set 中局部环上的模一样. (唯一的限制是使用构造主义逻辑, 没有排中律和选择公理.)
- 例: 张量积的构造, Kähler 微分 $\Omega^1_{X/S}$ 的构造, 常见交换代数引理的层论版本的论证, etc.
- 参考 Ingo Blechschmidt, *Using the internal language of toposes in algebraic geometry* (2017)

分类意象

- 分类意象 (topos classifiant) 这个词最早出现于 SGA IV (1963-64).
- 例: 群 G 的分类意象 $\mathbf{B}G$ 满足

$$\{\text{意象 } \mathcal{E} \text{ 上的 } \underbrace{G\text{-主丛}}_{\text{torsor}}\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathbf{B}G).$$

- 环的分类意象 $\mathcal{F}$ 满足

$$\{\text{意象 } \mathcal{E} \text{ 上的环}\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

- 分类意象又叫 “模空间”, 其恒等映射对应着万有结构.

环的分类意象

考虑有限表现环的范畴 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}$, 其对象形如 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)$.

命题

环的分类意象是 $\mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}, \mathsf{Set})$.

- 证明.

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{E} \text{ 上的环}\} &\simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{fin.\ lim.}}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}) && \text{(将在后面解释)} \\
&\simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{fin.\ lim.}}_{\mathrm{colim.}}(\mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}, \mathsf{Set}), \mathcal{E}) && \text{(自由余完备化)} \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathcal{F}). && \text{(意象态射的定义)}
\end{aligned}$$

环

关于 $\{\mathcal{E}\text{ 上的环}\} \simeq \mathsf{Fun}^{\text{fin. lim.}}(\mathsf{Ring}_{\text{fp}}^{\text{op}}, \mathcal{E})$ 的解释:

- 记有限表现环 A 在对偶范畴中的化身为 $\operatorname{Spec} A$.
- 关键: $\mathbb{A}^1 := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ 是 $\mathsf{Ring}_{\text{fp}}^{\text{op}}$ 中的环对象, 且是所有范畴环对象中之万有者.
- 对于 $\mathcal{E}$ 的环对象 R, 对应的函子 $F\colon \mathsf{Ring}_{\text{fp}}^{\text{op}} \to \mathcal{E}$ 将 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ 对应到 $\{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ ($\mathcal{E}$ 中的有限极限).
- 反之, 函子 F 对应的环就是 $R = F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x])$. 环的所有运算来自有限表现环之间的同态, 如

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \arrow[r, mapsto] & R \\
\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[y, z] \arrow[r, mapsto] \arrow[u, "x \mapsto yz"] & R^2. \arrow[u, "\times"']
\end{tikzcd}$$

环

关于函子 $F\colon \mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ 保持有限极限的解释:

- 一般而言, 保持有限极限的函子将环对象变为环对象.
- $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 是 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 的终对象, $F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) = 1$.
- $F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]) = R$.
- $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[y,z] \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[y] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[z]$, $F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[y,z]) \simeq R^2$.
- $F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x,y,z]/(x^3+y^3-z^3)) \simeq \{(x,y,z) \in R \mid x^3+y^3=z^3\}$.
- 某种直观: $F(\operatorname{Spec} S) =$ "$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(S,R)$" (尽管 S, R 不在同一个范畴中)

Zariski 覆盖

定义 (Zariski 覆盖)

范畴 $\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上的 Zariski 覆盖结构如下: 对象 $\operatorname{Spec} A$ 的覆盖为

$$\{\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}] \to \operatorname{Spec} A\}_{i \in I} \ (I \text{ 有限}),$$

满足 $\{f_i\}_{i \in I}$ 生成 A 的单位理想.

- 例. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ 的一个 Zariski 覆盖为 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x][x^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ 与 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x][(1-x)^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.
- 例. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 的一个 Zariski 覆盖为 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[2^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 与 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[3^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

局部环

- 对于范畴 $\mathcal{E}$ 中的环 R, 设其对应保持有限极限的函子 $F\colon \mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$, 则有

$$F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x][x^{-1}]) \simeq \{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1\} \simeq \{x \in R \mid x \text{ 可逆}\}.$$

$$F(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[2^{-1}]) \simeq \{y \in R \mid 2y = 1\} \simeq \{\star \mid 2 \in R \text{ 可逆}\}.$$

命题 (局部环的刻画)

R 为局部环当且仅当 F 将 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 中的 Zariski 覆盖映射为 $\mathcal{E}$ 中的覆盖.

局部环

- 证明. 由局部环的定义, R 为局部环当且仅当 F 将 Zariski 覆盖

$$\begin{array}{l} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x][x^{-1}] \longrightarrow \\ \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x][(1-x)^{-1}] \longrightarrow \end{array} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]$$

映射为 $\mathcal{E}$ 中的覆盖.

- 设 R 为局部环, $\{\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}] \to \operatorname{Spec} A\}$ 为 Zariski 覆盖. 由 F 的构造,

$$F(A[f_i^{-1}]) \simeq \{x \in F(A) \mid f_i(x) \text{ 可逆}\}.$$

由局部环的定义, 当 f_i 生成单位理想时, 至少有一个 f_i 可逆. 这说明了 $\{F(A[f_i^{-1}]) \to F(A)\}$ 为 $\mathcal{E}$ 中的覆盖.

万有局部环

定理 (局部环的分类意象)

局部环的分类意象是 $\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar})$.

- 证明.

$$\begin{aligned}\{\mathcal{E}\ \text{上的局部环}\} &\simeq \mathsf{Fun}^{\text{fin.lim.,cts.}}((\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}), \mathcal{E}) \\ &\simeq \mathsf{Fun}^{\text{fin.lim.,colim.}}(\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}), \mathcal{E}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar})).\end{aligned}$$

环与局部环

- 局部环的分类意象是环的分类意象的子意象 (局部化).

$$\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathrm{PSh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}})$$

- 仿佛说局部环的模空间是环的模空间中由一个条件划出的子空间.

严格局部环

- $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上更细的覆盖结构会给出更小的子意象, 对应比局部环更强的条件.

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \text{ét}) \arrow[r, hook, shift right, "j_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}) \arrow[l, shift right, "j^*"'] \arrow[r, hook, shift right, "i_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{PSh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}) \arrow[l, shift right, "i^*"']\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \text{ét})$ 分类了严格局部环 (又叫严格 Hensel 环), 范畴 $\mathcal{E}$ 中的严格局部环对应的函子 $F\colon \mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ 将平展覆盖映射为 $\mathcal{E}$ 中的覆盖.

环化意象的谱

环的谱是一个局部环化意象; Monique 将这一构造推广为环化意象的谱

$$\mathrm{Spec}\colon \{\text{环化意象}\} \to \{\text{局部环化意象}\}.$$

- Spec 是遗忘的右伴随.

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{局部环}}{(\mathcal{Y}, B)} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & & (\mathcal{X}, A) \\ & \mathrm{Spec}(\mathcal{X}, A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- 当 $\mathcal{X} \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) \simeq \mathsf{Set}$ 时, $\mathrm{Spec}(\mathcal{X}, A)$ 退化为常见的构造 $\mathrm{Spec}\, A$.
- 一种直观: 对沿空间 $\mathcal{X}$ 连续变化的一族环 "逐点" 取 Spec.

环化意象的平展意象

概形的平展意象 (topos étale) 是一个严格局部环化意象; Monique 将这一构造推广为局部环化意象的平展意象

$$\text{ét}\colon \{\text{环化意象}\} \to \{\text{严格局部环化意象}\}.$$

- ét 是遗忘的右伴随.

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{严格局部环}}{(\mathcal{Y}, B)} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & & (\mathcal{X}, A) \\
& \text{ét}(\mathcal{X}, A) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- 当 $(\mathcal{X}, A)$ 为概形时, $\text{ét}(\mathcal{X}, A)$ 退化为经典的平展意象.