# 局部环的分类意象

王进一

清华大学求真书院

2025 年春

### Outline

- 1 Monique Hakim
- 2 意象
- 3 局部环与范畴语义
- 4 分类意象
- 5 环化意象的谱

## Monique Hakim

- Monique Jafe-Hakim (1937-2013), 法国数学家, 师从 Grothendieck.
- 1967 年于巴黎大学完成博士论文 *Topos* annelés et schémas relatifs (环化意象与相对概形).
- 该文中一项突出的工作是讨论了万有局部环 (l'anneau local universel), 后人称之为局部环 的分类意象 (topos classifiant).



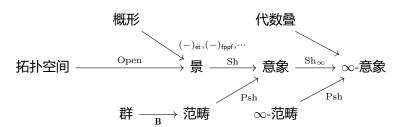
■ 意象是以其上的层为基本要素的空间.

拓扑空间 
$$\xrightarrow{\text{Edh "A."}}$$
 位象 (locale)  $\xrightarrow{\text{推广}}$  意象 (topos) 点,开集  $\xrightarrow{\text{R. T.}}$  尽  $\text{R. Sh}(X)$ 

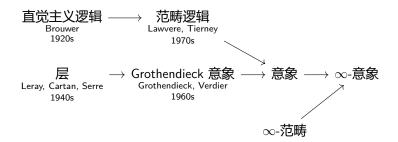
- 两种定义:
  - Grothendieck 意象, 即景 (site) 上的层范畴;
  - 使用范畴论结构和性质 (有限极限, 任意余极限, 拉回保持余极限, etc.) 来定义.
  - Giraud 定理 (1971) 指出两种定义等价.

意象是谈论许多概念的共同场所.

一张粗略的地图 (还有许多路径没有画出):



#### 概念的历史 (有一些结点没有画出):



#### 两种观点:

- (gros topos) 意象  $\mathcal{E}$  作为范畴, 其中一个对象是一个 (非标准的, 或带有某种结构的) "集合", 这是因为意象具有集合范畴 Set 的许多范畴论结构:
- (petit topos) 意象 *E* 视为一个空间, 其对象是这个空间上的层, 即连续变化的一族集合, 这是因为意象态射的拉回保持许多范畴论结构 (尤其是对于开子意象, 拉回保持所有逻辑结构).
- 例: Sh(X) 中的环亦可视为沿 X 连续变化的一族环.

# 意象的态射

#### 定义 (意象之间的态射)

意象  $\mathcal{E}$  到  $\mathcal{F}$  的一个态射  $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$  是一对伴随函子

$$\mathcal{E} \xleftarrow{f^*}_{f_*} \mathcal{F},$$

满足 f\* 保持有限极限.

- 例: 拓扑空间的连续映射给出对应的意象之间的态射.
- 由伴随函子定理, 只需提供保持有限极限和任意余极限的函子 f\*.

#### 定义 (局部环)

局部环是满足如下条件的环 R: 对任意  $x \in R$ , x 可逆或 1-x 可逆.

- 上述概念可定义在任何具有合适结构的范畴中.
- 含义: 如下两个态射构成覆盖, 即两个态射的像之并等于整个对象.

$$\{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1\} \xrightarrow{\operatorname{pr}_1} R$$

$$\{(x,y) \in R^2 \mid (1-x)y = 1\}$$

#### 定义 (局部环)

局部环是满足如下条件的环 R: 对任意  $x \in R$ , x 可逆或 1-x 可逆.

- 相比"极大理想"定义的优势: 仅使用一阶逻辑。
- 需要的结构:
  - 有限极限 (终对象, 拉回);
  - 态射的像, 且在拉回之下稳定;
  - 子对象的并, 且在拉回之下稳定.
- 特别地, 可以在任何意象中定义局部环.

#### 例 (层范畴中的局部环)

概形 X 的结构层  $\mathcal{O}_X$  是  $\mathrm{Sh}(X)$  中的局部环.

- 意义: 允许对 Sh(X) 中的  $\mathcal{O}_{X}$ -模等对象进行构造与论证, 就像对 Set 中局部环上的模一样. (唯一的限制是使用构造主义逻辑, 没有 排中律和选择公理.)
- 例: 张量积的构造, Kähler 微分  $\Omega^1_{X/S}$  的构造, 常见交换代数引理的层论版本的论证, etc.
- 参考 Ingo Blechschmidt, *Using the internal language of toposes in algebraic geometry* (2017)

# 分类意象

- 分类意象 (topos classifiant) 这个词最早出现于 SGA IV (1963-64).
- 例: 群 G 的分类意象 BG 满足

{意象 
$$\mathcal{E}$$
 上的  $G$ -主丛}  $\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E},\mathbf{B}G).$ 

■ 环的分类意象 F 满足

{意象 
$$\mathcal{E}$$
 上的环}  $\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$ 

■ 分类意象又叫"模空间",其恒等映射对应着万有结构.

## 环的分类意象

考虑有限表现环的范畴  $\mathrm{Ring}_{\mathrm{fp}}$ , 其对象形如  $\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_m)$ .

#### 命题

环的分类意象是  $Fun(Ring_{fp}, Set)$ .

■ 证明.

$$\{\mathcal{E} \ \, \mbox{上的环}\} \simeq {\sf Fun}^{
m fin.\ lim.}({\sf Ring}^{
m op}_{
m fp},\mathcal{E})$$
 (将在后面解释) 
$$\simeq {\sf Fun}^{
m fin.\ lim.}_{
m colim.}({\sf Fun}({\sf Ring}_{
m fp},{\sf Set}),\mathcal{E}) \qquad (自由余完备化)$$
  $\simeq {\sf Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$  (意象态射的定义)

### 环

关于  $\{\mathcal{E} \text{ L的环}\} \simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{fin.\ lim.}}(\mathsf{Ring}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fp}},\mathcal{E})$  的解释:

- $lue{}$  记有限表现环 A 在对偶范畴中的化身为  $\operatorname{Spec} A$ .
- 关键:  $\mathbb{A}^1 := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$  是  $\operatorname{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$  中的环对象,且是所有范畴环对象中之万有者.
- 对于  $\mathcal E$  的环对象 R, 对应的函子  $F\colon \mathsf{Ring}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fp}} \to \mathcal E$  将  $\mathrm{Spec}\, \mathbb Z[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_m)$  对应到  $\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n\mid f_1=\cdots=f_m=0\}$  ( $\mathcal E$  中的有限极限).
- 反之, 函子 F 对应的环就是  $R = F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x])$ . 环的所有运算来自有限表现环之间的同态, 如

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \longmapsto R$$

$$x \mapsto yz \uparrow \qquad \qquad \uparrow \times$$

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[y, z] \longmapsto R^2.$$

### 环

关于函子  $F: Ring_{fp}^{op} \to \mathcal{E}$  保持有限极限的解释:

- 一般而言, 保持有限极限的函子将环对象变为环对象.
- Spec  $\mathbb{Z}$  是 Ring<sup>op</sup> 的终对象,  $F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) = 1$ .
- $F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]) = R.$
- Spec  $\mathbb{Z}[y,z] \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[y] \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[z]$ ,  $F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[y,z]) \simeq R^2$ .
- $F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x,y,z]/(x^3+y^3-z^3)) \simeq \{(x,y,z) \in R \mid x^3+y^3=z^3\}.$
- 某种直观:  $F(\operatorname{Spec} S) = \operatorname{"Hom}_{\mathsf{Ring}}(S,R)$ " (尽管 S,R 不在同一个范畴中)

### Zariski 覆盖

#### 定义 (Zariski 覆盖)

范畴  $\operatorname{Ring_{fp}^{op}}$  上的 Zariski 覆盖结构如下: 对象  $\operatorname{Spec} A$  的覆盖为

$$\{\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}] \to \operatorname{Spec} A\}_{i \in I} (I \ \mathbf{f} \mathbb{R}),$$

满足  $\{f_i\}_{i\in I}$  生成 A 的单位理想.

- 例. Spec  $\mathbb{Z}[x]$  的一个 Zariski 覆盖为 Spec  $\mathbb{Z}[x][x^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$  与 Spec  $\mathbb{Z}[x][(1-x)^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ .
- 例. Spec Z 的一个 Zariski 覆盖为 Spec Z[2<sup>-1</sup>] → Spec Z 与 Spec Z[3<sup>-1</sup>] → Spec Z.

■ 对于范畴  $\mathcal{E}$  中的环 R, 设其对应保持有限极限的函子  $F: \mathsf{Ring}_{\mathsf{fn}}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{E}$ , 则有

$$F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x][x^{-1}]) \simeq \{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1\} \simeq \{x \in R \mid x \ \ \overrightarrow{\mathbf{P}}: \mathbf{Z}[x^{-1}]\}$$
  $F(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x^{-1}]) \simeq \{y \in R \mid 2y = 1\} \simeq \{\star \mid x \in R \ \ \overrightarrow{\mathbf{P}}: \mathbf{Z}[x^{-1}]\}$ .

#### 命题 (局部环的刻画)

R 为局部环当且仅当 F 将 Ring $_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$  中的 Zariski 覆盖映射为  $\mathcal E$  中的覆盖.

- 证明. 由局部环的定义, R 为局部环当且仅当 F 将 Zariski 覆盖  $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x][x^{-1}] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$  映射为  $\mathcal{E}$  中的覆盖.  $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x][(1-x)^{-1}]$
- 设 R 为局部环,  $\{\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}] \to \operatorname{Spec} A\}$  为 Zariski 覆盖. 由 F 的 构造.

$$F(A[f_i^{-1}]) \simeq \{x \in F(A) \mid f_i(x)$$
 可逆}.

由局部环的定义,当  $f_i$  生成单位理想时,至少有一个  $f_i$  可逆. 这说明了  $\{F(A[f_i^{-1}]) \to F(A)\}$  为  $\mathcal E$  中的覆盖.

# 万有局部环

#### 定理 (局部环的分类意象)

局部环的分类意象是  $Sh(Ring_{fp}^{op}, Zar)$ .

■ 证明.

$$\begin{split} \{\mathcal{E} \,\, \boldsymbol{\bot} \boldsymbol{\mathsf{b}} \boldsymbol{\mathsf{B}} \boldsymbol{\mathsf{B}} \boldsymbol{\mathsf{F}} \boldsymbol{\mathsf{u}} \boldsymbol{\mathsf{n}}^{\mathrm{fin.lim.,cts.}} ((\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}), \mathcal{E}) \\ & \simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{fin.lim.,colim.}} (\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar}), \mathcal{E}) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{E}, \mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Zar})). \end{split}$$

### 环与局部环

■ 局部环的分类意象是环的分类意象的子意象 (局部化).

$$\operatorname{Sh}(\mathsf{Ring}^{\operatorname{op}}_{\operatorname{fp}},\operatorname{Zar}) \xleftarrow{\stackrel{i^*}{-\iota}} \operatorname{PSh}(\mathsf{Ring}_{\operatorname{fp}})$$

■ 仿佛说局部环的模空间是环的模空间中由一个条件划出的子空间.

## 严格局部环

■ Ringfp 上更细的覆盖结构会给出更小的子意象,对应比局部环更强的条件.

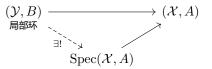
$$\mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_\mathrm{fp}^\mathrm{op}, \mathrm{\acute{e}t}) \xleftarrow{j^*}_{\stackrel{\perp}{-}j_*} \mathrm{Sh}(\mathsf{Ring}_\mathrm{fp}^\mathrm{op}, \mathrm{Zar}) \xleftarrow{i^*}_{\stackrel{\perp}{-}i_*} \mathrm{PSh}(\mathsf{Ring}_\mathrm{fp})$$

■  $Sh(Ring_{fp}^{op}, \acute{e}t)$  分类了严格局部环 (又叫严格 Hensel 环), 范畴  $\mathcal E$  中的严格局部环对应的函子  $F\colon Ring_{fp}^{op} \to \mathcal E$  将平展覆盖映射为  $\mathcal E$  中的覆盖.

### 环化意象的谱

环的谱是一个局部环化意象; Monique 将这一构造推广为环化意象的谱 Spec: {环化意象} → {局部环化意象}.

■ Spec 是遗忘的右伴随.



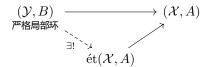
- 当  $\mathcal{X} \simeq \operatorname{Sh}(\operatorname{pt}) \simeq \operatorname{Set}$  时,  $\operatorname{Spec}(\mathcal{X}, A)$  退化为常见的构造  $\operatorname{Spec} A$ .
- 一种直观: 对沿空间 *X* 连续变化的一族环 "逐点" 取 Spec.

# 环化意象的平展意象

概形的平展意象 (topos étale) 是一个严格局部环化意象; Monique 将这一构造推广为局部环化意象的平展意象

ét:  $\{$ 环化意象 $\}$   $\rightarrow$   $\{$ 严格局部环化意象 $\}$ .

■ ét 是遗忘的右伴随.



■ 当 (X, A) 为概形时, ét(X, A) 退化为经典的平展意象.