盲人摸象 (∞)

∞-意象理论讲义

王进一

jin12003@163.com

QQ 2917905525

2024 年夏至今

此版本编译时间: 2024 年 11 月 17 日

这是一本正在施工的讲义. 目前我迫切需要读者的意见!

目录

第 0 章 前言

本书是意象理论讲义“盲人摸象”的续篇, 讲述 ∞-意象理论, 即意象理论的 ∞-范畴版本.

范畴论的大部分内容 (包括意象理论) 都有在 ∞-范畴中的类比, 但后者包含许多新的现象, 这些新内容是本书的重点.

第 1 章 ∞-范畴的语言

> The traditional way in the literature to provide foundations (for higher category theory) is via the theory of *quasi-categories*, which in turn rests on set theory. While this can be done, the language of set theory is simply not very adequate to model homotopical notions, ...
>
> Denis-Charles Cisinski, [1]

∞-范畴作为一种模糊的概念已经存在很久. 然而在数学上, ∞-范畴没有确切的定义. 在集合论的基础上, 为了逼近心目中那个完美的概念, 人们建立了 ∞-范畴各种各样的模型. 最著名的模型是由 André Joyal 提出, Jacob Lurie [2] 发展的基于单纯集的*拟范畴* (quasicategory). 每一种模型都有人为的成分, 而模型之间的等价性是非常不平凡的问题.

设想有一个称为 "*无穷范畴国*" 的天国乐园, 其国民使用 ∞-范畴内蕴的语言作为母语, 他们谈笑之间就可以完成凡人不可想象的工作. 在地上, 说着集合论语言的人们用尽力气, 搭建了通往天国的阶梯, 到访了天国. 但人们发现, 为了理解无穷范畴中任何一件稀松平常的小事, 都要耗费数倍的精力. 地上的人们终于意识到, 语言不通是他们面前最大的阻碍. 要想像母语者那样自如地使用无穷范畴, 就必须抛弃集合论的某些思维, 甚至经典逻辑的一些信条.

能代替集合论成为数学基础, 并且适合于 ∞-范畴理论的一种语言是*同伦类型论* (homotopy type theory, HoTT) [5], 同伦类型论以基本概念 "类型" 为 ∞-群胚提供了语法, 并且自身包含了一整套推理系统; 理解这种语言对理解 ∞-范畴理论中的许多现象有很大的帮助, 因此我们在第 0 节简要介绍之. Emily Riehl 与 Michael Shulman [3] 使用 HoTT 的变种 "有向类型论" (directed type theory) 建立了一种综合 ∞-范畴理论, Matthew Weaver 和 Daniel Licata 采用的另一变种 "立方类型论" (cubical type theory) 也在这个领域展现出一些优势.

1.0 同伦类型论基础

本节介绍的同伦类型论仅供 ∞-群胚的理解所需, 因此我们不会使用最正式的语言 (对此有需要的读者可参见 [5] 附录 A).

公理 1.0.1 (类型, 对象)

同伦类型论有两个基本概念, *类型* (type) 与*对象* (object); 有一个基本*断言* (judgement)

$$a : A$$

表示 "对象 a 具有类型 A".

注 1.0.2

在同伦类型论中, 类型的直观是空间, 而对象是空间中的点. 此外, *断言*和*命题*是不同的两种东西. 后面我们会介绍命题是一种特殊的类型.

公理 1.0.3 (宇宙)

有一个类型 $\mathcal{U}$ 称为*宇宙*, 我们将用陈述

$$A : \mathcal{U}$$

表示 "A 是类型".

公理 1.0.4 (等式类型)

对于类型 $A : \mathcal{U}$ 的两个对象 $a, b : A$, 有一个类型

$$a =_A b, \quad \text{或简记为} \quad a = b,$$

称为*等式类型* (identity type).
对每个对象 $a : A$ 有一个对象

$$\mathsf{refl}_a : a = a,$$

称为*自反* (reflexivity).

注 1.0.5

在同伦类型论中, 两个对象的相等不是一个断言, 也不是一个命题, 而是一个新的类型. 这就如同一个空间中两个点之间的道路构成一个新的空间, 又如同 ∞-群胚中两个对象之间的态射构成一个新的 ∞-群胚; 这个新的类型包含的同伦信息不止于空或非空.
有时我们也需要以断言的形式表达两个对象依定义相等. 请注意等式类型与依定义相等的区别.

公理 1.0.6 (依定义相等)

同伦类型论有一个基本断言

$$a \equiv b : A$$

表示 "类型 A 的两个对象 a 与 b 依定义相等".

公理 1.0.7 (函数类型)

对于两个类型 $A, B : \mathcal{U}$, 有一个类型

$$(A \to B) : \mathcal{U},$$

称为函数类型 (function type). 对 $f\colon A \to B$ 以及 $a : A$ 有 $f(a) : B$.
对于含有变量 x 的表达式 Φ, 若 $x : A$ 时有 $\Phi : B$, 则可定义所谓 λ-抽象 (abstraction)

$$(\lambda x.\Phi) : A \to B,$$

此时对于 $a : A$, 记 Φ' 为将表达式 Φ 中所有 x 替换为 a 的结果, 则有

$$(\lambda x.\Phi)(a) \equiv \Phi'.$$

对每个 $f\colon A \to B$ 有

$$f \equiv (\lambda x.f(x)).$$

例 1.0.8 (依值类型)

一个函数 $B\colon A \to \mathcal{U}$ 称作一个类型族 (type family) 或一族依值类型 (dependent type), 即对类型 A 的每个对象 $a : A$ 都有一个类型 $B(a) : \mathcal{U}$.

公理 1.0.9 (乘积类型)

对于两个类型 $A, B : \mathcal{U}$ 有一个类型

$$(A \times B) : \mathcal{U},$$

称为*乘积类型* (product type), 其对象形如 (a, b), $a : A$, $b : B$. 有两个函数

$$\mathsf{pr}_1 : A \times B \to A, \quad \mathsf{pr}_2 : A \times B \to B,$$

以及断言

$$\mathsf{pr}_1((a, b)) \equiv a, \quad \mathsf{pr}_2((a, b)) \equiv b.$$

公理 1.0.10 (依值和类型)

对于类型 $A : \mathcal{U}$ 以及依值类型 $B : A \to \mathcal{U}$, 有一个类型

$$\sum_{x:A} B(x),$$

称为*依值和类型* (dependent sum type), 其对象形如 (a, b), $a : A$, $b : B(a)$. 有一个函数

$$\mathsf{pr}_1 : \Big(\sum_{x:A} B(x)\Big) \to A.$$

公理 1.0.11 (依值积类型)

对于类型 $A : \mathcal{U}$ 以及依值类型 $B : A \to \mathcal{U}$, 有一个类型

$$\prod_{x:A} B(x),$$

称为*依值积类型* (dependent product type), 对于表达式 $\Phi : B(x)$, 有

$$\lambda x.\Phi : \prod_{x:A} B(x).$$

对于 $f : \prod_{x:A} B(x)$ 以及 $a : A$ 有 $f(a) : B(a)$, 且有断言 $f(a) \equiv \Phi'$, Φ' 为将 Φ 中所有 x 替换为 a 得到的表达式.

定义 1.0.12 (命题是类型)

同伦类型论中的命题是类型. 证明一个命题就是构造一个类型的对象.

命题	类型
A 且 B	$A \times B$
A 或 B	$A + B$
若 A 则 B	$A \to B$
非 A	$A \to 0$
A 当且仅当 B	$(A \to B) \times (B \to A)$
对任意 $x : A$, $P(x)$	$\prod_{x:A} P(x)$
存在 $x : A$, $P(x)$	$\sum_{x:A} P(x)$

集合, 逻辑与截断性

定义 1.0.13 (命题)

对于类型 P 定义

$$\mathsf{isProp}(P) :\equiv \prod_{x,y:P} (x = y).$$

若 $\mathsf{isProp}(P)$ 有对象, 则称 P 为命题.

注 1.0.14 (排中律)

在同伦类型论中, 排中律可定义为

$$\mathsf{LEM} :\equiv \prod_{A:\mathcal{U}} \big(\mathsf{isProp}(A) \to (A + \neg A)\big).$$

构造主义告诉我们许多的数学不需要排中律 (但这不代表我们需要否认排中律).

定义 1.0.15 (集合)

对于类型 S 定义

$$\mathsf{isSet}(S) :\equiv \prod_{x,y:S} \mathsf{isProp}(x = y).$$

若 $\mathsf{isSet}(S)$ 有对象, 则称 S 为集合.

定义 1.0.16 (命题截断)

对于类型 A 有一个类型 $\|A\|$, 称为其命题截断 (propositional truncation),

- 对任意 $a : A$ 有 $|a| : \|A\|$;
- 对任意 $x, y : \|A\|$ 有 $x = y$.

定义 1.0.17 (可缩类型)

对于类型 A 定义

$$\mathsf{isContr}(A) :\equiv \sum_{a:A} \prod_{x:A} (a = x).$$

注 1.0.18

按朴素的理解, $\mathsf{isContr}(A)$ 似乎表达的是连通性: "存在点 $a : A$, 使得对任意点 $x : A$, 都有一条 a 到 x 的路径." 但在同伦类型论中, 依值积类型 (全称量词) 的证据需要某种连续性, 直观上需要这条 a 到 x 的路径随 x "连续变化", 于是整个命题描述的就不仅是连通性, 而是可缩性.

1.1 基本概念

本章不会给出无穷范畴的定义. 相反, 我们描述在无穷范畴的语言中, 我们希望能说什么, 并以公理的形式刻画期望中 ∞-范畴的行为. 请注意本章介绍的不是一个完整的 ∞-范畴理论, 这些公理不一定出现在最终 "完美" 的理论中, 甚至我们不知道那样一个理论是否存在或唯一.

公理 1.1.1 (∞-范畴)

我们要谈论一些对象, 称之为 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \cdots$. 我们还要谈论这些对象之间的函子 $f \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $g \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 等等.

公理 1.1.2 (一些重要的 ∞-范畴)

存在如下的 ∞-范畴:

- 始 ∞-范畴, 记作 0 (或 $\varnothing$), 满足从 0 到任何 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 有唯一的函子;
- 终 ∞-范畴, 记作 1, 满足从任何 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 到 1 有唯一的函子;
- 对任何两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, 存在两者的积 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 使得对另一个 ∞-范畴 $\mathcal{E}$, 一个函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 等同于两个函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$;
- 对任何两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, 存在两者的和 $\mathcal{C} + \mathcal{D}$, 使得对另一个 ∞-范畴 $\mathcal{E}$, 一个函子 $\mathcal{C} + \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 等同于两个函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$;
- 对任何两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, 有函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 也记作 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, 使得对另一个 ∞-范畴 $\mathcal{E}$, 函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ 等同于函子 $\mathcal{E} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$;

公理 1.1.3 (1-范畴视为 ∞-范畴)

每个普通范畴 (即 1-范畴) 都可以视为 ∞-范畴. 普通范畴之间的函子也可以视为对应的 ∞-范畴之间的函子. 普通范畴的和与积就是它们作为 ∞-范畴的和与积.

公理 1.1.4 (对象, 态射)

∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的对象等同于函子 $1 \to \mathcal{C}$. 两个对象之间的态射等同于函子 $\{* \to *\} \to \mathcal{C}$, 其中 $\{* \to *\}$ 视为 ∞-范畴 (公理 1.1.3). 称函子范畴 $\mathcal{C}^{\{* \to *\}}$ 为*箭头范畴*, 也简记为 $\mathcal{C}^{\to}$.

1.2 ∞-范畴中的结构与性质

连通性与截断性

定义 1.2.1 (n-截断 ∞-群胚, n-群胚)

设 $n \geq -1$ 为整数. 称一个 ∞-群胚 X n-截断 (或称其为 *n-群胚*) 是指其所有大于 n 阶的同伦群 $\pi_k(X)\,(k > n)$ 均平凡.

定义 1.2.2 (n-群胚, 等价定义)

设 $n \geq -1$ 为整数. 称一个 ∞-群胚 X n-截断是指 X 为关于 $\{S^{n+1} \to *\}$ 的局部对象.

例 1.2.3 (低维群胚的例子)

在同伦等价的意义下,

- (-2)-群胚是一个点.
- (-1)-群胚是空集或一个点.
- 0-群胚是集合, 也即离散群胚.

n-范畴

定义 1.2.4 (局部对象)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, S 为 $\mathcal{C}$ 中一族态射的集合, 称 $\mathcal{C}$ 的对象 x 为 S-*局部对象*是指对 S 中任意态射 $f\colon a \to b$,

$$f^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(b, x) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$$

为 ∞-群胚的等价.

定义 1.2.5 (球面)

归纳定义 $\infty\mathcal{G}pd$ 的 n *维球面* S^n $(n \geq -1)$ 如下:

- $S^{-1} = \varnothing$;
- 对 $n \geq -1$, S^{n+1} 是如图所示的推出.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

定义 1.2.6 (n-群胚)

对整数 $n \geq -2$, 定义 n-*群胚*为 $\infty\mathcal{G}pd$ 中关于 $\{S^{n+1} \to *\}$ 的局部对象 (定义 1.2.4).

东西, 结构, 性质

伴随

定义 1.2.7 (∞-范畴之间的伴随)

∞-范畴之间的一对伴随 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$ 是如下资料,

- 两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$,
- 两个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (称为左伴随), $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (称为右伴随),
- 两个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ (称为单位), $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (称为余单位);

满足如下 2-态射的关系,

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] & \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
\sim \mathrm{id}_F, \qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\sim \mathrm{id}_G,
$$

其中第一个式子中 $\sim$ 表示 id_F 是 ∞-范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中两个态射 $F \to FGF$, $FGF \to F$ 的一个复合.
记 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 为 $\infty\mathcal{C}at$ 的同伦 2-范畴, 其中 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$.
由定义, ∞-范畴之间的伴随等同于 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 中的伴随.

命题 1.2.8 (∞-范畴之间的伴随与 Hom-函子)

设 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$ 为 ∞-范畴之间的伴随, 则对任意对象 $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, 函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(C), G(D)) \xrightarrow{\eta_C^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

为同伦等价.

极限与余极限

定义 1.2.9 (终对象, 始对象)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{C}$ 中的对象. 若如下等价条件成立, 则称 x 为 $\mathcal{C}$ 的始对象:

- 对任意对象 y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x) \simeq 1$;
- $x\colon 1 \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C} \to 1$ 的右伴随.

对偶地定义始对象.

定义 1.2.10 (俯范畴, 仰范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{C}$ 中的对象. 定义俯范畴 $\mathcal{C}/x$ 为如下的拉回:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/x \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^{\to} \arrow[d, "t"] \\
1 \arrow[r, "x"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

其中 $t\colon \mathcal{C}^{\to} \to \mathcal{C}$ 将 $\mathcal{C}$ 的态射对应到其终点.

由定义, 俯范畴 $\mathcal{X}/x$ 的对象是 $\mathcal{X}$ 中以 x 为终点的箭头. 可以说明 id_x 是 $\mathcal{X}/x$ 的终对象.

定义 1.2.11 (极限, 余极限)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, I 为单纯集 (称为指标集或指标范畴), $F\colon I \to \mathcal{C}$ 为单纯集映射 (称为 $\mathcal{C}$ 中的一个图表). 类似于普通范畴中极限的定义, 我们可以构造一个 (广义的) "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$, 其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象到 F 的锥. 具体地, $\mathcal{C}_{/F}$ 为如下拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{/F} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{C}^I)_{/F} \arrow[d] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "\text{常值}"'] & \mathcal{C}^I
\end{tikzcd}$$

其中 "常值": $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\Delta^0} \to \mathcal{C}^I$ 是 $I \to \Delta^0$ 的拉回, 它将 $\mathcal{C}$ 的对象 $x\colon \Delta^0 \to \mathcal{C}$ 对应到 x 处的 "常值图表" $I \to \Delta^0 \to \mathcal{C}$, 就像普通范畴的情形一样. 定义图 F 的极限为 "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$ 的终对象; 对偶地, 定义 F 的余极限为 "仰范畴" $\mathcal{C}_{F/}$ 的始对象.

注 1.2.12 (同伦极限, 同伦余极限)

∞-范畴中的极限和余极限与所谓同伦极限, 同伦余极限有关.

拓扑空间范畴 Top 中的极限和余极限不是同伦不变的. 例如, 下图 (a) 的推出是 S^{n+1} (S^n 是 n 维球面, D^{n+1} 是 $(n+1)$ 维圆盘, $S^n \to D^{n+1}$ 是圆盘的边界), 将 D^{n+1} 替换为与之同伦等价的一个点 $*$ 得到图 (b), 但 (b) 的推出却不是 S^{n+1}, 而是一个点 $*$. 相比之下, 同伦极限, 同伦余极限则是同伦不变的概念; 例如 (a), (b) 的同伦推出都是 S^{n+1}.

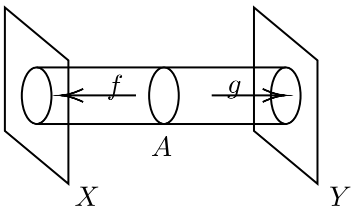
$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & D^{n+1} \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

(a) (b) (c)

对一般的两个映射 $f\colon A \to X$, $g\colon A \to Y$, 以 $\mathbb{I}$ 表示单位区间 $[0,1]$, 图 (c) 的同伦推出可构造为商空间

$$X \sqcup (A \times \mathbb{I}) \sqcup Y \Big/ \sim, \quad \text{其中} \quad (a,0) \sim f(a), (a,1) \sim g(a).$$

直观上这是将以 A 为底的柱形两端分别粘到 X 和 Y 上所得的空间. 对于每个点 $a \in A$, 普通的推出粗暴地将 $f(a), g(a)$ 粘在一起, 而同伦推出只是在两者之间连了一条线段. 连一条线段与直接粘起来看似 (在同伦的意义下) 等价, 实则保留了更多的信息: 因为两点之间可连多条线段, 即可以多种方式粘在一起.



同伦推出的例子可以启发一般的同伦余极限. 设 $T\colon I \to \mathsf{Top}$ 为拓扑空间的图表. 对指标范畴 I 每个长为 n 的态射链 $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$, 以及每个点 $a \in T(i_0)$, 普通的余极限会粗暴地将 a 经过这些映射所到的每个点粘在一起, 而同伦余极限则是在这些点之间连上一个拓扑 n-单形 $|\Delta^n|$. 具体地, 先由 T 构造一个自然的单纯空间 $\mathsf{s}T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$, 使得

$$\mathsf{s}T_n = \coprod_{i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n} T(i_0).$$

对于单纯空间 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$, 定义其几何实现为如下的余等化子,

$$|X| := \operatorname{coeq}\Big[\coprod_{[n] \to [k]} X_k \times |\Delta^n| \rightrightarrows \coprod_n X_n \times |\Delta^n| \Big]$$

其中两个映射分别为

$$\coprod_{\sigma\colon [n]\to[k]} (\sigma^*\colon X_k \to X_n) \times |\Delta^n|,$$

$$\coprod_{\sigma\colon [n]\to[k]} X_k \times (|\sigma|\colon |\Delta^n| \to |\Delta^k|).$$

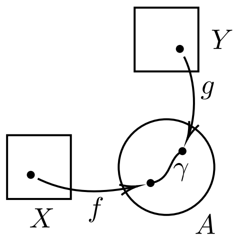
那么 T 的同伦余极限可构造为

$$\operatorname{hocolim} T := |\mathsf{s}T|.$$

同伦极限的一个例子是同伦拉回. 两个映射 $f\colon X \to A$, $g\colon Y \to A$ 的同伦拉回可构造为 $X \times A^{\mathbb{I}} \times Y$ 的子空间

$$\big\{(x,\gamma,y) \in X \times A^{\mathbb{I}} \times Y \mid \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = g(y)\big\}.$$

同伦拉回中的一个点由 X 的点 x, Y 的点 y 以及 $f(x)$ 到 $g(y)$ 的一条道路构成.



一般地, 设 $T\colon I \to \mathsf{Top}$ 为拓扑空间的图表, 对指标范畴 I 每个长为 n 的态射链 $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$, 以及每个点 $a \in T(i_n)$, 普通的极限只允许 $T(i_0), \cdots, T(i_n)$ 的各点恰好落在 a 上, 而同伦极限允许它们落在 $T(i_n)$ 中的一个 n-单形的顶点. 具体地, 构造自然的余单纯空间 $\mathsf{c}T\colon \Delta \to \mathsf{Top}$, 使得

$$\mathsf{c}T_n = \prod_{i_0\to\cdots\to i_n} T(i_n).$$

对于余单纯空间 $X\colon \Delta \to \mathsf{Top}$, 定义其全体 (totalization)[1] $\operatorname{Tot} X$ 为如下的等化子,

$$\operatorname{Tot} X := \operatorname{eq}\Big[\prod_n X_n^{|\Delta^n|} \rightrightarrows \prod_{[n]\to[k]} X_k^{|\Delta^n|}\Big].$$

同伦极限和同伦余极限表现了 ∞-范畴中的极限和余极限. 见 [2] 定理 4.2.4.1.

[1]几何实现是一种左 Kan 扩张, 而 “全体” 是一种右 Kan 扩张. 记 cosTop 为余单纯空间的范畴, 则余单纯空间 X 的全体也可表示为 $\operatorname{Hom}_{\mathsf{cosTop}}(|\Delta|, X)$, 其中 $|\Delta|\colon \Delta \to \mathsf{Top}$ 将 $[n]$ 对应到拓扑 n-单形.

例 1.2.13

对于 $I=\varnothing$, 空图表 $F\colon I\to\mathcal{C}$ 的极限即是 $\mathcal{C}$ 的终对象.

例 1.2.14 (推出, 拉回)

考虑 $I=\Lambda_2^2$ (见定义 A.1.1 及其后的插图), 则 $F\colon I\to X$ 等同于两个态射 $x\to z$, $y\to z$. 称 F 的极限为 ∞-拉回, 简称拉回, 记为 $x\times_z y$. 对偶地, 形如 Λ_0^2 的图的余极限称为 ∞-推出, 简称推出.

单纯集映射 $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$ 的同伦推出为 $Y\sqcup_{\{0\}\times X}(\Delta^1\times X)\sqcup_{\{1\}\times X}Z$.

定义 1.2.15 (环路空间)

Hom 函子, 预层与 ∞-米田引理

> Perhaps the main technical challenge in extending classical categorical results to the ∞-categorical context is in merely *defining* the Yoneda embedding.
>
> Emily Riehl & Dominic Verity,
> *The Comprehension Construction*

我们希望定义 ∞-版本的预层范畴, 并建立米田引理. 参考卷 1 注 A.4.2, 我们首先需要一个函子 $\mathrm{Hom}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\infty\mathcal{G}pd$. 这个函子同样可借助单纯范畴构造. 注意这并非 ∞-范畴理论中陈述米田引理的唯一方法.

定义 1.2.16 (预层 ∞-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴. 定义

$$\widehat{\mathcal{C}}:=\mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\infty\mathcal{G}pd)$$

为 $\mathcal{C}$ 上的预层 ∞-范畴.

命题 1.2.17

[未完成：自由余完备化]

[未完成：]

第 2 章　∞-层与 Grothendieck ∞-意象

[未完成: **HTT Ch.6 ∞-意象**]

定义 2.0.1 (自反局部化)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, 定义 $\mathcal{C}$ 的一个自反局部化为函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 其具有全忠实的右伴随. 进一步, 若 a 为正合函子 (保持有限极限), 则称之为*正合局部化*. 这与普通范畴中的自反局部化在语法上完全相同.

如下是 Grothendieck 意象的 ∞ 版本.

定义 2.0.2 (∞-意象)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 若存在 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个正合局部化

$$\widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{X},$$

则称 $\mathcal{X}$ 为 (Grothendieck) ∞-意象.

2.1 Grothendieck 拓扑与层

[未完成: **层, HTT 6.2.2**]

2.2 Giraud 定理

命题 2.2.1 (∞-意象的等价定义, ∞-Giraud 公理)

∞-意象等价于局部小, 可表现, 余完备, 拉回保持余极限, 且内群胚有效的 ∞-范畴.

第 3 章 ∞-意象与上同调

数学中许多名为某某上同调的概念可以在同一个框架下谈论.

定义 3.0.1 (上同调)

给定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X, A, 定义 X 的取值于 A 的 0 阶上同调为

$$H^0(X, A) := \pi_0 \operatorname{Hom}(X, A).$$

态射 $c\colon X \to A$ 称为上圈 (cocycle), 态射的同伦 $c_1 \to c_2$ 称为上边界 (coboundary), 等价类 $[c] \in \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ 称为上同调类 (cohomology class). 通常我们考虑的范畴 $\mathcal{C}$ 是 ∞-意象.

空间的奇异上同调

等变上同调

群上同调

层上同调

第 4 章　∞-意象与 ∞-丛

第 5 章 凝集意象

[T]he existence of a nontrivial shape operation on types is what reflects that types may carry a nontrivial topological (or more generally: cohesive) quality in the first place.

Urs Schreiber, [4]

5.1 凝集的动机, 基本概念

拓扑空间范畴 Top 与集合范畴 Set 之间存在如下的伴随四元组,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left=9, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\perp"] \arrow[r, leftarrow, shift left=3, "\mathrm{disc}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=3, "\Gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\perp"] \arrow[r, hookleftarrow, shift right=9, "\mathrm{codisc}"'] & \mathsf{Set}
\end{tikzcd}$$

其中

- Π_0 给出拓扑空间的连通分支的集合;
- disc 将集合对应到离散空间;
- Γ 将拓扑空间遗忘为其底层集合;
- codisc 将集合对应到余离散空间 (即只有空集和全集两个开集的拓扑空间).

定义 5.1.1 (凝集意象)

凝集意象 (cohesive topos)[1] 是指一个意象 $\mathcal{E}$ 带有如下伴随四元组,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift left=4.5, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift left=1, "\perp"] \arrow[r, shift right=1.5, "\Gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right=1.5, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, shift left=4.5, "\mathrm{codisc}"] \end{tikzcd}$$

使得 Π_0 保持有限乘积.

例 5.1.2 (集合族)

考虑 "集合族范畴" $\mathsf{Fam} = \mathsf{Fun}(\bullet \to \bullet, \mathsf{Set})$. 将 Fam 的对象 $W \to X$ 想象为一个大集合 W 分成了 X 那么多组, 每一组是这个映射的一个纤维. Fam 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto X$, "将每一组捏成一个点";
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}, X \mapsto (\mathrm{id} \colon X \to X)$, "将一个集合每个点当作一组";
- $\Gamma \colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto W$, "忘记分组";
- $\mathrm{codisc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}$, $X \mapsto (X \to \{*\})$, "将一个集合整体当作一组".

例 5.1.3 (单纯集)

单纯集范畴 sSet 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, 即 X 的连通分支的集合;
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, 将集合 X 对应到常值单纯集 (也就是离散单纯集) X;
- $\Gamma \colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X_0 = \mathrm{Hom}(\Delta^0, X)$;
- $\mathrm{codisc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, $\mathrm{codisc}(X)_n := X^{n+1}$.

例 5.1.4 (光滑空间)

光滑空间范畴 $\mathsf{SmoothSp} = \mathrm{Sh}(\mathsf{CartSp})$ (例 **??**) 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{SmoothSp} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X(\mathbb{R}^1) \rightrightarrows X(\mathbb{R}^0))$, 其中两个态射分别是层 X 取值于 $0, 1 \colon \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^1$ (简而言之, $\Pi_0(X)$ 是 X 的道路连通分支的集合);
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{SmoothSp}$, 将集合 X 对应到 "离散光滑空间" X;

- $\Gamma\colon \mathsf{SmoothSp} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X(\mathbb{R}^0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{SmoothSp}}(\mathbb{R}^0, X)$, 将光滑空间对应到其底层集合;
- $\mathrm{codisc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{SmoothSp}$, $\mathrm{codisc}(X)(\mathbb{R}^n) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbb{R}^n, X)$.

第 A 章　∞-范畴论的补充知识

A.1　∞-范畴的单纯集模型

粗略地说, 一个 ∞-范畴含有如下成分: 对象, 对象之间的态射, 态射之间的 2-态射, $\cdots$, k-态射之间的 $(k+1)$-态射, 以至于无穷. 我们使用的 ∞-范畴又称 $(\infty,1)$-范畴, 意为对所有 $k>1$, k-态射都可逆.

在实践中, ∞-范畴有许多不同而可以互相转化的模型, 就像一个算法由许多不同的编程语言实现. 单纯集就是一种实用的 "编程语言", 它提供了从集合开始模拟出 ∞-范畴的方法.

定义 A.1.1 (角形)

回忆单纯集 Δ^n 为 $[n]\in\Delta$ 在米田嵌入下的像 $\text{よ}([n])$. 对于单射 $[m]\to[n]$, 设其像为 J, 定义单纯集 Δ^J 为对应的态射 $\Delta^m\to\Delta^n$ 的像 (作为 Δ^n 的子对象). 对于 $0\le k\le n$, 定义

$$\Lambda^n_k := \bigcup_{k\in J\neq[n]} \Delta^J,$$

称为*角形* (horn). 其中对应 $0<k<n$ 的角形称为*内角形* (inner horn).

角形是用来描述单纯集模型 ∞-范畴中一些结构的图形. 如下是角形 Λ^2_k $(k=0,1,2)$ 的示意图. 可以看到它们是互不同构的单纯集 (尽管它们的几何实现都是互相同胚的), 其中内角形 Λ^2_1 中的两个箭头可以复合, 而 Λ^2_0,Λ^2_2 中的箭头不能复合.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 & & & 1 \arrow[dr] & & & 1 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 & 0 \arrow[ur] & & 2 & 0 \arrow[rr] & & 2
\end{tikzcd}$$

Λ^2_0　　Λ^2_1　　Λ^2_2

定义 A.1.2 (∞-范畴)

∞-范畴 (又称拟范畴) 是满足如下条件的单纯集 $\mathcal{X}$: 对所有整数 $0<k<n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n,\mathcal{X})\to\mathrm{Hom}(\Lambda^n_k,\mathcal{X})$$

是满射; 换言之, 如下提升总存在 (但不要求唯一):

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & X. \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] &
\end{tikzcd}$$

称之为内角形的填充 (filler).
设单纯集 $\mathcal{X}$ 是 ∞-范畴. 定义

- $\mathcal{X}$ 中的对象为 X_0 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^0\to X$;
- $\mathcal{X}$ 中的态射 (箭头) 为 X_1 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^1\to X$, 对象 x 上的恒等态射 id_x 为映射 $\Delta^1\to\Delta^0\xrightarrow{x}X$;
- $\mathcal{X}$ 中的实心三角形为 X_2 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^2\to X$, 对于实心三角形 $\begin{tikzcd}[sep=small] & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z, \end{tikzcd}$ 称 h 为 f 与 g 的一个复合. (很明显, 复合不是唯一的.) 若 id_x 为 f,g 的一个复合, 则称 g 为 f 的一个逆. (当然, 逆也不是唯一的.)

定义 A.1.3 (单纯集的对偶)

考虑函子 $(-)^{\mathrm{op}}\colon\Delta\to\Delta$. 对于单纯集 $\mathcal{X}$, 定义其对偶 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}:=\mathcal{X}\circ(-)^{\mathrm{op}}\colon\Delta\to\mathsf{Set}$.

例 A.1.4 (普通范畴的脉)

回忆一个普通范畴 $\mathcal{C}$ 的脉 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ (例 **??**) 定义如下,

$$\mathrm{N}\mathcal{C}_n=\mathsf{Fun}(0\to1\to\cdots\to n,\mathcal{C}),$$

即 $\mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ 的元素是 $\mathcal{C}$ 中连续的 n 个箭头. 由于对任意 $0<k<n$, Λ^n_k 都包含一条折线 $0\to1\to\cdots\to n$, 故映射 $\Lambda^n_k\to\mathrm{N}(\mathcal{C})$ 总能提升为 $\Delta^n\to\mathrm{N}(\mathcal{C})$, $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ 是一个 ∞-范畴.

注 A.1.5 (∞-范畴单纯集模型的注意事项)

定义 A.1.2 中有两点需要注意; 如果忽视这两点, 就会得到另外两种东西.

- 只有内角形可以填充. 若所有角形都可以填充, 则可证明 $\mathcal{X}$ 的所有态射都可逆, 我们称之为 *∞-群胚*.
- 内角形填充不要求唯一. 若内角形填充存在且唯一, 则 $\mathcal{X}$ 实际上来自一个普通范畴的脉. 直观上, ∞-范畴是一种 "弱化" 的范畴, 其中的复合是在同伦意义下谈论的. 可以证明[1], 对 ∞-范畴中的两个态射 $f\colon x \to y, g\colon y \to z$, 其所有可能的复合构成一个*可缩 Kan 复形* (定义 A.1.9).

因此, ∞-范畴可视为普通范畴与 ∞-群胚的共同推广.

命题-定义 A.1.6 (∞-群胚, Kan 复形模型)

定义 *∞-群胚* (又称 *Kan 复形*) 是满足如下等价条件之一的 ∞-范畴 $\mathcal{X}$:

- $\mathcal{X}$ 中所有态射都可逆;
- $\mathcal{X}$ 中所有角形都可填充, 即对所有整数 $0 \leq k \leq n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$$

  是满射.

证明. [未完成:] □

例 A.1.7 (基本 ∞-群胚)

拓扑空间 X 的奇异单纯集 $\mathrm{Sing}\, X$ 是 ∞-群胚, 称为其*基本 ∞-群胚* $\pi_\infty(X)$.

命题-定义 A.1.8 (函子, 函子范畴)

定义 ∞-范畴之间的*函子*为单纯集的映射. 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 与任意单纯集 A, 单纯集的指数对象 $\mathcal{X}^A$ 都是 ∞-范畴. 特别地, 对于无穷范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 定义*函子范畴* $\mathsf{Fun}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. 函子范畴中的态射称为*自然变换* (换言之, 两个函子 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 之间的自然变换是单纯集映射 $\Delta^1 \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$).

[1] https://kerodon.net/tag/0078

定义 A.1.9 (范畴等价, 可缩)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 之间的函子 $u\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, 称 u 为一个等价是指存在函子 $v\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, 以及两个可逆的自然变换 $uv \to \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \to vu$. 称等价于 Δ^0 的 ∞-范畴是可缩的.

定义 A.1.10 (态射集)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 以及其中的对象 x, y, 定义单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y)$ 为如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \arrow[d, "{(s,t)}"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x,y)}"'] & \mathcal{X} \times \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

其中 $s, t\colon \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ 将 $\mathcal{X}$ 的态射对应到其起点与终点.
更一般地, 对 $\mathcal{X}$ 中 $n+1$ 个对象 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0,\cdots,x_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^n, \mathcal{X}) \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x_0,\cdots,x_n)}"'] & \mathcal{X}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

如果 ∞-群胚是空间的模型, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y)$ 就是两点 x, y 之间的道路的空间.

例 A.1.11

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-群胚, x 为其中的对象, 那么单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, x)$ 在同伦论上又叫环路空间 $\Omega(\mathcal{X}, x)$, 其连通分支的集合给出基本群 $\pi_1(\mathcal{X}, x)$.

如下命题表示我们考虑的 ∞-范畴中 “k-态射都可逆” $(k > 1)$.

命题 A.1.12

对 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 中的任意两个对象 x, y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y)$ 是 ∞-群胚.

同伦

命题-定义 A.1.13 (态射的同伦, 同伦范畴)

对于两个态射 $f, g\colon x \to y$, 称 f 同伦于 g 是指 g 为 f 与 id_y 的一个复合; 记 $f \sim g$. 态射的同伦为等价关系.
对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 定义其*同伦范畴* $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 为如下的范畴: $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象即为 $\mathcal{X}$ 的对象, 态射为 $\mathcal{X}$ 中态射的同伦类, 态射的复合是良定义的.

证明. 我们证明同伦是一个等价关系: 由下面的示意图以及 ∞-范畴的定义, 可知若 $f \sim g$ 则 $g \sim f$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & y \\
y \arrow[r, "\mathrm{id}_y"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_y"] & y \arrow[u, "\mathrm{id}_y"']
\end{tikzcd}$$

□

有趣的是, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ (视为单纯集), 同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 正是 $\mathcal{X}$ 在 Cat 中的几何实现 (卷 1 例 A.4.14). 它是将 ∞-范畴 "截断" 为 1-范畴的结果.

命题 A.1.14

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, 考虑函子 $\mathcal{X} \to \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}))$ 将 $\mathcal{X}$ 的点映射到 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象, n-单形映射到 $\mathrm{Ho}(X)$ 的连续 n 个态射. 那么这个函子给出了范畴的同构

$$|\mathcal{X}| \simeq \mathrm{Ho}(\mathcal{X}),$$

其中 $|-|$ 是卷 1 例 A.4.14 提到的脉函子的左伴随.

同伦范畴还可通过单纯范畴定义: 由定义 A.1.23, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, $\mathfrak{C}[\mathcal{X}]$ 是一个 sSet-充实范畴; 将其中的态射单纯集替换为连通分支便得到同伦范畴. 见 HTT [2] 定义 1.1.5.14. 总结起来, 我们有如下图表.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[rr, shift left, "\mathrm{Ho}"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{C}[-]"] & & \mathsf{Cat} \arrow[ll, shift left, "\mathrm{N}"] \arrow[dl, shift left, "i"] \\
& \mathsf{sCat} \arrow[ul, shift left, "\mathrm{N}^c"] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{ho}"] \arrow[ur, phantom, "\perp"] &
\end{tikzcd}$$

我们还需要描述 ∞-范畴的全子范畴.

定义 A.1.15 (全子范畴)

设 $\mathcal{C}$ 是 ∞-范畴, $\mathcal{S} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 是其同伦范畴的子范畴. 定义 $\mathcal{S}$ 张成的 $\mathcal{C}$ 的全子范畴为如下 (作为单纯集的) 拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \times_{\mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))
\end{tikzcd}$$

单纯范畴

∞-范畴的另一种模型是用单纯范畴描述的, 其优点包括

- 用单纯范畴模型方便给出某些具体的 ∞-范畴以及函子;
- 单纯范畴中态射的复合唯一定义;

但这种模型的同伦论较难处理.

定义 A.1.16 (单纯范畴)

单纯范畴是指充实于 sSet 的范畴. 具体地, 我们有一个对象集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 对 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有一个单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 对 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有恒等态射 $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Hom}(x, x)$, 对 $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有单纯集映射

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z),$$

满足结合律与幺元律.

等价地, 单纯范畴也可定义为小范畴范畴 Cat 中的内蕴单纯集 $\mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$, 满足"对象的单纯集" $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \mathrm{Ob} \circ \mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 是常值单纯集.

记 (小) 单纯范畴的范畴为 sCat, 其中的态射是单纯范畴之间的 sSet-充实函子.

定义 A.1.17 (纤维性单纯范畴)

若单纯范畴 $\mathcal{C}$ 的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 均为 Kan 复形 (即前面定义的 ∞-群胚), 则称之为纤维性 (fibrant) 单纯范畴; 它是 ∞-范畴的另一种模型. 换言之, ∞-范畴可视为充实于 ∞-群胚的范畴.

例 A.1.18 (拓扑空间范畴)

拓扑空间范畴 Top 具有单纯范畴结构:

$$\mathrm{Hom}(X,Y)_n := \{连续函数\ |\Delta^n| \times X \to Y\ \}.$$

命题-定义 A.1.19 (∞-范畴的极大子 ∞-群胚)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴. 记 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为所有边都可逆的单形 $\Delta^n \to \mathcal{X}$ 构成的子单纯集, 则 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为 $\mathcal{X}$ 的*极大子 ∞-群胚*, 即任何 ∞-群胚到 $\mathcal{X}$ 的函子唯一地穿过 $\mathcal{X}^{\simeq}$; ∞-群胚 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 又称 $\mathcal{X}$ 的*核心* (core). (关于普通范畴的极大子群胚, 见例 **??**.)

例 A.1.20 (∞-范畴的单纯范畴)

记 ∞Cat 为 (小) ∞-范畴的范畴 (它是一个普通范畴), 对 ∞-范畴 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 定义 $\mathrm{Hom}_{\infty\mathsf{Cat}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 为 $\mathsf{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 的极大子 ∞-群胚; 这样 ∞Cat 构成一个纤维性单纯范畴.

例 A.1.21 (链复形范畴)

设 R 为环, $\mathsf{Ch}(R)$ 为 R 上的链复形的范畴. 回忆 R 上的*链复形*是指 R-模范畴中的一个图表

$$M_\bullet = \cdots \to M_2 \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0 \xrightarrow{\partial} M_{-1} \xrightarrow{\partial} M_{-2} \to \cdots,$$

满足 $\partial \circ \partial = 0$. $\mathsf{Ch}(R)$ 可赋予单纯范畴结构. 首先构造 $\mathbb{Z}$ 上的链复形 $C_\bullet(\Delta^n)$: 对于 $0 \le k \le n$ 其第 k 位置是 Δ^n 的非退化 k-单形自由生成的 Abel 群, 边界映射 $\partial := \sum_{i=0}^{k}(-1)^i d_i$ 来自单形的面映射 d_i. 例如

$$C_\bullet(\Delta^2) = \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to 0 \to \cdots.$$

(熟悉代数拓扑的读者知道, $C_\bullet(X)$ 就是用于计算单纯同调 $H_\bullet(X)$ 的那个链复形.) 定义

$$\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(R)}(M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet(\Delta^n), N_\bullet).$$

这个范畴是 (现代的) 代数 K-理论的起点. 函子 $C_\bullet\colon \Delta \to \mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$ 给出的脉–几何实现伴随限制为单纯 Abel 群与非负位置链复形之间的范畴等价

$$\mathsf{sAb} \underset{\mathrm{N}}{\overset{|-|_{C_\bullet}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}} \mathsf{Ch}_{\ge 0}(\mathbb{Z}),$$

称为 *Dold–Kan 对应*.

定义 A.1.22 (偏序集的道路范畴)

对于偏序集 $(S,\leq)$, 定义其*道路范畴*为一个单纯范畴 $\mathrm{Path}(S)$, 其对象集为 S, 对两个元素 $x,y\in S$, 单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}(S)}(x,y)$ 是 "由 x 到 y 道路的空间", 它定义为所有形如 $\{x=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_m=y\}$ 的链构成的偏序集的脉, 其序关系为包含关系的反序 (最大元为 $x\leq y$). $\mathrm{Path}(S)$ 中态射的复合即是链的并.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left, "0\leq 2"] \arrow[rr, "0\leq1\leq2"'] \arrow[rr, phantom, bend left=15, "\Uparrow"] \arrow[dr, "0\leq1"'] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur, "1\leq2"'] &
\end{tikzcd}
$$

S $\qquad\qquad$ $\mathrm{Path}(S)$

定义 A.1.23 (单纯范畴的融贯脉)

考虑函子 $\mathrm{Path}\colon\Delta\to\mathsf{sCat}$, 其对应的脉–几何实现伴随 (命题 **??**, 但要使用 sSet-充实版本)

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[r, shift left, "{\mathfrak{C}[-]}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{sCat} \arrow[l, shift left, "\mathrm{N}^{\mathrm{c}}"]
\end{tikzcd}
$$

中的脉 N^{c} 称为单纯范畴的*融贯脉*[2](coherent nerve). 另一边, "几何实现" $\mathfrak{C}[-]$ 又称为拟范畴的 *Joyal 固化* (rigidification).

我们不加证明地陈述如下技术性引理.

命题 A.1.24

纤维性单纯范畴的融贯脉是 ∞-范畴.

定义 A.1.25 (∞-范畴的 ∞-范畴)

定义 ∞-范畴的 ∞-范畴, 以及 ∞-群胚的 ∞-范畴为

$$\infty\mathcal{C}at := \mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Cat}),\quad \infty\mathcal{G}pd := \mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Gpd}).$$

正如集合范畴 Set 是范畴的 "原型", 在 ∞-范畴中, 扮演这个角色的是 $\infty\mathcal{G}pd$. 它可视为某种 "空间" (不一定是传统意义上的拓扑空间) 的 ∞-范畴, 其中各阶态射表达了空间之

[2] 又称同伦融贯脉 (homotopy coherent nerve).

间映射的各阶同伦; 许多作者直接称其为空间的 ∞-范畴, 如 HTT [2] 1.2 节. 我们将会看到, 类似于 Set 是终范畴 1 自由生成的余完备范畴, $\infty\mathcal{G}pd$ 是 1 自由生成的余完备 ∞-范畴.

A.2 Ind 完备化

命题 A.2.1

对于范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层 F, 如下条件等价:

- $F \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$;
- $\mathcal{C}_{/F}$ 为滤范畴.

进一步, 若 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 具有有限极限, 上述条件还等价于

- $F \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grpd}_\infty$ 保持有限极限.

命题 A.2.2 (关于滤余极限的完备化, 卷 1 A.5.9)

设 $\mathcal{C}$ 为小 ∞-范畴, $\mathcal{D}$ 为具有滤余极限的范畴, 则函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 等同于保持滤余极限的函子 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$.

A.3 可表现 ∞-范畴

定义 A.3.1 (可达 ∞-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, λ 为正则基数. 若存在小 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}_\lambda(\mathcal{D})$, 则称 $\mathcal{C}$ 为 λ-可达范畴.

定义 A.3.2 (可表现 ∞-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, 若 $\mathcal{C}$ 为可达 ∞-范畴, 且具有小余极限, 则称之为可表现 ∞-范畴.

参考文献

[1] Denis-Charles Cisinski. *Formalization of Higher Category Theory*. 课程笔记. 记录人: Bastiaan Cnossen. 2023. URL: https://elearning.uni-regensburg.de/course/view.php?id=64170.

[2] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.

[3] Emily Riehl and Michael Shulman. *A type theory for synthetic ∞-categories*. 2023. arXiv: 1705.07442 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/1705.07442.

[4] Urs Schreiber. *Diifferential Cohomology in a Cohesive Topos*. (尚未出版). URL: https://ncatlab.org/schreiber/files/dcct170811.pdf.

[5] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: https://homotopytypetheory.org/book, 2013.