盲人摸象

意象理论讲义

王进一

jin12003@163.com

QQ 2917905525

2023 年夏至今

此版本编译时间: 2024 年 6 月 6 日

这是一本正在施工的讲义. 目前我迫切需要读者的意见!

目录

第 0 章　前言

[未完成：重写]

每一个意象 (topos) 都是一个数学宇宙. 集合范畴 Set 是最简单和最重要的意象, 对应着 “通常数学” 的宇宙. 一般的意象从外部看有远比集合范畴丰富的结构, 其范畴论性质却与 Set 几乎相同. 逻辑学上, 每个意象都提供了一种语言以完全在范畴 “内部” 进行推理, 仿佛所处理的对象是普通集合一样. 对于熟悉的数学对象, 意象也可给我们新的视角; 一些关系在特定意象的语言中很简洁, 而在通常数学语言中则不然. 拓扑空间 X 上的层构成一个意象 $\mathrm{Sh}(X)$; 由此, 意象可视为空间的概念的推广. 意象理论的经典文献 *Sketches of an Elephant* [15] 的开头列举了意象更多的解读方式, 表明人们对它的理解正如盲人摸象一样.

本书对数学没有原创性的贡献, 其中几乎所有结果在 20 世纪已经为该领域的专家所熟知. 但是大部分内容几乎找不到成体系的中文资料 (除了李文威老师的*代数学方法* [29]), 这是我编写本书的动机之一. 内容的编排原则大致是使初学者最易接受, 并且提供启发性的观点, 从而使人能更快入门去看更多的资料. 本书收录的论证都是十分简单而直观的; 阅读本书虽不能让人成为本领域的专家, 但能让人发现一些事情并非想象的那样困难, 在将玄妙的概念祛魅的过程中产生信心和乐趣. 书中许多内容的含入仅仅是由于个人的品味, 例子的选取受到了本人的微分几何与代数拓扑背景的影响. 一些证明出自本人的思考, 因此错漏是难免的. 限于水平, 书中许多细节无法深究, 包括有关集合论的 “小” 性的问题, 以及其它涉及到数学基础的问题. 许多术语没有通行的中文版本, 姑且使用了本人的翻译.

在编写本书的过程中, 我得到了 Olivia Caramello 教授, 以及杨家同, 陈潇扬等友人的帮助和鼓励. 在本书参考的文献中, 最重要的是一个名叫 nLab 的网站, 而其中最主要的贡献者是 Urs Schreiber 教授. 向他们表达诚挚的感谢.

Je vous souhaite le meilleur succès. Ce serait magnifique que vous puissiez étudier la théorie des topos de Grothendieck et travailler dans ce domaine. Travaillez beaucoup, soyez patient, ayez bon courage et vos efforts seront récompensés.

Laurent Lafforgue[1]

Once you see at least one example and you do it yourself and you experience the kind of enlightenment it brings, you will be convinced forever.

Olivia Caramello[2]

[1]这是 Lafforgue 教授在一次讲座之后写给作者的话. “祝愿你获得最大的成功. 你能够学习 Grothendieck 意象理论并在这个领域工作, 是一件美妙的事情. 努力学习, 保持耐心, 勇往直前, 你的努力将会得到回报.” Lafforgue 教授是 Caramello 教授多年的合作者.

[2]这是 Caramello 教授在与作者的采访中关于 topos 理论的评论. Caramello 教授是意象理论和逻辑学专家.

第 1 章 意象的范畴论性质

> The theory of abelian categories served as the "right" generalization for the category of abelian groups. So topoi serve for—no less—the category of sets.
>
> Peter Freyd, *Aspects of Topoi*

范畴是一个广泛应用的概念, 然而它的结构比较单薄, 在一般的范畴中能做的事情十分有限. 为了让范畴更有用, 我们就要要求合适的性质. Lawvere 在范畴论的层面研究了这样一个问题: 集合范畴 Set 具有什么样的性质, 使得它能作为数学的基础. 他将这些性质提炼成为意象 (topos) 的概念.

本章的目的是展现集合范畴中的许多构造实际上具有范畴论上的一般性, 也为形式上统一这些构造的 “意象的内语言” 埋下伏笔.

1.1 范畴论基本概念

极限与余极限

范畴中常见的极限如下.[1]

- *乘积* (product) 是离散图 (若干个无关的对象) 的极限;
- *等化子* (equalizer) 是形如 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 的图的极限;
- *拉回* (pullback) 是形如 $\begin{array}{ccc} & & \bullet \\ & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$ 的图的极限;
- *终对象*是空图的极限. 终对象也可视为 0 个对象的积, 因此我们将终对象记作 1. 终对象到另一对象 c 的态射称为 c 的*整体元素* (global element)[2].

我们关注的一类极限是*有限图* (有限个对象和有限个态射组成的图) 的极限, 称为*有限极限*. (空图的极限也是一种有限极限.)

范畴中常见的余极限如下.

- *二元和*是形如 $\bullet \qquad \bullet$ 的图的余极限;
- *余等化子* (coequalizer) 是形如 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 的图的余极限;
- *推出* (pushout) 是形如 $\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \\ \bullet & & \end{array}$ 的图的余极限;
- *始对象*是空图的余极限. 始对象也可视为 0 个对象的和, 因此我们将始对象记作 0.

使用上面的某些 (余) 极限就可以表达出所有的有限 (余) 极限.

[1] 我们假设读者对这些概念有一定的了解, 因此这里仅作一列举.

[2] 这一称呼来自层的整体截面.

命题 1.1.1

对于范畴 $\mathcal{C}$, 如下条件等价:	对于范畴 $\mathcal{C}$, 如下条件等价:
(1) 存在有限极限[3];	(1) 存在有限余极限;
(2) 存在有限积与等化子;	(2) 存在有限余积与余等化子;
(3) 存在终对象与拉回.	(3) 存在始对象与推出.

证明. 由对偶性, 我们只需证明左边的命题. 由定义, (1) 蕴含 (2) 和 (3).

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 设 $F\colon I \to \mathcal{C}, i \mapsto F_i$ 是任意有限图, 考虑有限积

$$P = \prod_i F_i, \quad Q = \prod_{i \to j} F_j$$

(其中下标 $i \to j$ 取遍指标范畴 I 的所有态射) 以及两个态射 $P \to Q$, 一个是 $(x_i)_i \mapsto (F_{i\to j}(x_i))_{i\to j}$, 另一个是 $(x_i)_i \mapsto (x_j)_{i\to j}$. 两个态射的等化子即是极限 $\lim_i F_i$. 注意态射 P, Q 的定义仿佛使用了 "集合" 的语言, 这可以视为一种形式的记号; 无论如何, 它很容易翻译为范畴语言.

(3) $\Rightarrow$ (2) 的证明. 到终对象的拉回给出了有限积, 而对于两个态射 $f, g\colon X \to Y$, 如下拉回给出了等化子:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{eq}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "{(f,g)}"'] & Y \times Y, \end{tikzcd}$$

其中 $\Delta = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y)\colon Y \to Y \times Y$ 是对角线. □

指数对象与积闭范畴

集合范畴中, 两个集合间的态射仍构成一个集合, 称为映射集合. 在某些范畴 $\mathcal{C}$ 中, 两个对象之间有一个 $\mathcal{C}$ 的对象充当了 "映射集合" 的角色, 称为**指数对象** (exponential object).

定义 1.1.2 (指数对象, 积闭范畴)

设范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限积. 对固定的对象 X, 若存在函子 $(-)^X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 构成 $(-) \times X$ 的右伴随[4], 即有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y), \tag{1.1}$$

[3] "存在有限极限" 是 "存在所有的有限极限" 的简便说法.

则称 X 可作指数 (exponentiable), 称 Y^X 为指数对象 (exponential object), 或称内蕴态射对象 (internal hom-object).
若 $\mathcal{C}$ 的所有对象均可作指数, 则称 $\mathcal{C}$ 为积闭范畴 (cartesian closed category), 其中 “闭” 即指数对象的存在性.

指数对象在数学中随处可见.

例 1.1.3 (紧开拓扑)

在拓扑空间范畴 Top 中, 一般的对象不一定可作指数, 但局部紧 Hausdorff 空间都是可作指数的. 若 X 是局部紧空间, Y 是任意拓扑空间, 指数对象 Y^X 上的拓扑称为紧开拓扑 (compact-open topology), 这个名字是因为它可由如下开集生成: 对紧集 $K \subset X$ 与开集 $O \subset Y$, 取 X 到 Y 所有满足 $f(K) \subset O$ 的映射构成的集合.
拓扑学中, 人们常说 “我们在一个方便的拓扑空间范畴中工作”[5], 即要求所考虑的范畴包含我们感兴趣的空间, 且具有积闭等性质. 一个比较方便的范畴是紧生成弱 *Hausdorff* 空间范畴 CGWH. Johnstone [14] 构造了一个方便的拓扑空间范畴, 且它是意象.

例 1.1.4 (函子范畴)

两个范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 之间的函子构成一个范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 这是范畴的范畴 Cat 中的指数对象.

命题 1.1.5

对于积闭范畴, 指数对象实际上构成一个双函子 (也即乘积范畴出发的函子) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y) \mapsto Y^X$.

在集合范畴中, 给定一个映射 $f\colon X \to Y$ 与一个元素 $x \in X$, 我们可对 f 在 x 处取值得到 Y 的元素 $f(x)$; 类似地, 在一个积闭范畴中我们有 $Y^X \times X$ 到 Y 的一个 “取值” 映射.

定义 1.1.6 (取值映射)

在 (1.1) 中取 $Z = Y^X$, 那么 $\mathrm{id}_{Y^X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^X, Y^X)$ 在另一边对应的态射称作取值映射 (evaluation map) $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$. 换言之, 取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$ 是伴

[4] 指数对象可对一般的幺半范畴 (monoidal category) 定义, 这里我们只考虑所谓积幺半范畴 (cartesian monoidal category), 即以乘积定义的幺半范畴.

[5] `https://ncatlab.org/nlab/show/convenient+category+of+topological+spaces`

随 $(-) \times X \dashv (-)^X$ 的余单位.

指数对象有与数的乘方类似的规律.

命题 1.1.7 (指数律)

在积闭范畴中, 对任意对象 X, Y, Z 有

$$(Z^Y)^X \simeq Z^{Y \times X}.$$

证明. 由指数对象的性质, 有自然同构

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(W, (Z^Y)^X) &\simeq \operatorname{Hom}(W \times X, Z^Y) \\ &\simeq \operatorname{Hom}(W \times X \times Y, Z) \simeq \operatorname{Hom}(W, Z^{Y \times X}).\end{aligned}$$

由米田引理, 结论得证. □

命题 1.1.8 (分配律)

在有二元和的积闭范畴中,

$$Z \times (X + Y) \simeq Z \times X + Z \times Y.$$

证明. 这是因为 $(-) \times W$ 作为 $(-)^W$ 的左伴随保持余极限 (命题 A.2.5). □

命题 1.1.9

在有二元和的积闭范畴中,

$$Z^{X+Y} \simeq Z^X \times Z^Y.$$

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(W, Z^{X+Y}) &\simeq \operatorname{Hom}(W \times (X + Y), Z) \\ &\simeq \operatorname{Hom}(W \times X + W \times Y, Z) && \text{(分配律)} \\ &\simeq \operatorname{Hom}(W \times X, Z) + \operatorname{Hom}(W \times Y, Z) \\ &\simeq \operatorname{Hom}(W, Z^X) \times \operatorname{Hom}(W, Z^Y) \\ &\simeq \operatorname{Hom}(W, Z^X \times Z^Y).\end{aligned}$$

□

命题 1.1.10

在积闭范畴中,
$$(Z \times Y)^X \simeq Z^X \times Y^X.$$

证明. 这是因为 $(-)^X$ 作为 $(-) \times X$ 的右伴随保持极限 (命题 A.2.5). □

子对象分类子

对于集合 X 的子集 $U \subset X$, 定义其特征函数 (characteristic function) $\chi_U : X \to \{0,1\}$,
$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in U, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$
(我们可将特征函数 $\chi_U(x)$ 视为 "含一个变量 x 的命题", 当且仅当 $x \in U$ 时命题为真.) 如此, X 的子集一一对应于 X 到 $\{0,1\}$ 的映射. 这就是说, 集合 $\{0,1\}$ "分类" (classify) 了集合的子集.

定义 1.1.11 (子对象)

在一般的范畴中, 我们称指向 X 的单态射 $U \to X$ 的同构类为 X 的子对象 (subobject), 其中单态射的同构是指形如
$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, hook] \arrow[d, "\simeq"', shift right] & \\ \widetilde{U} \arrow[r, hook] \arrow[u, shift right] & X \end{tikzcd}$$
的交换图.

范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 的子对象构成一偏序集 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$, 其序关系为 "包含" 关系. 若子对象 $U \hookrightarrow X$ 作为嵌入映射可分解为 $U \hookrightarrow V \hookrightarrow X$, 则称 U 包含于 V.

在范畴 $\mathcal{C}$ 具有拉回时, 子对象集合有函子性.

定义 1.1.12 (子对象函子)

假设范畴 $\mathcal{C}$ 具有拉回. 定义子对象函子
$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set},$$
将对象 X 对应到其子对象的集合, 态射对应到子对象的拉回.

上述定义的合法性来自如下命题.

命题 1.1.13

在任何范畴中拉回保持子对象; 即对任意态射 $f\colon X \to Y$ 以及子对象 $i\colon V \to Y$, 只要存在拉回 $U = X \times_Y V$, 就有 $j = f^* i\colon U \to X$ 是 X 的子对象.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"'] & V \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

证明. 设 j 余等化 $\alpha, \beta\colon Z \to U$. 那么 $fj = ip$ 也余等化 α, β. 由 i 为单态射, 知 p 余等化 α, β. 由拉回的性质, 知 $\alpha = \beta$. 这说明 j 为单射. □

定义 1.1.14 (子对象分类子)

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在拉回. 若子对象函子 $\mathrm{Sub}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可表, 即存在对象 Ω 使得有自然同构

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega),$$

则称 Ω 为 $\mathcal{C}$ 的*子对象分类子* (subobject classifier).

子对象分类子还有如下的等价定义.

定义 1.1.15 (子对象分类子, 等价定义)

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在拉回以及终对象 1. 若存在满足如下条件的对象 Ω 以及单射 $\top\colon 1 \to \Omega$, 则称其为 $\mathcal{C}$ 的*子对象分类子* (subobject classifier): 对任意单射 (子对象) $U \to X$ 存在唯一的*特征函数* (characteristic map) $\chi_U\colon X \to \Omega$ 使得下图为拉回.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

我们也称 $\top\colon 1 \to \Omega$ 为*万有子对象* (universal subobject).

有了子对象分类子, 子对象等同于到 Ω 的态射, 从而子对象的拉回不过是到 Ω 的态射的复合.

$$\begin{tikzcd} f^*V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

注 1.1.16

“万有子对象” 中的 “万有” 与拓扑学中 “万有 G-主丛” 中 “万有” 的含义相同.

上述定义中 “1 是终对象” 的要求可不用提, 因为它蕴含于后面的泛性质中: 对任何对象 X 考虑子对象 $\mathrm{id}\colon X \to X$, 在拉回图 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{1} \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$ 中, 由 χ 的唯一性以及 $\top$ 是单射可得到 α 的唯一性, 这说明 $\widetilde{1}$ 就是终对象 1.

符号 $\top$ (LaTeX 代码: `\top`) 读作 “真”, 后面也将用到另一个元素 $\perp\colon 1 \to \Omega$ (`\bot`), 读作 “假”. 一般地, 态射 $1 \to \Omega$ 称为**真值** (truth value).

现在证明子对象分类子两种定义的等价性. 假设第一种定义 (1.1.14) 中的对象 Ω 存在, 我们需要给出第二种定义 (1.1.15) 所要求的单射 $\top\colon 1 \to \Omega$.

考虑 Ω 到自身的恒等映射 $\mathrm{id}\colon \Omega \to \Omega$, 它在同构 $\mathrm{Sub}(\Omega) \simeq \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega)$ 下对应一个子对象 $\widetilde{\top}\colon \widetilde{1} \to \Omega$.

对任意子对象 $U \to X$, 由交换图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{1} & \in & \mathrm{Sub}(\Omega) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, "沿\ \chi_U\ 拉回"'] & \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega) \arrow[d, "复合\ \chi_U"] & \ni & \mathrm{id}_\Omega \\ U & \in & \mathrm{Sub}(X) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(X, \Omega) & \ni & \chi_U \end{tikzcd}$$

我们得到 $\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{1} \arrow[d, "\widetilde{\top}"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & \Omega \end{tikzcd}$ 是一个拉回. 这说明 $\widetilde{\top}$ 就是 $\top$.

下面介绍一些子对象的例子.

例 1.1.17 (自身)

每个对象 X 都是自身的子对象; 严格地说, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 是一个子对象. 它的特征函数是 $\top_X\colon X \to 1 \xrightarrow{\top} \Omega$. 读者可验证下图确实是一个拉回:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\top_X"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

例 1.1.18 (整体元素)

任何整体元素 $1 \to X$ 是子对象.

例 1.1.19 (对角线)

假设二元积存在, 那么对任意对象 X, 对角线映射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是一个子对象 (因为它复合任意一个投影映射得到 id_X).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \times X \arrow[r, "\chi_\Delta"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

我们将它的特征函数 χ_Δ 记为 "Kronecker δ 函数" $\delta_X\colon X \times X \to \Omega$, 表示 X 上的相等关系.

例 1.1.20 (单元集)

"Kronecker δ 函数" $\delta_X\colon X \times X \to \Omega$ 对应的态射 $\{-\}_X\colon X \to \Omega^X$ 称为单元集映射 (singleton map), 在集合范畴中它将 X 的元素变为 X 的单元子集.
由下面的命题, $\{-\}_X$ 为单射, 从而它给出了 PX 的一个子对象, 即 "X 的单元子集的集合". 其特征函数

$$\sigma_X := \chi_{\{-\}_X}\colon PX \to \Omega$$

在直观上表示 X 的一个子集是否是单元集.

命题 1.1.21 (单元集映射是单射)

对任意对象 X, 单元集映射 $\{-\}_X\colon X \to \Omega^X$ 是单射.

证明. 对任意两个态射 $x, x'\colon U \to X$, 假设 $\{-\}_X \circ x = \{-\}_X \circ x'\colon U \to \Omega^X$, 那么由 δ_X 的定义有

$$\delta_X(x \times 1) = \delta_X(x' \times 1)\colon U \times X \to \Omega.$$

考虑下图,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "x"] \arrow[d, "{(1,x)}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \arrow[d] \\ U \times X \arrow[r, "x \times 1"'] & X \times X \arrow[r, "\delta_x"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

两个小方形均为拉回, 从而长方形为拉回. 因此左边的竖直箭头 $(1, x)\colon U \to U \times X$ 是一个子对象 (函数 x 的 "图像"), 其特征函数为 $\delta_X(x \times 1)$. 对于 x' 有同样的拉回图, 故 $(1, x)$ 与 $(1, x')$ 是相同的子对象. 由子对象相同的定义, 存在自同构 $h\colon U \to U$ 使得 $(1, x) \circ h = (1, x')$, 即 $h = 1, xh = x'$, 这说明 $x = x'$. $\square$

例 1.1.22 (等化子)

假设二元积存在, 那么等化子可表示为一个子对象: 态射 $f, g\colon X \to Y$ 的等化子是态射

$$X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega$$

对应的子对象. 对比命题 1.1.1 (3) ⇒ (2) 的证明.

例 1.1.23 (成员关系)

取值映射 (见定义 1.1.6) $\Omega^X \times X \to \Omega$ 对应的子对象是*成员关系* (membership relation) $\in_X \hookrightarrow \Omega^X \times X = P(X) \times X$.

注 1.1.24 (子对象, 谓词与广义元素)

集合的函数 $X \to \{\top, \bot\}$ 可视为定义在 X (的元素) 上的一个*谓词*, 也即输入 X 的元素 x, 输出 x 是否满足某个命题. X 自身作为子对象, 对应谓词 $\top$ (恒真); 对角线 $\Delta\colon X \to X \times X$ 对应谓词 "$x = y$"; 等化子 $\mathrm{eq}(f, g) \to X$ 对应谓词 "$f(x) = g(x)$".
态射 $A \to X$ 可视为 X 的*广义元素*. 设 $X \to \Omega$ 是谓词, 那么复合 $A \to X \to \Omega$ 可视为 Ω 的广义元素, 表示 "广义元素 $A \to X$ 满足谓词 $X \to \Omega$".

幂对象

集合 X 的幂集 (power set) $P(X)$ 是 X 所有子集的集合. 由于 X 的子集一一对应于 X 到 $\{\bot, \top\}$ 的映射, 我们有自然同构 $P(X) \simeq \{\bot, \top\}^X$.

定义 1.1.25 (幂对象函子)

设范畴 $\mathcal{C}$ 中存在子对象分类子和指数对象, 定义*幂对象* (power object)

$$P(X) := \Omega^X.$$

幂对象给出了函子 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

在上述定义中取 $X = 1$, 我们得到子对象分类子等于终对象的幂对象: $\Omega = P(1)$. 此时有同构

$$\mathrm{Hom}(1, P(X)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \Omega) \simeq \mathrm{Sub}(X),$$

也即 $P(X)$ 的整体元素一一对应于 X 的子对象.

幂对象还有一种独立于子对象分类子的定义. 注意到 (形式上) 有

$$\{X \times Y \text{ 的子对象}\} \simeq \mathrm{Hom}(X \times Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \Omega^X) \simeq \mathrm{Hom}(Y, PX),$$

这启发了如下定义.

定义 1.1.26 (幂对象, 另一种定义)

设范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限极限. 对象 X 的*幂对象*是一个对象 $P(X)$ 以及一个单射 $\in \hookrightarrow X \times P(X)$, 满足对任意对象 Y, Z 与单态射 $Z \to X \times Y$, 存在唯一的 $\chi_Z \colon Y \to P(X)$ 使得下图为拉回.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & \in \arrow[d, hook] \\ X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \chi_Z"'] & X \times P(X) \end{tikzcd}$$

另一个有趣的事实是, 由幂对象和子对象分类子, 我们可构造所有指数对象; 其思路是将函数表示为图像. 下面我们仅给出构造与直观, 证明细节见 [18] IV.2 节.

集合映射 $f \colon X \to Y$ 可视为 $X \times Y$ 的子集 $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, 称为映射的图像 (graph). $X \times Y$ 的子集 Γ 是某个函数 $X \to Y$ 的图像的充要条件是, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 y 使得 $(x, y) \in \Gamma$. 在意象中我们完全可以模仿这个构造.

- 考虑例 1.1.20 定义的函数 $\sigma_Y \colon PY \to \Omega$. 对于 $p \in PY$, $\sigma_Y(p)$ 直观上表示 "p 为单元集".

- 由成员关系 (例 1.1.23) $\in_{X \times Y} \colon X \times Y \times P(X \times Y) \to \Omega$ 可构造映射 $v \colon X \times P(X \times Y) \to PY$; 对于 $x \in X$ 与 $p \in P(X \times Y)$, $v(x, p)$ 直观上表示 "$\{y \mid p(x, y)\} \in PY$".

- 考虑复合映射 $\sigma_Y v \colon X \times P(X \times Y) \to \Omega$, 对于 $x \in X$ 与谓词 $p \in P(X, Y)$, $\sigma_Y v(p, x)$ 直观上表示 "存在唯一的 y 满足命题 $p(x, y)$".

- 进一步定义 $u \colon P(X \times Y) \to PX$ 为 $\sigma_Y v$ 对应的映射, 对于谓词 p, $u(p)$ 直观上表示 "$\{x \mid$ 存在唯一的 y 满足命题 $p(x, y)\}$".

定义 Y^X 为如下拉回, 这便完成了指数对象的构造. 在后面介绍的内语言中, 这表示 "函数 $X \to Y$ 等同于 $X \times Y$ 的满足特定条件的子集", 见例 4.1.17.

$$\begin{tikzcd} Y^X \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, hook, "\top_X"] \\ P(X \times Y) \arrow[r, "u"'] & PX \end{tikzcd}$$

俯范畴与局部积闭性

定义 1.1.27 (俯范畴)

范畴 $\mathcal{C}$ 在对象 X 上的*俯范畴* (over category, 又称切片范畴, slice category) $\mathcal{C}/X$ 的对象是 $\mathcal{C}$ 中指向 X 的态射, 两个对象 $Y \to X$, $Z \to X$ 之间的态射是如下的交换图.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

与俯范畴对偶的概念是*仰范畴* (under category) $X\backslash\mathcal{C}$, 即由对象 X 出发的态射构成的范畴. 另一种记号是将俯范畴与仰范畴分别记作 $\mathcal{C}_{/X}, \mathcal{C}_{X/}$.

俯范畴中极限, 余极限, 子对象等结构与原来的范畴密切相关. 容易验证如下事实.

命题 1.1.28 (俯范畴中的极限)

设 X 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象, 那么俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 中一个图的极限等同[a]于 $\mathcal{C}$ 中对应的图加上指向 X 的态射后的极限. 例如,

- (二元积) $\mathcal{C}/X$ 的两个对象 $Y \to X, Z \to X$ 的乘积是 $\mathcal{C}$ 中的拉回 $Y \times_X Z$;
- (等化子) $\mathcal{C}/X$ 中的两个态射 $f, g\colon Y \to Z$ 的等化子是 $\mathcal{C}$ 中的等化子;
- (终对象) $\mathcal{C}/X$ 的终对象是 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$.
- (拉回) $\mathcal{C}/X$ 中的拉回是 $\mathcal{C}$ 中的拉回.

[a]这里 “等同” 的意思是, 前者存在当且仅当后者存在, 且当两者存在时, 两者同构.

余极限的情况则更简单.

命题 1.1.29 (俯范畴中的余极限)

设 X 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象, 那么俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 中一个图的余极限等同于 $\mathcal{C}$ 中对应的图的余极限 (配备其到 X 的典范态射).

命题 1.1.30 (俯范畴中的子对象)

对任何范畴 $\mathcal{C}$, 俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 中 $Y \to X$ 的子对象

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

等同于 $\mathcal{C}$ 中 Y 的子对象 $W \hookrightarrow Y$. 当 $\mathcal{C}$ 有子对象分类子 Ω 且存在乘积时,

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}/X}(Y \to X) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/X}(Y, \Omega \times X \to X),$$

即 $\mathcal{C}/X$ 有子对象分类子 $\Omega \times X \to X$.

俯范畴的性质中, 非常重要的是各俯范畴以及原来的范畴 $\mathcal{C}$ 之间的关系, 也即换基 (change of base).

很明显, 俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 到原来的范畴 $\mathcal{C}$ 有一个 "遗忘"[6] 函子: 对于态射 $Y \to X$, 只保留对象 Y 而忘掉那个态射. 而 $\mathcal{C}$ 等价于俯范畴 $\mathcal{C}/1$ (假设 $\mathcal{C}$ 有终对象 1), 故上述函子的相对版本如下.

定义 1.1.31 (Σ-函子)

设 $\mathcal{C}$ 是范畴. 对态射 $f\colon X \to Y$, 定义函子 $\Sigma_f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$, 将 $\mathcal{C}/X$ 的对象 $Z \to X$ 对应到复合 $Z \to X \xrightarrow{f} Y$.
当 $Y = 1$ 是 $\mathcal{C}$ 的终对象时, $\mathcal{C}/1 \simeq \mathcal{C}$, 记上述函子为 $\Sigma_X\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$.

稍加观察即可得到如下命题.

命题 1.1.32

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在拉回, 那么对态射 $f\colon X \to Y$, 有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}/X \arrow[r, shift left, "\Sigma_f"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}/Y. \arrow[l, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

证明. 由拉回的泛性质, 如下两个交换图的信息是相同的:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr] \arrow[dr] & & f^*Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

这正说明 Σ_f 是 f^* 的左伴随. □

[6] 但严格来说这不是遗忘函子, 它一般没有对应的自由函子 (自由是遗忘的左伴随), 因为它一般不保持极限, 见命题 A.2.5.

注 1.1.33 (记号 Σ_f 的来由)

集合范畴中, 一个指向 X 的态射可视为 X 上的一个集合族, 也即 X 的每一点上有一个集合. 具体地, 我们有范畴等价

$$\mathsf{Set}/X \simeq \mathsf{Set}^X.$$

其中右边的 X 视为离散范畴. (Set 是集合丛的 "分类空间", X 到 Set 的函子等同于 X 上的集合丛.)

对集合映射 $f\colon X \to Y$, 拉回函子 $f^*\colon \mathsf{Set}/Y \to \mathsf{Set}/X$ 在另一边表现为 "重新标号" 函子 $f^*\colon \mathsf{Set}^Y \to \mathsf{Set}^X$,

$$\{A_y \mid y \in Y\} \mapsto \{A_{f(x)} \mid x \in X\},$$

其左伴随 $\Sigma_f\colon \mathsf{Set}^X \to \mathsf{Set}^Y$ 可写为

$$\{A_x \mid x \in X\} \mapsto \left\{ \sum_{f(x)=y} A_x \,\middle|\, y \in Y \right\},$$

即对 $f\colon X \to Y$ 的每个纤维上的集合求和. 特别地, $\Sigma_X\colon \mathsf{Set}^X \to \mathsf{Set}$ 可写为 $\{A_x \mid x \in X\} \mapsto \sum_{x\in X} A_x$, 即对 X 上一族集合求和. 更多细节可参考 [18] I.9 节.

例 1.1.34

在命题 1.1.32 中令 $Y = 1$, 以 X 表示唯一的态射 $X \to 1$, 得到伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}/X \arrow[r, shift left=1.2ex, "\Sigma_X"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}. \arrow[l, shift left=1.2ex, "X^*"] \end{tikzcd}$$

到 1 的态射的拉回为二元乘积, 故函子 $X^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/X$ 将对象 Z 对应到投影 $\mathrm{pr}_2\colon Z \times X \to X$ (直观: X 的每个点上都有一个 Z). 那么这对伴随的余单位为 $(-) \times X$.

前面讨论了 f^* 的左伴随. 令人惊讶的是, f^* 还有一个潜在的右伴随. 首先看绝对 (即 $Y = 1$) 的情形; 我们发现它和指数对象有关.

命题-定义 1.1.35 (Π-函子, 绝对情形)

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限极限. 那么 $(-) \times X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 有右伴随 $(-)^X$ 当且仅当 $X^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/X$ 有右伴随 $\Pi_X\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$.

证明. 假设 $X^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/X$ 有右伴随 $\Pi_X\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$. 定义 $(-)^X = \Pi_X \circ X^*$, 那么有自然同

构

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z^X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Pi_X \circ X^* Z) && (\text{定义}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/X}(X^* Y, X^* Z) && (\Pi_X \text{ 是 } X^* \text{ 的右伴随}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma_X \circ X^* Y, Z) && (\Sigma_X \text{ 是 } X^* \text{ 的左伴随}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \times X, Z).
\end{aligned}
$$

另一方面, 假设 $(-) \times X \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 有右伴随 $(-)^X$. 对于 $f \colon Z \to X$, 定义 $\Pi_X(f)$ 为如下的拉回,

$$
\begin{tikzcd}
\Pi_X(f) \arrow[r] \arrow[d] & Z^X \arrow[d, "f^X"] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X^X
\end{tikzcd}
$$

其中 $\mathrm{id}_X \colon 1 \to X^X$ 是 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ 在指数伴随下对应的 X^X 的元素, 并且由拉回的性质容易得到构造的函子性. 这个拉回的直观是 "$f \colon Z \to X$ 的截面的集合" (因为 f 的截面就是 X 到 Z 的态射, 使得它复合 f 后等于 id_X).

对 $\mathcal{C}$ 的对象 W, 有自然同构

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \Pi_X(f)) \\
\simeq &\left\{ h \colon W \to Z^X \mid f^X \circ h = \mathrm{id}_X \circ W \right\} \\
\simeq &\left\{ h \colon W \times X \to Z \mid f \circ h = \mathrm{pr}_2 \colon W \times X \to X \right\} \\
\simeq &\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/X}(X^* W, f).
\end{aligned}
$$

这证明了 Π_X 是 X^* 的伴随. □

注 1.1.36

正如 $\Sigma_X \colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$ 可理解为对 X 上一族对象求和, $\Pi_X \colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$ 可理解为对 X 上一族对象求积. 而 $X^* \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/X$ 是将对象 Y "复制 X 那么多份", 所以 $\Pi_X \circ X^*(Y)$ 就是将 X 那么多个 Y 相乘, 也就是 Y^X.

相对的情形引出了*局部积闭范畴*的概念.

定义 1.1.37 (局部积闭范畴)

称范畴 $\mathcal{C}$ 为*局部积闭范畴* (locally cartesian closed category, LCCC) 是指 $\mathcal{C}$ 在任何对象 X 上的*俯范畴* $\mathcal{C}/X$ 为积闭范畴.

注 1.1.38

通常人们还会假定局部积闭范畴 $\mathcal{C}$ 有终对象 1, 从而 $\mathcal{C}$ 是积闭范畴, 因为 $\mathcal{C}/1 \simeq \mathcal{C}$. 积闭范畴的定义要求有限积, 故局部积闭范畴中存在拉回, 从而存在有限极限.

命题-定义 1.1.39 (Π-函子)

设范畴 $\mathcal{C}$ 有一切有限极限. 那么 $\mathcal{C}$ 是局部积闭范畴当且仅当对任何态射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 有右伴随 Π_f.

证明. 注意到

$$(\mathcal{C}/Y)/f \simeq \mathcal{C}/X,$$

这个命题化为绝对情形 (命题 1.1.35). □

总结起来,

命题 1.1.40 (俯范畴之间的三元伴随)

对于存在有限极限的局部积闭范畴, 对每个态射 $f\colon X \to Y$ 有三元伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}/X \arrow[r, bend left, "\Sigma_f"] \arrow[r, bend right, "\Pi_f"'] & \mathcal{C}/Y. \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

由于 f^* 同时有左右伴随, 我们得到 f^* 同时保持极限和余极限. 拉回也保持子对象分类子, 即 $\Omega \times Y \to Y$ 的拉回是 $\Omega \times X \to X$ (命题 1.1.30). 下面我们证明拉回保持指数对象.

注 1.1.41

我们称 "拉回保持余极限" 的范畴具有*万有余极限* (universal colimits), 这个条件是 Giraud 公理 (3.10.1) 的一部分.

命题 1.1.42

对于存在有限极限的局部积闭范畴, 拉回 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 保持指数对象; 即对 $\mathcal{C}/Y$ 的对象 $g\colon Z \to Y, h\colon W \to Y$,

$$f^*\Big((Z \xrightarrow{g} Y)^{(W \xrightarrow{h} Y)}\Big) \simeq \big(f^*(Z \to Y)\big)^{f^*(W \to Y)}.$$

证明. 这是 Frobenius 互反律的性质 (命题 A.2.17, A.2.18) 的直接推论. □

1.2 意象

意象可由极少的几条性质来定义, 但需注意过短的定义可能会掩盖它的全貌.

定义 1.2.1 (意象)

意象是存在有限极限和子对象分类子的积闭范畴.

如上简洁的定义可以导出两个惊人的事实.

命题 1.2.2

意象中存在有限余极限.

命题 1.2.3 ("意象理论基本定理")

对意象 $\mathcal{C}$ 的任何对象 X, 俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 是意象.

这两个命题的证明都比较复杂, 感兴趣的读者可阅读 [18] IV.5, IV.7 节. 下面我们将承认这两个命题, 或将其加入意象的定义, 这对后面的理论无伤大雅.

例 1.2.4 (集合范畴)

集合范畴 Set 是最基础的意象.

例 1.2.5 ($\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$)

范畴 $\mathcal{C} = \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \simeq \mathsf{Set}^{\{1,2\}}$ 是一个意象, 其对象为一对集合 (X_1, X_2), 态射为一对映射 $\big(f_1 \colon X_1 \to Y_1, f_2 \colon X_2 \to Y_2\big)$, 终对象为 $(1,1)$. 对象 (X_1, X_2) 的子对象是一对子集 $(U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2)$, 对应一对特征函数 $\big(\chi_1 \colon X_1 \to \{\bot, \top\}, \chi_2 \colon X_2 \to \{\bot, \top\}\big)$. 我们看到, 这个范畴的子对象分类子为

$$(\top \colon 1 \to \{\bot, \top\}, \top \colon 1 \to \{\bot, \top\}).$$

例 1.2.6 (变集范畴 $\mathsf{Fun}(2, \mathsf{Set})$)

考虑 "箭头范畴" $2 = \{\bullet \longrightarrow \bullet\}$ 到 Set 的函子范畴 $\mathsf{Fun}(2, \mathsf{Set})$, 其对象为集合映射 $X_0 \to X_1$, 称之为变集 (varying set), 态射为左下图, 终对象为 $1 \to 1$, 子对象分类子

为右下图.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_0 & \longrightarrow & Y_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle\top}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\top} \\ \{\bot,\star,\top\} & \longrightarrow & \{\bot,\top\}\ (\star\mapsto\top) \end{array}$$

变集 $f\colon X_0 \to X_1$ 的子对象 $U_0 \to U_1$ 的特征函数 χ 为

$$\chi(x\in X_0) = \begin{cases} \bot & x\notin U_0, f(x)\notin U_1 \\ \star & x\notin U_0, f(x)\in U_1 \\ \top & x\in U_0, f(x)\in U_1 \end{cases}, \quad \chi(x\in X_1) = \begin{cases} \bot & x\notin U_1 \\ \top & x\in U_1 \end{cases}.$$

这个意象中有三个真值 $\bot,\star,\top\colon 1\to\Omega$; 符号 $\star$ 可理解为 “将要成真”: $\chi(x)=\star$ 表示 x 不属于这个子集, 但将要属于这个子集 (即 $f(x)$ 属于这个子集).

例 1.2.7 (有限集范畴)

有限集范畴 Fin 是一个意象; 这表示意象中不天然具有 “无限” 的概念. 更一般地, 设基数 π 满足对任意基数 $\lambda<\pi$ 有 $2^\lambda<\pi$ (这样的基数称为*强极限基数*), 那么基数小于 π 的集合的范畴 $\mathsf{Set}_{<\pi}$ 是一个意象.

在第 3 章, 我们将介绍一类重要的 (也是最早被研究的) 意象, 即 Grothendieck 意象.

1.3 更多范畴论结构

0 和 1

本节记录意象的始对象 0 与终对象 1 的若干性质.

命题 1.3.1 (0 和 1 参与的运算)

对意象中任何对象 X, 有 $X+0\simeq X$, $X\times 0\simeq 0$, $X\times 1\simeq X$, $X^0\simeq 1$, $X^1\simeq X$, $1^X\simeq 1$.

证明. 我们使用米田引理. 对任何对象 Y, 有自然同构

- $\mathrm{Hom}(X+0,Y)\simeq \mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(0,Y)\simeq\mathrm{Hom}(X,Y)$, 故 $X+0\simeq X$;
- $\mathrm{Hom}(X\times 0,Y)\simeq\mathrm{Hom}(0,Y^X)\simeq 1$, 故 $X\times 0\simeq 0$;
- $\mathrm{Hom}(Y,X\times 1)\simeq\mathrm{Hom}(Y,X)\times\mathrm{Hom}(Y,1)\simeq\mathrm{Hom}(Y,X)$, 故 $X\times 1\simeq 1$;

- $\mathrm{Hom}(Y, X^0) \simeq \mathrm{Hom}(Y \times 0, X) \simeq \mathrm{Hom}(0, X) \simeq 1$, 故 $X^0 \simeq 1$;
- $\mathrm{Hom}(Y, X^1) \simeq \mathrm{Hom}(Y \times 1, X) \simeq \mathrm{Hom}(Y, X)$, 故 $X^1 \simeq X$;
- $\mathrm{Hom}(Y, 1^X) \simeq \mathrm{Hom}(X \times Y, 1) \simeq 1$, 故 $1^X \simeq 1$.

□

注意上面没有列出 0^X, 我们仅能得到两个特例 $0^0 \simeq 1, 0^1 \simeq 0$. 后面将会讲到, 当 X 代表真值时, 0^X 代表 "非 X" (定义 1.3.35).

命题 1.3.2 (意象具有严格始对象)

在意象中任何态射 $X \to 0$ 都是同构; 在范畴论中我们称这样的始对象为*严格始对象* (strict initial object).

证明. 假设有态射 $f\colon X \to 0$. 因为 $(f, \mathrm{id}_X)\colon X \to 0 \times X$ 是单射, 而 $0 \times X \simeq 0$, 故 X 可作为 0 的子对象. 而 0 只有一个子对象 0 (因为 0 到 Ω 有唯一的态射), 故 $X \simeq 0$, f 是 X 到 0 唯一的同构. □

命题 1.3.3

在意象中, 态射 $0 \to X$ 总是单射, 且是对象 X 的最小子对象.

证明. 假设 $0 \to X$ 余等化 $f_1, f_2\colon Y \to 0$, 则由命题 1.3.2, f_1, f_2 均为同构, f_1^{-1}, f_2^{-1} 均为 (唯一的) 态射 $0 \to Y$, 故 $f_1 = f_2$. 这证明了 $0 \to X$ 为单射. 因为 0 为始对象, $0 \to X$ 当然是 X 的最小子对象. □

单射与满射

下面是一个常用的引理, 它表明在任何范畴中我们都可以用拉回与推出刻画单射与满射.

命题 1.3.4 (单射与满射的等价刻画)

在任何范畴中, 态射 $f\colon X \to Y$ 是单射当且仅当左下图是拉回, f 是满射当且仅当右下图是推出.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & Y \end{tikzcd}$$

由此及 "伴随保持极限" (命题 A.2.5), 我们就得到

命题 1.3.5

左伴随保持满射, 右伴随保持单射.

例如, 对意象 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$, $\Pi_f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ 是 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 的右伴随 (命题 1.1.40), 从而保持单射; 因此有如下结论.

命题 1.3.6 (子对象拉回的右伴随)

对意象 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$, $\Pi_f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ 限制为一个函子 $\forall_f\colon \operatorname{Sub}(X) \to \operatorname{Sub}(Y)$ (关于函子 $\forall_f$ 的名称见注 1.3.22), 且为 $f^*\colon \operatorname{Sub}(Y) \to \operatorname{Sub}(X)$ 的右伴随.

命题 1.3.7

在意象中拉回保持满射; 即对任意态射 $f\colon X \to Y$ 以及满射 $e\colon Z \to Y$, 就有 $f^*e\colon X \times_Y Z \to X$ 是满射.

正则单射与满射, 等价关系

集合的单射与满射的概念在一般的范畴中不止有一种推广.

定义 1.3.8 (正则单射与满射)

定义范畴中可作为等化子的态射为*正则单射* (regular monomorphism), 可作为余等化子的态射为*正则满射* (regular epimorphism).

例 1.3.9

拓扑空间范畴 Top 中的正则单射是*嵌入*, 也即子空间拓扑. Top 中一般的单射未必是正则单射, 例如一个集合上离散拓扑到平凡拓扑的映射.

例 1.3.10

环范畴 Ring 中的正则满射正是那些底层集合上是满射的环同态. Ring 中一般的满射未必是正则满射, 例如整数到有理数的嵌入 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

定义 1.3.11 (核偶与余核偶)

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在所需的拉回或推出. 定义

- 态射 $f\colon X \to Y$ 的*核偶* (kernel pair) 为左下方拉回图中的态射偶 (p_1, p_2), 也

即被 f 余等化的万有态射偶 $\bullet \rightrightarrows X$;

- 态射 $f\colon X \to Y$ 的余核偶 (cokernel pair) (g, h) 为右下方推出图中的态射偶 (i_1, i_2), 也即被 f 等化的万有态射偶 $Y \rightrightarrows \bullet$.

$$
\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "i_2"] \\
Y \arrow[r, "i_1"'] & Y \sqcup_X Y
\end{tikzcd}
$$

对于集合, 态射 $f\colon X \to Y$ 的核偶为 $X \times X$ 的子集

$$X \times_Y X = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

$X \times X$ 的子集可视为集合 X 上的一个 (二元) 关系.

定义 1.3.12 (等价关系)

在一般的范畴中, 称 $X \times X$ 的一个子对象 R 为 X 上的一个关系. 等价关系是满足如下条件的关系.

- (自反性) $\Delta \leq R$, 其中 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是对角线 (例 1.1.19);
- (对称性) $R \leq \sigma R$, 其中 $\sigma\colon X \times X \to X \times X$ 为交换两个分量;
- (传递性) 作为 $X \times X \times X$ 的子对象有 $p_{12}^* R \wedge p_{23}^* R \leq p_{13}^* R$, 其中 p_{ij} 是到第 i, j 分量的投影, $\wedge$ 是子对象的交, 也即拉回.

等价关系 $R \hookrightarrow X \times X$ 确定的商即为两个投影映射 $R \to X$ 的余等化子. 态射 $f\colon X \to Y$ 可以确定一种等价关系 $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. 它是态射 $f\colon X \to Y$ 的核偶. 称这种等价关系为有效等价关系 (effective equivalence relation).

注意到当 $f\colon X \to Y$ 为集合的满射时, 核偶 $X \times_Y X \rightrightarrows X$ 的余等化子恰为 $f\colon X \to Y$, 即 Y 恰为 X 关于 f 诱导的等价关系的商. 我们将这种映射的性质抽象为有效满射. 与之对偶的概念称为有效单射.

定义 1.3.13 (有效单射与满射)

在具有拉回与推出的范畴中, 若一个态射是其余核偶的等化子, 则称之为有效单射 (effective monomorphism); 若一个态射是其核偶的余等化子, 则称之为有效满射 (effective epimorphism).

在具有拉回与推出的范畴中, 正则单射 (满射) 的概念与有效单射 (满射) 的概念等价.

命题 1.3.14

设某范畴中 $f\colon X \to Y$ 有核偶, 那么 f 是正则满射当且仅当 f 是有效满射.
对偶地, 设 f 有余核偶, 那么 f 是正则单射当且仅当 f 是有效单射.

证明. 由定义, 若 f 是有效满射, 则 f 是正则满射. 反之, 设 f 是两个态射 $g, h\colon Z \to X$ 的余等化子. 那么有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "{(g,h)}"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

此时若态射 $X \to W$ 余等化 p_1, p_2, 那么它也余等化 g, h, 从而 (由 f 的性质) 穿过 Y. 这说明了 f 是其核偶的余等化子. □

命题 1.3.15

在意象中单射都是正则单射.

证明. 由子对象分类子的定义 1.1.15, 单射 $U \hookrightarrow X$ 是 $\chi_U\colon X \to \Omega$ 与 $X \to 1 \xrightarrow{\top} \Omega$ 的等化子. □

命题 1.3.16

在意象中, 既单又满的态射是同构.

证明. 设 $f\colon X \to Y$ 既单又满, 由命题 1.3.15, f 为等化子 $\mathrm{eq}(g, h\colon Y \rightrightarrows Z)$. 而 f 满说明 $g = h$, 从而 f 为同构. □

命题 1.3.17

在意象中满射都是正则满射.

证明. 由命题 1.3.24 后的另证, 满射 $f\colon X \to Y$ 可分解为 $X \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{i} Y$, 且 q 为某个余等化子, i 为单射. 但 f 为满射推出 i 为满射, 从而由命题 1.3.16, i 为同构. □

像

定义 1.3.18 (像)

对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon W \to X$, 若存在 f 穿过的最小子对象 $U \hookrightarrow X$, 则称其为 f 的像 (image), 记作 $\operatorname{im} f$.

注 1.3.19 (像作为函子)

对固定的对象 X, 假设到 X 态射都有像, 则有一个函子 $\operatorname{im}\colon \mathcal{C}/X \to \operatorname{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$, 它是嵌入函子[7] $\operatorname{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \to \mathcal{C}/X$ 的左伴随; 对任意态射 $f\colon W \to X$ 与子对象 $U \hookrightarrow X$,

$$\operatorname{im}(f\colon W \to X) \le U \quad \Leftrightarrow \quad f\colon W \to X \text{ 穿过 } U.$$

命题-定义 1.3.20 (像与存在)

假设范畴 $\mathcal{C}$ 存在拉回, 那么如下条件等价:

(1) $\mathcal{C}$ 的所有态射都有像.

(2) 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \operatorname{Sub}(Y) \to \operatorname{Sub}(X)$ 有左伴随 $\exists_f$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明. 假设所有函子 im 存在. 定义 $\exists_f$ 为如下的复合,

$$\exists_f\colon \operatorname{Sub}(X) \longrightarrow \mathcal{C}/X \xrightarrow{\Sigma_f} \mathcal{C}/Y \xrightarrow{\operatorname{im}} \operatorname{Sub}(Y).$$

(函子 Σ_f 的定义见 1.1.31.) 对于 X 的子对象 $\iota\colon U \hookrightarrow X$, 由定义 1.3.18, $\exists_f U \hookrightarrow Y$ 是 $f \circ \iota\colon U \to Y$ 穿过的最小子对象. 由拉回的泛性质, $f \circ \iota\colon U \to Y$ 穿过子对象 $V \hookrightarrow Y$ 对应于下图中唯一的态射 $U \to f^*(V)$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\iota"'] & & \\
& f^*(V) \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 将函子 $\exists_f\colon \operatorname{Sub}(X) \to \operatorname{Sub}(Y)$ 作用于 id_X 就得到 f 的像. □

[7]注意 $\operatorname{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ 的对象是单态射的等价类, 但这里为了构造函子, 可任取每个等价类中的一个代表元. 对于子对象 $U \to X$ 与 $V \to X$, 即使视为 $\mathcal{C}/X$ 的对象, 两者之间也至多只有一个态射; 故 $\operatorname{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ 可视为 $\mathcal{C}/X$ 的全子范畴.

注 1.3.21 (集合范畴的情形)

在集合范畴中, $\exists_f(U)$ 可写为 $f(U)$, 也即 $\mathrm{im}(f|_U : U \to Y)$. 所谓 $\exists_f$ 为 f^* 的左伴随, 即对任意 $U \subset X$ 与 $V \subset Y$,

$$f(U) \subset V \iff U \subset f^*(V).$$

注 1.3.22 (为什么拉回的左伴随叫做 "存在")

考虑集合范畴中的一个特例. 取 $X = Y \times Z$, $f\colon Y \times Z \to Y$ 为投影. 将 $Y \times Z$ 的子集视为关于 y, z 的谓词 $P(y, z)$, 那么 "存在" 函子 $\exists_f$ 将这个谓词变为关于 y 的谓词 $\exists z\, P(y, z)$ (其中只有 y 一个自由变量), 对应 Y 的子集 $\{y \mid \exists z P(y, z)\}$. 类似地, 拉回 f^* 的右伴随是 "任意" $\forall_f$, 将谓词 $P(y, z)$ 变为关于 y 的谓词 $\forall z\, P(y, z)$, 对应 Y 的子集 $\{y \mid \forall z P(y, z)\}$.

注 1.3.23 (满射的像)

在一般的范畴中, 满射 $f\colon X \to Y$ 的像未必是 Y, 例如 1.3.10 提到的 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, 其像为 $\mathbb{Z}$. 若态射 $f\colon X \to Y$ 的像为 Y, 即 f 不能穿过 Y 的任何真子对象, 则称 f 为*覆盖* (cover) (注意 "覆盖" 在本书中有多种含义). 容易证明正则满射都是覆盖, 且当拉回存在时, 覆盖都是满射.

满–单分解

集合的映射可分解为一个满射后接一个单射, 这称为映射的*满–单分解* (epi–mono factorization).

命题 1.3.24 (满–单分解)

在意象中, 任意态射 $f\colon X \to Y$ 的余核偶的等化子等于它的像 $\mathrm{im}(f) \to Y$. 进而 f 可分解为一个满射 e 与一个单射 m:

$$X \xrightarrow{e} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{m} Y.$$

证明. 设 $f\colon X \to Y$ 的余核偶的等化子为 $M \hookrightarrow Y$, 给出分解 $X \xrightarrow{e} M \overset{m}{\hookrightarrow} Y$.

我们先证明 M 是 f 的像. 对任意子对象 $N \hookrightarrow Y$, 由命题 1.3.15 可设 N 是等化子 $\mathrm{eq}(s, t\colon Y \to Z)$; 若 f 穿过 N, 则 f 也等化 s, t, 于是存在唯一的 $u\colon Y \sqcup_X Y \to Z$ 使下图

交换,

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[drr] \arrow[drrrr, "t"] & & & & \\ M \arrow[urr] \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[drr] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & & Y \sqcup_X Y \arrow[rr, dashed, "\exists! u"] & & Z \\ & & Y \arrow[urr] \arrow[urrrr, "s"'] & & & & \end{tikzcd}$$

这说明 $M \hookrightarrow Y$ 也等化 s, t, 由 N 的泛性质得 $M \le N$. 这证明了 M 是 f 的像.

下面证明 $X \xrightarrow{e} M$ 为满射. 首先注意到, 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 若 $\mathrm{im}(f) \to Y$ 是同构, 则 f 的余核偶是两个相同的态射, 因而 f 是满射. 现在考虑 $e\colon X \to M$ 的像, 得到分解

$$X \to M' \xrightarrow{m'} M \xrightarrow{m} Y,$$

则 f 穿过 Y 的子对象 M', 但 M 是被 f 穿过的最小子对象, 故 $M' \xrightarrow{m'} M$ 为同构, e 为满射. □

满–单分解还有一种证法, 从核偶的余等化子开始, 但与上面的证明并非完全对偶.

证明. (满–单分解另证) 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 设 $a, b\colon R \rightrightarrows X$ 是 f 的核偶, 而 $(q\colon X \to Q) = \mathrm{coeq}(a, b)$, 这给出分解 $X \overset{q}{\twoheadrightarrow} Q \xrightarrow{i} Y$. 我们需要证明 $Q \xrightarrow{i} Y$ 为单射. 假设 i 余等化 $c, d\colon T \to Q$, 作如下拉回,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "e"] \arrow[d, "{(g,h)}"'] & T \arrow[d, "{(c,d)}"] \\ X \times X \arrow[r, "q \times q"'] & Q \times Q \end{tikzcd}$$

那么 f 余等化 g, h. 根据核偶的定义, 这说明 $(g, h)\colon S \to X \times X$ 穿过 $(a, b)\colon R \to X \times X$, 那么由 q 的定义, q 余等化 g, h. 观察上图, 这说明 e 等化 c, d. 而 e 为满射 $q \times q$ 的拉回, 从而为满射 (命题 1.3.7), 故 $c = d$. □

命题 1.3.25 (满–单分解的唯一性)

意象中任意态射 $f\colon X \to Y$ 的满–单分解唯一 (在唯一同构的意义下).

证明. 设 f 有两个满–单分解 $f = me = ng$, 其中 m, n 为单射, e, g 为满射. 由单射是正则单射 (命题 1.3.15), 可将 m 写成等化子 $\mathrm{eq}(p, q)$. 因为 f 等化 p, q 而 g 为满射, 所以 n 等化 p, q. 由等化子的泛性质, n 唯一地穿过 m. 结论得证. □

子终对象

在数学上, 说一类对象唯一, 并不是说恰好有一个这类对象, 而是至多有一个这类对象; 等价的说法是, 若有两个这类对象, 那么两者相等 (此时这类对象完全有可能不存在).

定义 1.3.26 (子终对象)

对范畴 $\mathcal{C}$ 与对象 X, 若 $\mathcal{C}$ 的任何对象到 X 有至多一个态射, 称 X 为子终对象 (subterminal object).

命题 1.3.27 (子终对象的等价定义)

- 当 $\mathcal{C}$ 存在二元积时, X 是子终对象等价于对角线映射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 为同构;
- 当 $\mathcal{C}$ 存在终对象 1 时, X 是子终对象当且仅当唯一的映射 $X \to 1$ 是单射. (这解释了子终对象的名称.)

证明.

- 假设 $\mathcal{C}$ 存在二元积. 注意到 $\mathrm{pr}_i \circ \Delta = \mathrm{id}_X\,(i = 1, 2)$. 若 X 为子终对象, 则 $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2\colon X \times X \to X$, 故 $\Delta \circ \mathrm{pr}_1 = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1) = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) = \mathrm{id}_{X\times X}$. 这证明了 Δ 为同构. 另一方面, 设 Δ 为同构, 则 $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) = \mathrm{id}_{X\times X} = \Delta \circ \Delta^{-1} = (\Delta^{-1}, \Delta^{-1})$, 从而 $\mathrm{pr}_1 = \Delta^{-1} = \mathrm{pr}_2$, 从而对任意 $f, g\colon Y \to X$, $f = \mathrm{pr}_1 \circ (f, g) = \mathrm{pr}_2 \circ (f, g) = g$, 即 X 为子终对象.
- 假设 $\mathcal{C}$ 中存在终对象 1. 若 X 为子终对象, 则对任意 $f, g\colon Y \to X$, $f = g$, 这表明 $X \to 1$ 为单射. 另一方面, 设 $X \to 1$ 是单射, 则对任意 $f, g\colon Y \to X$, $X \circ f = X \circ g\colon Y \to 1$, 故 $f = g$.

□

在意象中, 子终对象一一对应于态射 $1 \to \Omega$, 也即真值.

例 1.3.28

$\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ 的终对象为 $(1, 1)$, 有 4 个子终对象 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, 即 4 个真值 $(\bot, \bot), (\bot, \top), (\top, \bot), (\top, \top)$.
例 1.2.6 介绍的意象 $\mathsf{Fun}(2, \mathsf{Set})$ 的终对象为 $1 \to 1$, 有 3 个子终对象 $0 \to 0$, $0 \to 1$, $1 \to 1$, 即 3 个真值 $\bot, \star, \top$; 我们提到过 $\star$ 可理解为 "将要成真".

例 1.3.29 (俯范畴的子终对象)

俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 的终对象是 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 因此 $\mathcal{C}/X$ 的子终对象是 X 的子对象 (见命题 1.1.30).

我们给出一个有趣的性质.

命题-定义 1.3.30 (意象的分解)

设 $(U_i)_{i\in I}$ 为意象 $\mathcal{C}$ 的子终对象, 则如下条件等价:

- 典范的映射 $\coprod_i U_i \to 1$ 为同构;
- 函子 $\mathcal{C} \to \prod_i \mathcal{C}/U_i$, $X \mapsto (X \times U_i)_{i\in I}$ 为等价.

此时, 我们称 (U_i) 为意象 $\mathcal{C}$ 的一个分解.

注 1.3.31

熟悉代数的读者可以看出, 子终对象类似于环论中的中心幂等元. 后面 (定义 **??**) 我们将看到子终对象与空间的 "开子空间" 概念有关.

子对象的格与 Heyting 代数

集合的子集可以取交和并, 这使得一个集合的所有子集构成一个格; 在意象中, 类似的操作可表达为子对象分类子 Ω 上的操作.

命题-定义 1.3.32 (子对象的交)

在具有拉回的范畴中, 定义子对象 $U \to X$, $V \to X$ 的交是子对象 $U \times_X V \to X$.

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

由拉回的定义, 它是同时包含于 X 和 Y 的最大子对象, 也即两个子对象的交.

命题-定义 1.3.33 (子对象的并)

在意象中, 定义子对象 $U \to X$, $V \to X$ 的并为两者唯一确定的态射 $U + V \to X$ 的像 (定义 1.3.18). 由像的定义, 它是同时包含 X 和 Y 的最小子对象. 类似地可定义子对象的有限并.

由此, 意象中一个对象的子对象集合 $\mathrm{Sub}(X)$ 构成一个格.

命题 1.3.34

在意象中, 沿态射 $f\colon X \to Y$ 的拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 是格的同态.

证明. 这是因为 f^* 保持极限和余极限. □

定义 1.3.35 (Heyting 代数)

若一个偏序集作为范畴具有有限积和有限余积, 且为积闭范畴, 则称之为 *Heyting 代数*. 换言之, Heyting 代数 H 中有有限交 $\wedge$ 与有限并 $\vee$ (包括最大元 $\top$ 和最小元 $\bot$), 且有一种运算 $\Rightarrow\colon H \times H \to H$, 满足

$$z \leq (x \Rightarrow y) \quad \text{当且仅当} \quad (z \wedge x) \leq y.$$

这里 $x \Rightarrow y$ 就是指数对象 y^x 换了一个记号, 而上述等价正是定义 1.1.2 中的自然同构. 此外, 定义 Heyting 代数 H 上的 "非" 运算 $\neg\colon H \to H$,

$$\neg x = (x \Rightarrow \bot).$$

Heyting 代数的同态是保持有限积, 有限余积和指数对象的函子, 也即保持上述所有结构 $\wedge, \vee, \top, \bot, \Rightarrow, \neg$ 的偏序集映射.

注 1.3.36

$x \Rightarrow y$ 的万有性质可叙述如下: 它是使得 $(z \wedge x) \leq y$ 的 z 的最大值, "由命题 x 想要推出 y 还需要的最弱命题" (当 $z \leq w$ 时, 我们认为 z 强于 w).

例 1.3.37 (拓扑空间的开集代数)

拓扑空间 X 的开集构成的偏序集 $\mathrm{Open}(X)$ 是 Heyting 代数; 其中 $\wedge$ 与 $\vee$ 是开集的交与并, $\top = X$, $\bot = \varnothing$, 运算 $\Rightarrow$ 为

$$(U \Rightarrow V) = \bigcup \{O \in \mathrm{Open}(X) \mid O \cap U \subset V\},$$

特别地, $\neg U = \bigcup\{O \in \mathrm{Open}(X) \mid O \cap U = \varnothing\}$ 是 U 的补集的内部. 这个 Heyting 代数是后面介绍的位象的例子.

命题 1.3.38

Heyting 代数是分配格, 即满足 $z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$ 的格.

证明. 这是积闭范畴中的分配律 (命题 1.1.8). □

命题 1.3.39

在 Heyting 代数中,

(1) $\big(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)\big) = \big((x \wedge y) \Rightarrow z\big)$;

(2) $((x \vee y) \Rightarrow z) = \big((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\big)$;

(3) $\big(x \Rightarrow (y \wedge z)\big) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

证明. 这是指数对象的性质 (命题 1.1.7, 1.1.9, 1.1.10). □

注 1.3.40

我们暗示 (明示) 了 Heyting 代数的元素可视为某种命题. 事实上, 它可以作为*直觉主义命题演算* (intuitionistic propositional calculus) 的模型.
在例 1.3.37 中, $U \vee \neg U$ 和 $(\neg\neg U) \Rightarrow U$ 都不一定等于 $\top$. 这体现了直觉主义逻辑中没有*排中律*或*双重否定律*.

命题 1.3.41

在意象中, 子对象的格 $\mathrm{Sub}(X)$ 是 Heyting 代数. 进一步, 沿态射 $f\colon X \to Y$ 的拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 是 Heyting 代数的同态.

证明. 由于 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}/X}(1)$ (例 1.3.29), 我们只需对 $X = 1$ 的情形证明结论.

对于子终对象 U, V, 对任意对象 X, $\mathrm{Hom}(X, V^U) \simeq \mathrm{Hom}(X \times U, V)$ 至多有一个元素, 故 V^U 也是子终对象. 这说明 $\mathrm{Sub}(1)$ (作为范畴) 有指数对象, 从而是 Heyting 代数.

由命题 1.1.42, 拉回保持俯范畴中的指数对象, 从而保持子对象 Heyting 代数中的 "$\Rightarrow$" 运算. 结合命题 1.3.34, 知 f^* 为 Heyting 代数同态. □

值得一提的是, 命题 1.3.41 对更一般的 Heyting 范畴 (Heyting 范畴是指子对象的拉回 f^* 有右伴随 $\forall_f$, 见定义 B.2.8) 都成立. 对于子对象 $i\colon U \hookrightarrow X$ 与 $V \hookrightarrow X$, 可定义 $U \Rightarrow V$ 为 $\forall_i(U \cap V) \in \mathrm{Sub}(X)$.

由命题 1.3.41 以及子对象分类子的性质, 我们知道 $\mathrm{Sub}(X) \simeq \mathrm{Hom}(X, \Omega)$ 上有自然的 Heyting 代数结构; 自然性意味着我们可以开动米田机器, 得到

$$\boxed{\Omega \text{ 是意象中的内蕴 Heyting 代数.}}$$

例如 $\mathrm{Hom}(X, \Omega)$ 上的 "$\vee$" 运算 $\vee\colon \mathrm{Hom}(X, \Omega) \times \mathrm{Hom}(X, \Omega) \to \mathrm{Hom}(X, \Omega)$ (作为自然变换) 等同于 $\vee\colon \mathrm{Hom}(X, \Omega \times \Omega) \to \mathrm{Hom}(X, \Omega)$, 等同于一个态射 $\vee\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$. 类似地, 可证明对意象中的任意对象 X, 幂对象 PX 为内蕴 Heyting 代数.

我们还可以具体写出内蕴 Heyting 代数 Ω 的结构态射.

定义 1.3.42 (假)

假 (false) $\bot\colon 1 \to \Omega$ 是子对象 $0 \to 1$ 的特征函数, 即下图是子对象的拉回.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ 1 \arrow[r, "\bot"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

命题 1.3.43

对象 X 的最小子对象 $0 \to X$ (命题 1.3.3) 的特征函数是

$$\bot_X\colon X \to 1 \xrightarrow{\bot} \Omega.$$

证明. 在下图中, 两个小方块均为拉回, 从而长方形为拉回.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r] & 1 \arrow[r, "\bot"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

□

定义 1.3.44 (非)

非 (not) $\neg\colon \Omega \to \Omega$ 是假 $\bot\colon 1 \to \Omega$ 的特征函数, 即下图是子对象的拉回.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\bot"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \Omega \arrow[r, "\neg"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

命题 1.3.45

作为 Ω 的子对象有 $(\bot\colon 1 \to \Omega) = \neg(\top\colon 1 \to \Omega)$.

证明. 对任何子对象 $f\colon X \to \Omega$, 若 $X \wedge (\top\colon 1 \to \Omega) = 0$, 即下图为拉回, 由命题 1.3.43 有分解 $f = X \to 1 \xrightarrow{\bot} \Omega$, 也即 $X \leq (\bot\colon 1 \to \Omega)$. 这证明了 $(\bot\colon 1 \to \Omega) = \neg(\top\colon 1 \to \Omega)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

□

命题 1.3.46

设子对象 $U \hookrightarrow X$ 的特征函数是 $\chi\colon X \to \Omega$, 则 $\neg U$ 的特征函数是 $X \xrightarrow{\chi} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$.

证明. 拉回 $\chi^*\colon \mathrm{Sub}(\Omega) \to \mathrm{Sub}(X)$ 保持 "$\Rightarrow$" 运算 (命题 1.3.41), 也保持 0 (最小子对象), 从而保持 "$\neg$" 运算. 由命题 1.3.45, 我们证明了下图中左边的方块为拉回, 从而长方形为拉回.

$$\begin{tikzcd}
\neg U \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d, "\perp"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \arrow[r, "\neg"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

定义 1.3.47 (且)

且 (and, 又叫合取, conjunction) $\wedge\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ 是 $(\top, \top)\colon 1 \to \Omega \times \Omega$ 的特征函数, 即下图是子对象的拉回.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "{(\top,\top)}"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

命题 1.3.48

设子对象 $U \to X, V \to X$ 的特征函数分别是 $\chi_U, \chi_V\colon X \to \Omega$, 则 $U \wedge V$ 的特征函数是 $X \xrightarrow{(\chi_U,\chi_V)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$.

证明. 首先注意到下图为拉回,

$$\begin{tikzcd}
1 \times 1 \arrow[r, "\top \times \mathrm{id}_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_1 \times \top"'] & \Omega \times 1 \arrow[d, "\mathrm{id}_\Omega \times \top"] \\
1 \times \Omega \arrow[r, "\top \times \mathrm{id}_\Omega"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

(这张图实际上是万有的 "两个子对象的交", 即任何 "两个子对象的交" 都可以通过这张图的拉回得到) 并且在下图中, 由右边方块及长方形为拉回可得左边方块为拉回.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & 1 \times \Omega \arrow[r] \arrow[d, "\top \times \mathrm{id}_\Omega"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "{(\chi_U,\chi_V)}"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\pi_1"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

由拉回 $(\chi_U, \chi_V)^* \colon \mathrm{Sub}(\Omega \times \Omega) \to \mathrm{Sub}(X)$ 保持 “$\wedge$” 运算 (命题 1.3.41), 知 $U \wedge V = (\chi_U, \chi_V)^*\big((\top, \top) \colon 1 \to \Omega \times \Omega\big)$. □

定义 1.3.49 (蕴涵)

蕴涵 $\Rightarrow \colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ 是等化子 $\mathrm{eq}(\wedge, \pi_1) \to \Omega \times \Omega$ 的特征函数.

命题 1.3.50

设子对象 $U \to X$, $V \to X$ 的特征函数分别是 $\chi_U, \chi_V \colon X \to \Omega$, 则 $U \Rightarrow V$ 的特征函数是 $X \xrightarrow{(\chi_U, \chi_V)} \Omega \times \Omega \overset{\Rightarrow}{\to} \Omega$.

证明. 对任意子对象 $W \to X$,

$$
\begin{aligned}
W \leq (U \Rightarrow V) &\Leftrightarrow (W \wedge U) \leq V \\
&\Leftrightarrow (W \wedge U) = (W \wedge U \wedge V) \\
&\Leftrightarrow (W \wedge U) = (W \wedge U) \wedge (W \wedge V) \\
&\Leftrightarrow W \to X \xrightarrow{(\chi_U, \chi_V)} \Omega \times \Omega \text{ 等化 } \wedge, \pi_1 \qquad (*) \\
&\Leftrightarrow \text{ 有交换图 } \begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & \mathrm{eq}(\wedge, \pi_1) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \top} \\ X & \xrightarrow[(\chi_U, \chi_V)]{} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow[\Rightarrow]{} & \Omega \end{array}
\end{aligned}
$$

这证明了 $U \Rightarrow V$ 的特征函数是 $X \xrightarrow{(\chi_U, \chi_V)} \Omega \times \Omega \overset{\Rightarrow}{\to} \Omega$. 其中 $(*)$ 使用了如下事实: $W \wedge U$ 作为 W 的子对象, 其特征函数为 $W \to X \overset{\chi_U}{\to} \Omega$. □

关于子对象的并还有如下实用的结论.

命题 1.3.51

在意象 $\mathcal{C}$ 中, 设 $i \colon U \to X, j \colon V \to X$ 为不相交的子对象 (即 $U \wedge V = 0$). 那么两者的并为 $(i, j) \colon U + V \to X$.

证明. 考虑沿 $i \colon U \to X$ 的拉回 $i^* \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/U$, 有 $i^*(U) = U, i^*(V) = 0$. 由拉回保持和, 知 $i^*(U + V) = U$, 即下图为拉回.

$$
\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\iota_1} & U + V \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (i,j)} \\ U & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}
$$

此图亦可理解为, 对于沿 $(i, j) \colon U + V \to X$ 的拉回 $(i, j)^* \colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/(U + V)$, 有 $(i, j)^*(U) = U$. 同理, $(i, j)^*(V) = V$. 由拉回保持和, 知 $(i, j)^*(U + V) = U + V$. 而

这说明 $U+V\to X$ 为子对象 (命题 1.3.4), 从而为两个子对象 U,V 的并. □

自然数对象

定义 1.3.52 (自然数对象)

意象 $\mathcal{C}$ 中的自然数对象 (natural numbers object) 是一个对象 N, 以及态射 $0\colon 1\to N$ (零), $s\colon N\to N$ (后继), 满足如下的泛性质: 对任意对象 X, 任意态射 $\widetilde{0}\colon 1\to X,\widetilde{s}\colon X\to X$, 存在唯一的态射 $f\colon N\to X$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "f"] & N \arrow[d, dashed, "f"] \\ 1 \arrow[r, "\widetilde{0}"'] & X \arrow[r, "\widetilde{s}"'] & X \end{tikzcd}$$

命题 1.3.53

在一个意象中, $0\colon 1\to N$ 与 $s\colon N\to N$ 构成自然数对象的充要条件是 $(0,s)\colon 1+N\to N$ 为同构且 $1,s$ 的余等化子为 $\mathbb{N}\to 1$.

注 1.3.54

自然数对象是函子 $X\mapsto 1+X$ 的始代数 [8](函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 的代数是一个对象 X 配备一个态射 $FX\to X$). 结论 1.3.53 的一部分可由 Lambek 定理得出, 这个定理说对于函子 F 的始代数, $FX\to X$ 必然是同构.

注 1.3.55

自然数对象的存在性可视为意象中的 Peano 公理.

例 1.3.56 (自然数对象不一定存在)

有限集范畴 Fin 中不存在自然数对象.

无交和

在意象中一个重要而不平凡的性质是 “和无交”.

[8] https://ncatlab.org/nlab/show/initial+algebra+of+an+endofunctor

命题 1.3.57

在意象中, 设下图为推出, 且 f 为单射,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "f"'] & Z \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "j"'] & W
\end{tikzcd}
$$

那么 i 亦为单射, 且该图同时为拉回.

证明. 由 f 为单射, 知 $(f,g)\colon X \to Y \times Z$ 为单射, 设其对应映射 $h\colon Y \to PZ$. 我们首先说明

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\{-\}_Z"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & PZ
\end{tikzcd}
$$

为拉回. 其中 $\{-\}_Z$ 是 "单元集" 映射 (定义 1.1.20). 这是因为自然同构 $\mathrm{Hom}(-,PZ) \simeq \mathrm{Sub}(- \times Z)$ 以及有如下的子对象的拉回 (斜向箭头为子对象).

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, hook, "{(\mathrm{id}_X, g)}"] & Z \arrow[dr, hook, "\Delta_Z"] & \\
X \arrow[dr, hook, "{(f,g)}"'] & X \times Z \arrow[r, "g \times \mathrm{id}_Z"'] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_Z"] & Z \times Z \\
& Y \times Z &
\end{tikzcd}
$$

然后考虑下图. 由 $\{-\}_Z$ 为单射, 知 i 为单射. 由外圈为拉回知原图亦为拉回.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "f"'] & Z \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "\{-\}_Z"] & \\
Y \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & W \arrow[dr, dashed] & \\
& & PZ
\end{tikzcd}
$$

$\square$

考虑意象中的单射 $0 \to X$, 我们得到如下推论.

命题 1.3.58 (和无交)

对于意象中任意两个对象 X, Y, 推出图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X+Y \end{tikzcd}$$

同时为拉回, 且图中态射均为单射. 换言之, X, Y 作为 $X+Y$ 的子对象不相交.

命题 1.3.59 (意象为广延范畴)

对于意象 $\mathcal{C}$ 中任意两个对象 X, Y, 典范的函子

$$+\colon \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/(X+Y), \quad \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \downarrow f_1 \\ X \end{array}, \begin{array}{c} Z_2 \\ \downarrow f_2 \\ Y \end{array} \right) \mapsto \begin{array}{c} Z_1 + Z_2 \\ \downarrow f_1+f_2 \\ X+Y \end{array}$$

为等价. 人们称满足该性质的范畴为*广延范畴* (extensive category).

证明. 记 $i_1\colon X \to X+Y$, $i_2\colon Y \to X+Y$ 为嵌入, 我们断言两个拉回函子的乘积

$$(i_1^*, i_2^*)\colon \mathcal{C}/(X+Y) \to \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$$

是 $+$ 的逆.

一方面, 对任意态射 $\begin{array}{c} Z \\ \downarrow f \\ X+Y \end{array}$, 考虑如下两个拉回,

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "f"] & Z_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "i_1"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

此图亦可视为沿 f 的拉回. 由于拉回保持和, 有 $Z = Z_1 + Z_2$.

另一方面, 对任意两个态射 $\begin{array}{c} Z_1 \\ \downarrow f_1 \\ X \end{array}, \begin{array}{c} Z_2 \\ \downarrow f_2 \\ Y \end{array}$, 由于以下两图为拉回 (其中右图为拉回是由于命题 1.3.58), 以及拉回保持和, 知 $i_1^*(Z_1+Z_2) = Z_1$.

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "\mathrm{id}_{Z_1}"] \arrow[d, "f_1"'] & Z_1 \arrow[d, "i_1 f_1"] \\ X \arrow[r, "i_1"'] & X+Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[d, "i_2 f_2"] \\ X \arrow[r, "i_1"'] & X+Y \end{tikzcd}$$

$\square$

Boole 意象与选择公理

意象是类似于集合范畴的范畴, 而 Boole 意象由于排中律的存在而比一般的意象 更像是 (经典逻辑意义下的) 集合范畴.[9]

定义 1.3.60 (Boole 代数)

满足排中律 $\neg\neg x = x$ (或等价地 $x\vee\neg x = \top$) 的 Heyting 代数称为 *Boole* 代数. Boole 代数的同态即为对应的 Heyting 代数的同态.

命题-定义 1.3.61 (Boole 意象)

对于意象 $\mathcal{C}$, 如下条件等价.

(1) 子对象分类子 Ω 是 $\mathcal{C}$ 的内蕴 Boole 代数, 即非运算 $\neg\colon \Omega \to \Omega$ 满足 $\neg\neg = \mathrm{id}_\Omega$, $\vee \circ (\mathrm{id}_\Omega, \neg) = \top_\Omega$;

(2) ("排中律") 对任意对象 X, $\mathrm{Sub}(X)$ 为 Boole 代数, 即对任意子对象 $U \to X$, 有 $\neg\neg U = U$, $U \vee \neg U = X$;

(3) 态射 $(\top, \bot)\colon 1 + 1 \to \Omega$ 为同构.

称满足上述条件的意象为 *Boole* 意象 (Boolean topos).

证明. 由米田引理, (1) 等价于 (2).

- (2) $\Rightarrow$ (3). 由于 $\top, \bot\colon 1 \to \Omega$ 是两个不相交的子对象, 两者的并为 $(\top, \bot)\colon 1 + 1 \to \Omega$ (命题 1.3.51). 假设排中律 (2) 成立, 那么子对象 $\top, \bot\colon 1 \to \Omega$ 的并等于 Ω.
- (3) $\Rightarrow$ (1). 条件 (3) 说的正是 $1 + 1$ 为子对象分类子, 而 $\top\colon 1 \to 1 + 1$ 为万有子对象. 此时, 非运算 $\neg\colon 1 + 1$ 不过是交换两个分量.

□

例 1.3.62

$\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ 是 Boole 意象.

注 1.3.63 (Boole 与二值性无关)

注意 Boole 意象中尽管有 "排中律", 但不一定只有两个真值 (后者称为意象的二值性). 例如 $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ 是 Boole 的, 但有 4 个真值. 反过来, 只有两个真值的意象也不

[9] 我尊敬的一位同学 Trebor 提醒大家注意 Boole 不是 Bool. 后者只是一个常见缩写.

一定是 Boole 意象.

为了陈述选择公理, 我们需要投射对象的概念. 它与同调代数中投射模的概念类似.

定义 1.3.64 (投射对象)

设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 称对象 X 为投射对象是指 $\mathrm{Hom}(X,-)\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 保持满射.

命题-定义 1.3.65 (选择公理)

设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 那么以下条件等价,

- $\mathcal{C}$ 的每个对象都是投射对象.
- $\mathcal{C}$ 中的每个满射都存在截面, 即对任意满射 $p\colon X \to I$ (类比于 "以 I 为指标的集合族"), 存在 $s\colon I \to X$ 使得 $ps = \mathrm{id}_I$ ("在集合族的每个成员中选择一个元素").

称上述条件为选择公理.

证明. 假设 $\mathcal{C}$ 的每个对象都是投射的. 对于满射 $p\colon X \to I$, 由于 I 是投射的, 有

$$p_*\colon \mathrm{Hom}(I,X) \to \mathrm{Hom}(I,I)$$

为满射, 故存在 $s \in \mathrm{Hom}(I,X)$ 使得 $ps = \mathrm{id}_I$.

假设 $\mathcal{C}$ 中的每个满射都存在截面. 有截面的映射在任何函子作用下仍是满射, 故任何函子 $\mathrm{Hom}(Y,-)$ 都保持满射. □

命题-定义 1.3.66 (内蕴选择公理)

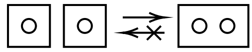
设 $\mathcal{C}$ 为意象. 称 $\mathcal{C}$ 满足内蕴选择公理是指对任何对象 Y, 函子 $(-)^Y\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 保持满射 (此时称 Y 是内蕴投射的).

容易证明选择公理可以推出内蕴选择公理, 但反之不然.

例 1.3.67 (不满足选择公理的例子)

为了说明选择公理不是理所当然的性质, 我们举两个最简单的意象中满射没有截面的例子. 第一个例子是变集范畴 (例 1.2.6), 如下态射是满射, 但没有截面.

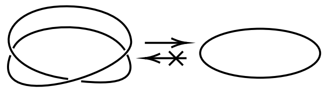
$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \{0,1\} \arrow[d] \\ \{0,1\} \arrow[r] & \{*\} \end{tikzcd}$$



采用例 8.1.2 对集合族的直观, 这就是说两个粘在一起的点无法分开 (右图).

第二个例子是 $\mathsf{Fun}(B\mathbb{N}, \mathsf{Set})$, 其中 $B\mathbb{N}$ 是将半群 $\mathbb{N}$ 视为单对象范畴. 这个范畴的对象是集合 X 配备一个映射 $f\colon X \to X$. 态射

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d, "\substack{0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0}"'] & \{*\} \arrow[d] \\ \{0,1\} \arrow[r] & \{*\} \end{tikzcd}$$



是满射, 但没有截面. 一个类似的例子是 $\mathrm{Sh}(S^1)$ 中 S^1 的非平凡二重覆叠没有截面 (右图).

命题 1.3.68

假设意象 $\mathcal{C}$ 满足内蕴选择公理, 那么对其中任意满射 $f\colon Z \to X$, 都有 $\Pi_X(f) \to 1$ 是满射. 进一步, 记 $S = \Pi_X(f)$, 则 $S^*Z \to S^*X$ (作为意象 $\mathcal{C}/S$ 中的映射, 定义见例 1.1.34) 有截面.

证明. 回忆 $\Pi_X(f)$ 是 $f^X\colon Z^X \to X^X$ 沿 $\mathrm{id}_X\colon 1 \to X^X$ 的拉回 (命题 1.1.35 的证明), 而拉回保持满射 (命题 1.3.7), 故 $\Pi_X(f) \to 1$ 是满射. 映射 $S^*Z \to S^*X$ 的截面由取值映射 $S \times X \hookrightarrow Z^X \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Z$ 给出. $\square$

$\Pi_X(f)$ 是 “f 的截面的集合”, 所以内蕴选择公理是说满射在某种内蕴的意义上有截面.

命题 1.3.69 (Diaconescu)

满足内蕴选择公理的意象一定是 Boole 的.

证明. 考虑任意子对象 $U \hookrightarrow X$. 由于单射是余核偶的等化子 (命题 1.3.15), 有 $U = \mathrm{eq}(X \rightrightarrows X \sqcup_U X)$. 我们的思路是考虑满射 $(X \sqcup X) \to (X \sqcup_U X)$ 的 “截面”, 从而得到 $U \vee \neg U$. 假设它有截面 $s\colon (X \sqcup_U X) \to (X \sqcup X)$, 如左图,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & X \arrow[rr, shift left, "si_1"] \arrow[rr, shift right, "si_2"'] \arrow[dr, hook, shift left, "i_1"] \arrow[dr, hook, shift right, "i_2"'] & & X \sqcup X \arrow[r, "t"] & 1+1 \\ & & X \sqcup_U X \arrow[ur, hook, "s"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "si_1 f"] \arrow[r, shift right, "si_2 f"'] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcup X \arrow[r, "t"] \arrow[d] & 1+1 \\ & X & \end{tikzcd}$$

那么 s 为单射, 故对任何映射 $f\colon V \to X$, f 等化 i_1, i_2 当且仅当 f 等化 si_1, si_2. 而 $X \sqcup X \simeq X \times (1+1)$, 如右图, 故 f 等化 si_1, si_2 等价于 f 等化 tsi_1, tsi_2. 这说明 $(U \hookrightarrow X) = \mathrm{eq}(tsi_1, tsi_2\colon X \rightrightarrows 1+1)$.

我们说明若子对象 $U \to X$ 是两个映射 $f, g\colon X \to 1+1$ 的等化子, 则 $U \vee \neg U = X$. 考虑下图, 其中 $1_\top, 1_\perp$ 均代表终对象 1,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & 1_\top + 1_\perp \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "(f,g)"'] & (1_\top + 1_\perp) \times (1_\top + 1_\perp) \arrow[r, "\delta"'] & 1_\top + 1_\perp \end{tikzcd}$$

U 为等化子等价于左边方块为拉回. 而由于和无交 (1.3.58), 图中的 Δ 作为 $(1_\top + 1_\perp) \times (1_\top + 1_\perp)$ 的子对象满足排中律, 也即右边方块为拉回. 这意味着大长方形为拉回, 故 U 满足 $U \vee \neg U = X$.

上述讨论证明的是满射 $(X \sqcup X) \to (X \sqcup_U X)$ 有截面的情形, 现在证明一般情形. 由命题 1.3.68, 存在满射 $S \twoheadrightarrow 1$ 使得 $S^*(X \sqcup X) \to S^*(X \sqcup_U X)$ 有截面, 而拉回是子对象 Heyting 代数的同态 (命题 1.3.41), 套用前面证明的情形, 得 $S^*(U \vee \neg U) = S^*(X)$. 注意到由于 $S \to 1$ 是满射, 故 $S \times X \to X$ 是满射. 对任意态射 $V \to X$, 若 $S^*(V) \to S^*(X)$ 满, 则下图说明 $V \to X$ 是满射.

$$\begin{tikzcd} S^*(V) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & V \arrow[d] \\ S^*(X) \arrow[r, two heads] & X \end{tikzcd}$$

由此得 $U \vee \neg U = X$. □

另外, Bauer 的文章 (讲座) [3] 给出了 (外蕴) 选择公理推出排中律的一种证明.

第 2 章 位象: 无点拓扑学

It is in some sense coincidental that $\operatorname{Spec} A$ is described by a topological space. What arises more canonically is the lattice of open subsets of $\operatorname{Spec} A$, which is generated by basic open sets of the form U_f. This lattice naturally forms a *locale*[1] ...

Jacob Lurie,
Derived Algebraic Geometry V: Structured Spaces

常常拓扑空间的重点不在于点, 而在于开集, 以及开集之间的关系. 将开集的性质提炼出来, 使其不再依赖于点, 就成为位象 (locales) 的概念. 它是介于拓扑空间和景之间的一

[1] 见例 2.1.11.

个推广.[2] 位象理论又称为*无点拓扑学* (pointless topology[3]). 位象与逻辑的联系表明, 忘掉 "点" 并不是一个过分的抽象. 在 n-意象的观点中, 位象又可视为 0-意象. 正如意象是一种 "集合宇宙" 一样, 0-意象是一种 "真值宇宙". 因此位象理论某种意义上是意象的前置 (参见 André Joyal 的讲座 [16]).

2.1 基本概念

定义 2.1.1 (位格)

位格 (frame, 又称 local lattice)[4]是满足如下条件的偏序集:

- 存在有限交 $\wedge$ 与任意并 $\bigvee$, 其中一族元素的*交* (meet) 是指同时小于等于这些元素的最大元, *并* (join) 是指同时大于等于这些元素的最小元;
- 有结合律
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i),$$
其中 I 是任意集合.

位格的态射是偏序集之间保持有限交与任意并的态射. 位格的范畴记为 Frm.

注 2.1.2

由于任意交可由任意并表示,
$$\bigwedge A = \bigvee \left\{ b \colon b \leq a \ \forall a \in A \right\},$$
可以证明位格中任意交也存在, 即位格是*完备格* (complete lattice). 但由定义, 位格的态射不一定保持任意交. 位格的结合律说明 $a \wedge (-)$ 保持任意并; 由偏序集的伴随函子定理 (命题 A.5.27), $a \wedge (-)$ 有右伴随 $a \Rightarrow (-)$, 因此我们得到位格是 *Heyting* 代数 (定义 1.3.35), 从而是*完备 Heyting 代数*. 但注意位格的同态不一定是 Heyting 代数的同态, 即不一定保持 $\Rightarrow$ 运算. 保持 $\Rightarrow$ 运算的位格同态对应位象的*开映射* (命题 2.2.22).

[2]说位象是拓扑空间的 "推广" 不甚准确, 因为一般拓扑空间到位象的对应不是全忠实的 (有的空间开集太少). 但是 "好" 的空间范畴如 Hausdorff 空间范畴确实嵌入位象的范畴.

[3]双关笑话: 无点拓扑学不是 pointless (无用的).

[4]Frame 一词似乎没有通行的中文翻译. 这里试译为位格, 因为它是一种与拓扑相关的格 (lattice).

定义 2.1.3 (位象)

位象 (locale) 是位格的形式对偶, 即我们定义位象的范畴 Loc 是位格范畴 Frm 的对偶范畴. 对于位象 X, 我们记对应的位格为 $\mathcal{O}(X)$, 称其中的元素为 X 的开子集或开子空间; 对于位象的态射 $f\colon X \to Y$, 记对应的位格的态射为 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.
由于偏序集可视为范畴, 位象可构成一个 2-范畴 $\mathcal{L}oc$ (定义 A.1.1): 对于 $f, g\colon X \to Y$, 若 $f^*(U) \le g^*(U)\ (\forall U \in \mathcal{O}(Y))$, 则有唯一的 2-态射 $f \to g$.

注 2.1.4

位格与位象的对偶类似于环与仿射概形的对偶, 是代数–几何对偶的一例.

命题 2.1.5 (位象态射的等价定义)

位象的态射 $f\colon X \to Y$ 等同于一对伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "f_*"'] & \mathcal{O}(Y), \arrow[l, bend right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

满足 f^* 保持有限交. (注意, f_* 不一定是位格的同态, 即不一定保持任意并.)

证明. 首先, 若有上述伴随 $f^* \dashv f_*$, 则 f^* 保持任意并 (左伴随保持余极限, 命题 A.2.5).

另一方面, 若有映射 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 保持任意并, 定义

$$f_*(U) := \bigvee \{V \in \mathcal{O}(Y) \mid f^*(V) \le U\}.$$

那么

$$f^* f_*(U) = \bigvee \{f^*(V) \mid f^*(V) \le U\} \le U.$$

(这是伴随的余单位.) 由此可得 $V \le f_*(U) \Leftrightarrow f^*(V) \le U$, 即 $f^* \dashv f_*$. 这个结论是 "伴随函子定理" (注 A.5.27) 的特例. □

例 2.1.6 (拓扑空间作为位象)

拓扑空间 X 的开集范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 构成一个位格. 对于连续映射 $f\colon X \to Y$, 有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Open}(X) \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "f_*"'] & \mathrm{Open}(Y), \arrow[l, bend right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

其中 f^* 将 $U \in \mathrm{Open}(Y)$ 映射到 $f^{-1}(U) \in \mathrm{Open}(X)$, 保持有限交与任意并; 而 f_* 的表达式为

$$f_*(V) = \bigcup \{Y \text{ 的开集 } U \mid f^{-1}(U) \subset V\}.$$

由拓扑空间到位象的构造给出函子 $\mathrm{Open}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Loc}$.

例 2.1.7 (空位象)

空空间 $\varnothing$ 作为位象, 对应的位格是一个元素的全序集 $\{\bot\}$. 它是 Loc 的始对象, Frm 的终对象.

例 2.1.8 (点作为位象)

单点空间 pt 对应的位象记作 $1 = \mathrm{Open}(\mathrm{pt})$. 它对应的位格是两个元素的全序集 $\{\top, \bot\}$ $(\bot < \top)$. 位象 1 也称为*终位象* (terminal locale), 因为它是 Loc 的终对象, Frm 的始对象.

例 2.1.9 (Sierpiński 空间)

定义 *Sierpiński 空间* S 是以 $\{\top, \bot\}$ 为底层集合的拓扑空间, 有三个开集 $\varnothing, \{\top\}, \{\top, \bot\}$. 那么 $\mathcal{O}(S)$ 是三个元素的全序集. 位象 X 到 S 的态射一一对应于 X 的开子空间, 因为位格态射 $\mathcal{O}(S) \to \mathcal{O}(X)$ 由 $\{\top\}$ 的像唯一决定.

定义 2.1.10 (位象的点)

定义位象 X 的点为位象的态射 $p\colon 1 \to X$. 记位象 X 的点的集合为 $\mathrm{Pt}(X)$.

位象 X 的一个点 $p\colon 1 \to X$ 对应位格态射 $p^*\colon \mathcal{O}(X) \to \{\bot, \top\}$. 由于它保持有限交与任意并, p^* 的核 ($\top$ 的原像) 是 $\mathcal{O}(X)$ 的*完全素滤子* (completely prime filter). (偏序集中的滤子是关于交封闭的向上封闭子集, 称 F 为完全素滤子是指当 $\bigvee_i U_i \in F$ 时, 至少有一个 U_i 属于 F.)

例 2.1.11 (环的谱作为位象)

在代数几何中, (交换) 环的谱 $\operatorname{Spec} A$ 是由 A 的素理想的集合赋予 Zariski 拓扑定义的. 然而, 我们也可以直接刻画谱的 "基础开集" U_f 生成的位格, 从而不需要使用环的素理想[5]. 定义 $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A)$ 为如下生成元和关系表现的位格[6].

$$\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) := \big\langle U_f\colon f \in A \mid U_0 = \bot, U_1 = \top, U_{f+g} \leq U_f \vee U_g, U_{fg} = U_f \wedge U_g \big\rangle.$$

由关系 $U_{fg} = U_f \wedge U_g$, 有限个基础开集的交仍是基础开集, 从而 $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A)$ 的任何元素都可写成 $\bigvee_i U_{f_i}$ $(f_i \in A)$ 的形式; 这解释了 U_f 称为 "基础开集" 的原因.
将 U_f 想象为一个空间上函数 f "非零" 的地方, $f + g$ 非零的地方包含于 f 与 g 各自非零的地方的并, 而 fg 非零的地方恰为两者的交.
可以证明如此定义的位象 $\operatorname{Spec} A$ 正是传统上定义的拓扑空间 $\operatorname{Spec} A$. 例如, $\operatorname{Spec} A$ 的点一一对应于位格态射 $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) \to \{\top, \bot\}$, 而这等同于对每个生成元 U_f ($f \in$

A) 指定 $p(f) \in \{\top, \bot\}$, 满足 $p(0) = \bot, p(1) = \top, p(fg) = p(f) \wedge p(g), p(f+g) \leq p(f) \vee p(g)$. 此时 $p^{-1}(\bot)$ 正是 A 的素理想.
对于 A 的一族元素 $\{f_i\}$, 所有开子空间 U_{f_i} 覆盖 $\operatorname{Spec} A$ (即 $\bigvee_i U_{f_i} = \top$) 当且仅当存在一族至多有限个非零的元素 $\{a_i\}$ 使得 $\sum_i a_i f_i = 1$, 即 $\{f_i\}$ 生成 A 的单位理想. 这启发了 Zariski 景的定义 (3.4.23).
另外, 基础开集 U_f 对应的开子位象同构于局部化的谱 $\operatorname{Spec} A_f$, 并且也有生成元和关系的表现, 见例 2.2.7.

对每个元素 $U \in \mathcal{O}(X)$, 规定 $\operatorname{Pt}(X)$ 的子集 $\{p \in \operatorname{Pt}(X) \mid p^*(U) = \top\}$ 为开集, 我们得到了 $\operatorname{Pt}(X)$ 上的一个拓扑. 于是有函子

$$\operatorname{Pt}\colon \mathsf{Loc} \to \mathsf{Top}.$$

命题 2.1.12

拓扑空间与位象之间有伴随

$$\mathsf{Top} \underset{\operatorname{Pt}}{\overset{\operatorname{Open}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathsf{Loc}.$$

证明. 对于拓扑空间 S 与位象 X, 连续映射 $f\colon S \to \operatorname{Pt}(X)$ 对应位格的态射

$$\mathcal{O}(X) \to \operatorname{Open}(S), \quad U \mapsto \{p \in S \mid (f(p))^*(U) = \top\}.$$

反过来, 态射 $\varphi\colon \mathcal{O}(X) \to \operatorname{Open}(S)$ 对应连续映射

$$S \to \operatorname{Pt}(X), \quad p \mapsto \left(U \mapsto \begin{cases} \top & p \in \varphi(U) \\ \bot & p \notin \varphi(U) \end{cases}\right).$$

容易验证这给出了自然同构

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \operatorname{Pt}(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{Frm}}(\mathcal{O}(X), \operatorname{Open}(S)) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Loc}}(\operatorname{Open}(S), X).$$

□

上述伴随远远不是范畴等价; 首先, 从拓扑空间对应的位象中不一定能重构出原来的拓扑空间, 例如所有平凡拓扑对应的位象都是终位象 1.

然而, 对于分离性较好的空间, 其对应的位象确实能重构出这个空间:

[5]值得一提的是, 构造主义数学青睐这种位象的观点, 因为环的素理想的存在性依赖选择公理. 关于构造主义数学与位象, 我们推荐读者阅读 Andrej Bauer 的文章 [3].
[6]位格就像群, 环等代数结构一样, 可使用生成元和关系刻画, 并且可由给定生成元的 "自由代数" 的商得到, 见注 2.3.15.

定义 2.1.13 (清晰空间)

设 X 为拓扑空间. 若命题 2.1.12 中伴随的单位 $X \to \mathrm{Pt}\,\mathrm{Open}(X)$ 是同胚, 则称 X 为*清晰空间* (sober space[7]). 换言之, 清晰空间的范畴是上述伴随给出的等价的全子范畴 (命题 A.2.8).

命题 2.1.14

Hausdorff (T_2) 空间都是清晰空间, 清晰空间都是 T_0 空间; 而清晰与 T_1 互不蕴涵, 例如 Sierpiński 空间清晰而不 T_1, 无限集上的余有限拓扑 T_1 而不清晰.

另一方面, 从一个位象的所有点的信息也无法重构出这个位象: 下面的例子表明一个位象甚至可能没有点!

例 2.1.15 (没有点的位象的例子: 完备无原子 Boole 代数)

*完备 Boole 代数*是指存在任意交和任意并的 Boole 代数. 由定义, 完备 Boole 代数是位格. 称偏序集中的一个元素为*原子*, 是指除 $\bot$ 以外没有比它更小的元素. 对任何完备 Boole 代数 B, 设 P 是 B 的完全素滤子, 则 $\bigwedge P$ 是 B 的原子. 这是因为, 假设 $x < \bigwedge P$, 则 $x \notin P$, 从而由 $\top = x \vee \neg x \in P$, 得 $\neg x \in P$. 这说明 $x < \neg x$, 故 $x = \bot$. 因此, 完备无原子 Boole 代数对应没有点的位象. 下面是两个完备无原子 Boole 代数的例子.

- 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为 σ-有限测度空间, $N \subset \mathcal{A}$ 为零测集的理想, 那么商代数 $\mathcal{A}/N$ 是完备 Boole 代数; 并且当 μ 无原子 (没有正测度的点) 时, $\mathcal{A}/N$ 无原子.
- 设 X 为拓扑空间. 对于开集 $U \subset X$, 定义 $\neg U$ 是 U 的补集的内部. 考虑偏序集

  $$\mathrm{RO}(X) = \big\{U \in \mathrm{Open}(X) \mid U = \neg\neg U\big\},$$

  称为 X 的*正则开集代数* (regular open algebra). 可以证明 $\mathrm{RO}(X)$ 也是一个完备 Boole 代数[8]. 例如其中的任意并由下式给出:

  $$\bigvee_{i \in I} U_i = \neg\neg\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big).$$

  若取空间 X 为欧氏空间, 则 $\mathrm{RO}(X)$ 没有原子 (任何正则开集内都有一个更小的正则开集). 这是双重否定子位象 (2.2.17) 的特例.

[7]Sober 的原义是清醒, 未喝醉. 直观上一个 sober 空间中的点没有过于 “糊在一起”, 清晰可辨.

2.2 位象的几何性质

子位象

正如许多 "空间" 的概念 (拓扑空间, 向量空间, 概形...) 一样, 位象有一种自然的 "子空间" 的概念; 当然, 子位象不是通过点集, 而是通过开集的代数定义的. 注意区分底层集合的单 (满) 射与范畴论意义上的单 (满) 态射. 拓扑空间的子空间不等于范畴论意义上的单态射; 类似地, 子位象的定义不是 Loc 中的单态射, 而是其中的*正则单射* (定义 1.3.8), 即 Frm 中的*正则满射*.

命题-定义 2.2.1 (子位象)

对于位象的态射 $f\colon Y \to X$, 以下条件等价:

(1) $f^*\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ 为集合的满射;

(2) $f_*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ 为集合的单射;

(3) $f^* f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(Y)}$;

称满足上述条件的 f 为*子位象*, 又称位象的*嵌入*.

证明. (3) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

- (1) $\Rightarrow$ (3). 假设 f^* 为满射. 因为 $(f^* f_*) f^* = f^*$ (命题 2.2.9), 所以 $f^* f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}$.
- (2) $\Rightarrow$ (3). 假设 f_* 为单射. 因为 $f_*(f^* f_*) = f_*$ (命题 2.2.9), 所以 $f^* f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(X)}$.

□

上面的条件 (3) 是自反子范畴的性质 (A.2.10) 的特例.

对于子位象 $Y \to X$, $\mathcal{O}(Y)$ 既可视为 $\mathcal{O}(X)$ 的商, 又可视为其子集. 以下两个命题分别描述了它作为商集和子集的性质.

命题 2.2.2

对于 Frm 中的态射 $f^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, 若 f^* 为集合的满射, 则 f^* 为正则满射, 即存在子位格 $(\equiv_X) \hookrightarrow \mathcal{O}(Y) \times \mathcal{O}(Y)$,

$$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)/\equiv_X .$$

当然, 这也等价于 f 为 Loc 中的正则单射.

[8] https://planetmath.org/regularopenalgebra

证明. 令 $(\equiv_Y)$ 为 f^* (底层集合意义下) 的核偶 (定义 1.3.11). 容易验证它关于有限交与任意并封闭, 即是 $\mathcal{O}(X)\times\mathcal{O}(X)$ 的子位格. □

子位象 $Y\to X$ 一一对应于 $\mathcal{O}(X)$ 上关于有限交与任意并封闭的等价关系 $\equiv_Y$. 直观上, 这个等价关系是说两者与子空间 Y 的 "交" 相同.

命题 2.2.3

对于子位象 $i\colon Y\to X$, 将 $\mathcal{O}(Y)$ 通过 i_* 视为 $\mathcal{O}(X)$ 的子集, 那么

(1) $\mathcal{O}(Y)$ 关于 $\mathcal{O}(X)$ 中的任意交封闭 (位格中任意交存在, 见注 2.1.2);

(2) $\mathcal{O}(Y)$ 上的 "$\Rightarrow$" 运算与 $\mathcal{O}(X)$ 上的一致;

(3) 对任意 $U\in\mathcal{O}(X)$ 与 $W\in\mathcal{O}(Y)$, 有 $(U\Rightarrow W)\in\mathcal{O}(Y)$ (满足此条件的子集称为*指数理想* exponential ideal).

证明.

(1) 这是因为 i_* 作为右伴随保持极限 (命题 A.2.5).

(2) 这是因为 "$\Rightarrow$" 运算完全由 "$\wedge$" 决定, 而 $\mathcal{O}(Y)$ 上的交运算与 $\mathcal{O}(X)$ 上的一致.

(3) 对任意 $U,V\in\mathcal{O}(X)$, 由于 i^* 保持有限交且 $i^*i^*=i^*$ (其中我们省略含入映射 i_*), 有

$$i^*(V\wedge U)=i^*(V)\wedge i^*(U)=i^*i^*(V)\wedge i^*(U)=i^*(i^*(V)\wedge U),$$

从而如下条件等价:

$$\begin{array}{ccc} V\le(U\Rightarrow W), & V\wedge U\le W, & i^*(V\wedge U)\le W, \\ i^*(i^*(V)\wedge U)\le W, & i^*(V)\wedge U\le W, & i^*(V)\le(U\Rightarrow W). \end{array}$$

令 $V=(U\Rightarrow W)$, 知 $i^*(U\Rightarrow W)=(U\Rightarrow W)$, 故 $(U\Rightarrow W)\in\mathcal{O}(Y)$. 这个命题是指数理想的判定 (命题 A.3.19) 的特例.

□

子位象之间的包含关系有多种相互等价的表述.

命题 2.2.4 (子位象之间的包含关系)

对于位象 X 的子位象 $i\colon Y\to X, j\colon Z\to X$, 如下条件等价.

(1) 作为范畴 Loc 中的子对象有 $Y\le Z$, 即 i 穿过 j;

(2) i^* 穿过 j^*, 即 (作为 $\mathcal{O}(X)\times\mathcal{O}(X)$ 的子集) $\equiv_Z\subset\equiv_Y$;

(3) i_* 穿过 j_*, 即 (作为 $\mathcal{O}(X)$ 的子集) $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}(Z)$.

证明. 见命题 A.3.5. □

例 2.2.5 (随机元素的子位象)

Alex Simpson 的文章 [28] 引入了位象[a]上的测度 $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to [0, +\infty]$. 对于位象 X 上的概率测度 μ, 存在一个最大的测度为 1 的子位象 $\mathrm{Ran}_\mu(X)$, 其对应的等价关系为

$$U \equiv_{\mathrm{Ran}_\mu(X)} V \quad \text{当且仅当} \quad \mu(U \cap V) = \mu(U \cup V).$$

使用这个结论可以构造 "随机序列的位象", 它是 0 和 1 组成的所有可数序列的空间的 "子空间", 但没有任何一个序列属于这个子空间, 因为 "一个确定的序列永远不是随机序列". 位象上的测度还可解决 "分球悖论": 分球悖论是指球面上不可能给所有子集定义一个旋转不变的测度, 因为一个球可以分成若干不相交的部分, 然后拼成两个同样大的球. 以位象的观点, 这些部分实际上是相交的, 从而不会造成矛盾.

[a]准确地说, 是 σ-位象

开子位象与闭子位象

对于位象 X, $\mathcal{O}(X)$ 的元素可视为其开子空间.

命题-定义 2.2.6 (开子位象)

设 X 为位象, $W \in \mathcal{O}(X)$. X 的*开子位象* W 有如下 4 种等价的定义.

- 定义开子位象的嵌入 $i\colon W \to X$ 为一对伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(W) \arrow[r, shift right, "i_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{O}(X) \arrow[l, shift right, "i^*"'] \end{tikzcd},$$

  有两种定义方式,

  (1) $\mathcal{O}(W)_1 = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \leq W\}$, $i^*(U) = (W \wedge U)$, $i_*(U) = (W \Rightarrow U)$. 关于 "$\Rightarrow$" 运算的定义见 1.3.35.

  (2) $\mathcal{O}(W)_2 = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U = (W \Rightarrow U)\}$, $i^*(U) = (W \Rightarrow U)$, $i_*(U) = U$.

- 定义等价关系 $\equiv_W$, 又有两种定义方式,

  (3) $U \equiv_W V \quad$ 当且仅当 $\quad (W \wedge U) = (W \wedge V)$.

  (4) $U \equiv_W V \quad$ 当且仅当 $\quad (W \Rightarrow U) = (W \Rightarrow V)$.

证明. 很明显, 定义 (1), (3) 等价, 定义 (2), (4) 等价.

- 定义 (1), (2) 等价是因为如下的同构.

$$\{U_1 \in \mathcal{O}(X) \mid U_1 \leq W\} \underset{U_1 \mapsto (W \Rightarrow U_1)}{\overset{U_2 \mapsto (W \wedge U_2)}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\simeq}}}} \{U_2 \in \mathcal{O}(X) \mid U_2 = (W \Rightarrow U_2)\}$$

- 定义 (3), (4) 等价是因为 $(W \Rightarrow U) = (W \Rightarrow (W \wedge U))$, $(W \wedge U) = (W \wedge (W \Rightarrow U))$.

$\square$

例 2.2.7 (环谱的开子位象)

继续例 2.1.11, $\operatorname{Spec} A$ 的基础开集 U_f 对应的开子位象正是 $\operatorname{Spec} A_f$,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A_f) &\simeq \{U \in \mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) \mid U \leq U_f\} \\ &\simeq \langle U_{fg} \colon g \in A \mid U_0 = \bot, U_f = \top, U_{f(g+h)} \leq U_{fg} \vee U_{fh}, U_{fgh} = U_{fg} \wedge U_{fh} \rangle.\end{aligned}$$

$\operatorname{Spec} A_f$ 的点一一对应于位格态射 $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A_f) \to \{\bot, \top\}$, 也即对每个生成元 U_{fg} 指定一个元素 $p(fg) \in \{\top, \bot\}$, 满足 $p(0) = \bot, p(f) = \top, p(f(g+h)) \leq p(fg) \vee p(fh), p(fgh) = p(fg) \wedge p(fh)$. 令 $\mathfrak{p} = \{g \in A \mid p(fg) = \bot\}$, 则 $\mathfrak{p}$ 是 A 中不含 f 的素理想, 这与 $\operatorname{Spec} A_f$ 的传统定义相符.

定义 2.2.8 (闭子位象)

设 X 为位象, $W \in \mathcal{O}(X)$. X 的闭子位象 $X \setminus W$ 有如下两种等价的定义.

- 定义闭子位象的嵌入 $i \colon (X \setminus W) \to X$ 为一对伴随

$$\mathcal{O}(X \setminus W) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathcal{O}(X),$$

$\mathcal{O}(X \setminus W) := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \geq W\}$, $i^*(U) = U \vee W$, $i_*(U) = U$.

- 定义等价关系 $\equiv_{X \setminus W}$, $U \equiv_{X \setminus W} V$ 当且仅当 $U \vee W = V \vee W$.

子位象与内核

下面引入内核 (nucleus) 的概念. 它是意象中 Lawvere–Tierney 拓扑 (定义 3.7.1) 和层化在位象中的类比.

命题 2.2.9

对位象的态射 $f\colon X \to Y$, 有

$$f^*f_*V \le V\,(V \in \mathcal{O}(X)), \quad U \le f_*f^*U\,(U \in \mathcal{O}(Y)),$$

$$f^*f_*f^* = f^*, \quad f_*f^*f_* = f_*.$$

证明. 前两式是伴随 $f^* \dashv f_*$ 的余单位和单位, 而后两式由前两式易得. 后两式也包含在伴随函子的一种定义中, 见定义 A.2.1). □

对于位象态射 f, 记 $j = f_*f^*$, 由上述命题有 $U \le j(U)$, 且 $jj = j$. 这实际上是 “伴随产生单子” (命题 A.7.3).

定义 2.2.10 (内核)

定义位象 X 的一个内核 (nucleus) 为满足如下条件的映射 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$,

- j 保持有限交, $j(U \wedge V) = j(U) \wedge j(V)$;
- $U \le j(U)$;
- $jj = j$.

其中后两个条件就是说 j 为单子 (定义 A.7.1).
对于位象态射 $f\colon X \to Y$, 称 f_*f^* 为 f 诱导的 Y 的内核.

定义 2.2.11 (内核对应的子位象)

设 j 为 X 的一个内核. 定义子位象 X_j,

- 定义伴随

$$\mathcal{O}(X_j) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{O}(X),$$

  $\mathcal{O}(X_j) := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid j(U) = U\}$. (由于 $jj = j$, $\mathcal{O}(X_j)$ 也等于 $\mathrm{im}(j)$.)
  $i^*(U) = j(U)$, $i_*(U) = U$.

- 等价关系 $\equiv_{X_j}$ 为 $U \equiv_{X_j} V$ 当且仅当 $j(U) = j(V)$.

例如, 当 $j(U) = U \vee W$ 时, 上述构造给出闭子位象 $X \setminus W$. 当 $j(U) = (W \Rightarrow U)$ 时, 上述构造给出开子位象 W.

命题 2.2.12

位象 X 的内核一一对应于 X 的子位象.

证明. 由定义 2.2.11, 内核 j 对应的子位象 $i\colon X_j \to X$ 对应的内核为 $i_* i^* = j$.

另一方面, 设 $i\colon W \to X$ 为子位象, $j = i_* i^*$. 我们证明子位象 X_j 同构于 W. 因为 i_* 为单射, i^* 为满射 (定义 2.2.1), 所以作为 $\mathcal{O}(X)$ 的子位格有 $\operatorname{im}(i_*) = \operatorname{im}(j) = \mathcal{O}(X_j)$. 故 X_j, W 作为 X 的子位象同构. □

命题-定义 2.2.13 (闭包)

对于子位象 $i\colon W \hookrightarrow X$, 存在包含 W 的最小闭子位象 $\overline{W}$, 称为 W 的闭包, 满足

$$\overline{W} \simeq X \setminus U, \quad U = \bigvee \{V \in \mathcal{O}(X) \mid i^*(V) = \bot\}.$$

若 $\overline{W} = X$, 则称 W 为稠密子位象. 设 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ 为子位象 W 对应的内核, 则 W 为稠密子位象当且仅当 $j(\bot) = \bot$, 也即 $\bot \in \mathcal{O}(W)$.

Boole 位象

定义 2.2.14 (Boole 位象)

称一个位象为 *Boole* 位象 (Boolean locale) 是指其对应的位格为 Boole 代数 (由位格的定义, 它必然是完备 *Boole* 代数).

有趣的是, 一个位象的所有 Boole 子位象具有非常简单的刻画.

命题 2.2.15

在任何 Heyting 代数 H 中有

$$\Big(\big((x \Rightarrow y) \Rightarrow y\big) \Rightarrow y\Big) = (x \Rightarrow y).$$

特别地, 有 $\neg\neg\neg = \neg$.

证明. 这是因为如下的伴随.

$$\begin{tikzcd} H^{\mathrm{op}} \arrow[r, shift right, "(-)\Rightarrow y"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & H \arrow[l, shift right, "(-)\Rightarrow y"'] \end{tikzcd}$$

对比命题 2.2.9 的证明. □

命题-定义 2.2.16

设 X 为位象, $W \in \mathcal{O}(X)$. 定义 $\mathrm{B}(W)$ 为内核 $j = \big((- \Rightarrow W) \Rightarrow W\big)$ 对应的子位象. 那么 $\mathrm{B}(W)$ 为 Boole 位象, 且 X 的所有 Boole 位象均可表示为这种形式.

证明. 由命题 2.2.15 的证明知 $j = \big((- \Rightarrow W) \Rightarrow W\big)$ 为内核, 且由该命题的结论知

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\mathrm{B}(W)) &= \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U = \big((U \Rightarrow W) \Rightarrow W\big)\} \\ &= \{V \Rightarrow W \mid V \in \mathcal{O}(X)\}\end{aligned}$$

特别地, $\mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$ 的最小元为 W. 对任意 $U \in \mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$, 我们证明 $U \Rightarrow W$ 是 U 在 $\mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$ 中的补, 从而 $\mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$ 为 Boole 代数. 首先, $U \wedge (U \Rightarrow W) = W$. 其次, 对任意 $(V \Rightarrow W) \in \mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$, 假设 $U \leq (V \Rightarrow W)$ 且 $(U \Rightarrow W) \leq (V \Rightarrow W)$. 那么 $V \leq (U \Rightarrow W) \leq (V \Rightarrow W)$, 从而 $V \leq W$, $(V \Rightarrow W) = \top$.

另一方面, 对任意 Boole 子位象 $i\colon Y \to X$, 将 $\mathcal{O}(Y)$ 通过 i_* 视为 $\mathcal{O}(X)$ 的子集, 设 $\mathcal{O}(Y)$ 的最小元为 W. 对任意 $U, V \in \mathcal{O}(Y)$,

$$U \wedge V \leq W \quad \Leftrightarrow \quad U \leq (V \Rightarrow W),$$

因此 V 与 $V \Rightarrow W$ 是 Boole 代数 $\mathcal{O}(Y)$ 中的互补元素, 这证明了 $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}(\mathrm{B}(W))$. 而 $(- \Rightarrow W)$ 的像落在 $\mathcal{O}(Y)$ 内 (命题 2.2.3), 故有 $Y = \mathrm{B}(W)$. □

由上述证明可知, 对任何子位象 $i\colon Y \to X$, 将 $\mathcal{O}(Y)$ 通过 i_* 视为 $\mathcal{O}(X)$ 的子集, 对任意 $W \in \mathcal{O}(Y)$, 有 $\mathcal{O}(\mathrm{B}(W)) \subset \mathcal{O}(Y)$, 即 “$\mathrm{B}(W)$ 是包含 W 的最小子位象”, 其中子位象按照上述方式视为 $\mathcal{O}(X)$ 的子集.

例 2.2.17 (双重否定子位象)

在定义 2.2.16 中取 $W = \bot$ 就得到*双重否定子位象*, 即内核 $\neg\neg$ 对应的子位象, 记之为 $X_{\neg\neg} \hookrightarrow X$. 称 $\mathcal{O}(X_{\neg\neg}) = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U = \neg\neg U\}$ 的元素为 $\mathcal{O}(X)$ 的*正则元素* (见例 2.1.15). 由前面的讨论, $X_{\neg\neg}$ 是 X 的最小稠密子位象. 在意象的层面, 双重否定作为 Lawvere–Tierney 拓扑给出一个 Boole 子意象, 在力迫法中有重要的应用 (见 4.9 节).

位象的满射

前面研究了位象的正则单射. 位象的满射与之并非完全对偶. 不同之处在于 Frm 中的单态射等同于底层集合上的单射. 这是因为遗忘函子 $\mathsf{Frm} \to \mathsf{Set}$ 保持极限.

命题-定义 2.2.18 (位象的满射)

对于位象的态射 $f\colon X\to Y$, 以下条件等价:

(1) $f^*\colon \mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$ 为集合的单射;

(2) $f_*\colon \mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(Y)$ 为集合的满射;

(3) $f_*f^*=\mathrm{id}_{\mathcal{O}(Y)}$.

称满足上述条件的 f 为位象的满射.

证明. (3) ⇒ (1), (3) ⇒ (2) 是显然的.

- (1) ⇒ (3). 假设 f^* 为单射. 因为 $f^*(f_*f^*)=f^*$ (命题 2.2.9), 所以 $f_*f^*=\mathrm{id}_{\mathcal{O}(Y)}$.
- (2) ⇒ (3). 假设 f_* 为满射. 因为 $(f_*f^*)f_*=f_*$ (命题 2.2.9), 所以 $f_*f^*=\mathrm{id}_{\mathcal{O}(Y)}$.

□

命题 2.2.19 (位象的满–单分解, 存在性)

设 $f\colon X\to Y$ 为位象态射. 存在 Y 上的内核 j 使得 f 分解为满射 $X\to Y_j$ 与嵌入 $Y_j\hookrightarrow Y$ 的复合.

证明. 令 $j=f_*f^*$ 为 f 诱导的内核, 则有 $f^*=f^*f_*f^*=f^*j$. 定义 $p\colon X\to Y_j$, $p^*=f^*\big|_{\mathcal{O}(Y_j)}$ (回忆 $\mathcal{O}(Y_j)=\{U\in\mathcal{O}(Y)\mid j(U)=U\}$), 则 $f^*=p^*j$, f 分解为 $X\xrightarrow{p}Y_j\hookrightarrow Y$. 对任意 $U,V\in\mathcal{O}(Y_j)$, 若 $p^*(U)=p^*(V)$, 则 $U=j(U)=j(V)=V$, 这说明 p^* 单, 即 p 为满射. □

命题 2.2.20 (位象的满–单分解, 唯一性)

设 $f\colon X\to Y$ 为位象态射, f 有两个分解 $f=X\xrightarrow{p}A\xrightarrow{u}Y=X\xrightarrow{q}B\xrightarrow{v}Y$. 假设 v 为嵌入, p 为满射, 那么存在唯一的态射 $g\colon A\to B$ 使下图交换;

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[rd, "u"] \arrow[dd, dashed, "\exists! g"] & \\ X \arrow[ru, twoheadrightarrow, "p"] \arrow[rd, "q"'] & & Y \\ & B \arrow[ru, hookrightarrow, "v"'] & \end{tikzcd}$$

进一步假设 u 为嵌入, q 为满射, 则 g 为同构.

证明. 对 v 使用命题 2.2.19, 得分解 $v=B\xrightarrow{r}Y_j\xhookrightarrow{i}Y$, 那么 r 既单又满, 故为同构. 不妨设 $B=Y_j$, $v^*=j$.

注意到对于位象态射 $f\colon X\to Y$, f 穿过 Y_j 当且仅当 f^* 穿过 j, 当且仅当 $f^*j=f^*$. 代入 $f=up$ 得 $p^*u^*j=p^*u^*$. 由 p^* 为单射得 $u^*j=u^*$, 故 u 穿过 Y_j. 由于 $Y_j\to Y$ 为单射, 态射 $g\colon A\to B$ 当然是唯一的. 因为 $vgp=up=vq$, v 为嵌入, 所以 $gp=q$.

进一步假设 u 为嵌入, q 为满射, 则 $u=vg$ 推出 g 单, $q=gp$ 推出 g 满, 从而 g 为同构. □

开映射

拓扑空间的开映射 $f\colon X\to Y$ 是指将开集映为开集的映射. 对开集 $U\in\mathrm{Open}(X)$, 存在开集 $f_!(U)\in\mathrm{Open}(Y)$ 构成开集 U 在 Y 中的像, 即逆像包含 U 的最小开集, 这个性质可表述为 $f_!$ 是 f^* 的左伴随:

$$f_!(U)\subset V\ \Leftrightarrow\ U\subset f^*(V).$$

此外还有如下的 *Frobenius* 恒等式,

$$f_!(U\cap f^*(V))=f_!(U)\cap V.$$

定义 2.2.21

对于位象的态射 $f\colon X\to Y$, 若 $f^*\colon\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$ 有左伴随 $f_!$, 且满足 Frobenius 恒等式 $f_!(U\wedge f^*(V))=f_!(U)\wedge V$, 则称 f 为开映射.

命题 2.2.22

位象的态射 $f\colon X\to Y$ 为开映射当且仅当 f^* 为完备 *Heyting* 代数的同态, 即 f^* 保持任意交, 且保持 $\Rightarrow$ 运算.

证明. f^* 保持任意交当且仅当 f^* 有左伴随 (命题 A.5.27), 而 f^* 保持 $\Rightarrow$ 运算是 Frobenius 互反律的等价条件 (命题 A.2.18). □

命题 2.2.23

子位象 $i\colon Y\to X$ 是开子位象当且仅当 i 是开映射.

证明. 设 $i\colon Y\to X$ 是开子位象, $Y\in\mathcal{O}(X)$, $\mathcal{O}(Y)=\{U\in\mathcal{O}(X)\mid U\le Y\}$. 那么 $i_!(U)=U$, $i^*(U)=U\wedge Y$ 满足 Frobenius 恒等式.

另一方面, 设子位象的嵌入 $i\colon Y\to X$ 是开映射. 因为 i^* 为满射而 $i_!\dashv i^*$ (这导致 $i^*i_!i^*=i^*$), 所以 $i_!$ 为单射. 令 $W=i_!(\top)$ ($\top$ 是 $\mathcal{O}(Y)$ 的最大元), 那么 Frobenius 恒等式给出 $i_!i^*(V)=W\wedge V$ ($V\in\mathcal{O}(X)$). 进而有

$$\{V\in\mathcal{O}(X)\mid V\le W\}\{V\in\mathcal{O}(X)\mid V=i_!i^*(V)\}=\mathrm{im}\,i_!.$$

这说明 Y 是由 W 确定的开子位象. □

例 2.2.24 (到点的映射)

对于位象 X, 映射 $X \to 1$ 是开映射.[9] 这是因为 $X^*\colon \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(X)$ 有左伴随

$$X_!\colon U \mapsto \begin{cases} \top & U \neq \bot \\ \bot & U = \bot \end{cases},$$

而 Frobenius 恒等式 $X_!(U \wedge X^*(V)) = X_!(U) \wedge V$ 对 $V = \top, V = \bot$ 均成立.

[未完成: 留下经典逻辑的讨论, 将内位象的讨论移到内语言那一章?]

命题 2.2.25 (离散空间)

位象 X 是离散空间, 即 $\mathcal{O}(X)$ 作为位格同构于某个集合的幂集, 当且仅当 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是开映射.

证明. 定义集合

$$X_0 = \{开子空间\ A \hookrightarrow X \mid A \times A \subset \Delta \subset X \times X,\ X_! A = \top\}.$$

其中条件 $X_! A = \top$ 在经典逻辑中等价于 $A \neq \bot$. 考虑映射

$$\phi\colon \mathcal{O}(X) \to P(X_0),\ U \mapsto \{A \in X_0 \mid A \leq U\}.$$

[未完成:] □

局部位象

定义 2.2.26 (局部位象)

称位象 X 为局部位象是指 X 的任何开覆盖都包含 X 自身; 即对任意一族元素 $\{U_i\}_{i \in I} \subset O(X)$, 若 $\bigvee_i U_i = \top$, 则存在 i 使得 $U_i = \top$.

例 2.2.27 (局部拓扑空间)

设 X 为清晰空间 (定义 2.1.13), 例如 Hausdorff 空间. 那么 X 为局部位象当且仅当 X 中存在一点 x, 其唯一的邻域是 X 本身.

[9] 注意这个命题依赖于排中律: 左伴随 $X_!$ 的构造使用了排中律, $\mathcal{O}(1) = \{\top, \bot\}$ 的事实也需要排中律. 在没有排中律时, 也可以证明映射 $X \to 1$ 是开映射当且仅当 $X^*\colon \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(X)$ 有左伴随. 称满足该条件的位象 X 为开位象.

例 2.2.28 (局部环的谱是局部位象)

在经典逻辑中, *局部环*是指仅有一个极大理想的环. 一般地, 称环 R 为局部环是指对任意 $x, y \in R$, 若 $x+y$ 可逆, 则 x 可逆或 y 可逆. 局部环 R 的谱 $\operatorname{spec} R$ 是局部位象, 事实上, 考虑 R 的极大理想对应的 $\operatorname{spec} R$ 的点, 其唯一的邻域是 $\operatorname{spec} R$ 本身.

命题 2.2.29

位象 X 是局部位象当且仅当 $X_* \colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(1)$ 有右伴随.

证明. X_* 有右伴随当且仅当 X_* 保持任意并, 而 $X_*(U) = \begin{cases} \top & U = \top \\ \bot & U < \top \end{cases}$, 故 X_* 保持任意并当且仅当 $\left(\bigvee_{U<\top} U\right) < \top$, 即 X 为局部位象. □

局部连通位象

定义 2.2.30 (连通位象)

称位象 X *连通*, 是指对任意两两不交的一族元素 $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{O}(X)$ $(i \neq j \Rightarrow U_i \wedge U_j = \bot)$, 若 $\bigvee_i U_i = \top$, 则存在 i 使得 $U_i = \top$.

定义 2.2.31 (局部连通位象)

称位象 X *局部连通* (locally connected), 是指其任何开子位象都可写成若干个连通的开子位象的并.

由定义, 可知 “局部连通” 是一种*局部性质*, 即当 X 有开覆盖 $X = \bigvee_i U_i$ 时, X 局部连通当且仅当每个 U_i 局部连通.

命题-定义 2.2.32 (连通分支)

局部连通位象 X 可唯一地分解为连通开子位象的不交并 $X = \bigvee_i X_i$, 称每个 X_i 为 X 的*连通分支* (component).

证明. 由定义, X 是若干个连通开子位象 U_j 的并. 在这些开子位象之间, “相交非空” 的关系生成一个等价关系 $\sim$, 取 X_i 为每个等价类中所有成员的并即可. □

在 3.9 节, 我们将用层范畴的性质来刻画位象的 (局部) 连通性等几何性质, 并由此类比得到意象的几何性质的定义.

2.3 位象与逻辑

[A locale is a] propositional geometric theory pretending to be a space.

Steven Vickers

空间 ------- 代数 ------- 理论

点 ------- 素理想 ------ 模型

开集 ------- 元素 ------- 命题

建议在阅读本节之前阅读附录 B.1 节.

经典命题逻辑与 Boole 代数

Lindenbaum 代数是用代数方法研究逻辑的工具. 粗略地说, 它是一个理论中的 "命题的代数"; 在经典逻辑的情形, 它就是 *Boole* 代数 (定义 1.3.60). 根据 Stone 表示定理, Boole 代数在代数–几何对偶中对应 *Stone* 空间.

设 Σ 是由若干命题符号 $p, q, r, \cdots$ 组成的符号表[10]. 定义 Sen_Σ 为 Σ 上由 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\top$, $\bot$ 组成的公式[11]的集合, 包括 $(p \wedge q) \Rightarrow r$, $p \vee \neg p$, $p \Rightarrow \bot$ 等等.

定义 2.3.1

在经典逻辑中, 对于符号表 Σ 上的命题理论 $\mathbb{T}$ (即一些公理的集合), 定义 $\mathbb{T}$ 的 *Lindenbaum* 代数 $\mathcal{LA}_\mathbb{T}$ 为 Σ 上公式的 $\mathbb{T}$-可证等价类构成的 Boole 代数:

$$\mathcal{LA}_\mathbb{T} := \mathsf{Sen}_\Sigma/{\equiv_\mathbb{T}}, \quad \text{其中 } \phi \equiv_\mathbb{T} \psi \text{ 当且仅当 } \mathbb{T} \text{ 可证 } \phi \Leftrightarrow \psi.$$

[10]在定义 B.1.5 的框架中, 我们可以说 Σ 包括 0 个类型, 0 个函数符号 (固然, 因为 Σ 中没有类型), 以及若干个 0 元关系符号 $p, q, r, \cdots$. 这样的理论也成为零阶理论 (zeroth-order theory).

[11]这里的公式也可以放在定义 B.1.12 的框架中. 注意, 在这个框架中没有等式 $p = q$, 因为 p, q 不是某个类型的项 (Σ 中没有类型), 而是 0 元关系符号.

定义 2.3.2 (命题理论之间的态射)

对于两个命题理论 $(\Sigma,\mathbb{T})$, $(\Sigma',\mathbb{T}')$, 定义态射 $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}'$ 为映射 $f\colon \Sigma\to \mathsf{Sen}_{\Sigma'}$, 它自然诱导映射 $\mathsf{Sen}_\Sigma\to\mathsf{Sen}_{\Sigma'}$, 使得 f 保持公理, 即 $f(\mathbb{T})\subset\mathbb{T}'$. 等价地, f 为 Boole 代数同态 $\mathcal{LA}_\mathbb{T}\to\mathcal{LA}_{\mathbb{T}'}$.

注 2.3.3

命题理论的态射可类比于环同态: 对于两个环 $R=\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]/I$ 与 $R'=\mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_m]/J$, 环同态 $f\colon R\to R'$ 为映射 $\{x_1,\cdots,x_n\}\to R'$ (它自然诱导映射 $\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]\to\mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_m]$), 使得 $f(I)\subset J$.

定义 2.3.4 (命题理论的模型)

一个命题理论 $(\Sigma,\mathbb{T})$ 的标准模型[12](standard model, 又称解释, interpretation) 是一个函数 $f\colon\Sigma\to\{\top,\bot\}$, 它自然诱导一个映射 $\bar{f}\colon\mathsf{Sen}_\Sigma\to\{\top,\bot\}$, 使得 $\bar{f}(\mathbb{T})\subset\{\top\}$. 记 $\mathbb{T}$ 的经典模型的集合为 $\mathrm{Mod}(T)$.

一般地, 对任意 Boole 代数 A, $(\Sigma,\mathbb{T})$ 的 A-模型是一个映射 $f\colon\Sigma\to A$, 它自然诱导一个映射 $\bar{f}\colon\mathsf{Sen}_\Sigma\to A$, 使得 $\bar{f}(\mathbb{T})\subset\{\top\}$. 记 $\mathbb{T}$ 的 A-模型的集合为 $\mathrm{Mod}_A(\mathbb{T})$. 恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathcal{LA}_\mathbb{T}}$ 是 $\mathbb{T}$ 的万有模型 (generic model), 意指任何模型都可由万有模型通过一个 Boole 代数同态得到.

命题 2.3.5

对任意 Boole 代数 A, 命题理论 $(\Sigma,\mathbb{T})$ 的 A-模型一一对应于 Boole 代数同态 $\mathcal{LA}_\mathbb{T}\to A$.

证明. 设 $f\colon\Sigma\to A$ 为 $\mathbb{T}$ 的 A-模型. 我们需要证明 $\bar{f}\colon\mathsf{Sen}_\Sigma\to A$ 将 $\mathbb{T}$-等价的公式对应到相同的元素. 若 $\phi\equiv_\mathbb{T}\psi$, 设 $\mathbb{T}$ 对 $\phi\Leftrightarrow\psi$ 的证明用到了公理 $t_1,\cdots,t_n$, 那么由经典逻辑的性质可知

$$\big(\bar{f}(t_1)\wedge\cdots\wedge\bar{f}(t_n)\big)\le\big(\bar{f}(\phi)\Leftrightarrow\bar{f}(\psi)\big),$$

但由 f 是 $\mathbb{T}$ 的 A-模型, $\bar{f}(t_1)=\cdots=\bar{f}(t_n)=\top\in A$, 这说明 $\bar{f}(\phi)=\bar{f}(\psi)$. $\square$

注 2.3.6

上述命题可类比于环同态的如下性质: 对于多项式 $f_1,\cdots,f_m\in\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ 以及

[12]此处 “标准模型” 并不是 “唯一的模型” 的意思, 而是在标准意义下的模型.

任何环 A, 集合

$$\{(a_1,\cdots,a_n)\in A^n \mid f_i(a_1,\cdots,a_n)=0\,(i=1,2,\cdots,m)\}$$

一一对应于环同态 $\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_m)\to A$.

注 2.3.7

由上述命题, $\mathbb{T}$ 的经典模型一一对应于 Boole 代数同态 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}\to\{\top,\bot\}$, 即 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}$ 的超滤. 回忆位象 X 的点是位格同态 $\mathcal{O}(X)\to\{\top,\bot\}$, 即 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子. 两种情形的区别在于逻辑规则: Boole 代数中没有任意并, 而有排中律; 位格中有任意并, 没有排中律.

命题 2.3.8

命题理论的态射 $f\colon(\Sigma,\mathbb{T})\to(\Sigma',\mathbb{T}')$ 诱导模型的映射 $\mathrm{Mod}_A(\mathbb{T}')\to\mathrm{Mod}_A(\mathbb{T})$.

注意方向的反转 (这是代数–几何对偶的一部分).

命题理论的 (经典) 模型的集合可赋予一个拓扑, 就像环的谱可赋予拓扑一样 (注 **??**).

定义 2.3.9 (Boole 代数的谱)

对 Boole 代数 B, 定义拓扑空间 $\mathrm{Spec}(B)$ 如下, 其点集为 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B,\{\top,\bot\})$ (注意同态 $f\colon B\to\{\top,\bot\}$ 一一对应于素滤子 $f^{-1}(\top)$), 一个开集基为 $\big\{\{f \mid f(b)=\top\}\big\}_{b\in B}$.

命题-定义 2.3.10 (Stone 空间)

对于拓扑空间 X, 以下条件等价:

- X 是紧 Hausdorff 空间, 且完全不连通 (仅有的连通分支为单点集);
- X 紧, 且完全分离 (任何两个不同的点都能被一个既开又闭子集分开);
- X 是投射有限空间, 即有限离散空间的投射极限.

称满足上述条件的空间为 *Stone* 空间.

命题 2.3.11

设 B 是 Boole 代数, 那么 $\mathrm{Spec}(B)$ 是 Stone 空间.

证明. 首先证明 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B,\{\top,\bot\})$ 是紧空间. 这是因为, 它是积空间 $\{\top,\bot\}^B$ 的闭子集, 而由 Tychonoff 定理, 紧空间的任意乘积是紧空间.

然后证明 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B,\{\top,\bot\})$ 是完全分离空间. 对其中任意不同的两点 p,q, 不妨设存在 $b\in B$ 使得 $p(b)=\top, q(b)=\bot$. 那么 $p(\neg b)=\bot$ 而 $q(\neg b)=\top$. 因此, $\mathrm{Spec}(B)$ 的既开又闭子集 $\{f\mid f(b)=\top\}$, $\{f\mid f(\neg b)=\top\}$ 将 p,q 分离. □

例 2.3.12 (Tarski 代数与 Cantor 空间)

Tarski 证明了可数无原子 Boole 代数在同构意义下唯一, 不妨称之为 *Tarski* 代数. (原子的定义见例 2.1.15.) 其一种构造是可数个变量生成的自由 Boole 代数, 也即可数个命题符号上的*空理论* (即没有公理的理论) 的 Lindenbaum 代数.

著名的 Cantor 空间 $\left\{\sum_{n\geq 1} a_n 3^{-n} \mid a_n\in\{0,2\}\right\}\subset\mathbb{R}$ 作为拓扑空间同胚于 $\{\top,\bot\}^{\mathbb{N}}$. 容易证明 Cantor 空间是 Stone 空间, 也是 Tarski 代数的谱.

命题 2.3.13 (Stone 对偶)

Boole 代数与 Stone 空间之间有如下 (反变的) 范畴等价

$$\mathsf{BooleAlg}^{\mathrm{op}} \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\mathrm{Hom}_{\mathsf{StoneSp}}(-,\{\top,\bot\})}{\rightleftarrows}} \mathsf{StoneSp}.$$

证明. 设 B 为 Boole 代数. 定义 $\alpha\colon B\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(B),\{\top,\bot\})$, $x\mapsto(f\mapsto f(x))$. 很明显 α 是 Boole 代数同态.

- α 是单射: 对不同的元素 $x,y\in B$, 取素滤子 F 包含 $x\wedge(\neg y)$, 那么它对应的同态 $f\colon B\to\{\top,\bot\}\in\mathrm{Spec}(B)$ 满足 $f(x)=\top, f(y)=\bot$.

- α 是满射: 对任意连续映射 $\varphi\colon\mathrm{Spec}(B)\to\{\top,\bot\}$, 既开又闭子集 $\varphi^{-1}(\top)$ 可写为开集基中有限个元素的并 (这是由于紧性), 那么 $\varphi^{-1}(\top)=\bigcup_i\{f\mid f(b_i)=\top\}=\{f\mid f(\vee_i b_i)=\top\}$, $\varphi=\alpha(\vee_i b_i)$. 由此我们还得到结论: 对任意 Boole 代数 B, $\mathrm{Spec}(B)$ 的既开又闭子集必然形如 $\{f\mid f(b)=\top\}$ $(b\in B)$.

设 S 为 Stone 空间. 定义 $\beta\colon S\to\mathrm{Spec}(\mathrm{Hom}(S,\{\top,\bot\}))$, $p\mapsto(\varphi\mapsto\varphi(p))$.

- β 是单射: 对不同的两点 $p,q\in S$, 由 Stone 空间的定义存在既开又闭子集 U, 包含 p 但不包含 q. 这给出了 $\varphi\in\mathrm{Hom}(S,\{\top,\bot\})$, 使得 $\varphi(p)\neq\varphi(q)$, 那么 $\beta(p)\neq\beta(q)$.

- β 是满射: 对任意 $f\colon\mathrm{Hom}(S,\{\top,\bot\})\to\{\top,\bot\}$, 将 $\mathrm{Hom}(S,\{\top,\bot\})$ 视为 S 的既开又闭子集构成的 Boole 代数, 那么 $f(\varnothing)=\bot$, 所以 $f^{-1}(\top)$ 中任意有限个成员都相交. 由 S 的紧性, 这说明 $f^{-1}(\top)$ 中所有成员相交于某个点 $p\in S$. 因此 $f^{-1}(\top)$ 是所有包含 p 的既开又闭子集, 即 $f=\beta(p)$.

- β 连续: 任取 $\varphi \in \mathrm{Hom}(S, \{\top, \bot\})$. $\mathrm{Spec}(\mathrm{Hom}(S, \{\top, \bot\}))$ 的既开又闭子集 $\{f \mid f(\varphi) = \top\}$ 的原像为 $\{p \in S \mid \varphi(p) = \top\}$, 也是 S 的既开又闭子集. 这实际上已经证明 β 为同胚.

$\square$

几何逻辑与位格

仍设 Σ 是由若干命题符号组成的符号表. 回忆几何公式由命题符号, 真 $\top$, 有限合取 $\wedge$ 以及无穷析取 $\bigvee$ 构成, 由此还包含假 $\bot = \bigvee \varnothing$, 参见定义 B.1.14. 一个几何命题理论 (geometric propositional theory) 由若干相继式 $\phi \vdash \psi$ 组成, 其中 ϕ, ψ 为几何公式. 几何逻辑允许使用如下推理规则,

- 有限合取规则,

$$\phi \vdash \top, \quad \phi \wedge \psi \vdash \phi, \quad \phi \wedge \psi \vdash \psi, \quad \frac{\phi \vdash \psi \quad \phi \vdash \chi}{\phi \vdash (\psi \wedge \chi)}.$$

- 无限析取规则,

$$\phi \vdash \bigvee S \, (\phi \in S), \quad \frac{\text{对所有 } \phi \in S, \, \phi \vdash \psi}{\bigvee S \vdash \psi}.$$

- 无限分配公理

$$\phi \wedge (\bigvee S) \ \vdash \ \bigvee \{\phi \wedge \psi \mid \psi \in S\}.$$

参见定义 B.1.25.

定义 2.3.14

设 $\mathbb{T}$ 为 Σ 上的几何理论. 定义 $\mathbb{T}$ 的 *Lindenbaum* 代数 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}$ 为 Σ 上几何公式的 $\mathbb{T}$-可证等价类构成的位格. 当然, 其上的序关系 $\leq$ 是 $\vdash$.

注 2.3.15 (生成元与关系)

上面的推理规则保证公式的可证等价类构成位格; 它可视为由 Σ 中的命题符号作为生成元, $\mathbb{T}$ 中的公理作为关系生成的位格. 这里的关系可以是不等式 $p \leq q$, 也可以是等式 $p = q$ (两者可以互相转化, $p \leq q$ 等价于 $p \wedge q = p$, $p = q$ 等价于 $p \leq q, q \leq p$). 向一个理论 $\mathbb{T}$ 添加公理, 相当于添加位格生成元之间的关系, 因此对应于取 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}$ 的子位象 (定义 2.2.1).
与 Lawvere 理论不同, 位格的结构包含了任意集合大小的运算, 一般而言这可能导致所有公式的 "集合" 过大而不构成集合. 但位格的特殊性在于, 任何公式都 (在 $\mathbb{T}$-可证的意义下) 等同于 Σ 中的符号先取有限交再任意并的形式, 正如点集拓扑学中由

子基 (subbasis) 生成拓扑一样. 因此全体公式的可证等价类确实是一个集合.

定义 2.3.16 (几何理论的模型)

对位格 A, $\mathbb{T}$ 的 A-模型是一个函数 $f\colon \Sigma \to A$, 它自然诱导几何公式 (的等价类) 到 A 的映射 $\bar{f}$, 使得 $\bar{f}(\mathbb{T}) \subset \{\top\}$. 标准模型是指取值于位格 $\{\top, \bot\}$ 的模型.

与命题 2.3.5 完全类似, 有如下的事实.

命题 2.3.17

几何理论 $\mathbb{T}$ 的 A-模型一一对应于位格同态 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}} \to A$. 特别地, $\mathbb{T}$ 的标准模型一一对应于位象 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}$ 的点.

注 2.3.18 (直观: 分类空间)

$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}}$ 对应的位象可想象为 "$\mathbb{T}$ 的模型的空间", 它是一种 "分类空间"; 上述命题印证了这一直观: "$\mathbb{T}$ 的模型的空间" 中的点正是 $\mathbb{T}$ 的模型. 但是一个空间不能由它的点完全决定, 正如一个理论不能由它的 (标准) 模型完全决定.

例 2.3.19 (一些简单的几何理论)

- 记 $\mathbb{T}_{-1}$ 为零个命题符号与一条公理 $\top \vdash \bot$ 构成的理论, 这是一个不相容 (inconsistent) 的理论,
$$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_{-1}} = \{\bot\},$$
它对应空位象 $\varnothing$ (例 2.1.7).
- 记 $\mathbb{T}_0$ 为零个命题符号与零条公理构成的理论, 则
$$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_0} = \{\bot \to \top\},$$
它对应终位象 1 (例 2.1.8).
- 记 $\mathbb{T}_1$ 为一个命题符号 p 与零条公理构成的理论, 则
$$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_1} = \{\bot \to p \to \top\}.$$
它是一个元素生成的自由位格, 对应 Sierpiński 空间 S (例 2.1.9). S 有两个点 $\top, \bot$, 分别对应 $\mathbb{T}_1$ 的两个标准模型.

- 记 $\mathbb{T}_2$ 为两个命题符号 p, q 与零条公理构成的理论, 则

$$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_2} = \left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & & & p \arrow[dr] & & & \\ \bot \arrow[r] & p \wedge q \arrow[urr] \arrow[drr] & & & p \vee q \arrow[r] & \top \\ & & & q \arrow[ur] & & & \end{tikzcd} \right\}.$$

  它是两个元素生成的自由位格, 对应位象 $S \times S$. $S \times S$ 有四个点 $(\top, \top), (\top, \bot), (\bot, \top), (\bot, \bot)$, 分别对应 $\mathbb{T}_2$ 的四个标准模型.

- 记 $\mathbb{T}_3$ 为两个命题符号 p, q 与一条公理 $p \vdash q$ 构成的理论, 则

$$\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_3} = \{\bot \to p \to q \to \top\}.$$

  它是 $\mathcal{LA}_{\mathbb{T}_2}$ 在等价关系 $p \wedge q \equiv p$, $q \equiv p \vee q$ 下的商, 对应 $S \times S$ 的一个子位象, 其中有三个点 $(\top, \top), (\bot, \top), (\bot, \bot)$, 分别对应 $\mathbb{T}_3$ 的三个标准模型.

命题 2.3.20

对任意位象 X, 都存在一个几何理论 $\mathbb{T}_X$ 以 $\mathcal{O}(X)$ 为 Lindenbaum 代数.

证明. 定义理论 $\mathbb{T}_X$ 包含命题符号 $P_U\ (U \in \mathcal{O}(X))$, 且有如下公理.

- $\vdash P_\top$;
- 对 $\mathcal{O}(X)$ 中每两个满足 $U \leq V$ 的元素, 有一条公理 $P_U \vdash P_V$;
- 对 $\mathcal{O}(X)$ 中每两个元素 U, V, 有一条公理 $P_U \wedge P_V \vdash P_{U \wedge V}$;
- 对 $\mathcal{O}(X)$ 中每一族元素 $\{U_i\}$, 有一条公理 $P_{\bigvee_i U_i} \vdash \bigvee_i P_{U_i}$.

容易看到, 几何公式的 $\mathbb{T}_X$-可证等价类一一对应于 $\mathcal{O}(X)$ 的元素, 且逻辑连接词 $\wedge, \bigvee$ 与位格中的结构吻合. $\square$

注 2.3.21

理论 $\mathbb{T}_X$ 可视为位象 X 的内语言, 其在意象理论中的类比即是 4.1 节介绍的 Mitchell–Bénabou 语言.

例 2.3.22 (实数位象)

实数位象可由如下几何理论 $\mathbb{T}_\mathbb{R}$ 给出: 其中包含命题符号 $P_{a,b}\ (a, b \in \mathbb{Q})$, 直观为 “某实数属于开区间 (a, b)”, 且有如下的公理.

- 对每组 $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, 有两条公理

$$P_{a,b} \wedge P_{a',b'} \dashv\vdash \bigvee\{P_{c,d} \mid \max(a, a') < c < d < \min(b, b')\},$$

($\phi \dashv\vdash \psi$ 表示 $\phi \vdash \psi$ 与 $\psi \vdash \phi$)

- 对每个 $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, 有一条公理

$$\top \vdash \bigvee\{P_{q-\varepsilon,q+\varepsilon} \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

理论 $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ 的一个标准模型为一个实数 (由 Dedekind 分割定义).

$$\begin{array}{ccc} \text{零阶逻辑} & & \text{Lindenbaum–Tarski 代数} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \text{一阶逻辑} & & \text{分类意象} \end{array}$$

第 3 章　意象与空间的概念

Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les “espaces” et “variétés” en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d’espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels “espaces”, déjà familiers à tous.

[C]e qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses “points” ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu’ils forment.

Grothendieck, Récoltes et Semailles[1]

[1]这两段评注出自 Grothendieck 的自传 “收获与播种”.

Leray 引入的层的观点和语言使我们以新的视角看待各种 “空间” 和 “流形”. 然而, 它们并未触及空间的概念本身, 只是用新的眼光更加精细地理解那些传统的, 人们早已熟知的空间.

拓扑空间中真正重要的不是它的 “点” 或点集的子集, 以及点之间的邻近关系等等, 而是这个空间上的层, 以及它们构成的范畴.

意象的概念最早由 Grothendieck 提出. 他将其命名为 topos[2], 意在表达这个概念是能够承载拓扑与几何直观的最广泛的概念.

拓扑空间 X 上的层构成一个意象 $\mathrm{Sh}(X)$, 称为*层意象* (sheaf topos). 这个意象很大程度上反映了空间 X 的信息. Grothendieck 将层的概念由拓扑空间推广到了最一般的语境, 由此得到一种极为广泛的空间概念; 他将其命名为*景* (site). 景上的层构成的范畴即是所谓 *Grothendieck 意象*.

[2]希腊文, “位置”

Grothendieck 的想法是, 一个意象不一定来自普通的拓扑空间, 但由于它与 (拓扑空间上的) 层范畴极为相似的性质, 我们可以设想它是一个假想的空间上的层范畴, 即其中的对象是这个假想的空间之上的层. 这个想法也可视为代数–几何对偶的一例: 正如 Gelfand 考虑 Hausdorff 空间上的复值连续函数, Grothendieck 考虑的是空间上的 "集合值连续函数".

3.1 拓扑空间上的层与平展空间

> [S]heaf theory is a part of geometry ... concerned with *the passage from local properties to global properties.*
>
> John W. Gray, *Fragments of the History of Sheaf Theory*

设 X 为拓扑空间, 记 $\mathrm{Open}(X)$ 为 X 的开集在包含关系下构成的范畴.

定义 3.1.1 (拓扑空间上的预层)

拓扑空间 X 上的*预层* (presheaf) 是函子 $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 记 X 上的预层范畴为 $\mathrm{Presh}(X)$.

注 3.1.2

需要注意的一点是, 拓扑空间 X 到范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 的对应是反变的, 也即对连续映射 $f\colon X \to Y$, 我们有反方向的函子 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$, 将开子集 $U \subset Y$ 对应到 $f^{-1}(U) \subset X$. 这也是一种代数–几何对偶.

定义 3.1.3 (拓扑空间上的层)

拓扑空间 X 上的*层* (sheaf) 是满足如下条件的预层 F: 对任意开集 $U \subset X$, 任意覆盖 $U = \bigcup_i U_i$, 以及任意一组相容的元素 $(s_i \in F(U_i))_{i\in I}$, 存在唯一的 $s \in F(U)$ 满足 $s|_{U_i} = s_i \,\forall i \in I$. 其中相容是指

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \ (\forall i, j \in I), \tag{3.1}$$

固定拓扑空间 X. 称俯范畴 (定义 1.1.27) Top/X 的对象, 即映射 $p\colon Y \to X$, 为 X 上的空间或 X 上的丛[3].

[3] 这里的丛不一定是所谓纤维丛.

定义 3.1.4 (丛的截面)

对于 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 定义其在开集 $U \subset X$ 上的*截面*的集合为

$$\Gamma_p(U) = \left\{ s\colon U \to Y \mid ps = i\colon U \to X \right\}.$$

对于子开集 $V \subset U$, 有限制映射 $\mathrm{res}\colon \Gamma_p(U) \to \Gamma_p(V)$, 这使得 Γ_p 成为 X 上的预层.

命题-定义 3.1.5 (截面层)

对于 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 上面定义的 Γ_p 构成 X 上的一个层, 称为丛 p 的*截面层*.

截面层给出了函子

$$\Gamma\colon \mathsf{Top}/X \to \mathrm{Presh}(X).$$

我们将证明每个层都是某个丛的截面层, 其中要用到*芽* (germ). 芽的概念来自函数芽: 两个函数在一点处有相同的芽, 是指它们在这点的某个邻域上取值相等. 这个概念可自然地定义在一般的预层上.

定义 3.1.6 (芽, 茎)

设 F 是拓扑空间 X 上的预层. 考虑在一点 $x \in X$ 附近的局部截面 (也即 x 的邻域上的截面) 的如下等价关系 $\sim$: 对于 $s \in F(U), t \in F(V)$, 若 $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$, 则 $s \sim t$. 称这个关系下的一个等价类为 F 在 x 处的一个*芽*, 记截面 s 所属的等价类为 s_x.

称 F 在 x 处芽的集合为*茎* (stalk) F_x. 使用范畴语言, 茎是如下的余极限:

$$F_x = \operatorname{colim}_{x\in U} F(U).$$

由预层出发可构造一个丛, 即所谓平展空间.

定义 3.1.7 (平展映射)

对于拓扑空间的映射 $f\colon Y \to X$, 若对任意 $y \in Y$ 都存在 y 的邻域 V 与 $f(y)$ 的邻域 U 使得 $f|_V\colon V \to U$ 为同胚, 则称 f 为*平展* (法 étale) 映射, 又称局部同胚. 到空间 X 的平展态射构成的 Top/X 的全子范畴记为 $\mathsf{Et}(X)$.

命题-定义 3.1.8 (平展空间)

设 F 是拓扑空间 X 上的预层. 定义预层 F 的平展空间 (法 espace étalé) $p\colon \Lambda_F \to X$ 如下.

- 底层集合. 空间 Λ_F 作为集合是无交并

$$\Lambda_F = \coprod_{x\in X} F_x,$$

  映射 $p\colon \Lambda_F \to X$ 为投影, 将 F_x 的元素映射到 x.

- 拓扑. 对任意截面 $s \in F(U)$, 定义函数 $\dot{s}\colon U \to \Lambda_F$, $x \mapsto s_x$; 即 $\dot{s}$ 是取 s 每个点处的截面芽得到的函数. 定义 Λ_F 上的拓扑为所有形如 $\dot{s}(U)$ 的集合生成的拓扑.

那么平展空间是平展态射, 且定义了函子

$$\Lambda\colon \operatorname{Presh}(X) \to \mathsf{Top}/X.$$

平展空间的一个重要性质是

命题 3.1.9 (平展空间–截面伴随)

对于拓扑空间 X, $\operatorname{Presh}(X)$ 与 Top/X 之间存在伴随

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Presh}(X) \arrow[r, shift left, "\Lambda"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top}/X. \arrow[l, shift left, "\Gamma"] \end{tikzcd}$$

证明. 我们构造单位与余单位

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\operatorname{Presh}(X)} \to \Gamma\Lambda, \quad \epsilon\colon \Lambda\Gamma \to \mathrm{id}_{\mathsf{Top}/X}\,.$$

- 单位. 对于 X 上的预层 F, 在 Λ_F 的定义中已经给出一个映射

$$\eta_F(U)\colon F(U) \to \Gamma\Lambda_F(U), \quad s \mapsto \dot{s}.$$

  这构成一个预层态射 $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda_F$.

- 余单位. 对 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 回忆 $\Lambda\Gamma_p$ 的一个元素可表示为一个芽 s_x, 其中 $s \in \Gamma_p(U)$, U 为 x 的邻域. 我们别无他选, 只能定义映射

$$\epsilon_p\colon \Lambda\Gamma_p \to Y, \quad s_x \mapsto s(x).$$

  这构成了平展空间的态射.

下面考虑两个复合

$$\Gamma \xrightarrow{\eta\Gamma} \Gamma\Lambda\Gamma \xrightarrow{\Gamma\epsilon} \Gamma, \quad \Lambda \xrightarrow{\Lambda\eta} \Lambda\Gamma\Lambda \xrightarrow{\epsilon\Lambda} \Lambda.$$

- 第一个复合. 对任意平展映射 $p\colon Y \to X$ 与截面 $s \in \Gamma_p(U)$, 由 η 的定义有 $(\eta\Gamma)_p(U)(s) = \dot{s} \in \Gamma\Lambda\Gamma_p(U)$, 而由 ϵ 的定义, $(\Gamma\epsilon)_p(U)(\dot{s}) = s$. 因此第一个复合是恒等.

- 第二个复合. 对 X 上的任一预层 F 与芽 $s_x \in \Lambda_F$, $(\Lambda\eta)_F(s_x) = (\dot{s})_x \in \Lambda\Gamma\Lambda_F$, 而 $(\epsilon\Lambda)_F((\dot{s})_x) = (\dot{s})(x) = s_x$. 因此第二个复合是恒等.

综上, 我们完成了这一对伴随的证明. □

注 3.1.10

命题 3.1.9 也可理解为预层的几何实现. 注意到 X 的开集 $U \hookrightarrow X$ 本身是 X 上的空间 (甚至是平展空间), 即有范畴的嵌入 $i\colon \mathrm{Open}(X) \hookrightarrow \mathsf{Top}/X$. 事实上, $\mathrm{Presh}(X)$ 与 Top/X 之间的上述伴随来自 i 的米田扩张 (命题 A.4.11)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Open}(X) \arrow[r, "よ"] \arrow[dr, hook, "i"'] & \mathrm{Presh}(X) \arrow[d, dashed, "\Lambda"] \\ & \mathsf{Top}/X. \end{tikzcd}$$

预层是可表函子的余极限 (命题 A.4.7), 而预层对应的平展空间则是依这种余极限的模式, 将 X 的开集 (作为 X 上的空间) 粘在一起, 得到的空间:

$$\Lambda_F = \mathrm{colim}_{よ(U)\to F}(U \to X).$$

命题 3.1.11

命题 3.1.9 中的伴随限制为全子范畴的等价

$$\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathsf{Et}(X).$$

证明. 注意到,

- X 上的预层 F 是层当且仅当 $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda_F$ 是同构.

- X 上的空间 $p\colon Y \to X$ 是平展空间当且仅当 $\epsilon_p\colon \Lambda\Gamma_p \to Y$ 是同构.

于是, 这个命题化为纯粹范畴论的问题. 见命题 A.2.8. □

命题-定义 3.1.12 (拓扑空间上的层化)

对于拓扑空间 X 定义*层化* (sheafification) $a = \Gamma \circ \Lambda\colon \mathrm{Presh}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$, 则 a 是嵌入 $i\colon \mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Presh}(X)$ 的左伴随, 即层范畴是预层范畴的自反子范畴 (定义 A.3.1).

证明. 设 P 为预层, F 为层, 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(P, F) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(P, \Gamma\Lambda_F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}/X}(\Lambda_P, \Lambda_F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}/X}(\Lambda\Gamma\Lambda_P, \Lambda_F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(\Gamma\Lambda_P, \Gamma\Lambda_F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(\Gamma\Lambda_P, F).
\end{aligned}$$

□

命题 3.1.13 (层范畴的俯范畴对应平展空间)

对于拓扑空间 X, $\mathrm{Sh}(X)$ 在层 F 上的俯范畴 $\mathrm{Sh}(X)/F$ 等价于平展空间 ΛF 上的层范畴 $\mathrm{Sh}(\Lambda F)$.

证明. 这是因为平展空间上的平展空间是平展空间, $\mathsf{Et}(X)/\Lambda F \simeq \mathsf{Et}(\Lambda F)$. □

注 3.1.14

意象是拓扑空间的推广; 一个意象 $\mathcal{C}$ 是一个假想的空间上的层范畴, 其对象 F 是这个假想空间上的 “层”. 俯范畴 $\mathcal{C}/F$ 作为意象正是 F 对应的 “平展空间” 上的层. 在这个意义上, 我们有如下类比.

$$\begin{tikzcd}
\text{拓扑空间} \arrow[d, rightsquigarrow] & \text{拓扑空间上的平展空间} \arrow[d, rightsquigarrow] \\
\text{意象} & \text{意象的俯范畴}
\end{tikzcd}$$

拓扑空间上层的直像与逆像

拓扑空间的连续映射诱导层意象之间的一对伴随函子, 平展空间提供了逆像的直观.

定义 3.1.15 (拓扑空间上的预层的直像)

拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 诱导开集范畴之间的函子 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$, 从而有预层范畴之间的函子

$$f_*\colon \mathrm{Presh}(X) \to \mathrm{Presh}(Y).$$

称之为直像 (direct image). 具体地, 对于 X 上的预层 F, 直像 f_*F 是 Y 上的预层, 满足 $f^*F(U) = F(f^{-1}(U))$.

直接验证定义可得如下命题.

命题 3.1.16 (层的直像是层)

设 $f\colon X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射, F 是 X 上的层, 那么直像 f_*F 是 Y 上的层; 也即直像函子限制为层范畴之间的函子

$$f_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y).$$

层的逆像用平展空间定义更方便.

命题 3.1.17 (拉回保持平展空间)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 与平展空间 $p\colon E \to Y$, 拉回 $f^*E \to X$ 是平展空间.

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

证明. 对 f^*E 的任意点 (x, e), 取 $e \in E$ 的邻域 U 与 $f(x) = p(e) \in Y$ 的邻域 V 使得 $p|_U\colon U \to V$ 为同胚. 考虑 “拉回立方体”

$$\begin{tikzcd}
f^*U \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & U \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& f^*E \arrow[rr] \arrow[dd] & & E \arrow[dd, "p"] \\
f^*V \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr, "f"'] & & Y,
\end{tikzcd}$$

其上下左右前后 6 个面均为拉回. 这给出了 $(x, e) \in f^*E$ 的邻域 f^*U 和 x 的邻域 f^*V 使得 $f^*U \to f^*V$ 为同胚 (同胚的拉回还是同胚). □

由此可得如下推论.

命题 3.1.18

$\mathsf{Et}(X)$ 关于 Top/X 中的有限极限封闭.

证明. 首先, $\mathsf{Et}(X)$ 的终对象是 Top/X 的终对象 id_X. 下面考虑拉回. 设 $U \to W, V \to W$ 是 $\mathsf{Et}(X)$ 中的两个态射, 那么俯范畴 Top/X 中的拉回 $U \times_W V$ 等同于 Top 中的拉回, 配上到 X 明显的映射 (见命题 1.1.28). $U \times_W V \to U$ 是局部同胚 $V \to W$ 的拉回, 从而是局部同胚. 因此, 复合映射 $U \times_W V \to U \to X$ 是局部同胚. 这说明 $\mathsf{Et}(X)$ 关于 Top/X 中的拉回封闭, 结论得证. □

定义 3.1.19 (拓扑空间上的层的逆像)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$, 如下定义逆像函子 $f^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}(X) & \mathrm{Sh}(Y) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\Lambda"] \\
\mathsf{Et}(X) \arrow[u, "\Gamma"] & \mathsf{Et}(Y) \arrow[l, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

上面的定义说明层的逆像的几何直观是丛的拉回.

命题 3.1.20 (拉回保持有限极限)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \mathsf{Et}(Y) \to \mathsf{Et}(X)$ 保持有限极限.

证明. 注意到 $f^*\colon \mathsf{Top}/Y \to \mathsf{Top}/X$ 有左伴随 Σ_f (命题 1.1.32), 故 $f^*\colon \mathsf{Top}/Y \to \mathsf{Top}/X$ 保持任意极限. 而 $\mathsf{Et}(Y)$ 作为 Top/Y 的全子范畴关于有限极限封闭 (命题 3.1.18), 故 $f^*\colon \mathsf{Et}(Y) \to \mathsf{Et}(X)$ 保持有限极限. □

另外, 层的逆像也可由预层的逆像层化得到. 下面我们说明这一点.

定义 3.1.21 (拓扑空间上预层的逆像)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$, 预层的逆像函子 $f^{预}\colon \mathrm{Presh}(Y) \to \mathrm{Presh}(X)$ 是沿 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$ 的左 Kan 扩张 (例 A.6.5), 其具体表达式为

$$f^{预}F(U) = \mathrm{colim}_{f(U)\subset V} F(V).$$

由例 A.6.5, $f^{预}$ 是 $f_*\colon \mathrm{Presh}(X) \to \mathrm{Presh}(Y)$ 的左伴随.

命题 3.1.22 (拓扑空间上的层的逆像, 等价定义)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$, 逆像 $f^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 同构于层化 a 与 $f^{预}$ 的复合.

证明. 在下图中, 我们证明中间的方块交换.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Presh}(X) \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathrm{Presh}(\mathrm{Y}) \arrow[l, "f^{预}"'] \arrow[d, "\Lambda"] & \\
\mathrm{Sh}(\mathrm{X}) & & & \mathrm{Sh}(Y) \arrow[ul, hook', "i"'] \arrow[dl, "\Lambda"] \\
 & \mathsf{Et}(X) \arrow[ul, "\Gamma"] & \mathsf{Et}(Y) \arrow[l, "f^*"] &
\end{tikzcd}$$

对于 Y 上的预层 F, 定义预层态射 $f^{预}F \to \Gamma f^*\Lambda_F$, 将 $f^{预}F(U)$ 的元素 $s \in F(V)$ $(f(U) \subset V)$ 对应到 $f^*\Lambda_F$ 在 U 上的截面 $x \mapsto (f(x), \dot{s}(x))$. 容易验证该态射在所有茎上诱导双射, 从而诱导了平展空间的同构 $\Lambda f^{预}F \simeq f^*\Lambda_F$. □

命题 3.1.23 (拓扑空间上的层的逆像–直像伴随)

拓扑空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 产生了层范畴之间的一对伴随函子

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}(X) \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sh}(Y), \arrow[l, shift right, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

证明. 对 X 上的层 F 与 Y 上的层 G, 有自然同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(G, f_*F) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(Y)}(G, f_*F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(Y)}(f^{预}G, F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(a(f^{预}G), F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(f^*G, F).
\end{aligned}$$

□

例 3.1.24 (到点的映射, 常值层–整体截面伴随)

拓扑空间 X 到单点空间 pt 有唯一的映射 p. 其直像

$$p_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) = \mathsf{Set}$$

将 X 上的层 F 对应到其整体截面 (global sections) 的集合 $F(X)$. 逆像

$$p^*\colon \mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$$

将集合 A 对应到所谓*常值层* $\underline{A}$. 常值层的茎 $\underline{A}_x$ 同构于 A.

例 3.1.25 (点的嵌入, 茎–摩天大楼伴随)

取定一点 $x \in X$, 其嵌入映射 $i\colon \mathrm{pt} \to X$ 的直像

$$i_*\colon \mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Sh}(X)$$

将集合 A 对应到 x 处的*摩天大楼层* (skyscraper sheaf) $i_*(A)$, 具体地,

$$i_*(A)(U) = \begin{cases} A & x \in U \\ 1 & x \notin U. \end{cases}$$

另一方面, 逆像

$$i^*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{Set}$$

将层 F 对应到其 x 处的茎 F_x.

3.2 位象上的层与平展空间

层与平展空间的关系还可通过位象理论 "无点" 地处理. 位象上的层与平展空间的定义与拓扑空间的情形无异.

定义 3.2.1 (位象上的层)

设 X 为位象 (定义 2.1.3). 定义 X 上的*预层*为函子 $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 若 X 上的预层 F 满足如下条件, 则称之为*层*: 对任意 $U \in \mathcal{O}(X)$, 任意覆盖 $U = \bigvee_i U_i$, 以及任意一组相容的元素 $(s_i \in F(U_i))_{i \in I}$, 存在唯一的 $s \in F(U)$ 满足 $s|_{U_i} = s_i \, \forall i \in I$. 其中相容是指

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \ (\forall i, j \in I). \tag{3.2}$$

记 $\mathrm{Sh}(X)$ 为 X 上的层在预层范畴中构成的全子范畴.

定义 3.2.2 (位象的局部同胚)

设 $f\colon E \to X$ 为位象态射. 若存在 E 的开覆盖 $E = \bigvee_i U_i$ 使得 $f|_{U_i}$ 为 U_i 到 X 的某个开子位象的同构, 则称 f 为*局部同胚*, 也称 f 为 X 上的*平展空间*. 记 $\mathsf{Et}(X)$ 为 X 上的平展空间在 Loc/X 中构成的全子范畴.

与拓扑空间的情形类似, 平展空间的*截面层*给出了函子 $\Gamma\colon \mathsf{Et}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$. 然而, 为了从层得到平展空间, 我们不能再使用茎的构造, 因为位象中的点不足以控制其上的层. 故下面我们花一些篇幅介绍一个全新的概念, $\mathcal{O}(X)$-值集合.

位格取值的集合

定义 3.2.3 ($\mathcal{O}(X)$-值集合)

设 $\mathcal{O}(X)$ 为位格, 定义一个 $\mathcal{O}(X)$-值集合为一个集合 A 配备一个函数 $A \times A \to \mathcal{O}(X)$, 记作 $(a_1, a_2) \mapsto [\![a_1 = a_2]\!]$ (中间的等号是纯粹形式的, 不具有实际的含义), 满足

- (对称性) $[\![a_1 = a_2]\!] = [\![a_2 = a_1]\!]$;
- (传递性) $[\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![a_2 = a_3]\!] \leq [\![a_1 = a_3]\!]$.

注意我们不要求"自反性" $[\![a = a]\!] = \top$; 称 $[\![a = a]\!]$ 为 a 的范围 (extent). 范围为 $\top$ 的元素又称整体元素 (global element). 另外在传递性中令 $a_3 = a_1$, 可知 $[\![a_1 = a_2]\!] \leq [\![a_1 = a_1]\!]$, 即"等式"成立的范围不超过等式任何一边的范围.
对于 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A, B, 定义态射 $\phi\colon A \to B$ 为映射 $\phi\colon A \times B \to \mathcal{O}(X)$, 满足如下条件:

- $\phi(a, b) \leq [\![a = a]\!] \wedge [\![b = b]\!]$;
- (关系的性质) $\phi(a_1, b_1) \wedge [\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![b_1 = b_2]\!] \leq \phi(a_2, b_2)$;
- (像的唯一性) $\phi(a, b_1) \wedge \phi(a, b_2) \leq [\![b_1 = b_2]\!]$;
- (像的存在性) $[\![a = a]\!] = \bigvee\{\phi(a, b) \mid b \in B\}$.

$\mathcal{O}(X)$-值集合 A 到自身的恒等态射由 $[\![a_1 = a_2]\!]$ 给出. 对于两个态射 $\phi\colon A \to B, \psi\colon B \to C$, 定义其复合 $\psi\phi\colon A \to C$ 为

$$\psi\phi(a, c) = \bigvee\{\phi(a, b) \wedge \psi(b, c) \mid b \in B\}.$$

记 $\mathcal{O}(X)$-值集合的范畴为 $\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$.

命题 3.2.4 ($\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$ 的范畴论结构)

$\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$ 是一个意象 (后面将证明它等价于 $\mathrm{Sh}(X)$). 我们不加证明地给出如下范畴论结构的构造.

- $\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$ 的终对象是 $1 = \{*\}$, $[\![* = *]\!] = \top$.
- 对于一族 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A_i, 其乘积为 $\prod_i A_i$, $[\![(a_i) = (a_i')]\!] = \bigwedge_i [\![a_i = a_i']\!]$.
- 对于两个态射 $\phi, \psi\colon A \to B$, 其等化子为 A 的底层集合配备一个新的函数

$[\![a_1 = a_2]\!]' = [\![a_1 = a_2]\!] \wedge \bigvee_{b \in B} \phi(a_1, b) \wedge \psi(a_1, b)$.

- 对于 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A, 其子对象等同于函数 $\sigma\colon A \to \mathcal{O}(X)$, 满足 $\sigma(a) \wedge [\![a = a']\!] \leq \sigma(a')$, 且 $\sigma(a) \leq [\![a = a]\!]$.
- $\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$ 的子对象分类子是 $\mathcal{O}(X)$ 配备函数 $[\![U = V]\!] = U \Leftrightarrow V := (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U)$.
- 对于 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A, 其幂对象为 A 的子对象的集合, 配备函数 $[\![\sigma = \tau]\!] = \bigwedge_{a \in A} \sigma(a) \Leftrightarrow \tau(a)$.

$\mathcal{O}(X)$-值集合态射 $A \to B$ 也可由集合的映射 $A \to B$ 表示.

命题-定义 3.2.5 ($\mathcal{O}(X)$-值集合态射的表示)

称映射 $f\colon A \to B$ 表示了 $\mathcal{O}(X)$-值集合的态射 $\phi\colon A \to B$ 是指对任意 $a \in A, b \in B$,

$$\phi(a, b) = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!].$$

对于集合映射 $f\colon A \to B$, 它表示某个 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射, 当且仅当对任意 $a_1, a_2 \in A$,

$$[\![a_1 = a_2]\!] \leq [\![f(a_1) = f(a_2)]\!].$$

对于两个集合映射 $f, g\colon A \to B$, 若它们都表示某个 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射, 那么它们表示的态射相等, 当且仅当对任意 $a \in A$,

$$[\![a = a]\!] \leq [\![f(a) = g(a)]\!].$$

证明.

- 假设存在 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射 $\phi\colon A \to B$ 使得 $\phi(a, b) = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!]$. 由 ϕ 的性质有

$$[\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![b = f(a_1)]\!] \leq [\![b = f(a_2)]\!],$$
$$[\![a = a]\!] \leq \bigvee_{b \in B} [\![b = f(a)]\!].$$

那么

$$\begin{aligned}
[\![a_1 = a_2]\!] &\le [\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![a_1 = a_1]\!] \\
&\le [\![a_1 = a_2]\!] \wedge \Big(\bigvee_{b_1 \in B} [\![b_1 = f(a_1)]\!] \Big) \\
&= \bigvee_{b_1 \in B} \Big([\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![b_1 = f(a_1)]\!] \Big) \\
&\le \bigvee_{b_1 \in B} \Big([\![b_1 = f(a_1)]\!] \wedge [\![b_1 = f(a_2)]\!] \Big) \\
&\le [\![f(a_1) = f(a_2)]\!].
\end{aligned}$$

- 假设 $[\![a_1 = a_2]\!] \le [\![f(a_1) = f(a_2)]\!]$, 容易验证 $\phi(a,b) = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!]$ 定义了一个 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射 $\phi\colon A \to B$.
- 假设 $f, g\colon A \to B$ 表示同一个 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射, 即对任意 $a \in A, b \in B$, $[\![a = a]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = g(a)]\!]$. 令 $b = f(a)$ 即得 $[\![a = a]\!] \le [\![f(a) = g(a)]\!]$. 反之, 由 $[\![a = a]\!] \le [\![f(a) = g(a)]\!]$ 也可得到 $[\![a = a]\!] \wedge [\![b = f(a)]\!] = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = g(a)]\!]$.

□

注 3.2.6

在 2.3 节我们说明了位格可视为几何逻辑下的命题理论, 其中的元素是命题 (或真值). 最简单的命题理论是 $\{\top, \bot\}$. 一个 $\{\top, \bot\}$-值集合即一个集合 A 带有一个等价关系 $\sim$; 它同构于商集 $A/{\sim}$ (带有最小的等价关系). $\mathcal{O}(X)$-值集合是这个概念的推广, 带有一种 “取值于 $\mathcal{O}(X)$ 的等价关系”. 直观上, $[\![a_1 = a_2]\!]$ 越大, a_1, a_2 就 “越相等”. 态射 $A \to B$ 则是取值于 $\mathcal{O}(X)$ 的函数关系; 直观上 $\phi(a,b)$ 越大, b 就越适合作为 a 在这个函数下的像. $\mathcal{O}(X)$-值集合是*直觉主义集合论* (intuitionistic set theory) 的模型. 需要注意的是两个同构的 $\mathcal{O}(X)$-值集合的底层集合未必同构.

由上面的注, 容易想到将预层视为 $\mathcal{O}(X)$-值集合的方法: 预层 F 的 “元素” 即 F 的截面, 而 $[\![s = t]\!]$ 是两个截面 s, t 相等的最大开集.

定义 3.2.7 (函子 Θ)

定义函子 $\Theta\colon \mathrm{Presh}(X) \to \mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$,

$$\Theta(F) = \coprod_{U \in \mathcal{O}(X)} F(U), \quad [\![s = t]\!] = \bigvee \left\{ W \mid s|_W = t|_W \right\}.$$

注意 $\Theta(F)$ 的整体元素正是 F 的整体截面.

对于预层的态射 $\xi\colon F \to G$, 有 $[\![s = t]\!] \le [\![\xi(s) = \xi(t)]\!]$, 因此它表示了 $\mathcal{O}(X)$-集合的态射 $\Theta(\xi)\colon \Theta(F) \to \Theta(G)$.

定义 3.2.8 ($\mathcal{O}(X)$-值集合的单元子集)

设 A 为 $\mathcal{O}(X)$-值集合, 定义 A 的单元子集 (singleton)[4]为映射 $\sigma\colon A \to \mathcal{O}(X)$, 满足

- (子集的性质) $\sigma(a) \wedge [\![a = b]\!] \le \sigma(b)$;
- (单元集的性质) $\sigma(a) \wedge \sigma(b) \le [\![a = b]\!]$.

注意到对于 $a \in A$, 映射 $b \mapsto [\![a = b]\!]$ 满足上述条件. 记这个单元子集为 $\widetilde{a}$.

命题-定义 3.2.9 ($\mathcal{O}(X)$-值集合上的关系 $\sqsubseteq$)

设 A 为 $\mathcal{O}(X)$-值集合, 定义集合 A 上的一个关系 $\sqsubseteq$ (TEX 代码: `\sqsubseteq`),

$$a \sqsubseteq b \quad \text{当且仅当} \quad [\![a = b]\!] = [\![a = a]\!].$$

那么 $a \sqsubseteq b$ 当且仅当 $\widetilde{a} \le \widetilde{b}\colon A \to \mathcal{O}(X)$, 也即对任意 $c \in A$, $[\![a = c]\!] \le [\![b = c]\!]$.

证明. 设 $a \sqsubseteq b$, 那么对任意 $c \in A$, $[\![a = c]\!] = [\![a = c]\!] \wedge [\![a = a]\!] = [\![a = c]\!] \wedge [\![a = b]\!] \le [\![b = c]\!]$. 另一方面, 假设对任意 $c \in A$, $[\![a = c]\!] \le [\![b = c]\!]$. 令 $c = a$ 即得 $[\![a = a]\!] \le [\![a = b]\!] \le [\![a = a]\!]$. □

定义 3.2.10 (完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合)

设 A 为 $\mathcal{O}(X)$-值集合, 若以下条件成立, 则称 A 为完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合:

- $\sqsubseteq$ 为偏序关系 (即若 $a \sqsubseteq b, b \sqsubseteq a$, 则 $a = b$);
- 对任意 $a \in A$ 以及 $U \le [\![a = a]\!]$, 都存在 $a' \sqsubseteq a$ 满足 $[\![a' = a']\!] = U$. (此时我们记 $a' = a|_U$.).
- 任意一族两两相容的元素 $\{a_i\}$ 在偏序 $\sqsubseteq$ 下有上确界 $s = \bigvee_i a_i$. 其中两个元素 $a, b \in A$ 相容是指 $[\![a = b]\!] = [\![a = a]\!] \wedge [\![b = b]\!]$, 即 a 与 b “在两者共同存在时相等”.

记完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合在 $\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X))$ 中构成的全子范畴为 $\mathsf{CSet}(\mathcal{O}(X))$.

[4]单元子集这个名字可能有些不妥, 因为 “空集” (即取值 $\perp$ 的常值映射) 也满足这个条件.

命题 3.2.11 (完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合的性质)

设 A 为完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合, 那么

(1) 任意两个元素 $a, b \in A$ 有下确界 $a|_{[\![a=b]\!]} = b|_{[\![a=b]\!]} = a \wedge b$.

(2) 任意一族两两相容的元素 $\{a_i\}$ 的上确界 s 的范围等于所有 a_i 的范围的并.

证明.

(1) 因为 $[\![a = b]\!] \leq [\![a = a|_{[\![a=b]\!]}]\!]$, $[\![a = b]\!] \leq [\![b = b|_{[\![a=b]\!]}]\!]$, 所以 $[\![a = b]\!] \leq [\![a|_{[\![a=b]\!]} = b|_{[\![a=b]\!]}]\!]$, 进而可知 $a|_{[\![a=b]\!]} = b|_{[\![a=b]\!]}$. 对任意 $c \in A$, 若 $c \sqsubseteq a$, $c \sqsubseteq b$, 则 $[\![c = c]\!] = [\![c = b]\!] \leq [\![a = b]\!]$, 进而 $[\![c = c]\!] \leq [\![c = a]\!] \wedge [\![a = a|_{[\![a=b]\!]}]\!] \leq [\![c = a|_{[\![a=b]\!]}]\!]$, 即 $c \sqsubseteq a|_{[\![a=b]\!]}$. 这说明 $a|_{[\![a=b]\!]}$ 是 a, b 的下确界.

(2) 记 U 为所有 a_i 的范围的并, 则对 a_i 的任意上界 s, $s|_U$ 也是 a_i 的上界. 由 s 的最小性知 s 的范围为 U.

□

命题 3.2.12 (完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合的等价定义)

$\mathcal{O}(X)$-值集合 A 完备当且仅当 A 的单元子集均形如 $\widetilde{a}$, 其中 $a \in A$ 唯一确定.

证明.

- 假设 A 完备. 设 σ 为单元子集, 令

$$s = \bigvee_{a \in A} a|_{\sigma(a)},$$

  我们断言 $\sigma = \widetilde{s}$. 一方面, 因为 $a|_{\sigma(a)} \sqsubseteq s$, 所以

$$\sigma(a) = [\![a|_{\sigma(a)} = a|_{\sigma(a)}]\!] = [\![s = a|_{\sigma(a)}]\!] \leq [\![s = a]\!] = \widetilde{s}(a).$$

  另一方面, $\sigma(s)$ 是所有 $\sigma(a)$ 中最大者, 而 s 的范围等于所有 $\sigma(a)$ 的并, 故 s 的范围等于 $\sigma(s)$; 这表明

$$\widetilde{s}(a) \leq \sigma(s) \wedge [\![s = a]\!] \leq \sigma(a).$$

  断言得证.

- 假设 A 的单元子集均形如 $\widetilde{a}$, 且 a 唯一确定. 我们证明 A 完备.

  - 若 $a \sqsubseteq b$ 且 $b \sqsubseteq a$, 则 $\widetilde{a} = \widetilde{b}$, $a = b$.

– 对任意 $a \in A$ 以及 $U \leq [\![a = a]\!]$, 考虑

$$\sigma\colon b \mapsto [\![a = b]\!] \wedge U,$$

那么存在 $a|_U$ 使得 $\sigma = \widetilde{a|_U}$; 此时有 $a|_U \sqsubseteq a$ 且 $[\![a|_U = a|_U]\!] = U$.

– 对任意一族两两相容的元素 $\{a_i\}$, 考虑

$$\sigma\colon b \mapsto \bigvee_i [\![b = a_i]\!],$$

那么存在 s 使得 $\sigma = \widetilde{s}$; 我们说明 s 是 $\{a_i\}$ 的上确界. 首先, $\widetilde{s}(a_i) \geq [\![a_i = a_i]\!]$, 故 $a_i \sqsubseteq s$. 其次, 对 a_i 的任意上界 s', 有 $\widetilde{s}(s') = \bigvee_i [\![s' = a_i]\!] = \bigvee_i [\![s = a_i]\!] = \widetilde{s}(s)$, 即 $s \sqsubseteq s'$.

□

上面的命题暗示了完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合与 X 上的层有密切的关系.

命题 3.2.13 (层与完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合)

设 F 是位象 X 上的预层, 则 F 是层当且仅当 $\Theta(F)$ 是完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合. 进一步, 所有的完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合都形如 $\Theta(F)$.

证明. 对于 $\Theta(F)$ 的元素 $a \in F(U), b \in F(V)$, $a \sqsubseteq b$ 当且仅当 $U \leq V$ 且 $b|_U = a$. 完备性的定义中前两条自动成立; 第三条“任意一族两两相容的元素有上确界”即是层条件, 因此 F 是层当且仅当 $\Theta(F)$ 是完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合.

设 A 为完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合, 令

$$F(U) = \{a \in A \mid [\![a = a]\!] = U\},$$

那么 F 为层, 并且 $A = \Theta(F)$. □

下面的命题指出完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合间的态射总是可由一个普通的集合映射表示.

命题 3.2.14 (完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合间态射的刻画)

设 $\phi\colon A \to B$ 是 $\mathcal{O}(X)$-值集合的态射. 若 B 完备, 则存在唯一的 (底层集合之间的) 映射 $f\colon A \to B$ 使得 $\phi(a, b) = [\![f(a) = b]\!]$. 进一步有

- $[\![a_1 = a_2]\!] \leq [\![f(a_1) = f(a_2)]\!]$;
- $[\![a = a]\!] = [\![f(a) = f(a)]\!]$;
- f 保持偏序关系 $\sqsubseteq$.

证明. 对每个 $a \in A$ 考虑 B 的单元子集 $b \mapsto \phi(a,b)$, 由完备性, 它可表示为 $\widetilde{f(a)}$ 的形式, 也即 $\phi(a,b) = [\![f(a) = b]\!]$. 这确定了一个映射 $f\colon A \to B$. 注意到

- $[\![a = a]\!] = \bigvee_{b\in B} \phi(a,b) = \bigvee_{b\in B} [\![f(a) = b]\!] = [\![f(a) = f(a)]\!]$;
- $[\![a_1 = a_2]\!] \leq [\![a_1 = a_1]\!] = [\![f(a_1) = f(a_1)]\!] = \phi(a_1, f(a_1))$;
- $\phi(a_1, f(a_1)) \wedge [\![a_1 = a_2]\!] \leq \phi(a_2, f(a_2)) \leq [\![f(a_1) = f(a_2)]\!]$;
- 若 $a_1 \sqsubseteq a_2$, 则 $[\![f(a_1) = f(a_1)]\!] = [\![a_1 = a_1]\!] = [\![a_1 = a_2]\!] \leq [\![f(a_1) = f(a_2)]\!]$.

这证明了所需的结论. □

由命题 3.2.13, 3.2.14 得如下的推论.

命题 3.2.15

函子 Θ 诱导了范畴等价 $\Theta\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{CSet}(\mathcal{O}(X))$.

命题-定义 3.2.16 ($\mathcal{O}(X)$-值集合的完备化)

任何 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A 都同构于某个完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合 $\widetilde{A}$, 称为 A 的完备化. 因此有范畴等价 $\mathsf{Set}(\mathcal{O}(X)) \simeq \mathsf{CSet}(\mathcal{O}(X))$.

证明. 定义 $\widetilde{A}$ 为 A 的单元子集 (定义 3.2.10) $\sigma\colon A \to \mathcal{O}(X)$ 的集合,

$$[\![\sigma = \tau]\!] := \bigvee_{a\in A} (\sigma(a) \wedge \tau(a)).$$

我们说明 $\widetilde{A}$ 是完备的.

- 对于 $\sigma, \tau \in \widetilde{A}$, 假设 $\sigma \sqsubseteq \tau$, 由定义, $\bigvee_{a\in A}(\sigma(a) \wedge \tau(a)) = \bigvee_{a\in A} \sigma(a)$. 那么对任意 $a' \in A$,

$$\begin{aligned} \sigma(a') &\leq \sigma(a') \wedge \bigvee_{a\in A} \sigma(a) \\ &= \sigma(a') \wedge \bigvee_{a\in A} (\sigma(a) \wedge \tau(a)) \\ &= \bigvee_{a\in A} \big(\sigma(a') \wedge \sigma(a) \wedge \tau(a)\big) \\ &\leq \bigvee_{a\in A} \big([\![a' = a]\!] \wedge \tau(a)\big) \leq \tau(a'). \end{aligned}$$

于是我们证明了 $\sigma \sqsubseteq \tau$ 当且仅当 $\sigma(a) \leq \tau(a)\,(\forall a \in A)$. 因此 $\sqsubseteq$ 是一个偏序关系.

- 对任意 $\sigma \in \widetilde{A}$ 以及 $U \le [\![\sigma = \sigma]\!] = \bigvee_{a \in A} \sigma(a)$, 定义
$$\sigma|_U(a) := \sigma(a) \wedge U,$$
那么 $\sigma|_U \sqsubseteq \sigma$, 且 $[\![\sigma|_U = \sigma|_U]\!] = U$.

- 对于 $\sigma, \tau \in \widetilde{A}$, 两者相容的条件为
$$\bigvee_{a \in A} (\sigma(a) \wedge \tau(a)) = \Big(\bigvee_{a \in A} \sigma(a)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{a \in A} \tau(a)\Big) = \bigvee_{a, a' \in A} (\sigma(a) \wedge \tau(a')).$$
对任意一族两两相容的元素 $\{\sigma_i\}$, 定义函数 $\sigma\colon A \to \mathcal{O}(X)$,
$$\sigma(a) := \bigvee_i \sigma_i(a),$$
那么 $\sigma(a) \wedge [\![a = a']\!] \le \sigma(a')$, 且
$$\begin{aligned}
\sigma(a) \wedge \sigma(a') &= \bigvee_{i,j} \sigma_i(a) \wedge \sigma_j(a') \\
&= \bigvee_{i,j} \bigvee_{a'', a''' \in A} \big(\sigma_i(a) \wedge \sigma_i(a'') \wedge \sigma_j(a') \wedge \sigma_j(a''')\big) \\
&= \bigvee_{i,j} \bigvee_{a'' \in A} \big(\sigma_i(a) \wedge \sigma_i(a'') \wedge \sigma_j(a') \wedge \sigma_j(a'')\big) \\
&\le \bigvee_{i,j} \bigvee_{a'' \in A} \big([\![a = a'']\!] \wedge [\![a'' = a']\!]\big) \le [\![a = a']\!].
\end{aligned}$$
这说明 $\sigma \in \widetilde{A}$. 由偏序关系 $\sqsubseteq$ 的刻画, 知 σ 是 σ_i 的上确界.

考虑映射 $\phi\colon A \times \widetilde{A} \to \mathcal{O}(X)$, $\phi(a, \sigma) = \sigma(a)$. 它既可视为 A 到 $\widetilde{A}$ 的态射, 又可视为 $\widetilde{A}$ 到 A 的态射. 由下列事实, 这两个态射互逆, 因此 $A \simeq \widetilde{A}$.

- $\sigma_1(a_1) \wedge [\![a_1 = a_2]\!] \wedge [\![\sigma_1 = \sigma_2]\!] \le \sigma_1(a_2) \wedge [\![\sigma_1 = \sigma_2]\!] \le \sigma_2(a_2)$.

- $\sigma(a_1) \wedge \sigma(a_2) \le [\![a_1 = a_2]\!]$.

- $\sigma_1(a) \wedge \sigma_2(a) \le [\![\sigma_1 = \sigma_2]\!]$.

- $\forall_{\sigma \in \widetilde{A}} \sigma(a_1) \wedge \sigma(a_2) = [\![a_1 = a_2]\!]$.

- $\forall_{a \in A} \sigma_1(a) \wedge \sigma_2(a) = [\![\sigma_1 = \sigma_2]\!]$.

$\square$

接下来我们将完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合转化为 X 上的平展空间.

命题-定义 3.2.17 (函子 Δ)

定义函子 $\Delta\colon \mathsf{CSet}(\mathcal{O}(X)) \to \mathsf{Et}(X)$,

$$\Delta(A) = \operatorname{colim}_{a\in\mathcal{A}}(\llbracket a = a\rrbracket \to X) \in \mathsf{Loc}/X.$$

其中余极限是 Loc/X 中的余极限, 指标范畴由定义 3.2.10 中的偏序 $\sqsubseteq$ 给出.

证明. 首先证明 $\Delta(A)$ 是 X 上的平展空间. Loc/X 中的余极限即 Loc 中的余极限 (命题 1.1.29), 即 Frm 中的极限

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\Delta(A)) &= \lim^{\mathsf{Frm}}_{a\in A}\mathcal{O}(\llbracket a = a\rrbracket)\\ &= \left\{(U_a)_{a\in A} \in \prod_{a\in A}\mathcal{O}(\llbracket a = a\rrbracket)\ \middle|\ \forall a, b\in A(b\sqsubseteq a \Rightarrow U_b = U_a\wedge\llbracket b = b\rrbracket)\right\},\end{aligned}$$

$\llbracket a = a\rrbracket$ 对应 $\mathcal{O}(\Delta(A))$ 的元素 $(\llbracket a = b\rrbracket)_{b\in A}$, 这些开子空间覆盖了 $\Delta(A)$. 因此 $\Delta(A)$ 确实是 X 上的平展空间.

下面验证 Δ 的函子性. 对于完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合态射 $f\colon A\to B$ (命题 3.2.14), 由于 $\llbracket f(a) = f(a)\rrbracket = \llbracket a = a\rrbracket$, f 保持 $\sqsubseteq$ (命题 3.2.14), 指标范畴之间的函子诱导余极限之间的态射

$$\Delta(A) = \operatorname{colim}_{a\in A}(\llbracket a = a\rrbracket) \to \operatorname{colim}_{b\in B}(\llbracket b = b\rrbracket) = \Delta(B).$$

$\square$

注 3.2.18

与拓扑空间的情形类似 (见注 3.1.10), $\Delta\Theta$ 是如下的米田扩张.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[r, "よ"] \arrow[dr, hook, "i"'] & \mathrm{Presh}(X) \arrow[d, "\Delta\Theta"] \\ & \mathsf{Loc}/X \end{tikzcd}$$

命题 3.2.19

对任意位象 X, 如下三个函子均为范畴等价.

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Et}(X) \arrow[dl, "\Gamma"'] & \\ \mathrm{Sh}(X) \arrow[rr, "\Theta"'] & & \mathsf{CSet}(\mathcal{O}(X)) \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

证明. 参见 [15] 定理 C1.3.11. 我们证明三个函子以任意方式复合均等价于恒等函子.

先从 X 上的层 F 开始. 由定义,

$$\Delta\Theta F = \operatorname{colim}_{s\in F(V), V\in\mathcal{O}(X)} V,$$

其中每个截面 $s \in F(V)$ 可视为一个元素 $s \in \Theta(F)$, 其范围 $[\![s = s]\!] = V$, 对应一个位象态射 $\lambda_s\colon V \to \Delta\Theta F$, 也即平展空间 $\Delta\Theta F$ 在 V 上的一个截面. 进一步, 对于 $W \leq V$, $s|_W$ 对应的映射为 $\lambda_{s|_W} = W \hookrightarrow V \xrightarrow{\lambda_s} \Delta\Theta F$. 因此这一过程给出了层的同态 $\lambda\colon F \to \Gamma\Delta\Theta F$. 为了证明 λ 为同构, 令 σ 为 $\Delta\Theta F$ 在 $U \in \mathcal{O}(X)$ 上的任何一个截面, 对每个 $s \in F(V)$ 考虑平展空间的拉回

$$\begin{tikzcd} W_s \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d, "\sigma"] \\ V \arrow[r, "\lambda_s"'] & \Delta\Theta F, \end{tikzcd}$$

则 W_s 是 X 的开子空间, $W_s \leq U \wedge V$ [5]. 上图中的态射 $W_s \to \Delta\Theta F$ 作为 $\Delta\Theta F$ 在 V_s 上的截面正是 σ 在 W_s 上的限制. 可以证明当 s 取遍 F 的元素时, $s|_{W_s}$ 构成 F 的相容族 (即对任意 $s \in F(V), s' \in F(V')$, $W_s \wedge W_{s'} \leq [\![s = s']\!]$), 由 F 为层, 这些截面拼成了一个截面 $\bar\sigma \in F(U)$ 使得 $\lambda_{\bar\sigma} = \sigma$. 这证明了 λ 为同构.

从完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合 A 开始, 证明 $\Theta\Gamma\Delta A \simeq A$ 的方法与上述论证无异, 因为我们已经建立了完备 $\mathcal{O}(X)$-值集合与层之间的等价 (命题 3.2.13).

最后, 设 $p\colon E \to X$ 为平展空间, 由定义, $\Theta\Gamma E$ 是 E 在所有 $U \in \mathcal{O}(X)$ 上的截面 $s\colon U \to E$ 的集合, 因为所有这些截面 $s\colon U \to E$ 构成了 E 的开覆盖, 所以它们构成余极限余锥, 从而有 $\Delta\Theta\Gamma E = \operatorname{colim}_s U \simeq E$. □

3.3 范畴上的预层

定义 3.3.1 (小范畴上的预层)

设 $\mathcal{C}$ 是小范畴. 定义 $\mathcal{C}$ 上的*预层* (presheaf) 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到 Set 的函子. 记 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴为 $\widehat{\mathcal{C}} := \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.

注 3.3.2 (预层的一种重要观点)

设 $\mathcal{C}$ 为一系列熟悉的几何对象组成的范畴, 如单纯形 (例 3.3.4), 欧氏空间 (例 3.4.21). 想象一个未知的空间 F, 我们了解这个空间仅有的手段就是用 $\mathcal{C}$ 的对象 c 来探测 (probe), 即考虑态射 "$c \to F$". 记 $F(c)$ 为所有态射 "$c \to F$" 的集合, 那么态射 $d \to c$ 与态射 "$c \to F$" 应当可以复合为 $d \to c \to F$, 给出集合的映射 $F(c) \to F(d)$. 这便是预层 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 由米田引理, 态射 "$c \to F$" 可赋予真实的含义, 它就是态

[5] 这里 $U \wedge V$ 以及下面出现的 $\wedge$ 指的是作为 X 的开子空间的交. W_s 不一定等于 $U \wedge V$, 因为 W_s 是 U 和 V 在 X 上的一个平展空间中的交.

射 (自然变换) よ$(c) \to F$. 在后文中, 我们将不再区分态射 よ$(c) \to F$ 与 $F(c)$ 的元素.

例 3.3.3 (集合)

记 1 为仅有一个对象和一个态射的范畴. 1 上的预层范畴 $\widehat{1} = \mathsf{Set}^{1^{\mathrm{op}}}$ 等同于集合范畴 Set. 它也可视为单点空间上的层范畴; 它在意象中扮演的角色等同于一个点在拓扑空间中扮演的角色.

例 3.3.4 (单纯集)

令范畴 Δ 为有限全序集 $[0],[1],[2],\cdots$ 与保序映射构成的范畴, 其中 $[n] = \{0,1,\cdots,n\}$, 称映射 $f\colon [n] \to [m]$ 为保序映射是指当 $i \le j$ 时 $f(i) \le f(j)$. 我们将 $[n]$ 想象为 n 维单纯形. 称范畴 Δ 为*单纯范畴* (simplicial category).
Δ 上的预层称为*单纯集* (simplicial set), 也就是可用单纯形来探测的空间. 记单纯集范畴为 $\mathsf{sSet} = \widehat{\Delta} = \mathsf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.
对于单纯集 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $X([n])$ 表示 X 中 n 维单形的集合, 其中含有退化的单形. 记米田嵌入 よ$([n])$ 为 Δ^n, 米田引理告诉我们

$$X([n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\Delta^n, X),$$

因此如上关于 $X([n])$ 的解释是准确的.

例 3.3.5 (有向图)

有向图可用类似于单纯集 (例 3.3.4) 的方式定义. 考虑范畴

$$\mathcal{C} = \left\{ [0] \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} [1] \right\},$$

其中 $s,t\colon [0] \to [1]$ 分别将 $0 \in [0]$ 映射到 $0 \in [1]$ 和 $1 \in [1]$. 那么 $\mathcal{C}$ 上的预层 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为有向图: $X([0])$ 是有向图的顶点集, $X([1])$ 是有向图的边集; 映射 $X(s), X(t)\colon X([1]) \to X([0])$ 将有向图的边对应到其起点与终点.

例 3.3.6 (G-集)

设 G 是群. 定义范畴 $\mathsf{B}G$ 为仅有一个对象的范畴, 这个对象到自身的态射集为 G. $\mathsf{B}G$ 上的预层是函子 $(\mathsf{B}G)^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{B}(G^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{Set}$, 等同于具有 G^{op}-左作用即 G-右作用的集合, 也称为 G-集或 G 的表示. 记 G-集的范畴为 $G\mathsf{Set}$.

下面我们说明小范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是一个意象.

命题 3.3.7 (预层范畴完备且余完备)

$\widehat{\mathcal{C}}$ 是完备 (complete) 且余完备 (cocomplete) 的, 也即具有一切 (小) 极限与余极限.

证明. 预层的极限可 "逐点" 计算: 设 $F\colon I \to \widehat{\mathcal{C}}, i \mapsto F_i$ 是任意图表, 那么其极限为

$$\big(\lim_I F_i\big)(c) = \lim_I F_i(c),$$

余极限类似. □

特别地, 预层范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的终对象 (空图的极限) 是将所有对象 c 对应到 Set 的终对象 1 的预层, 而始对象 (空图的余极限) 将所有对象对应到 Set 的始对象 0. 预层的积与和即是逐点的积与和.

命题 3.3.8

$\widehat{\mathcal{C}}$ 是积闭范畴.

证明. 对 $X, Y \in \widehat{\mathcal{C}}$, 我们不能以 $Y^X(c) = Y(c)^{X(c)}$ 来定义指数对象 Y^X, 因为这个构造没有函子性. 一种可行的思路如下. 假设指数对象 Y^X 存在, 即有 (关于 Z 的) 自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Z, Y^X) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Z \times X, Y).$$

代入 $Z = よ(c)$, 由米田引理便得到 (关于 c 的) 自然同构

$$Y^X(c) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c) \times X, Y),$$

这已经确定了函子 Y^X. 对任意 $Z \in \widehat{\mathcal{C}}$, 将其表示为可表函子的余极限 $Z = \mathrm{colim}_{よ(c)\to Z}\, よ(c)$ (命题 A.4.7), 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Z, Y^X) &\simeq \lim\nolimits_{よ(c)\to Z} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c), Y^X) \\
&\simeq \lim\nolimits_{よ(c)\to Z} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c) \times X, Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{colim}_{よ(c)\to Z}(よ(c) \times X), Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Z \times X, Y).
\end{aligned}$$

最后一步用到 $- \times X$ 保持余极限, 因为预层的余极限是逐点的. □

由于预层范畴的俯范畴也是预层范畴 (命题 A.4.16), 我们得到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 甚至是局部积闭范畴.

筛与预层范畴中的子对象

本节的目标是描述预层范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的子对象以及子对象分类子.

命题-定义 3.3.9 (子函子)

$\widehat{\mathcal{C}}$ 中的态射 $Y \to X$ 是单射, 当且仅当对每个对象 c, 映射 $Y(c) \to X(c)$ 都是子集, 且对每个态射 $c \to d$, 映射 $Y(d) \to Y(c)$ 都是 $X(d) \to X(c)$ 的限制; 此时也称 $Y \to X$ 为*子函子* (subfunctor).

证明. 由单射的拉回刻画 (命题 1.3.4) 以及 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中极限的逐点计算 (命题 3.3.7) 即证. □

筛的概念可帮助描述预层范畴的子对象分类子.

定义 3.3.10 (筛)

范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 c 上的一个*筛* (英 sieve, 法 crible) 是指 $\mathcal{C}$ 中一族指向 c 的箭头 $S = \{f \colon d \to c\}$, 构成 $\mathcal{C}$ 的*右理想*; 也即对任意 $f \in S$ 与 $\mathcal{C}$ 中任意箭头 g, 只要 fg 可定义, 就有 $fg \in S$.

对于两个筛 R, S, 若 $R \subset S$, 则称 R 比 S 更细, 或 R 是 S 的一个*细化* (refinement).

设 R 是一族指向 c 的箭头, 定义 R *生成*的筛为 $\{e \to d \to c \mid (d \to c) \in R\}$, 也即包含 R 中所有箭头的最细的筛.

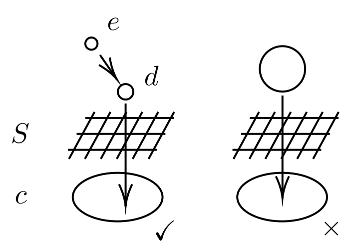
对于 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f \colon d \to c$ 以及 c 上的筛 S, 定义*筛的拉回* f^*S 为

$$f^*S = \{g \colon e \to d \mid fg \in S\}.$$

当范畴 $\mathcal{C}$ 中存在拉回时, f^*S 恰好由 S 中所有元素沿 f 的拉回构成.

注 3.3.11 (筛的直观)

在现实生活中, 筛是一种能把大的东西挡住, 让小的东西通过的工具. 想象 S 的元素为可以 "通过" S 的箭头. 若 $d \xrightarrow{f} c$ 可以 "通过" S, 那么 $e \xrightarrow{g} d \xrightarrow{f} c$ 比 $d \xrightarrow{f} c$ "小", 从而它也可以 "通过" S.



一个筛越细, 能 "通过" 它的东西就越少, 这解释了*细化*的含义; 反之, 所有东西都能通过的筛就是最粗的筛.

例 3.3.12 (偏序集中的筛)

对于偏序集 P 的元素 p, 记 $\downarrow p = \{x \in P \mid x \leq p\}$. 那么 p 上的筛可简单地描述为 $\downarrow p$ 的一个向下封闭子集.

例 3.3.13 (覆盖产生筛)

设 X 为拓扑空间, $\{U_i\}$ 是其中开集 V 的一个开覆盖. 那么

$$\{W \subset V \mid \exists i, W \subset U_i\}$$

构成 $\mathrm{Open}(X)$ 中 V 上的一个筛. 直观上每个 U_i 是筛上的一个 "洞", 比它小的对象能 "通过" 这个筛.

命题 3.3.14 (筛与子函子)

范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 c 上的筛自然地一一对应于 よ(c) 的子函子.

证明. 设 S 是 c 上的筛, 那么

$$X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set},\ X(d) := \{f\colon d \to c \mid f \in S\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d,c) = よ(c)(d)$$

构成 よ(c) 的子函子. 设 $X \to よ(c)$ 为子函子, 那么

$$S := \{f\colon d \to c \mid f \in X(d)\}$$

是 c 上的筛. 很明显, 这两个对应是互逆的. 注意 X 的函子性恰好等价于筛 S 为右理想. 容易验证筛 S 沿态射 $f\colon d \to c$ 的拉回等同于 よ(c) 的子对象 X 沿 $f\colon よ(d) \to よ(c)$ 的拉回. □

在后文中, 我们将自由地运用上述对应, 将 c 上的筛与 よ(c) 的子函子完全等同, 请读者务必熟悉.

例 3.3.15 (主筛)

对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon c' \to c$, 所有穿过 f 的态射 $c'' \to c' \xrightarrow{f} c$ 构成 c 上的一个筛 $\downarrow f$, 称为**主筛** (principal sieve). 这类似于环的主理想. $\downarrow f$ 对应的 よ(c) 的子函子恰为 よ$(f)\colon よ(c') \to よ(c)$ 的像.

例 3.3.16 (覆盖产生的筛对应的子函子)

继续例 3.3.13, 设 S 为覆盖 $\{U_i\}$ 生成的筛 (视为 $\text{よ}(V)$ 的子函子), 那么下图是余等化子.

$$\coprod_{i,j} \text{よ}(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \coprod_i \text{よ}(U_i) \longrightarrow S \tag{3.3}$$

这是因为, 由 S 的定义, 对 $W \in \mathrm{Open}(X)$, 若存在 i, $W \subset U_i$, 则 $S(W)$ 是单元集; 否则 $S(W)$ 是空集. 由此可知下图是集合范畴中的余等化子.

$$\coprod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(W, U_i \cap U_j) \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(W, U_i) \longrightarrow S(W)$$

而预层的余极限是 “逐点” 的, 于是得 (3.3).
对 X 上的任意预层 F, 以 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(-, F)$ 作用于 (3.3), 可知下图是集合范畴中的等化子.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, F) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \tag{3.4}$$

因此态射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, F)$ 表达了预层 F 关于覆盖 $\{U_i\}$ 的下降资料 (descent data), 由覆盖 $\{U_i\}$ “下降” 到 V. 若 F 为层, 就应该有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, F) \simeq F(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(\text{よ}(V), F).$$

例 3.3.17 (极大筛)

所有指向 c 的箭头的集合称为*极大筛*, 也即最粗的筛. 它对应 $\text{よ}(c)$ 的子对象 $\text{よ}(c)$ 自身. 注意, c 上的一个筛是极大筛当且仅当它包含 id_c. 设 S 是 c 上的筛, $f\colon d \to c$, 那么 $f \in S$ 当且仅当 f^*S 为 d 上的极大筛.

假设 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中存在子对象分类子 Ω, 那么由米田引理, 有自然同构

$$\Omega(c) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\text{よ}(c), \Omega) \simeq \mathrm{Sub}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\text{よ}(c)) \simeq \{c \text{ 上的筛}\}.$$

命题 3.3.18 (预层范畴的子对象分类子)

在任意范畴 $\mathcal{C}$ 上, 定义预层 $\Omega\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $\Omega(c) := \{c \text{ 上的筛}\}$, 且对态射 $f\colon d \to c$, $\Omega(f)\colon \Omega(c) \to \Omega(d)$ 为筛的拉回. 那么 Ω 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的子对象分类子.

证明. 定义态射 $\top\colon 1 \to \Omega$, 对每个对象 c 选出 $\Omega(c) = \mathrm{Sub}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\text{よ}(c))$ 中的子对象 $\text{よ}(c)$ 自身, 也即 c 上的极大筛. 设 $Y \to X$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的任意子对象. 定义态射 $\chi\colon X \to \Omega$, 将 $x \in X(c)$ 对应到 c 上的筛

$$\chi_c(x) := \big\{f\colon d \to c \mid X(f)(x) \in Y(d)\big\}. \tag{$\star$}$$

注意 $\chi_c(x)$ 是极大筛当且仅当 $\mathrm{id}_c \in \chi_c(x)$, 也即 $x \in Y(c)$, 所以子对象 $Y \to X$ 是如下的拉回.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

这证明了 Ω 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的子对象分类子, 且 $\top\colon 1 \to \Omega$ 是万有子对象. □

注 3.3.19 (特征函数的定义的解释)

假设下图中右侧方块以及长方形为拉回, 可得左侧方块为拉回,

$$\begin{tikzcd} \chi_c(x) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ よ(c) \arrow[r, "x"'] & X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

因此 $\chi_c(x) = \{f \in よ(c)(d) \mid x \circ f \in Y(d)\}$. 注意到对于 $x \in X(c)$, 有 $x \in Y(c)$ 当且仅当上图中存在提升 $よ(c) \to Y$, 当且仅当 $\chi_c(x) = よ(c)$. 这解释了态射 $\chi\colon X \to \Omega$ 的构造.

综合上述论证, 我们得到

命题 3.3.20

$\widehat{\mathcal{C}}$ 是一个意象.

例 3.3.21 (G-集)

例 3.3.6 介绍了 G-集范畴, 即 $\mathrm{B}G$ 上的预层范畴. 由于 $\mathrm{B}G$ 只有一个对象且态射均为自同构, 其上仅有两个筛, 空集与极大筛.

因此, G-集范畴的子对象分类子 Ω 是二元集合 $\{\top, \bot\}$, 其上带有 G 的平凡作用. 事实上, 一个 G-集 X 的子对象 Y 是其中 G-作用下封闭的子集. 其对应的特征函数 $X \to \{\top, \bot\}$ 就是子集 Y 的特征函数.

3.4 景

> Attempting to define a “Weil cohomology” with the formal properties necessary to establish the Weil conjectures, Grothendieck discovered étale cohomology, a fusion of ordinary sheaf cohomology and Galois cohomology. The definition required an extension of the concept of sheaf to the idea of a sheaf on a site — a category equipped with an a priori notion of covering.
>
> André Joyal, Myles Tierney, [17]

Grothendieck 意识到, 层的概念所需的关键信息是一个对象 U 何时被一族进入 U 的态射 (甚至不一定是 U 的子对象) 所*覆盖*.

从覆盖到 Grothendieck 拓扑

本小节有许多的定义, 在读者看来这些定义可能有些冗余. 这或许是历史的遗留, 但每个定义有各自的长处.

定义 3.4.1 (覆盖结构)

范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个*覆盖结构* (coverage) T 是如下资料: 对每个对象 c 指定一个集合 $T(c)$, 其元素为态射族 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$, 称为 c 的 T-*覆盖族* (covering family), 满足

- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in T(c)$, 对任意态射 $g\colon d \to c$, 存在 $\{h_j\colon d_j \to d\}_{j\in J} \in T(d)$ 使得每个 gh_j 都穿过某个 f_i.

对于两个覆盖结构 T, T', 若 $T \subset T'$, 则称 T' *较细* (fine).

注 3.4.2 (具有拉回的范畴上的覆盖结构)

对于具有拉回的范畴 $\mathcal{C}$, 我们通常要求覆盖结构满足如下更强的条件.

- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in T(c)$, $g\colon d \to c$, 则 $\{g^*(f_i)\colon d_i \to d\}_{i\in I} \in T(d)$.

定义 3.4.3 (关于态射族的层条件)

设 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层. 设 $M = \{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一族共终点的态射. 称 F 满足关于 M 的*层条件*, 是指对任意一组相容的元素 $(s_i \in F(c_i))_{i\in I}$, 存在唯一的

$s \in F(c)$ 满足

$$F(f_i)(s) = s_i \, \forall i \in I.$$

其中, 一组元素 $(s_i \in F(c_i))_{i \in I}$ 相容是指对任意态射 $f\colon d \to c_i$, $g\colon d \to c_j$, 有

$$F(f)(s_i) = F(g)(s_j) \in F(d).$$

若将上面的 “存在唯一” 改为 “存在至多一个”, 得到的条件称为*分离性条件*.
在 $\mathcal{C}$ 具有拉回的条件下, 层条件可简洁地表述为如下等化子,

$$F(c) \longrightarrow \prod_i F(c_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(c_i \times_c c_j).$$

设 $S \to よ(c)$ 是 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i \in I}$ 生成的筛对应的子函子 (命题 3.3.14), 那么一组相容的元素等同于自然变换 $S \to F$, 从而层条件等价于自然变换 $S \to F$ 唯一地穿过 $よ(c)$, 也即如下映射是同构.

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c), F) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, F)$$

(分离性条件等价于它是单射.) 对比例 3.3.16 中的式 (3.4). F 关于 S 的层条件也可表述为 F 是关于 $S \to よ(c)$ 的*局部对象* (定义 A.3.9), 这种表述的优势在于能一字不改地推广为 Lawvere–Tierney 拓扑的层条件 (定义 3.7.7).

定义 3.4.4 (关于覆盖的层条件)

设 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层. 设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的覆盖结构. 称 F 满足关于 T 的*层条件*就是指 F 满足关于其中每个态射族的层条件.

注 3.4.5 (覆盖结构的粗细)

由定义, 覆盖结构越*细*, 对应的层条件就越强, 层就越少. 注意, 覆盖结构的粗细与筛的粗细是两个不同的概念. 对于覆盖结构 $T \subset T'$, 我们称 T' 较细; 对于筛 $S \subset S'$, 我们称 S 较细 (见注 3.3.11).

定义 3.4.6 (层范畴)

设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的覆盖结构. 定义*层范畴* $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, T)$ 为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中满足关于 T 的层条件的预层构成的全子范畴.

“覆盖结构” 是从 *Grothendieck 拓扑*的概念中分离出的一个比较重要的条件. Grothendieck 拓扑的完整概念如下.

定义 3.4.7 (Grothendieck 拓扑)

范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个 *Grothendieck 拓扑* (或 Grothendieck 覆盖结构) J 是如下结构: 对每个对象 c 指定一个集合 $J(c)$, 其元素为 c 上的筛, 称为*覆盖筛* (covering sieve), 满足

(1) (极大筛) 任何对象 c 上的极大筛 (定义 3.3.17) 属于 $J(c)$;

(2) (拉回下的稳定性) 若 $S \in J(c)$, $f\colon d \to c$, 则 $f^*S \in J(d)$.

(3) (传递性) 若 $S \in J(c)$, R 是 c 上的另一个筛, 使得对任意 $(f\colon d \to c) \in S$, 都有 $f^*R \in J(d)$, 那么 $R \in J(c)$.

注意由定义可得对 c 上的两个筛 $S \subset R$, 若 $S \in J(c)$, 则 $R \in J(c)$. 此外, 两个覆盖筛的交仍是覆盖筛.

命题-定义 3.4.8 (筛对态射的覆盖, Grothendieck 拓扑的等价条件)

固定范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑 J, 我们称一个对象 c 上的筛 S *覆盖*态射 $f\colon d \to c$ 是指 $f^*S \in J(d)$. 例如 S 覆盖 id_c 就是说 S 覆盖 c. 此时 Grothendieck 拓扑的条件等价于如下的形式.

(1') 筛 S 覆盖它的所有元素;

(2') 若 S 覆盖 f, 则 S 也覆盖 fg (只要 f, g 可复合);

(3') (传递性) 若 S 覆盖 f, R 覆盖 S 的每个元素, 则 R 覆盖 f.

证明.

- (1)(2)(3) $\Rightarrow$ (1')(2')(3'). (1')(2') 是直接的; 只有 (3') 需要稍微说明. 假设 S 覆盖 $f\colon d \to c$ (即 $f^*S \in J(d)$) 且 R 覆盖 S 的每个元素. 对任意 $g \in f^*S$, 有 $fg \in S$, 从而 R 覆盖 fg, f^*R 覆盖 g. 由 (3), $f^*R \in J(d)$.

- (1')(2')(3') $\Rightarrow$ (1)(2)(3). 只需要考虑 id_c 即可.

□

对于拓扑空间的开集范畴, "极大筛是覆盖" 相当于任何开集 U 都覆盖了自己; 传递性相当于若一族开集覆盖了 U 的每个局部, 那么它们也覆盖了 U.

注 3.4.9 (关于饱和性条件)

Grothendieck 拓扑的定义中, 要求覆盖族是筛且满足极大筛和传递性的条件, 这些都是饱和性条件 (saturation condition), 假设一个覆盖结构不满足这些条件, 我们也可以关于这些条件取 "闭包" 而不影响层条件:

- (筛) 一族态射 $M = \{f_i \colon c_i \to c\}_{i \in I}$ 的层条件等价于其生成的筛的层条件;
- (极大筛) 极大筛的层条件是平凡的 (一族态射只要包含了 id_c, 其层条件就是平凡的);
- (传递性) 若预层 F 满足 $\{f_i \colon c_i \to c\}_{i \in I}$ 的层条件, 且对每个 i 都有一族态射 $\{h_{ij} \colon c_{ij} \to c_i\}_{j \in I_i}$ 使得 F 满足其层条件, 那么 F 也满足复合态射族 $\{f_i \circ h_{ij} \colon c_{ij} \to c\}_{i \in I, j \in I_i}$ 的层条件. (见 Elephant [15] C2.1 节引理 7.)

因此在 Grothendieck 拓扑的定义中只有拉回下的稳定性是关键的.

命题 3.4.10 (筛与层条件的关系)

(1) 设 R, S 是 c 上的筛. 若预层 F 满足关于 R 的层条件, 且 $R \subset S$, 则 F 也满足关于 S 的层条件.

(2) 设 R, S 是 c 上的筛. 若预层 F 满足关于 R 的层条件, 且对任意 $f \in R$, F 满足关于 f^*S 的层条件, 则 F 也满足关于 S 的层条件.

证明.

(1) 任意态射 $S \to F$ 复合 $R \hookrightarrow S$ 得到 $R \to F$, 从而唯一地延拓为 $よ(c) \to F$.

(2) 考虑集合 $S' = \{fh \mid f \in R, h \in f^*S\}$. 由注 3.4.9 中关于传递性的讨论, F 满足关于 S' 的层条件. 而 $S' \subset S$, 故 S' 生成的筛包含于 S; 由 (1), F 满足关于 S 的层条件.

□

命题 3.4.11

设 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层, 则 $\mathcal{C}$ 上存在一个最细的 Grothendieck 拓扑 J_F 使得 F 满足关于 J_F 的层条件.

证明. 定义覆盖结构 J_F 如下,

$$J_F(c) = \{c \text{ 上的筛 } S \hookrightarrow よ(c) \mid \text{对任意 } f \colon d \to c,\ F \text{ 满足关于 } f^*S \text{ 的层条件}\}.$$

由定义, 对任意 Grothendieck 拓扑 J, 若 F 为 J-层, 则 (由 J-覆盖筛的拉回稳定性) $J \subset J_F$. 我们只需验证 J_F 为 Grothendieck 拓扑.

- (极大筛) 极大筛的拉回仍是极大筛, 极大筛的层条件是平凡的, 故极大筛均属于 J_F.
- (拉回下的稳定性) 假设 $S \in J_F(c)$, $f\colon d \to c$, 由于 f^*S 的拉回也是 S 的拉回, 故 $f^*S \in J_F(d)$.
- (传递性) 假设 $S \in J_F(c)$, 且 R 是 c 上的另一个筛, 使得对任意 $(f\colon d \to c) \in S$, $f^*R \in J_F(d)$.

  由 $S \in J_F(c)$, 对任意 $h\colon b \to c$, F 满足 h^*S 的层条件.

  对任意 $(k\colon a \to b) \in h^*S$, $(hk\colon a \to c) \in S$. 由 R 的假设, $(hk)^*R = k^*h^*R \in J_F(a)$; 特别地, F 满足关于 k^*h^*R 的层条件.

  由以上结论及命题 3.4.10 (2), F 满足关于 h^*R 的层条件. 这说明 $R \in J_F(c)$.

□

命题 3.4.12 (覆盖与 Grothendieck 拓扑的关系)

设范畴 $\mathcal{C}$ 上有覆盖结构 T. 那么存在 Grothendieck 拓扑 J 给出与 T 相同的层条件.

证明. 令 $\overline{T}$ 为 T 中的覆盖族生成的筛的集合, 则 T 的层条件等价于 $\overline{T}$ 的层条件. 令 J 为所有包含 $\overline{T}$ 的 Grothendieck 拓扑的交, 则 J 为 Grothendieck 拓扑. (J 的表达式可显式写出, 但比较复杂.) 设 F 为 T-层. 由命题 3.4.11 的证明, $\overline{T} \subset J_F$, 从而 $J \subset J_F$. 这说明 F 为 J-层. 故 J 给出与 T 相同的层条件. □

下面这个概念也被某些文献用作 Grothendieck 拓扑的定义.

定义 3.4.13 (Grothendieck 拓扑基)

设范畴 $\mathcal{C}$ 有拉回. 其上的一组 *Grothendieck 拓扑基* (basis for a Grothendieck topology, 又称 *Grothendieck 预拓扑*, pretopology) K 是如下结构: 对每个对象 c 指定一个集合 $K(c)$, 其元素为态射族 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$, 满足

- (恒等) $\{\mathrm{id}_c\} \in K(c)$;
- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in K(c)$, $g\colon d \to c$, 则 $\{g^*f_i\}_{i\in I} \in K(d)$;
- (传递性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in K(c)$, 且对每个 $i \in I$, 有 $\{g_{ij}\colon d_{ij} \to c_i\}_{j\in I_i} \in K(c_i)$, 则 $\{f_i \circ g_{ij}\colon d_{ij} \to c\}_{i\in I, j\in I_i} \in K(c)$.

定义 3.4.14 (基生成的 Grothendieck 拓扑)

Grothendieck 拓扑基 K 生成的 Grothendieck 拓扑 J 如下:

$$J(c) = \{c \text{ 上的筛 } S \mid \exists R \in K(c), R \subset S\}.$$

为了表达的方便, 我们也将用覆盖结构或 Grothendieck 拓扑基来代指其生成的 Grothendieck 拓扑.

注 3.4.15

引入覆盖结构以及 Grothendieck 拓扑基等概念的目的大约是

- 方便给出 Grothendieck 拓扑 (不需要给出所有的筛);
- 方便验证层条件 (不需要对所有的筛验证).

定义 3.4.16 (景)

带有 Grothendieck 拓扑的 (小) 范畴称为景.

我们不总是要求景是小的. 在许多要求景的 “小” 性的时候, 只需要其有一个小的 J-稠密子范畴 (定义 3.6.11).

常见的景

例 3.4.17

每个范畴 $\mathcal{C}$ 都构成一个平凡的景, 其上的覆盖结构是空的, 也即没有覆盖. 由定义, 这个景上的层是 $\mathcal{C}$ 上的预层.

例 3.4.18 (拓扑空间)

拓扑空间 X 的开集范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 构成一个景, 其上的覆盖结构是*开覆盖*. 注意此时 “拉回下的稳定性” 即是说若一族开集 $\{U_i\}$ 覆盖了 V, 那么对于 $W \subset V$, $\{U_i \wedge W\}$ 覆盖了 W.

例 3.4.19 (拓扑空间范畴)

“拓扑空间范畴” 上有一个由*开覆盖*确定的覆盖结构. 严格地说, 设 T 是一个小的拓扑空间范畴[6], 对于 $X \in \mathsf{T}$ 令集合 $K(X)$ 由 X 的所有开覆盖 $\{f_i \colon U_i \to X\}_{i\in I}$ 组成.

例 3.4.20 (位象)

对于位格 A, 将其视为范畴, 我们定义 A 上的覆盖结构: 当一族态射 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 满足 $U = \bigvee_{i\in I} U_i$ 时, 称其为覆盖族. 由此, 每个位象都 (反变地) 对应一个景.

例 3.4.21 (Cartesius 空间)

考虑 Cartesius 空间[7]的范畴 CartSp, 其中的对象为 $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \cdots$, 态射为光滑映射. 称 $\mathbb{R}^n$ 的开覆盖 $\{U_i\}$ 为 *好覆盖* (good cover) 是指 U_i 以及任意有限个 U_i 的交都同胚于 $\mathbb{R}^n$. 这给出了 CartSp 上的一个覆盖结构, 称之为 *Cartesius 空间景*. Cartesius 空间景上的层称作*光滑空间* (smooth space).

记 Man 为 (光滑) 流形的范畴. 流形 M 可视为光滑空间

$$\mathsf{CartSp}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set},\ \mathbb{R}^n \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Man}}(\mathbb{R}^n, M);$$

因此光滑空间是流形的推广, 是*广义微分几何* (diffeology) 的研究对象. 在量子场论中, 由于人们常常需要考虑 “场的空间” (例如两个流形之间的映射的空间), 操作其上的微分形式, 而它们不是传统意义上的流形, 故使用光滑空间的概念能够更清晰地显示几何意义. 参见 Frédéric Paugam [26] 第 3 章.

对于光滑空间 $X\colon \mathsf{CartSp}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $X(\mathbb{R}^n)$ 是 “$\mathbb{R}^n$ 到 X 的光滑映射的集合” (这不过是米田引理), 也即空间 X 上 n 维 “广义坐标系” 的集合. 层条件表示的是 “广义坐标系” 的粘合条件, 即当 $\mathbb{R}^n = \bigcup U_i$ 为好覆盖时, 一族相容的广义坐标系 $U_i \to X$ 可粘合为广义坐标系 $\mathbb{R}^n \to X$.

一个重要的光滑空间是 “微分形式的模空间” Ω^k, 它作为 CartSp 上的预层将 $\mathbb{R}^n$ 对应到其上 k-形式的集合 $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$. 称其为微分形式的模空间是因为, 对任意流形 M (视为光滑空间) 有自然同构

$$\mathrm{Hom}(M, \Omega^k) \simeq \Omega^k(M).$$

容易验证 Ω^k 满足层条件, 即对于 $\mathbb{R}^n$ 的好覆盖 $\{U_i\}$, 每个 U_i 上相容的微分形式可以给出 $\mathbb{R}^n$ 整体上的微分形式.

[6]拓扑空间范畴 Top 不是小范畴, 因为每个集合都能配上离散拓扑成为一个拓扑空间. 但是我们可以考虑其中小的子范畴, 如可分 Hausdorff 空间范畴 (回忆, 可分空间是指有可数稠密子集的空间).

[7]注. Cartesius 是法国数学家 René Descartes 的姓氏的拉丁化写法. 这里的 $\mathbb{R}^n$ 起到的作用正合 Descartes 的原意, 即给出空间的一部分上的坐标.

例 3.4.22 (超几何)

超几何是 "超交换代数[8]" 对应的几何, 是一些量子场论模型使用的语言. 考虑范畴 SupCartSp (超 Cartesius 空间), 其对象 $\mathbb{R}^{n|q} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{0|q}$ 是 "有 n 个偶坐标和 q 个奇坐标" 的空间 (物理学家所使用的术语), 即超交换代数 $C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \wedge^\bullet(\mathbb{R}^q)^*$ 的形式对偶.
定义超 Cartesius 空间的覆盖为 $\{\iota_i \times \mathrm{id}\colon U_i \times \mathbb{R}^{0|q} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{0|q}\}$, 使得 $\{\iota_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\}$ 构成好覆盖. 于是 SupCartSp 成为一景, 其上的层称作*超光滑空间* (super smooth space). Urs Schreiber [27] 介绍了物理中旋量场等结构用超几何语言的表述, 以及其它对象在意象理论中的表述.

例 3.4.23 (Zariski 景)

考虑*有限表现* (finitely presented) 环 (形如 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ 的环) 的范畴 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}$. 这是一个小范畴[9]. 我们考虑其对偶范畴 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$, 也即仿射概形的范畴. 对于环 A, 我们记 $\operatorname{Spec} A \in \mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 为 A 在对偶范畴中的化身.
回忆, Zariski 拓扑的标准开集 (但不一定是全部的开集) 形如 $\operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$, 也即局部化的环同态 $A \to A_f$. 若 n 个元素 $f_1, \cdots, f_n \in A$ 生成了单位理想 (1) ($f_1, \cdots, f_n$ 构成了 $\operatorname{Spec} A$ 上的 "单位分解"), 规定 $\{\operatorname{Spec} A_{f_i} \to \operatorname{Spec} A\}$ 构成覆盖. 这定义了 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上的一个覆盖结构, 这便是 *Zariski 景*. Zariski 景是综合代数几何 (synthetic algebraic geometry) 的基础 (定义 4.7.17; 关于综合代数几何, 见 [9]).

例 3.4.24 (平展景)

(本例需要一些背景知识.) 平展景是 "拓扑空间上开集范畴" 在代数几何中的类比. 设 X 为概形, 考虑概形范畴的俯范畴 $\mathsf{Sch}_{/X}$ 中由平展映射 $U \to X$ 构成的全子范畴 $\mathsf{Sch}_{/X,\text{ét}}$. 这称作 X 上的 (小) *平展景* (small étale site).

[8] $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次向量空间范畴有一个对称幺半范畴结构, 其交换同构 $V \otimes W \to W \times V$ 在奇部分的作用为 $v \otimes w \mapsto -w \otimes v$. 关于此对称幺半范畴结构的交换代数称为超交换代数. 对超几何与量子场论感兴趣的读者可阅读 IAS 的讲义 [11].

[9] 严格地说, 它是本质小 (essentially small) 范畴, 也即它的对象模掉同构之后构成一个集合.

典范与次典范拓扑

命题-定义 3.4.25 (典范 Grothendieck 拓扑)

对于范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑 J, 若以下两个等价条件之一成立, 则称之为次典范 (subcanonical) Grothendieck 拓扑:

- 每个 J-覆盖筛 $S = \{f_i : c_i \to c\}$ 都构成余极限余锥 (colimit cocone), 使得 c 成为 c_i 的余极限 (这样的筛称为有效满 (effective-epimorphic) 的);
- 每个可表函子 $よ(c)$ 都是层, 也即米田嵌入 $\mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 穿过 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$.

定义典范 *Grothendieck* 拓扑是最细的次典范 Grothendieck 拓扑.

证明. 设 S 为 c 上的筛, S 是有效满的当且仅当对任意对象 d, 任意态射 $S \to よ(d)$ 唯一地延拓为态射 $よ(c) \to よ(d)$; 这就是说每个可表函子 $よ(d)$ 都满足关于 S 的层条件. 因此, 定义中的两个条件等价.

我们说明最细的次典范 Grothendieck 拓扑存在. 对任意预层 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, [未完成:
] □

例 3.4.26 (常见的次典范 Grothendieck 拓扑)

- 一个拓扑空间上的 Grothendieck 拓扑 (例 3.4.18) 是次典范的.
- Zariski 景 (例 3.4.23) 是次典范的.

3.5 层化与 Grothendieck + 构造

回忆拓扑空间上一个开覆盖 $\{U_i\}$ 生成的筛 S 可表示为余极限 $\operatorname{colim} よ(U_i)$ (例 3.3.16). 自由余完备化 $よ$ 不保持余极限, 而层化的效果即是使 $S \to よ(c)$ 变为同构, *层化弥补了自由余完备化所破坏的余极限*. 一种通用的将某些态射变为同构的方法是局部化 (附录 A.3 节). 事实上, 层范畴是预层范畴的局部化, 而在层范畴中 S 与 $よ(c)$ 变成了同构的对象. 使用 Adámek 与 Rosický [1] 引入的可表现范畴的一般理论 (附录 A.5 节), 可以得到层范畴的一种简单描述. 层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中关于所有 J-覆盖筛 $S \to よ(c)$ 的局部对象的全子范畴. 由命题 A.3.16, $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的自反子范畴 ([1] 第 2 章 2D, 2E 节对此还有一种更加抽象的证明). 由命题 A.3.8, $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 关于 $W = \{(S \to よ(c)) \in J(c)\}$ 生成的强饱和态射族 $\overline{W}$ (注 A.3.17) 的局部化. 可以证明 $\overline{W}$ 是 W 关于箭头范畴中 (小) 余极限的完备化. $\overline{W}$ 中的元素形如

$$\operatorname{colim}_i S_i \to \operatorname{colim}_i よ(c_i).$$

可以证明这个态射族具有右分式计算 (定义 A.3.20), 从而 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 等价于分式计算给出的范畴 $\widehat{\mathcal{C}}[\overline{W}^{-1}]$:

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}[\overline{W}^{-1}]}(X, Y) = \mathrm{colim}_{(X' \to X) \in \overline{W}} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X', Y). \qquad (\star)$$

我们不会给出上述论证的全部细节 (参见 [25]), 而是采取另一种较具体的方式构造层化, 它被称为 *Grothendieck + 构造* (plus construction), 其与 $(\star)$ 至少在精神上是相似的. 在证明层化的性质之后, 我们几乎不会再使用 + 构造; 因此知道这种构造的存在就足够了.

定义 3.5.1 (Grothendieck + 构造)

设 J 为范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑, X 为 $\mathcal{C}$ 上的预层, 定义预层 X^+,

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c), X^+) = X^+(c) := \mathrm{colim}_{(S \to よ(c)) \in J(c)} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, X).$$

$X^+ \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 的函子性来自拉回稳定性: 对任意态射 $f \colon c' \to c$, 有映射 $X^+(f) \colon X^+(c) \to X^+(c')$, $[S \to X] \mapsto [f^*S \to S \to X]$. 很明显, 有典范的态射 $\eta_X \colon X \to X^+$ 将元素 $よ(c) \to X$ 映射到 $[よ(c) \to X]$.

对于覆盖筛 $S \to よ(c)$, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, X)$ 的元素是对所有 $(f \colon d \to c) \in S$ 选取相容的一族元素 $X(d)$ (见定义 3.4.3). 因此 $X^+(c)$ 的元素也可理解为 X 在 c 上 "相容族" 的等价类. 典范的映射 $\eta_X \colon X(c) \to X^+(c)$ 将 $x \in X(c)$ 映射到 x 产生的相容族 $(X(f)(x))_{f \in S}$.

另一个有用的事实是, 对元素 $x \colon よ(c) \to X^+$ 的任意代表 $S \to X$ ($S \in J(c)$), 有如下交换图.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f \mapsto x_f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\ よ(c) \arrow[r, "x"'] & X^+ \end{tikzcd}$$

直接验证上图交换: 对任意 $(f \colon d \to c) \in S$, 有 $f^*S = よ(d)$, 从而 $[x_f \colon よ(d) \to X] = [f^*S \to S \to X]$.

命题 3.5.2

+ 构造保持有限极限.

证明. 注意到余极限 $\mathrm{colim}_{(S \to よ(c)) \in J(c)}$ 的指标范畴为偏序集, 其中任意两个覆盖筛有共同的加细, 这说明该余极限为滤余极限. 结论来自滤余极限的一般性质 (命题 A.5.5). □

命题 3.5.3

在定义 3.5.1 中, F 是层当且仅当 $\eta_F \colon F \to F^+$ 为同构, F 是分离对象当且仅当 $\eta_F \colon F \to F^+$ 为单射.

证明. 由 Grothendieck + 构造的定义以及层条件 (分离条件) 的定义即得. □

一次 + 构造的结果 F^+ 不一定是层, 但下面的命题表明 F^+ 离层进了一步, 而 F^{++} 必然是层.

命题 3.5.4

对预层 F, F^+ 分离; 进一步, 当 F 分离时, F^+ 是层.

证明.

- F^+ 分离. 设 $x_1\colon S_1 \to F$, $x_2\colon S_2 \to F$ $(S_1, S_2 \in J(c))$ 是 $F^+(c)$ 的两个元素 (的代表), 两者在某个覆盖 $S \in J(c)$ 上相等, 即对任意 $(f\colon d \to c) \in S$, $f^*S_1 \to S_1 \xrightarrow{x_1} F$ 与 $f^*S_2 \to S_2 \xrightarrow{x_2} F$ 代表 $F^+(d)$ 的同一个元素, 而这表示存在 $S_f \in J(d)$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd}
& f^*S_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[dr, "x_1"] & \\
S_f \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & F \\
& f^*S_2 \arrow[r] & S_2 \arrow[ur, "x_2"'] &
\end{tikzcd}$$

  由传递性, 所有 S_f (与 f 复合后) 构成 c 的覆盖筛, 故 x_1, x_2 代表了 $F^+(c)$ 的同一个元素.

- 假设 F 分离, 我们证明 F^+ 为层. 首先注意到若 $x_1\colon S_1 \to F$, $x_2\colon S_2 \to F$ $(S_1, S_2 \in J(c))$ 代表了 $F^+(c)$ 的同一个元素, 由于 F 分离, x_1, x_2 必须在 $S_1 \cap S_2$ 的每个元素上取值相等. (对任意 $(f\colon d \to c) \in S_1 \cap S_2$, 在 d 上使用分离性条件.) 因此 $F^+(c)$ 的一个元素 (F 在 c 上的相容族的等价类) 的所有代表的并是一个典范的代表, 即 c 上一个极大的相容族.

  设 $S \in J(c)$, $S \to F^+$ 是任意态射, 即对每个 $(f\colon d \to c) \in S$ 有 $F^+(d)$ 的一个元素, 以 d 上的极大相容族 $S_f \to F$ 为代表. 这样我们便得到了 F 在 c 上的一个相容族

$$\Big(\bigcup_{(f\colon d \to c) \in S} f \circ S_f\Big) \to F, \quad (f \circ S_f := \{fg \mid g \in S_f\})$$

  它代表了 $F^+(c)$ 的一个元素, 以延拓 $S \to F^+$.

□

命题 3.5.5

$\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的正合局部化 (定义 A.3.1),

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) \arrow[r, hook, shift right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[l, shift right, "a"'] \end{tikzcd},$$

且反映函子 a 由两次 $+$ 构造给出.

证明. 对预层 $X \in \widehat{\mathcal{C}}$ 与层 $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$, 态射 $X \to F$ 对应于交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X"'] & F \arrow[d, "\simeq"] \\ X^+ \arrow[r] & F^+ \end{tikzcd}$$

即任何态射 $X \to F$ 都穿过 $\eta_X\colon X \to X^+$; 进一步, 由下图知穿过的方式是唯一的.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[r] \arrow[d] & F \\ よ(c) \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "\exists!"] & X^+ & \end{tikzcd}$$

同理, 这说明任何态射 $X \to F$ 唯一地穿过 $X \to X^+ \to X^{++}$. 命题 3.5.4 说明 X^{++} 是层, 因此 $++$ 是 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 的左伴随. 由于 $+$ 构造保持有限极限 (命题 3.5.2), 两次 $+$ 构造当然也保持有限极限. □

注意到对覆盖筛 $S \to よ(c)$, $a(S) \to a(よ(c))$ 是同构. 这是由于自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)}(a(S),-) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S,i(-)) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c),i(-)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)}(a(よ(c)),-).$$

这是局部化的一般现象.

3.6 Grothendieck 意象

层范畴的性质

本节的目标是证明对于景 $(\mathcal{C},J)$, 层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 为意象.

命题 3.6.1

层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 存在任意极限, 且极限等同于作为预层的极限.

证明. 设 $X = \lim_i X_i$ 是预层的极限, 而每个 X_i 是层. 对任意覆盖筛 $S \to よ(c)$, 任意态射 $S \to X$ 给出一族态射 $S \to X_i$, 由层条件唯一地延拓为一族态射 $よ(c) \to X_i$, 即 $よ(c) \to X$. 这个命题是局部对象的性质 (命题 A.3.14) 以及自反子范畴的性质 (命题 A.3.6) 的特例. □

特别地, 我们有如下几条推论.

命题 3.6.2

- 对象 $X \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的子对象偏序集 $\mathrm{Sub}(X)$ 具有任意交. 而任意并可用交表示, 故 $\mathrm{Sub}(X)$ 也具有任意并. 注意嵌入函子 $i\colon \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 保持单射 (命题 1.3.5).
- $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的终对象是 $1 \in \widehat{\mathcal{C}}$.

层范畴的子对象分类子

本小节描述 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的子对象分类子.

回忆 $\mathcal{C}$ 上预层范畴的子对象分类子 Ω 为 $\Omega(c) = \{c$ 上的筛$\}$ (命题 3.3.18).

定义 3.6.3 (闭筛)

设 J 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑. 对于 c 上的筛 S, 若以下条件成立, 则称之为 J-闭筛 (closed sieve): 对任意态射 $f\colon d \to c$, 若 $f^*S \in J(d)$, 则 $f \in S$.

闭筛的 "闭" 体现在它包含了所有被它覆盖的态射. 例如, 一个覆盖筛若为闭筛, 则必为极大筛. 由定义, 闭筛的拉回仍是闭筛, 因此闭筛构成 Ω 的子函子 $\Omega_J \hookrightarrow \Omega$.

回忆, Grothendieck 拓扑 J 确定了 Lawvere–Tierney 拓扑 $j\colon \Omega \to \Omega$ (命题 3.7.8) 以及子对象的闭包运算 (命题 3.7.3). 我们证明闭筛正是闭包为自身的筛 (视为 よ(c) 的子对象).

命题 3.6.4

对任意筛 $S \to$ よ(c), 其闭包 $\overline{S}$ 为闭筛. 闭筛的闭包为自身.

证明. 由命题 3.7.3 与 3.7.8, $\overline{S}$ 是被 S 覆盖的态射的集合, 因此当 S 是闭筛时, $\overline{S} = S$. 由传递性 (命题 3.4.8 (3)), 被 $\overline{S}$ 覆盖的态射也被 S 覆盖. 故 $\overline{S}$ 为闭筛. □

例 3.6.5 (拓扑空间上的闭筛)

在拓扑空间 X 上, 开集 U 上的筛 S 是闭筛当且仅当 S 关于任意并封闭, 从而等价于 S 是某个子开集 $V \subset U$ 生成的主筛 (定义 3.3.15).

命题 3.6.6

设 J 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑. 那么 $\Omega_J(c) = \{c$ 上的闭筛$\}$ 是 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的子对象分类子.

证明. 首先说明 Ω_J 是层. 对任意覆盖筛 $R \in J(c)$, 设有一族相容的 J-闭筛

$$(S_f \in \Omega_J(d))_{(f\colon d \to c) \in R}, \quad g^* S_f = S_{fg}.$$

令 $S = \{fg \mid f \in R, g \in S_f\}$, 我们断言 $\overline{S} \in \Omega_J(c)$ 是唯一相容的元素.

- 先证明对任意 $f \in R$, $f^* S = S_f$. 由定义, 对任意 $g \in S_f$ 有 $g \in f^* S$. 另一方面, 对任意 $h \in f^* S$, 存在 $f' \in R, g \in S_{f'}$ 使得 $fh = f'g$, 那么 $h^* S_f = g^* S_{f'}$ 为极大筛, $h \in S_f$.
- 对任意 $f \in R$, $f^* \overline{S} = S_f$. 这是由于拉回保持闭包, 以及 S_f 为闭筛.
- 满足上述条件的 c 上的闭筛 $\overline{S}$ 是唯一的. 设 P, Q 是 c 上的两个闭筛, 满足对任意 $f \in R$, $f^* P = f^* Q$. 那么 $R \cap P = R \cap Q$. 由于 R 是覆盖筛, R 覆盖 P 的每个元素; 由于 P 是闭筛, P 覆盖 P 的每个元素. 从而 $R \cap P$ 覆盖 P 的每个元素. 这说明 P 恰为 $R \cap P$ 覆盖的态射的集合. 同理, 可得 $P = Q$.

然后说明 Ω_J 是子对象分类子. 设 X 为层, $Y \hookrightarrow X$ 为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的子对象, 其特征函数 $\chi\colon X \to \Omega$ 满足对任意对象 $c \in \mathcal{C}$ 与 $x \in X(c)$ 下图的两个方块均为拉回 (注 3.3.19).

$$\begin{tikzcd}
\chi_c(x) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\text{よ}(c) \arrow[r, "x"'] & X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

我们证明 Y 为层当且仅当对任意对象 c 与 $x \in X(c)$, $\chi_c(x)$ 是闭筛.

- 假设 Y 为层. 对任意 $f\colon d \to c$, 若 $\chi_c(x)$ 覆盖了 f, 则在如下拉回图中 $S \in J(d)$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d] & \chi_c(x) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\text{よ}(d) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[urr, dashed, "\exists!"'] & \text{よ}(c) \arrow[r, "x"'] & X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

  由 Y 为层, 存在唯一的态射 $\text{よ}(d) \to Y$ 使上图交换. 由拉回的泛性质它给出了态射 $\text{よ}(d) \to \chi_c(x)$. 这说明 $S = \text{よ}(d)$, 即 $f \in \chi_c(x)$, 这便证明了 $\chi_c(x)$ 是闭筛.

- 假设对任意对象 c 与 $x \in X(c)$, $\chi_c(x)$ 是闭筛. 对任意覆盖筛 $S \in J(c)$ 考虑下图,

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& \chi_c(x) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
& \text{よ}(c) \arrow[r, "x"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

  闭筛 $\chi_c(x)$ 包含了覆盖筛 S, 因此 $\chi_c(x)$ 是极大筛, 存在态射 $\text{よ}(c) \to Y$ 使上图交换. 这证明了 Y 是层.

□

层范畴中的指数对象

命题 3.6.7

设 J 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑, F 是 J-层, X 是预层, 那么预层的指数对象 F^X 是层.

证明. 对任意覆盖筛 $(S \to よ(c)) \in J(c)$, 态射 $S \to F^X$ 等同于 $S \times X \to F$, 而 $S \times X$ 是 $よ(c) \times X$ 的稠密子对象, 故 $S \times X \to F$ 唯一地延拓为 $よ(c) \times X \to F$, 即 $よ(c) \to F^X$, 故 F^X 是层.

上述命题是正合局部化的一般性质 (命题 A.3.19) 的特例. 命题 2.2.3 是它在位象理论中的类比. □

于是我们得到如下命题.

命题 3.6.8

层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 具有指数对象, 且等同于预层的指数对象.

Grothendieck 意象

定义 3.6.9 (Grothendieck 意象)

对于范畴 $\mathcal{E}$, 若存在景 $(\mathcal{C}, J)$ 使得 $\mathcal{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$, 则称之为 *Grothendieck 意象*.

注 3.6.10

对于 Grothendieck 意象 $\mathcal{E}$, 定义 3.6.9 中的景 $(\mathcal{C}, J)$ 远远不是唯一确定的. 这就如同一个群的生成元集合不是唯一确定的. 如下的*比较原理* (命题 3.6.13) 就是一例.

[未完成: 把比较原理放在景的态射那一节, 由更一般的道理推出?]

定义 3.6.11 (景的稠密子范畴)

设 $(\mathcal{C}, J)$ 为景, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴. 若对 $\mathcal{C}$ 的任意对象 c, 所有由 $\mathcal{D}$ 的对象到 c 的态射生成 c 的 J-覆盖, 则称 $\mathcal{D}$ 为 J-稠密子范畴. 定义限制在 $\mathcal{D}$ 上的 Grothendieck 拓扑 $J|_{\mathcal{D}}$: 令 $\mathcal{D}$ 中的一个筛为覆盖筛当且仅当它在 $\mathcal{C}$ 中生成的筛为覆盖筛.

命题 3.6.12

设 $(\mathcal{C}, J)$ 为景, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的 J-稠密子范畴, 且 $\mathcal{D}$ 为小范畴. 那么 $\mathcal{C}$ 上的 J-层在 $\mathcal{D}$ 上的限制为 $J\big|_{\mathcal{D}}$-层.

证明. 设 F 为 J-层, $S \in J\big|_{\mathcal{D}}(d)$, $s\colon S \to F$ 为任意态射. 记 $\widetilde{S}$ 为 S 生成的 $\mathcal{C}$ 中的筛, $\widetilde{S}$ 的元素形如 fg, $f \in S$. 定义态射 $\widetilde{S} \to F$ 将 fg 映射到 $F(g)(s_f)$. 良定性的证明如下. 假设

$$f_1 g_1 = f_2 g_2 \colon c \to d, \quad \text{其中 } f_1, f_2 \in S,$$

设 R 是由 $\mathcal{D}$ 的对象到 c 的态射生成的覆盖筛, 对任意 $h \in R$, $F(h)F(g_1)(s_{f_1}) = s_{f_1 g_1 h} = s_{f_2 g_2 h} = F(h)F(g_2)(s_{f_2})$. 由于 F 为 J-层, 这说明 $F(g_1)(s_{f_1}) = F(g_2)(s_{f_2})$, 良定性得证. 由此, 态射 $S \to F$ 唯一地延拓为 $\widetilde{S} \to F$. 又由 F 为 J-层, 它唯一地延拓为よ$(d) \to F$. 这证明了 F 为 $J\big|_{\mathcal{D}}$-层.

□

命题 3.6.13 (比较原理)

设 $(\mathcal{C}, J)$ 为景, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的 J-稠密子范畴, 且 $\mathcal{D}$ 为小范畴. 那么 $\mathcal{C}$ 上的 J-层限制到 $\mathcal{D}$ 上给出了范畴等价

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J\big|_{\mathcal{D}}).$$

证明. 考虑沿嵌入 $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 的右 Kan 扩张 (例 A.6.5)

$$i_*\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{C}}, \quad i_*F(c) = \lim_{d \to c} F(d).$$

(其中极限的指标范畴由 $\mathcal{D}$ 的对象到 c 的所有态射构成.) 我们断言 i_* 给出了限制函子 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J\big|_{\mathcal{D}})$ 的逆.

- 设 F 是 $\mathcal{D}$ 上的 $J\big|_{\mathcal{D}}$-层, 那么 i_*F 的限制是 F: 对 $\mathcal{D}$ 的对象 d, $i_*F(d) = \lim_{d' \to d} F(d') = F(d)$. 我们还需要说明 i_*F 是 $\mathcal{C}$ 上的 J-层. 对任意 $(S \to よ(c)) \in J(c)$, 由伴随 $i^* \dashv i_*$, 态射 $S \to i_*F$ 等同于 $i^*S \to F$; i^*S 是 S 中从 $\mathcal{D}$ 出发的态射的集合. 由 $\mathcal{D}$ 是 J-稠密子范畴,

- 设

□

例 3.6.14 (拓扑空间上的层意象)

对于拓扑空间 (或位象) X, $\mathrm{Sh}(X)$ 是意象, 其子对象分类子 Ω (作为预层) 为

$$\Omega(U) = \{U \text{ 的开子集}\}.$$

这与命题 3.6.6 的结论相符, 见例 3.6.5 的讨论.

注 3.6.15 ("小" 意象与 "大" 意象)

粗略地说, 层以及层意象有两种不同的风味. 一种是一个空间上的层 (如例 3.4.18), 一种是一类空间的范畴上的层 (如例 3.4.21). Grothendieck 称前者的意象为*小意象* (petit topos), 后者的意象为*大意象* (gros topos).

位象型意象

意象可以视为 "空间" 概念的推广, 一个重要原因就是由层意象可以重构出这个 "空间". 对于拓扑空间或位象 X, 回忆 $\mathrm{Sh}(X)$ 的终对象 1 是在所有开子集上取值为 1 的层, 故 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象 (定义 1.3.26) 是在每个开集上取值 0 或 1 的层. 由层条件, 当一个子终层 ($\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象) 在若干开子集 $U_i \in \mathcal{O}(X)$ 上取值为 1 时, 它在 $\bigvee_i U_i$ 上取值也为 1; 因此存在这个层取值为 1 的最大开子集. 这证明了如下的 "重构" 定理:

命题 3.6.16 (由层意象重构位象)

拓扑空间或位象 X 上的层意象 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象一一对应于 X 的开子集. 换言之, X 的开子集位格同构于 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象的格:

$$X \simeq \mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1).$$

对于一般的 Grothendieck 意象 $\mathcal{C}$, 其子终对象又称为*开子空间* (法 ouvert, 见 SGA 4 [2]), 而子终对象的格 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(1)$ 对应的位象称为其*底层位象* (underlying locale), 或称*位象反映* (localic reflection).

定义 3.6.17 (位象型意象)

若一个意象等价于形如 $\mathrm{Sh}(X)$ 的范畴 (X 为位象), 则称之为*位象型意象* (localic topos).

命题 3.6.18 (位象型意象的判定)

设 $\mathcal{C}$ 为 Grothendieck 意象, 那么如下条件等价:

(1) $\mathcal{C}$ 为位象型意象;

(2) 存在偏序集 P 以及其上的 Grothendieck 拓扑 J 使得 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sh}(P, J)$;

(3) $\mathcal{C}$ 由其子终对象生成, 即对 $\mathcal{C}$ 中两个态射 $f, g\colon X \to Y$, 若对任意 $x\colon U \to X$ (U 为子终对象) 都有 $fx = gx$, 则 $f = g$.

证明.

- 由定义, (1) $\Rightarrow$ (2).
- (2) $\Rightarrow$ (3) 是因为, 对于 $p \in P$, $a\text{よ}(p) \to 1$ 为子终对象, 而层的态射 $X \to Y$ 由所有映射 $X(p) \to Y(p)$ 决定.
- (3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathcal{C}$ 由其子终对象生成. Giraud 定理的证明 (3.10.2) 表明 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{Sub}(1))$, 故 $\mathcal{C}$ 为位象型意象.

□

例 3.6.19 (非位象型 Grothendieck 意象的例子)

设 G 为群, G-集范畴 $G\mathsf{Set} = \mathsf{Fun}(\mathsf{B}G^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 是 Grothendieck 意象, 但当 G 非平凡时, $G\mathsf{Set}$ 不是位象型意象. 这是因为, $G\mathsf{Set}$ 的子终对象仅有空集 0 和单元集 1, 而 G-集合态射 $1 \to S$ 是 S 在 G-作用下的不动点. 一个 G-集合一般不能由它的不动点决定, 因此 $G\mathsf{Set}$ 不能由子终对象生成.

考虑一个带有 G-作用的拓扑空间 X (G 视为离散群). G-等变层范畴 $\mathrm{Sh}_G(X)$ (定义 3.11.1) 是 Grothendieck 意象, 但不一定是位象型意象. 事实上, $\mathrm{Sh}_G(X)$ 的底层位象为商空间 X/G.

3.7 Lawvere–Tierney 拓扑, 内蕴层化与局部化

Lawvere–Tierney 拓扑

回忆 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的子对象分类子 Ω 满足 $\Omega(c) = \{c\text{ 上的筛}\}$ (命题 3.3.18). Grothendieck 拓扑 J 给每个对象 c 赋予一族筛, 也即赋予一个子集 $J(c) \subset \Omega(c)$. 由拉回下的稳定性, J 构成 Ω 的子函子. 而由 Ω 为子对象分类子, $J \hookrightarrow \Omega$ 进一步对应一个态射 $j\colon \Omega \to \Omega$. 这个态射可以承载 Grothendieck 拓扑的所有信息, 而其好处在于仅涉及了意象中的子对象分类子, 从而可在任何意象 (而不仅是预层范畴) 中谈论. 下面的概念即是态射 j 在一般意象中的刻画.

定义 3.7.1 (Lawvere–Tierney 拓扑)

意象上的一个 *Lawvere–Tierney 拓扑* (或称内蕴 *Grothendieck 拓扑*, *局部算子*, local operator, *局部模态*, local modality) 是一个态射 $j\colon \Omega \to \Omega$, 满足如下条件:

(1) $j \circ \top = \top$;

(2) $j \circ j = j$;

(3) j 保持 $\wedge$, 即 $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$. (等价的条件是 j 保持 Ω 上内蕴的序关系.)

注 3.7.2

Lawvere 指出 Lawvere–Tierney 拓扑 j 应视为一种模态 (B.5 节). 逻辑学中, *模态*是将命题变为命题的算子 (在意象中即态射 $\Omega \to \Omega$), 表达某命题*以某种特定方式*成立. 在这里, 模态 j 表达的是某命题在*局部*上成立 (即该命题在某个覆盖的每一部分上成立; 例如流形是*局部*上同胚于欧氏空间的空间, 局部常值函数是*局部*上常值的函数). 条件 $j \circ j = j$ 表示 "p 在局部上在局部上成立" 等同于 "p 在局部上成立". 条件 $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ 表示 "$p \wedge q$ 在局部上成立" 等同于 "p, q 都在局部上成立". 参见 [21].

由米田引理, 态射 $\Omega \to \Omega$ 等同于自然变换 $\mathrm{Sub} \to \mathrm{Sub}$, 即子对象的一种运算.

命题-定义 3.7.3 (Lawvere–Tierney 拓扑与 "闭包")

Lawvere–Tierney 拓扑 j 等同于每个对象 X 的子对象格 $\mathrm{Sub}(X)$ 上的一个 "闭包" 运算[10] $A \mapsto \overline{A}$, 使得 $\overline{A}$ 的特征函数为 $\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A$, 且满足如下条件:

(0) (自然性) 对态射 $f\colon Y \to X$, 有 $\overline{f^*A} = f^*\overline{A}$;

(1) 对于 1 的子对象有 $\overline{1} = 1$ (或等价地, 对任意子对象 $A \to X$, 有 $A \le \overline{A}$);

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(3) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ (或等价地, $A \le B \Rightarrow \overline{A} \le \overline{B}$).

因此 Lawvere–Tierney 拓扑也称作*万有闭包运算* (universal closure operation). 称满足 $\overline{A} = A$ 的子对象 A 为*闭子对象* (closed subobject).

上述命题中的条件 (1)(2)(3) 分别对应定义 3.7.1 中的条件 (1)(2)(3). 其中条件 (1) 等价于 $A \subset \overline{A}$ 是因为自然性 (对态射 $A \to X$, $A \to 1$ 分别使用自然性条件). 这三个条件也对应位象理论中 "内核" 的条件 (定义 2.2.10).

例 3.7.4 (子位象, 内核与 Lawvere–Tierney 拓扑)

设 $Y \to X$ 是子位象, 对应内核 $j\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ (命题 2.2.12). 回忆 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子对象分类子 Ω 满足 $\Omega(U) = \{U \text{ 的开子空间}\}$ (例 3.6.14). 定义态射 $j\colon \Omega \to \Omega$, $j(U)(V) = (Y \Rightarrow V) \wedge U$. 我们验证 j 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑:

- $j(U)(U) = (Y \Rightarrow U) \wedge U = U$, 即 $j \circ \top = \top$;
- $j(U) \circ j(U)(V) = \big[Y \Rightarrow ((Y \Rightarrow V) \wedge U)\big] \wedge U = (Y \Rightarrow V) \wedge U$, 即 $j \circ j = j$;
- $$\begin{aligned} j(U)(V \wedge W) &= (Y \Rightarrow (V \wedge W)) \wedge U \\ &= (Y \Rightarrow V) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge U \quad \text{即 } j \text{ 保持 } \wedge. \\ &= j(U)(V) \wedge j(U)(W), \end{aligned}$$

定义 3.7.5 (稠密子对象)

对于子对象 $A \hookrightarrow X$, 若 $\overline{A} = X$, 则称之为*稠密子对象* (稠密单射).

注 3.7.6

可以证明子对象 $A \hookrightarrow X$ 的闭包是 A 能稠密地嵌入的最大子对象. 这是由于闭包运算的自然性: 设 $A \leq B \hookrightarrow X$, 则 $B \wedge \overline{A}$ 等于 A 在 B 中的闭包. 因此 $B \leq \overline{A}$ 当且仅当 $A \hookrightarrow B$ 稠密. 这说明给定稠密单射的全体就决定了闭包运算.

定义 3.7.7 (关于 Lawvere–Tierney 拓扑的层)

设 j 是意象 $\mathcal{E}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑. 定义关于 j 的*层*为关于所有稠密单射的*局部对象* (定义 A.3.9). 具体地, 对于 $\mathcal{E}$ 的对象 F, 若所有稠密子对象 $A \hookrightarrow X$ 诱导的映射

$$\mathrm{Hom}(X, F) \to \mathrm{Hom}(A, F)$$

均为同构, 则称 F 为 *j-层*. 相应地, 若上述映射均为单射, 则称 F 为 *j-分离对象*. 分别记 j-层的全子范畴和 j-分离对象的全子范畴为 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Sep}_j\,\mathcal{C}$.

我们说明 j-层条件是预层范畴中的层条件 (3.4.3) 在一般意象中的推广.

[10]这个闭包的概念与拓扑学上的闭包不是一回事.

命题 3.7.8 (Lawvere–Tierney 拓扑是 Grothendieck 拓扑的推广)

范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑 J 确定了 $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑 j, 使得 j 是子对象 $J \hookrightarrow \Omega$ 的特征函数; 具体地, 对 $\mathcal{C}$ 的对象 c,

$$j_c \colon \Omega(c) \to \Omega(c), S \mapsto \{f \colon d \to c \mid f^*S \in J(d)\}.$$

换言之, j 将每个筛 S 替换为 S 覆盖的所有态射的集合 (定义 3.4.8). 进一步, 关于 J 的层条件等价于 j-层条件.

证明. 由命题 3.3.18 的证明, 子对象 $J \hookrightarrow \Omega$ 的特征函数 $j \colon \Omega \to \Omega$ 满足

$$j_c(S) = \{f \colon d \to c \mid \Omega(f)(S) \in J(d)\},$$

而 $\Omega(f)(S)$ 按定义为筛的拉回 f^*S, 故得 j_c 的表达式.

容易验证 j 满足 Lawvere–Tierney 拓扑的条件:

- $j \circ \top = \top$, 因为 j_c(极大筛) = 极大筛;
- $jj = j$, 即命题 3.4.8 中的传递性;
- j 保持 $\wedge$, 因为 j 保持包含关系, 即当 $S \subset T$ 时 $j(S) \subset j(T)$.

下面说明两种层条件等价. 一个关键的观察是 $\text{よ}(c)$ 的稠密子对象等同于 c 的 J-覆盖筛. 这是因为, j 是 $J \hookrightarrow \Omega$ 的特征函数, 而由特征函数的构造 (见命题 3.3.18 的证明), 对于 c 上的筛 S, $S \in J(c)$ 当且仅当 $j_c(S)$ 是极大筛, 当且仅当 $\overline{S} = \text{よ}(c)$. 特别地, j-层条件 (关于稠密单射的局部对象) 蕴涵 J-层条件 (关于 $S \to \text{よ}(c)$ 的局部对象).

另一方面, 设预层 F 满足 J-层条件. 我们要证明 F 是关于 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中任意稠密单射 $A \to X$ 的局部对象, 也即态射 $A \to F$ 可唯一地延拓为 $X \to F$. 由于稠密子对象的拉回仍稠密 (闭包运算的自然性), 对 $x \in X(c)$, $A \to X$ 沿 $x \colon \text{よ}(c) \to X$ 的拉回 x^*A 为 $\text{よ}(c)$ 的稠密子对象, 即 c 的 J-覆盖筛.

$$\begin{tikzcd} x^*A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & F \\ \text{よ}(c) \arrow[r, "x"'] \arrow[urr, dashed, "\exists!"'] & X & \end{tikzcd}$$

如图, F 的 J-层条件说明态射 $x^*A \to F$ 可唯一地延拓为 $\text{よ}(c) \to F$, 这便唯一确定了自然变换 $X \to F$.[11] □

[11] 此处可作如下解释. X 可表示为 $\text{よ}(c)$ 的余极限 (命题 A.4.7), 故态射 $X \to F$ 由所有态射 $\text{よ}(c) \to F$ 唯一确定. 当然, 这个事实有更直接的解释: 预层的态射 $X \to F$ 由每个分量的态射 $X(c) \to F(c)$ 决定.

层范畴的性质

层范畴中的有限极限

命题 3.7.9

设 $j\colon \Omega \to \Omega$ 是意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, 则 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C}$ 具有有限极限, 且等同于 $\mathcal{C}$ 中的有限极限.

证明. 这是命题 A.3.14 的推论. □

由单射的拉回刻画 (命题 1.3.4), 有如下推论.

命题 3.7.10

设 $j\colon \Omega \to \Omega$ 是意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, 则 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C}$ 中一个态射是单射当且仅当它作为 $\mathcal{C}$ 中的态射是单射.

层范畴中的子对象

命题-定义 3.7.11 (闭子对象分类子)

设 $j\colon \Omega \to \Omega$ 是意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑. 定义 $\Omega_j \hookrightarrow \Omega$ 为 j 的不动点集, 也即 $\Omega_j = \mathrm{eq}(\mathrm{id}, j\colon \Omega \rightrightarrows \Omega)$. 那么 Ω_j 是 "闭子对象分类子": 对任意对象 X, 有自然同构

$$\{X \text{ 的闭子对象}\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega_j).$$

证明. 对 X 的任意子对象 $A \hookrightarrow X$, 由 $\overline{A}$ 的定义, $\overline{A}$ 的特征函数为 $j \circ \chi_A$. 因此 $\overline{A} = A$ 当且仅当 $j \circ \chi_A = \chi_A$. 由 Ω_j 的定义, $j \circ \chi_A = \chi_A$ 当且仅当 χ_A 穿过 $\Omega_j \hookrightarrow \Omega$. 这说明 Ω_j 分类了闭子对象. □

注意 Ω_j 的构造与 "内核对应的子位象" (定义 2.2.11) 相似.

命题 3.7.12

设 $j\colon \Omega \to \Omega$ 是意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, X 为 j-层. 那么 X 的子对象 $A \hookrightarrow X$ 是闭子对象当且仅当 A 是 j-层.

证明.

- 假设 $A \hookrightarrow X$ 是闭子对象. 对任意稠密子对象 $B \hookrightarrow Y$, 设有态射 $f\colon B \to A$, 则由 X 为 j-层, 存在唯一的 $g\colon Y \to X$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

  这表示 $B \le g^*A$. 因为 $B \hookrightarrow Y$ 稠密, 而 g^*A 为 Y 的闭子对象, 所以 $g^*A = Y$, 也即存在上图中的态射 $Y \to A$. 由 $A \hookrightarrow X$ 为单射, 这个态射 $Y \to A$ 是唯一的. 这证明了 A 为 j-层.

- 假设 A 为 j-层. 由下图中 $A \hookrightarrow \overline{A}$ 为稠密单射, 知 $\overline{A} \hookrightarrow X$ 穿过 $A \hookrightarrow X$ (X 为 j-层保证了右下方三角形交换), 故 $\overline{A} = A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ \overline{A} \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

$\square$

命题 3.7.13

定义 3.7.11 中的 Ω_j 是 j-层.

证明. 我们要证明任意稠密子对象 $m\colon A \hookrightarrow X$ 给出同构 $m^*\colon \mathrm{Hom}(X, \Omega_j) \to \mathrm{Hom}(A, \Omega_j)$; 由命题 3.7.11, 这等价于

$$m^*\colon \{X \text{ 的闭子对象}\} \to \{A \text{ 的闭子对象}\}, U \mapsto U \wedge A$$

为双射. 对 A 的闭子对象 $B \hookrightarrow A$, 回忆 $\exists_m B$ 表示 $B \hookrightarrow A \to X$ 作为 X 的子对象 (定义 1.3.20). 那么

$$m^*\overline{\exists_m B} = \overline{m^*\exists_m B} = \overline{\exists_m B \wedge A} = \overline{B} = B.$$

另一方面, 对于 X 的闭子对象 $Y \hookrightarrow X$,

$$\overline{\exists_m m^* Y} = \overline{Y \wedge A} = \overline{Y} \wedge \overline{A} = Y \wedge X = Y.$$

这证明了所需的双射. $\square$

命题 3.7.14

Ω_j 是 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C}$ 的子对象分类子.

证明. 由命题 3.7.10, 3.7.11, 3.7.12, 3.7.13 即证. $\square$

层范畴中的指数对象

命题 3.7.15

设 j 是意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, F 是 j-层, X 是任意对象, 那么指数对象 F^X 是 j-层.

这个命题的证明与 3.6.7 类似.

层化与局部化

[18] V.3 节构造了意象关于 Lawvere–Tierney 拓扑 j 的层化.

命题 3.7.16

设 j 为意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, 则 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 的自反局部化.

我们在此不证明这个命题, 而将在下一章使用内语言完成层化的构造.

3.8 意象之间的态射

几何态射

几何态射是意象之间的态射, 它推广了拓扑空间的连续映射诱导的意象之间的伴随 3.1.23.

$$\begin{tikzcd} \text{拓扑空间} \arrow[d, squiggly] & \text{连续映射} \arrow[d, squiggly] \\ \text{意象} & \text{几何态射} \end{tikzcd}$$

定义 3.8.1 (几何态射)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为意象. 定义 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的几何态射 (geometric morphism) f 为一对伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd},$$

且满足 f^* 保持有限极限. 称 f_* 为态射 f 的直像部分, f^* 为 逆像部分. 几何态射的复合即是伴随的复合: 对于几何态射 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $g\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, 令

$$(gf)_* = g_* f_*, \quad (gf)^* = f^* g^*.$$

由于 f^*, g^* 均保持有限极限, 当然 $(gf)^*$ 也保持有限极限.
设 $f, g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为几何态射, 定义 f 到 g 的几何变换为自然变换 $f^* \to g^*$, 也即自然变换 $g_* \to f_*$ (命题 A.2.11). 由此, 意象, 几何态射与几何变换构成 2-范畴 $\mathcal{T}opos$.

注 3.8.2

上面的定义中, 我们将这对伴随称为 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的态射, 因为这使得拓扑空间到层意象的对应是协变的. 几何态射有另一种等价的定义, 只提到逆像部分 f^*, 且要求它存在右伴随. 右伴随若存在则是唯一的 (差一个唯一的自然同构), 因此该定义没有本质的不同. 由于 Grothendieck 意象满足伴随函子定理 (A.5.26) 的条件, Grothendieck 意象之间的几何态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 只需要一个保持有限极限和任意余极限的函子 $f^*\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. 这与位象的态射 (保持有限交与任意并的函子, 定义 2.1.1) 相似 (命题 2.1.5).

回忆任何拓扑空间到一个点有唯一的映射, 其直像函子为整体截面函子 (例 3.1.24). 类似地, 任何 (Grothendieck) 意象到一点上的层意象 $\mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt})$ 有整体截面给出的唯一的几何态射.

命题-定义 3.8.3 (整体截面几何态射)

Grothendieck 意象 $\mathcal{C}$ 到 Set 有 (自然同构意义下) 唯一的几何态射

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "\Gamma"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right, "L"'] \end{tikzcd},$$

称为整体截面几何态射 (global sections geometric morphism).

证明. 由于左伴随 L 保持余极限 (命题 A.2.5), 且由定义保持有限极限 (特别地, 保持终对象 1), 故对任意集合 S 有

$$L(S) \simeq L\Big(\coprod_{s\in S} 1\Big) \simeq \coprod_{s\in S} L(1) \simeq \coprod_{s\in S} 1,$$

即 L (在自然同构意义下) 唯一确定. 那么其右伴随也 (本质上) 唯一确定. 具体地, Γ 是由 $1 \in \mathcal{C}$ 表示的函子

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, -),$$

这是因为

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L(S), X) &\simeq \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, X) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, X)). \end{aligned}$$

□

注 3.8.4 (常值层的记号)

在层范畴的情形, 上述命题中的左伴随 L 给出 "常值层" (例 3.1.24). 故不妨沿用常值层的记号, 对于集合 S, 记上述命题中的 $L(S)$ 为 $\underline{S}$. 对于集合 S 的元素 $s\colon 1 \to S$, 记其对应的整体元素为 $\underline{s} := L(s)\colon 1 \to \underline{S}$.

例 3.8.5 (意象的俯范畴)

意象 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$ 给出俯范畴之间的几何态射 $f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ (命题 1.1.40). 俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 可视为 $\mathcal{T}opos/\mathcal{C}$ 的对象, 有 2-函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{T}opos/\mathcal{C}, X \mapsto \mathcal{C}/X$. (2-范畴的相关概念见 A.1 节.)

例 3.8.6 (连续映射作为几何态射)

拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 给出层意象之间的几何态射 $f\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ (命题 3.1.23, 3.1.20).

逻辑态射

意象之间还有另一种态射的概念, 侧重于它的范畴结构, 故称为逻辑态射.

定义 3.8.7 (逻辑态射)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为意象. 定义 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的*逻辑态射* (logical morphism) 为保持有限极限, 子对象分类子和指数对象的函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

例 3.8.8

对于意象 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 为逻辑态射, 因为它保持任何极限, 将子对象分类子 $\Omega \times Y \to Y$ 变为子对象分类子 $\Omega \times X \to X$, 且保持指数对象 (命题 1.1.42).

逻辑态射的意义在于它保持内语言中成立的语句, 见 4.1 节.

嵌入与满射

类比于子位象 (定义 2.2.1), 我们有子意象.

定义 3.8.9 (子意象, 几何嵌入)

对于几何态射 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 对应伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd},$$

若 f_* 全忠实, 即 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{D}$ 的正合局部化 (定义 A.3.1), 则称 f 为子意象 (subtopos), 或几何嵌入 (geometric embedding).

例 3.8.10

层意象 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 是重要的子意象 (命题 3.5.5). 更一般地, 对于意象 $\mathcal{C}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑 j, $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是子意象 (命题 3.7.16).

类比于位象的满射 (定义 2.2.18), 我们有意象的满射.

定义 3.8.11 (意象的满射)

对于几何态射 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 对应伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd},$$

若 f^* 忠实, 则称 f 为意象的满射.

命题 3.8.12

对于意象 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$,

- 若 f 单, 则 $f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ 是嵌入 (也即 Π_f 全忠实);
- 若 f 满, 则 $f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ 是满射 (也即 f^* 忠实).

证明.

- 由伴随三元组的性质 (命题 A.2.15), Π_f 全忠实当且仅当 Σ_f 全忠实. 而 Σ_f 将 $Z \to X$ 对应到复合 $Z \to X \xrightarrow{f} Y$, 故 f 为单射保证了 Σ_f 全忠实.
- 设 $f\colon X \to Y$ 是满射, 我们要证明 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 忠实. 设 $U \to Y, V \to Y$ 是 $\mathcal{C}/Y$ 的两个对象, 由于拉回保持满射 (命题 1.3.7), 在下图中 $f^*V \to V$, $f^*U \to U$ 均为满射; 从而任意两个态射 $g, h\colon U \to V$ 相等当且仅当对应的态射 $f^*g, f^*h\colon f^*U \to f^*V$

相等. 这说明 f^* 忠实.

$$\begin{tikzcd}
f^*U \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "f^*g"] \arrow[ddr] & & U \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr] & \\
& f^*V \arrow[rr, two heads] \arrow[d] & & V \arrow[d] \\
& X \arrow[rr, two heads, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

□

满–单分解

类比于位象的满–单分解 (命题 2.2.19), 我们有意象的满–单分解.

命题 3.8.13 (几何态射的满–单分解, 存在性)

设 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为几何态射, 则存在 $\mathcal{D}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑 j 使得 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 分解为满射 $\mathcal{C} \to \mathrm{Sh}_j\,\mathcal{D}$ 与嵌入 $\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}$ 的复合.

证明. [未完成: **SGL VII.4**] 要定义 Lawvere–Tierney 拓扑 j, 只需定义子对象的万有闭包运算 (3.7.3). 对于 $\mathcal{D}$ 中的子对象 $A \to X$, 定义 $\overline{A}$ 为如下的拉回,

$$\begin{tikzcd}
\overline{A} \arrow[r] \arrow[d] & f_*f^*A \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\eta_X"'] & f_*f^*X
\end{tikzcd}$$

其中 η 为伴随 $f^* \dashv f_*$ 的单位. (对比位象的满–单分解, 命题 2.2.19, 使用的内核 $j = f_*f^*$.) 首先证明一个引理,

$$A \le \overline{B} \Leftrightarrow f^*A \le f^*B. \tag{$\star$}$$

假设 $A \le \overline{B}$, 则有交换图 $\begin{tikzcd}[cramped, sep=small] A \arrow[r] \arrow[d] & f_*f^*B \arrow[d] \\ X \arrow[r] & f_*f^*X \end{tikzcd}$, 进一步由伴随 $f^* \dashv f_*$ 得交换图 $\begin{tikzcd}[cramped, sep=small] f^*A \arrow[r] \arrow[dr] & f^*B \arrow[d] \\ & f^*X \end{tikzcd}$, 即 $f^*A \le f^*B$. 反之, 若 $f^*A \le f^*B$, 下图中存在唯一的态射 $A \to \overline{B}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] & f_*f^*A \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
& \overline{B} \arrow[r] \arrow[d] & f_*f^*B \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "\eta_X"'] & f_*f^*X
\end{tikzcd}$$

从而 $(\star)$ 得证. 现在说明 $A \mapsto \overline{A}$ 满足万有闭包运算的条件.

- 自然性. 注意到 f_*f^* 保持拉回, 对 $\mathcal{D}$ 中任意态射 $\varphi\colon Y \to X$ 以及子对象 $A \to X$ 考虑下图, 其中前后左右四个面为拉回, 故 $\overline{\varphi^*A} \simeq \varphi^*\overline{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{\varphi^*A} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & f_*f^*(\varphi^*A) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{A} \arrow[rr] \arrow[dd] & & f_*f^*A \arrow[dd] \\
Y \arrow[rr, "\eta_Y"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & f_*f^*Y \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr, "\eta_X"'] & & f_*f^*X
\end{tikzcd}$$

- $A \leq \overline{A}$. 由 $(\star)$, 这等价于 $f^*A \leq f^*A$.

- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. 由 $(\star)$, $f^*\overline{A} \leq f^*A$; 同理, $f^*\overline{\overline{A}} \leq f^*\overline{A} \leq f^*A$; 再由 $(\star)$ 得 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{A}$.

- $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$. 因为 f_*f^* 保持拉回, 下图的上下左右前后六个面均为拉回.

$$\begin{tikzcd}
\overline{A} \wedge \overline{B} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & f_*f^*(A \wedge B) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{A} \arrow[rr] \arrow[dd] & & f_*f^*A \arrow[dd] \\
\overline{B} \arrow[rr] \arrow[dr] & & f_*f^*B \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr, "\eta_X"'] & & f_*f^*X
\end{tikzcd}$$

由 $(\star)$, 对于 $\mathcal{D}$ 中的稠密子对象 $A \to X$ 有 $f^*A = f^*X$, 即 f^* 将稠密单射变为同构. 考虑下图, 其中上下两边为伴随给出的自然同构.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f^*X, Y) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, f_*Y) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f^*A, Y) \arrow[r, "\simeq"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, f_*Y)
\end{tikzcd}$$

对任意稠密子对象 $A \to X$, 此图的四条边均为同构, 这说明 f_*Y 是 j-层, 从而 f_* 穿过 $\operatorname{Sh}_j \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}$. □

命题 3.8.14

对于子意象 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 存在 $\mathcal{D}$ 上的 Lawvere–Tierney 拓扑 j 使得 $f_*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 等价于 $\operatorname{Sh}_j \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}$.

群作用与张量–同态伴随

几何态射有一类重要且有推广价值的例子: 带有群作用的集合范畴之间的几何态射.

设 G 是群. 回忆在例 3.3.6 中我们定义 $G\mathsf{Set}$ 为单对象范畴 $\mathsf{B}G$ 上的预层范畴, 也即具有 G-*右*作用的集合的范畴.

如下是一个常见的构造, 它与模的张量积有相似的性质.

定义 3.8.15 (张量积)

设集合 X 具有 G-右作用, Z 具有 G-左作用. 定义 X 与 Z 在 G 上的张量积 $X \otimes_G Z$ 如下:

$$X \otimes_G Z := X \times Z \Big/ \begin{matrix} \big((x \cdot g, z) \sim (x, g \cdot z)\big) \\ (x \in X, g \in G, z \in Z) \end{matrix}.$$

以范畴语言, $X \otimes_G Z$ 可表示为如下余等化子:

$$X \times G \times Z \rightrightarrows X \times Z \dashrightarrow X \otimes_G Z, \tag{3.5}$$

其中左边两个映射分别是 G 右作用于 X 和左作用于 Z.

以范畴语言叙述的目的是表明上述定义可以一字不改地应用于任何意象.

在上述定义中若 X, Z 没有其它结构, 那么 $X \otimes_G Z$ 只是一个集合; 若 Z 还有另一个群 H 的右作用, 且与 G-左作用交换 (类似于两个环上的双模), 那么 $X \otimes_G Z$ 继承这个 H-右作用: 将 $(-) \times H$ 作用于图 (3.5), 使用 $(-) \times H$ 保持余极限的性质. 我们可将这个事实表述如下.

命题-定义 3.8.16 (张量积)

设 $X\colon \mathsf{B}G^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathsf{B}G \times \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 则可定义 $X \otimes_G Z\colon \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 具体地, H 在其上的右作用为 $(x, z) \cdot h := (x, z \cdot h)$. 这定义了函子

$$- \otimes_G Z\colon G\mathsf{Set} \to H\mathsf{Set}.$$

与张量积密切相关的是同态集.

定义 3.8.17 (同态集)

设 Z, Y 均有 H-右作用. 定义同态集 $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_H(Z, Y) := \mathrm{Hom}_{H\mathsf{Set}}(Z, Y) = \left\{ f\colon Z \to Y \;\middle|\; \begin{matrix} f(z \cdot h) = f(z) \cdot h \\ (z \in Z, h \in H) \end{matrix} \right\}.$$

以范畴语言, $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 可表示为如下等化子:

$$\mathrm{Hom}_H(Z, Y) \dashrightarrow Y^Z \rightrightarrows Y^{Z \times H}, \tag{3.6}$$

其中右边两个映射分别对应 $Y^Z \times Z \times H$ 到 Y 的两个映射: 一个是 H 右作用于 Z 再使用取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^Z \times Z \to Y$ (定义 1.1.6); 另一个是先取值, H 再右作用于 Y.

在上述定义中若 Z,Y 没有其它结构, 那么 $\mathrm{Hom}_H(Z,Y)$ 只是一个集合; 若 Z 还有另一个群 G 的左作用, 且与 H-右作用交换, 那么 $\mathrm{Hom}_H(Z,Y)$ 将获得一个 G-右作用: 将 $(-)\times G$ 作用于图 3.6, 使用 $(-)\times G$ 保持等化子的性质 ("极限与极限交换"). 我们可将这个事实表述如下.

命题-定义 3.8.18 (同态 "集")

设 $Z\colon \mathsf{B}H^{\mathrm{op}}\times\mathsf{B}G\to\mathsf{Set}$, $Y\colon\mathsf{B}H^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, 则可定义 $\mathrm{Hom}_H(Z,Y)\colon\mathsf{B}G^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$. 具体地, G 在其上的右作用为 $(f\cdot g)(z):=f(g\cdot z)$. 这定义了函子

$$\mathrm{Hom}_H(Z,-)\colon H\mathsf{Set}\to G\mathsf{Set}.$$

不出意外地, 上面定义的两个函子是一对伴随.

命题 3.8.19 (张量–同态伴随)

设 X 上有 G-右作用, Y 上有 H-右作用, Z 上有互相交换的 G-左作用与 H-右作用, 那么有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{H\mathsf{Set}}(X\otimes_G Z,Y)\simeq\mathrm{Hom}_{G\mathsf{Set}}(X,\mathrm{Hom}_H(Z,Y)),$$

也即有伴随

$$\begin{tikzcd} G\mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "(-)\otimes_G Z"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & H\mathsf{Set}. \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_H(Z,-)"] \end{tikzcd}$$

设 $\phi\colon G\to H$ 是群同态, 这个同态给 H 赋予了两个方向的 G-作用. 我们记 ${}_\phi H$ 为 H 带有 G-左作用与 H-右作用, 记 H_ϕ 为 H 带有 H-左作用与 G-右作用.

命题 3.8.20

群同态 $\phi\colon G\to H$ 诱导了三元伴随

$$\begin{tikzcd} G\mathsf{Set} \arrow[r, bend left, "\phi_!"] \arrow[r, bend right, "\phi_*"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] & H\mathsf{Set}, \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_! &= (-)\otimes_G {}_\phi H, \\ \phi^* &= \mathrm{Hom}_H({}_\phi H,-) \simeq (-)\otimes_H H_\phi, \\ \phi_* &= \mathrm{Hom}_G(H_\phi,-). \end{aligned}$$

由此, ϕ^* 作为 $\phi_!$ 的右伴随保持极限, 从而伴随 $\phi^*\dashv\phi_*$ 满足几何态射的条件.

命题 3.8.21

群同态 $\phi\colon G \to H$ 诱导了 GSet 到 HSet 的几何态射 (ϕ^*, ϕ_*).

例 3.8.22

群同态 $1 \to H$ 诱导的三元伴随为

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, bend left=40, "(-)\times H"] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\perp"] \arrow[r, bend right=40, "(-)^H"'] & H\mathsf{Set}. \arrow[l, "\text{遗忘}"'] \end{tikzcd}$$

其中 X^H 表示 H 的阶数个 X 相乘, 带有明显的 H-右作用.

例 3.8.23

群同态 $G \to 1$ 诱导的三元伴随为

$$\begin{tikzcd} G\mathsf{Set} \arrow[r, bend left=40, "\text{余不动点}"] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\perp"] \arrow[r, bend right=40, "\text{不动点}"'] & \mathsf{Set}, \arrow[l, "\text{平凡}"'] \end{tikzcd}$$

其中 “余不动点” (coinvariant) 将 G-集合对应到其 G-作用的轨道的集合.

范畴是群的推广; 对于范畴 $\mathcal{C}$, 函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为 “带有 $\mathcal{C}$-右作用的一族集合”, 而函子 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 则是 “带有 $\mathcal{C}$-左作用的一族集合”. 对于函子 $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 记

- ${}_\phi\mathcal{D}$ 为函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, \phi-)\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ (“$\mathcal{D}$ 带有 $\mathcal{C}$-左作用与 $\mathcal{D}$-右作用”);
- $\mathcal{D}_\phi$ 为函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi-, -)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ (“$\mathcal{D}$ 带有 $\mathcal{D}$-左作用与 $\mathcal{C}$-右作用”).

我们断言命题 3.8.20 可一字不动地推广为如下结论.

命题 3.8.24

函子 $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导了三元伴随

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left=40, "\phi_!"] \arrow[r, phantom, shift left=1.5ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=1.5ex, "\perp"] \arrow[r, bend right=40, "\phi_*"'] & \widehat{\mathcal{D}}, \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

其中

$$\begin{aligned}
\phi_! &= (-)\otimes_{\mathcal{C}}{}_{\phi}\mathcal{D}, \\
\phi^* &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}_{\phi}\mathcal{D},-) \quad \simeq (-)\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{\phi}, \\
\phi_* &\qquad\qquad\qquad\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_{\phi},-).
\end{aligned}$$

当然, 需要给出此处推广的 “张量积” 与 “Hom” 的定义. 它们几乎照搬群作用的张量积的定义 (3.8.15, 3.8.16) 与 Hom 的定义 (3.8.17, 3.8.18).

定义 3.8.25 (张量积)

设 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathcal{C}\to\mathsf{Set}$. 定义 X 与 Z 在 $\mathcal{C}$ 上的张量积如下:

$$X\otimes_{\mathcal{C}} Z := \coprod_{c\in\mathcal{C}} X(c)\times Z(c)\Bigg/ \begin{matrix}\big((x\cdot g,z)\sim(x,g\cdot z)\big)\\ (x\in X(c), g\colon c'\to c, z\in Z(c'))\end{matrix}$$

一般地, 设 $X\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, $Z\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathsf{Set}$. 定义 $X\otimes_{\mathcal{C}} Z\colon\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ 如下:

$$(X\otimes_{\mathcal{C}} Z)(d) := X\otimes_{\mathcal{C}}(Z(d,-)),$$

态射 $h\colon d'\to d$ 的作用为 $(x,z)\cdot h := (x, z\cdot h)$. 这定义了函子

$$-\otimes_{\mathcal{C}} Z\colon \widehat{\mathcal{C}}\to\widehat{\mathcal{D}}.$$

定义 3.8.26 (同态 “集”)

设 $Z\colon\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, $Y\colon\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, 定义 Z 到 Y 的同态集如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,Y) &:= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(Z,Y) \\
&= \left\{ (f(d)\colon Z(d)\to Y(d)) \,\middle|\, \begin{matrix} f(z\cdot g) = f(z)\cdot g \\ (z\in Z(d), g\colon d'\to d)\end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

(当然, 这就是 Z 到 Y 的预层同态的集合.)

一般地, 设 $Z\colon\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathsf{Set}$, $Y\colon\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,Y)\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,Y)(c) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z(-,c),Y),$$

态射 $h\colon c'\to c$ 的作用为 $(f\cdot h)(z) := f(h\cdot z)$. 这定义了函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,-)\colon\widehat{\mathcal{D}}\to\widehat{\mathcal{C}}.$$

若将 Z 视为函子 $\mathcal{C}\to\mathsf{Fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathsf{Set}) = \widehat{\mathcal{D}}$, 则上述概念是 “脉” 函子 (命题 A.4.11) 的特例.

命题 3.8.27 (张量–同态伴随)

设 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Y\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 那么有伴随

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{D}} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widehat{\mathcal{C}}, \arrow[l, shift right, "-\otimes_{\mathcal{C}} Z"'] \end{tikzcd}$$

也即自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(X\otimes_{\mathcal{C}} Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z,Y)).$$

当然, 上述命题中的 Set 也可改为一般的意象.

[未完成: 几何态射 **SGL VII.2**]

左正合与平坦函子

[未完成: 解释为什么要定义存在有限极限的景的态射]

定义 3.8.28 (存在有限极限的景的态射)

设 $(\mathcal{C},J),(\mathcal{D},K)$ 是景, 且范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 存在有限极限. 定义景的态射 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为满足如下条件的函子:

- F 保持有限极限 (“左正合”);
- F 保持覆盖, 也即对 $\mathcal{C}$ 中任意对象 c 的 J-覆盖 R, $\{F(f)\mid f\in R\}$ 生成了 $F(c)$ 上的一个 K-覆盖筛.

例 3.8.29

位格视为范畴存在有限极限. 位格的态射即是其作为景 (例 3.4.20) 的态射, 因为此时保持有限极限即是保持有限交, 保持覆盖即是保持任意并.

在没有有限极限的范畴上, 我们也可以模拟 “保持有限极限” 这一现象.

命题-定义 3.8.30 (Set-值平坦函子)

设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴, 对函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathsf{Set}$, 以下条件等价.

(1) F 的元素的范畴 $\displaystyle\int^{\mathcal{C}} F$ (定义 A.4.5) 为余滤范畴 (定义 A.5.4).

(2) F 是可表函子 (即形如 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,-)$ 的函子) 的滤余极限.

(3) F 的米田扩张 $L = -\otimes_{\mathcal{C}} F\colon \widehat{\mathcal{C}}\to\mathsf{Set}$ (命题 A.4.11) 保持有限极限.

称满足上述条件的函子为 Set-值平坦函子 (Set-valued flat functor). F 的米田扩张也可视为与 F 作张量积 (定义 3.8.25, 注 A.4.13), 这解释了“平坦”这个名称 (在代数中, 称一个模 M 平坦是指张量积 $-\otimes M$ 左正合). 记 $\mathcal{C}$ 上的 Set-值平坦函子构成的 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathsf{Set})$ 的全子范畴为 $\mathsf{Flat}(\mathcal{C},\mathsf{Set})$.

证明.

- (1) ⇒ (2). 由命题 A.4.7 的对偶版本即得. 具体地,

$$F=\operatorname{colim}\Big(\Big(\int^{\mathcal{C}}F\Big)^{\mathrm{op}}\xrightarrow{\pi^{\mathrm{op}}}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\xrightarrow{よ^*}\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathsf{Set})\Big),$$

  其中 $よ^*$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的米田嵌入. 由 $\int^{\mathcal{C}}F$ 为余滤范畴, 知 $\Big(\int^{\mathcal{C}}F\Big)^{\mathrm{op}}$ 为滤范畴.

- (2) ⇒ (3). 设 F 为滤余极限 $\operatorname{colim}_j\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c_j,-)$, 其中指标范畴 J 为滤范畴. 那么 F 的米田扩张为 $L\colon\widehat{\mathcal{C}}\to\mathsf{Set}$ 为

$$\begin{aligned}L(X)&\simeq\operatorname{colim}_{よ(c)\to X}F(c)\\&\simeq\operatorname{colim}_{よ(c)\to X}\operatorname{colim}_j\operatorname{Hom}(c_j,c)\\&\simeq\operatorname{colim}_j\operatorname{colim}_{よ(c)\to X}\operatorname{Hom}(c_j,c)\\&\simeq\operatorname{colim}_j X(c_j),\end{aligned}$$

  由命题 A.5.5 (取 $\lambda=\aleph_0$), J-余极限与有限极限交换, 故 L 保持有限极限.

- (3) ⇒ (1). 首先我们陈述一个简单的事实: 一个小范畴 I 是余滤范畴当且仅当

$$\varnothing\qquad\qquad\bullet\quad\bullet\qquad\qquad\bullet\rightrightarrows\bullet$$

  三种形状的图都有锥. 其中空图有锥的意思是 I 非空. 我们分别证明 $\int^{\mathcal{C}}F$ 上存在这三种锥.

  - 空图 $\varnothing$. 因为 L 保持终对象, $L(1)=1$, 固然 F 非空, 那么 $\int^{\mathcal{C}}F$ 非空.
  - 图 $\bullet\quad\bullet$. 因为 L 保持乘积, 典范的映射

$$L(よ(c)\times よ(d))\simeq\operatorname{colim}_{よ(e)\to よ(c)\times よ(d)}F(e)\longrightarrow F(c)\times F(d)$$

    为同构, 故 $\int^{\mathcal{C}}F$ 中两个对象 $(c,x),(d,y)$ 上总有锥.
  - 图 $\bullet\rightrightarrows\bullet$. 因为 L 保持等化子, 对任意态射 $f,g\colon c\rightrightarrows d$, 令

$$P=\operatorname{eq}\big(よ(f),よ(g)\colon よ(c)\rightrightarrows よ(d)\big),\quad P(e)=\{h\colon e\to c\mid fh=gh\},$$

则有等化子

$$L(P) \simeq \operatorname{colim}_{よ(e)\to P} F(e) \longrightarrow F(c) \overset{F(f)}{\underset{F(g)}{\rightrightarrows}} F(d),$$

故 $\int^{\mathcal{C}} F$ 中的图 $(c,x) \rightrightarrows (d,y)$ 上总有锥.

$\square$

命题 3.8.31

设范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限极限. 那么函子 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 平坦当且仅当保持有限极限.

例 3.8.32

集合范畴 Set 可表示为有限集范畴 Fin 上的 Set-值平坦函子的范畴:

$$\mathsf{Set} \simeq \mathsf{Flat}(\mathsf{Fin}, \mathsf{Set}), \quad S \mapsto \mathrm{Hom}(-, S).$$

这反映了任意集合都可表示为有限集的滤余极限. 以 “探测” 的观点 (注 3.3.2), 一个集合可由有限集到它的所有映射探测.

意象的点

位象 X 的点是终位象 1 到 X 的映射 (定义 2.1.10); 类似地可定义意象的点.

定义 3.8.33 (意象的点)

意象 $\mathcal{C}$ 的一个点是 Set (即 $\mathrm{Sh(pt)}$) 到 $\mathcal{C}$ 的一个几何态射 $p\colon \mathrm{Sh(pt)} \to \mathcal{C}$. 该几何态射的逆像部分 p^* 称为茎.

例 3.8.34

拓扑空间 X 的一个点 x 给出意象 $\mathrm{Sh}(X)$ 的一个点 (例 3.1.25).

命题 3.8.35

设 X 是位象, 则层意象 $\mathrm{Sh}(X)$ 的点等同于 X 的点.

例 3.8.36 (预层意象的点)

预层意象 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的点即伴随

$$\mathsf{Set} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \widehat{\mathcal{C}},$$

其中 L 保持有限极限. 由命题 3.8.30, $\widehat{\mathcal{C}}$ 的点等同于 Set-值平坦函子 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}$.

例 3.8.37 (预层意象的本质点)

范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 c 可视为终范畴 1 到 $\mathcal{C}$ 的函子; 由命题 3.8.24, 这给出了三元伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, bend left, "c_!"] \arrow[r, phantom, shift left=1.5, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=1.5, "\perp"] \arrow[r, bend right, "c_*"'] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[l, "c^*"'] \end{tikzcd},$$

由例 A.6.5 写出的具体公式得

- $c_!(S)(c') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', c) \times S$, 即 $c_!(S) = よ(c) \times S$;
- $c^*(X) = X(c) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c), X)$;
- $c_*(S)(c') = S^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')}$.

它不仅是预层意象 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的一个点, 而且是一个本质点 (定义 3.9.7). 它对应 Set-值平坦函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, -)$.

例 3.8.38 ("无穷远点")

设 N 为自然数的范畴 $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$. 意象 $\mathsf{Set}^{\mathsf{N}}$ 除了有每个自然数对应的一个点 (例 3.8.37) 之外, 还有一个 "无穷远点":

$$\mathsf{Set} \underset{\text{常值}}{\overset{\mathrm{colim}}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{Set}^{\mathsf{N}},$$

其直像部分将集合 S 对应到常值函子 $\underline{S}$, 逆像部分将函子 $F\colon \mathsf{N} \to \mathsf{Set}$ 对应到余极限 $\mathrm{colim}\, F$.

现在讨论层意象的点.

命题 3.8.39 (层意象的点)

设 J 为 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑, $f\colon \mathsf{Set} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 为意象 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的点. 如下条件等价,

(1) [未完成: **SGL p382**] f 穿过嵌入 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$;

(2) f 的逆像部分 $f^*\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathsf{Set}$ 将任意 J-覆盖筛 $S \hookrightarrow よ(c)$ 变为同构.

证明. [未完成: **前置 SGL VII.4.2**] □

定义 3.8.40 (景到集合范畴的连续函子)

设 $(\mathcal{C}, J)$ 为景, 对于函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, 若 F 将 J-覆盖筛 (视为 $\mathcal{C}$ 中的余锥) 变为 Set 中的余极限余锥, 则称之为景 $(\mathcal{C}, J)$ 到 Set 的连续函子.

定义 3.8.41 (有足够多点的意象)

若意象 $\mathcal{C}$ 中的同构可由茎探测, 则称其具有*足够多的点* (enough points). 所谓同构可由茎探测, 是指一个态射 $f\colon X \to Y$ 为同构当且仅当对 $\mathcal{C}$ 的任意点 $p\colon \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) \to \mathcal{C}$, 都有 $p^*f\colon p^*X \to p^*Y$ 为同构.

景的态射

[未完成: **covering-flatness**]

定义 3.8.42 (覆盖平坦函子)

定义 3.8.43 (景的态射)

命题 3.8.44

设 $F\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, K)$ 是定义 3.8.43 中的景的态射, 那么其诱导的函子 $F^*\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 限制为函子 $\mathrm{Sh}(\mathcal{D}, K) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$.

3.9 意象的几何性质

意象及其态射的一些性质得名于拓扑空间及其态射的性质.

平展性

定义 3.9.1 (平展态射)

定义意象之间的平展几何态射 (étale geometric morphism) 为等价于俯意象 $\mathcal{C}/X \to \mathcal{C}$ 的几何态射 (见注 3.1.14).

连通性

[未完成：顺序？(放在本质几何态射后面)]

命题 3.9.2 (连通位象的等价定义)

对于位象 X, 如下条件等价:

(1) X 连通 (定义 2.2.30);

(2) $1 \in \mathrm{Sh}(X)$ 不能写成非平凡的无交并;

(3) 常值层函子 $L = X^*\colon \mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$ 全忠实;

(4) 整体截面函子 $\Gamma = X_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{Set}$ 保持余积.

证明. 回忆 $\Gamma = X_* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(1, -)$ (命题 3.8.3).

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) 是平凡的, 因为 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象一一对应于 X 的开子集;
- (2) $\Rightarrow$ (4). $\Gamma\big(\coprod_{i\in I} A_i\big) = \mathrm{Hom}\left(1, \coprod_{i\in I} A_i\right) \simeq \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}(1, A_i)$;
- (4) $\Rightarrow$ (3). 由于 Γ 保持余积, $\Gamma L\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 也保持余积, 这说明 $\Gamma L = \mathrm{id}_{\mathsf{Set}}$.
- (3) $\Rightarrow$ (2). 假设在 $\mathrm{Sh}(X)$ 中有 $1 \simeq \coprod_{i\in I} U_i$, 且 $L = X^*$ 全忠实. 考虑所有态射 $U_i \to 1$ 之和
$$f\colon 1 \simeq \coprod_{i\in I} U_i \to \coprod_{i\in I} 1 \simeq X^* I.$$
因为 X^* 全忠实, 存在 $i_0\colon 1 \to I$ 使得 $f = X^*(i_0)$, 这说明 $U_{i_0} \simeq 1$.

□

由此, 我们作出如下定义.

定义 3.9.3 (意象的连通性)

一个 Grothendieck 意象 $\mathcal{C}$ 称为连通的, 是指其到 $\mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt})$ 的几何态射 (定义 3.8.3) 的逆像部分为全忠实函子.

命题 3.9.4 (局部连通位象的等价定义)

对于位象 X, 如下条件等价:

(1) X 局部连通 (定义 2.2.31);

(2) 几何态射 $\mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{Set}$ 本质 (定义 3.9.7), 也即 $X^* \colon \mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$ 有左伴随 $X_!$;

(3) $X^* \colon \mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$ 保持指数对象.

证明.

- $(1) \Rightarrow (2)$. 定义 $X_! \colon \mathsf{Et}(X) \to \mathsf{Set}$ 将平展空间 $E \to X$ 对应到 E 的连通分支的集合.
-

□

开几何态射

定义 3.9.5 (开几何态射)

称几何态射 $f \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为开几何态射, 是指 f^* 为 Heyting 函子 (定义 B.2.8); 由于 f^* 总是凝聚函子 (定义 B.2.7), 开几何态射的条件也等价于 f^* 保持所有全称量词 $\forall_g$.

命题 3.9.6 (与位象开映射的关系)

对于位象态射 $f \colon X \to Y$, f 为开映射 (定义 2.2.21) 当且仅当 $f \colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ 为开几何态射.

证明. [未完成:] □

本质几何态射与局部连通意象

定义 3.9.7 (本质几何态射)

对于 Grothendieck 意象的几何态射 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 若 f^* 有左伴随 $f_!$ (也即有三元伴随 $f_! \dashv f^* \dashv f_*$), 则称之为*本质几何态射* (essential geometric morphism).

例 3.9.8 (俯范畴之间的几何态射)

对于意象 $\mathcal{C}$, 其中的态射 $f\colon X \to Y$ 诱导的几何态射 $f\colon \mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/Y$ 是本质几何态射 (命题 1.1.40).

例 3.9.9 (G-集范畴之间的几何态射)

群同态 $\phi\colon G \to H$ 诱导的几何态射 $\phi\colon G\mathsf{Set} \to H\mathsf{Set}$ 是本质的 (命题 3.8.20).

定义 3.9.10 (局部连通意象)

对于 Grothendieck 意象 $\mathcal{C}$, 若整体截面几何态射 $\mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 是本质的, 则称之为*局部连通意象*.

对于局部连通意象 $f\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, $f_!$ 的直观是 "连通分支的集合" Π_0 (见 8.1 节).

3.10 Giraud 定理

Giraud[12] 找到了 Grothendieck 意象在全体范畴之中的刻画, 也即 Grothendieck 意象的一种公理化定义.

定义 3.10.1 (Giraud 公理)

称范畴 $\mathcal{C}$ 满足 *Giraud 公理*, 是指

- $\mathcal{C}$ 为可表现范畴 (定义 A.5.14);
- $\mathcal{C}$ 具有万有余极限 (见注 1.1.41);
- $\mathcal{C}$ 中的和无交 (见命题 1.3.58);
- $\mathcal{C}$ 中的满射均为有效满射 (见命题 1.3.17).

[12] Jean Giraud (1936–2007), 法国数学家, Grothendieck 的学生.

命题 3.10.2

范畴 $\mathcal{C}$ 为 Grothendieck 意象当且仅当它满足 Giraud 公理.

证明. 命题 A.5.23 证明了 Grothendieck 意象是可表现范畴. 结合第一章中对于意象的范畴论性质的讨论, 我们得到 Grothendieck 意象满足 Giraud 公理.

另一方面, 假设范畴 $\mathcal{C}$ 满足 Giraud 公理, 下面分三步来证明 $\mathcal{C}$ 是 Grothendieck 意象.

第一步, 景的构造 由可表现范畴的理论 (命题 A.5.22) 我们知道 $\mathcal{C}$ 是一个预层范畴 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的自反局部化

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, hook, "y"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widehat{\mathcal{D}}, \arrow[l, shift right, "L"'] \end{tikzcd}$$

其中 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是一族 λ-可表现对象构成的全子范畴, λ 为正则基数,

$$y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{D}}, \quad c \mapsto \mathrm{Hom}(-,c)\big|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}},$$

$$L\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}, \quad X \mapsto \operatorname{colim}_{よ(d)\to X, d\in\mathcal{D}} d.$$

考虑 $\mathcal{D}$ 上的 Grothendieck 拓扑 J,

$$J(d) = \Big\{\{f_i\colon d_i \to d\} \;\Big|\; \coprod_i d_i \to d \text{ 为满射}\Big\},$$

我们验证 J 确实是 Grothendieck 拓扑.

- (极大筛) 对象 d 上的极大筛的确属于 $J(d)$, 因为 $\mathrm{id}\colon d \to d$ 为满射;
- (拉回稳定性) 对于 $\{f_i\colon d_i \to d\} \in J(d)$ 与任意态射 $g\colon e \to d$, 由 Giraud 公理中的 "万有余极限" 条款, 拉回保持余积和满射, 故 $\coprod_i e \times_d d_i \to e$ 为满射.
- (传递性) 设 $\{f_i\colon d_i \to d\} \in J(d)$, $R = \{g_j\colon e_j \to d\}$ 是 d 上的另一个筛, 满足对任意 i, $f_i^* R \in J(d_i)$, 即 $\coprod_j e_j \times_d d_i \to d_i$ 为满射. 那么下图中的复合为满射, 故 $R \in J(d)$.

$$\begin{tikzcd} \coprod_i \coprod_j e_j \times_d d_i \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \coprod_i d_i \arrow[d, two heads] \\ \coprod_j e_j \arrow[r, two heads] & d \end{tikzcd}$$

第二步, 层条件的验证 现在验证 $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{D}}$ 的像落在 $\mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J)$ 中, 即对于 $c \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(-,c)|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的 J-层. 对任意覆盖 $\{f_i\colon d_i \to d\} \in J(d)$, 由 Giraud 公理, $\coprod_i d_i \to d$ 为有效满射, 即下图为余等化子.

$$\Big(\coprod_i d_i\Big) \times_d \Big(\coprod_i d_i\Big) \rightrightarrows \coprod_i d_i \to d$$

又由拉回保持余积,

$$\big(\coprod_i d_i\big) \times_d \big(\coprod_i d_i\big) \simeq \coprod_i \big(d_i \times_d \big(\coprod_j d_j\big)\big) \simeq \coprod_i \coprod_j (d_i \times_d d_j),$$

故下图为余等化子.

$$\coprod_i \coprod_j (d_i \times_d d_j) \rightrightarrows \coprod_i d_i \to d$$

这就是说, 给定一族态射 $x_i \colon d_i \to c$ 使得 x_i, x_j 在 $d_i \times_d d_j$ 上相容, 则存在唯一的 $x \colon d \to c$ 使得 $x_i = x f_i$. 因此 $\mathrm{Hom}(-,c)|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的 J-层. (特别地, 这说明 J 是次典范 Grothendieck 拓扑, 见定义 3.4.25.)

第三步, 范畴等价的证明 上面证明了 y 穿过 $i \colon \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J) \to \widehat{\mathcal{D}}$; 那么由自反子范畴之间的包含关系的性质 (命题 A.3.5), 存在如下的伴随 $\widetilde{L} \dashv \widetilde{y}$, 其中 $\widetilde{L} = L|_{\mathrm{Sh}(\mathcal{D},J)}, \widetilde{y} = ay, y \simeq i\widetilde{y}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J) \arrow[dl, shift right, "\widetilde{L}"'] \arrow[dr, hook, shift right, "i"'] & \\
\mathcal{C} \arrow[ur, hook, shift right, "\widetilde{y}"'] \arrow[ur, phantom, "\perp"] \arrow[rr, hook, shift right, "y"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \widehat{\mathcal{D}} \arrow[ul, shift right, "a"'] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \arrow[ll, shift right, "L"']
\end{tikzcd}$$

注意到自反子范畴中的余极限是大范畴中余极限的反映 (命题 A.3.6), $\widetilde{y}$ 是两个余完备的自反子范畴之间的含入, 故 $\widetilde{y}$ 保持余极限. 又注意到对于 $d \in \mathcal{D}$, 有 $L(よ(d)) \simeq d$ (在命题 A.4.9 中取 F 为嵌入函子). 因此 $\widetilde{y}\widetilde{L}(よ(d)) \simeq よ(d)$. 而 $\widetilde{y}\widetilde{L}$ 保持余极限, $\mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J)$ 的对象可写为可表函子 $よ(d)$ 的余极限, 故 $\widetilde{y}\widetilde{L} \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{D},J)}$. 这证明了 $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J)$. □

Giraud 定理可以在一些不容易构造景的情形证明一个范畴是 Grothendieck 意象, 例如下面介绍的等变层范畴.

3.11 等变层与拓扑群胚

定义 3.11.1 (等变层)

设 X 为拓扑空间, 带有拓扑群 G 的左作用 $\mu \colon G \times X \to X$. 定义 X 上的 G-空间为 X 上带有 G-左作用的空间 $p \colon E \to X$, 且 p 保持 G-左作用; G-空间之间的态射为保持 G-左作用的态射. 定义 X 上的 G-*等变层* (G-equivariant sheaf) 为平展的 G-空间 $p \colon E \to X$, 即 p 为局部同胚. 记 X 上的 G-等变层在 G-空间范畴中构成的全子范畴为 $\mathrm{Sh}_G(X)$.

命题 3.11.2

对任意带有拓扑群 G 左作用的空间 X, $\mathrm{Sh}_G(X)$ 是意象.

证明.

- $\mathrm{Sh}_G(X)$ 由所有形如 $\bigcup_{g\in G} gU$ ($U \in \mathrm{Open}(X)$) 的对象生成.
- $\mathrm{Sh}_G(X)$ 中存在有限极限和任意余极限, 且等同于 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的有限极限和余极限. 这说明 $\mathrm{Sh}_G(X)$ 与 $\mathrm{Sh}(X)$ 同样满足 Giraud 定理的后三个条件.

由以上的事实及 Giraud 定理, $\mathrm{Sh}_G(X)$ 为 Grothendieck 意象. □

等变层是*拓扑群胚上的层*的特例.

定义 3.11.3 (拓扑群胚)

*拓扑群胚*是群胚理论在 Top 中的模型. 具体地, 一个拓扑群胚包含如下资料,

- 两个拓扑空间 G_1, G_0, 分别表示态射的空间与对象的空间;
- 连续映射 $s, t\colon G_1 \rightrightarrows G_0$, 分别表示态射的起点与终点;
- $m\colon G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$ (其中 $G_1 \times_{G_0} G_1$ 是 s 与 t 的拉回), 表示态射的复合;
- $i\colon G_1 \to G_1$, 表示态射的逆;
- $e\colon G_0 \to G_1$, 表示恒等态射;

满足 $tm = t\pi_1$, $sm = s\pi_2$, $si = t, ti = s$, $se = te = \mathrm{id}_{G_0}$, 以及结合律, 单位律.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "{(e,\mathrm{id})}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[d, "m"] & G_1 \arrow[l, "{(\mathrm{id},e)}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & G_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[d, "m"] \\ G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "m"'] & G_1 \times_{G_0} G_1 \end{tikzcd}$$

记该拓扑群胚为 $G_1 \rightrightarrows G_0$.

例 3.11.4 (常见的拓扑群胚)

- 当 G_0 为一个点时, 拓扑群胚 $G_1 \rightrightarrows G_0$ 退化为拓扑群 G_1.
- 一个拓扑空间 X 可视为平凡的拓扑群胚 $\mathrm{id}, \mathrm{id}\colon X \to X$.
- 由拓扑空间 X 还可构造另一个拓扑群胚 $\pi_1, \pi_2\colon X \times X \rightrightarrows X$.
- 对于拓扑群 G 的主丛 $p\colon P \to X$, 有 *Atiyah 群胚* $p\pi_1, p\pi_2\colon (P \times P)/G \rightrightarrows X$. 它可理解为 X 各个点上的纤维以及纤维之间 (作为 G-右作用) 的同构构成的

群胚.

- 设空间 X 带有拓扑群 G 的左作用 $\mu\colon G\times X\to X$, 则 $(\pi_2,\mu\colon G\times X\rightrightarrows X)$ 为拓扑群胚, 称为*作用群胚* (action groupoid).

定义 3.11.5 (拓扑群胚上的层)

设 $\mathcal{G}=(G_1\rightrightarrows G_0)$ 为拓扑群胚. 对于 G_0 上的空间 $p\colon E\to G_0$, 定义其上的 *$\mathcal{G}$-左作用*为连续映射 $\rho\colon G_1\times_{G_0}E\to E$ (其中 $G_1\times_{G_0}E$ 为 s 与 p 的拉回), 满足 $p\rho=t\pi_1$, 以及如下交换图.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{(e,\mathrm{id})}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G_1\times_{G_0}E \arrow[d, "\rho"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1\times_{G_0}G_1\times_{G_0}E \arrow[r, "\mathrm{id}_{G_1}\times\rho"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}_E"'] & G_1\times_{G_0}E \arrow[d, "\rho"] \\ G_1\times_{G_0}E \arrow[r, "\rho"'] & E \end{tikzcd}$$

定义 $\mathcal{G}$ 上的层为 G_0 上带有 $\mathcal{G}$-左作用的平展空间. $\mathcal{G}$ 上的层以及保持 $\mathcal{G}$-左作用的态射构成范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{G})$. 这个范畴是一个意象, 也称为 $\mathcal{G}$ 的*分类意象* (classifying topos).

例 3.11.6 (常见拓扑群胚上的层)

- G_0 为一点的情形, $\mathcal{G}$ 上的层即为带有 G_1-左作用的离散空间.
- 拓扑空间 X 作为平凡的拓扑群胚, 其上的层即为 X 上通常的层.
- 对于非空空间 X, 拓扑群胚 $X\times X\rightrightarrows X$ 上的层范畴等价于 Set, 即一点上的层范畴.
- 对于拓扑群 G 在空间 X 上作用的作用群胚, 其上的层即为等变层 (定义 3.11.1).

例 3.11.6 表明拓扑群胚上的层意象是许多概念的共同推广. 而下面的命题说明了拓扑群胚究竟推广到何种地步.

命题 3.11.7

任何一个有足够多点的意象都等价于某个拓扑群胚上的层意象.

证明见 [7].

第 4 章　意象的内语言

A mathematical statement is just a story you tell about some devices. Some of those stories are clever, some are stupid; some of those stories are true, some others are false. Doing mathematics is telling clever stories which are true.[1]

Francis Borceux, [6]

---

[1] 一句数学陈述不过是你对某些东西讲的一个故事. 这些故事或妙, 或蠢, 或真, 或假. 做数学就是要讲出又妙又真的故事.

我们曾提到意象中有一种*内语言* (internal language) 可用来进行推理, 本章介绍这种语言, 以及它在各个数学分支中的应用.

注 4.0.1

建议读者在阅读本章之前先阅读附录 B.

4.1 Mitchell–Bénabou 语言

本节描述一种重要的语言, 称作 *Mitchell–Bénabou 语言*; 它是由给定的意象 $\mathcal{C}$ 定义出的一种一阶或高阶语言, 其特点是利用子对象分类器 Ω, 将*公式*一视同仁地解释为 Ω 类型的*项*. 使用这种语言, 可将意象中的对象在语法上当作集合一样处理.

定义 4.1.1 (类型)

Mitchell–Bénabou 语言中的*类型*是 $\mathcal{C}$ 的对象.

定义 4.1.2 (函数符号, 关系符号)

Mitchell–Bénabou 语言中的*函数符号* $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射

$$f\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B.$$

特别地, 类型 X 的*常量* (零元函数) 是态射 $1 \to X$, 也即对象 X 的*整体元素*.
Mitchell–Bénabou 语言中的*关系符号* $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射

$$R\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to \Omega,$$

也即 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 的子对象, 其直观为 "满足关系 R 的元素构成的子集". 特别地, 原子命题 (零元关系) 是态射 $1 \to \Omega$, 也即*真值*.

以上两个定义给出了一个符号表 Σ, 自然, $\mathcal{C}$ 中具有典范的 Σ-结构. 由定义 B.2.3, B.3.6, 可以归纳地得到所有项和公式的解释 (interpretation). 注意在附录 B 中公式被解释为子对象, 而在意象中它等同于类型 Ω 的项.

例 4.1.3 (变量, 一般元素)

设 x 是类型 X 的一个变量. 由定义 B.2.3, 其解释为 $\mathrm{id}\colon X \to X$.
变量 x 可视为类型 X 的*一般元素* (generic element). 其中 “元素” 是指广义元素, 即指向 X 的态射; “一般” 是指如下的泛性质: 假若我们证明了含变量 x 的公式 $\phi(x)$, 那么对 X 的任意具体的项 (广义元素) $x_0\colon U \to X$, 都有 $\phi(x_0)$ 成立. 这是由于 id_X 是所有指向 X 的态射中的终对象.

例 4.1.4 (函数的取值)

使用取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$ (定义 1.1.6), 可将 Y^X 类型的项 (内语言中的 “函数”) $\theta\colon V \to Y^X$ 作用于 X 类型的项 $\sigma\colon U \to X$, 得到 Y 类型的项

$$\theta(\sigma)\colon\ V \times U \xrightarrow{(\theta,\sigma)} Y^X \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y.$$

例 4.1.5 (成员关系)

考虑成员关系 (例 1.1.23) $\in_X\colon \Omega^X \times X \to \Omega$, 可对 $PX = \Omega^X$ 类型的项 (内语言中的 “子集”) $\eta\colon V \to \Omega^X$ 与 X 类型的项 $\sigma\colon U \to X$ 定义 Ω 类型的项

$$(\sigma \in \eta)\colon\ V \times U \xrightarrow{(\eta,\sigma)} \Omega^X \times X \xrightarrow{\in_X} \Omega.$$

例 4.1.6 (等式)

对于类型 X 的变量 x_1, x_2, 等式 $x_1 = x_2$ 被解释为 $\chi_\Delta\colon X \times X \to \Omega$, 即对角线 $\Delta\colon X \to X \times X$ 的特征函数 (例 1.1.19).

例 4.1.7 (存在量词与任意量词)

设 $\phi(x, y)$ 是含两个变量 $x \in X, y \in Y$ 的公式. 考虑投影 $\pi\colon X \times Y \to Y$ 诱导的子对象偏序集之间的三元伴随

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(X \times Y) \arrow[r, bend left, "\exists_\pi"] \arrow[r, bend right, "\forall_\pi"'] & \mathrm{Sub}(Y). \arrow[l, "\pi^*"' description] \end{tikzcd}$$

(命题 1.3.6, 1.3.20) 公式 $\exists x \in X\, \phi(x, y)$, $\forall x \in X\, \phi(x, y)$ 分别解释为子对象 $\{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x, y)\}$ 在 $\exists_\pi$ 与 $\forall_\pi$ 下的像 (的特征函数). (在合适的语境下, 记号中的 “$\in X$” 可省略.)
注意到 $\mathrm{Hom}(-, \Omega^X) \simeq \mathrm{Sub}(X \times -)$, 由米田引理, 子对象偏序集之间的三元伴随给

出三个态射

$$\begin{tikzcd} \Omega^X \arrow[r, shift left=3, "\exists_X"] \arrow[r, shift right=3, "\forall_X"'] & \Omega. \arrow[l, "X^*"'] \end{tikzcd}$$

它们是所谓“内蕴伴随”.

注 4.1.8

注意我们在两处使用了“属于”符号 $\in$: 一处是含全称量词或存在量词的公式 $\forall x \in X\,\phi(x)$ 或 $\exists x \in X\,\phi(x)$, 一处是成员关系 $x \in S$. 这并不会引起歧义, 因为对于子对象 $S \hookrightarrow X$ 有

$$\begin{aligned} \forall x \in S\,\phi(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in X(x \in S \Rightarrow \phi(x)) \\ \exists x \in S\,\phi(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in X(x \in S \wedge \phi(x)). \end{aligned}$$

甚至当 S 是类型 PX 的一般的项时, 我们也可简记 $\forall x \in X(x \in S \Rightarrow \phi(x))$ 为 $\forall x \in S\,\phi(x)$, 简记 $\exists x \in X(x \in S \wedge \phi(x))$ 为 $\exists x \in S\,\phi(x)$.

例 4.1.9 (公式确定的子对象)

对公式 $\phi(x)$, 设其解释为 $\phi(x)\colon X \to \Omega$, 那么 $\{x \in X \mid \phi(x)\}$ 的解释是以 $\phi(x)$ 为特征函数的子对象. 我们称之为公式 $\phi(x)$ 的外延 (extension)[2].

更一般地, ϕ 不仅可以是 X 上的公式, 而且可以是 Ω^X 的项 (即内语言中的“X 上的公式”); 此时我们沿用记号 $\{x \in X \mid \phi(x)\}$ 表示 ϕ 自身, 视为 PX 的项.

任何子对象 $S \hookrightarrow X$ 都至少有一个公式与之对应, 即公式 $x \in S$, 因为 $\in$ 的定义是 id_{Ω^X} 对应的态射 $\Omega^X \times X \to \Omega$.

命题-定义 4.1.10 (恒成立)

对公式 $\phi(x)$, 如下条件等价:

(1) $\{x \in X \mid \phi(x)\} = X$;

(2) $\phi(x)\colon X \to \Omega$ 穿过 $\top\colon 1 \to \Omega$;

(3) 公式 $\forall x \in X\,\phi(x)\colon 1 \to \Omega$ 等于 $\top$.

我们称满足上述条件的公式 $\phi(x)$ (在 X 上) 恒成立 (is universally valid), 简称成立.

证明.

[2]这与哲学上的用法是一致的: 外延是一个词语适用的对象的集合.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) 由 $\{x \in X \mid \phi(x)\}$ 的定义即得.
- (2) $\Leftrightarrow$ (3). 由任意量词的解释, 对于 $p \in \mathrm{Sub}(1)$,

$$X \times p \leq \{x \in X \mid \phi(x)\} \quad \text{当且仅当} \quad p \leq \forall x \in X\, \phi(x).$$

因此 $\{x \in X \mid \phi(x)\} = X$ 等价于 $p = 1$ 满足以上两式, 等价于 $\big(\forall x \in X\, \phi(x)\big) = \top$.

□

注 4.1.11

为了避免混淆, 作如下约定: 在本章中如无特殊说明, 自然语言 (中文) 的逻辑连接词 "对任意" "存在" "或" 等等是通常的 ("外部" 的) 数学语言, 而符号 $\forall, \exists, \vee$ 等等是某个意象的内语言, 即 Mitchell–Bénabou 语言.

下面是使用 Mitchell–Bénabou 语言表达意象中的对象的例子.

例 4.1.12 (像)

映射 $f\colon X \to Y$ 的像为

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X\, f(x) = y\}.$$

记 $\pi\colon X \times Y \to Y$ 为投影, 那么对于 $U \in \mathrm{Sub}(Y)$, 有 $\pi^* U = X \times U$. 由存在量词的解释, 上述 $\mathrm{im}(f)$ 的定义翻译为外部语言即

$$\mathrm{im}(f) \leq U \quad \text{当且仅当} \quad \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\} \leq X \times U.$$

而后者等价于 (外部语言) f 穿过 $U \hookrightarrow Y$; 故这个条件正是像的范畴论定义 (1.3.18). 在内语言中我们也将 $\mathrm{im}(f)$ 记为 $\{f(x) \mid x \in X\}$.

例 4.1.13 (单射与满射)

对于意象中的态射 $f\colon X \to Y$,

- f 为单射当且仅当公式 $\forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X\, \big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$ 成立.
- f 为满射当且仅当公式 $\forall y \in Y\, \exists x \in X\, f(x) = y$ 成立.

证明.

- 公式 $\forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X\, \big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$ 翻译为外部语言即左下图交换 (见

命题 4.1.10).

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r] \arrow[d, "(\chi_\Delta \circ (f\times f), \chi_\Delta)"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \Omega \times \Omega \arrow[r, "\Rightarrow"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"'] & Y \arrow[d, "\Delta"] \\ X \times X \arrow[r, "f\times f"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

注意到 f 是单射当且仅当上面的右图为拉回, 而右图为 (子对象的) 拉回等价于特征函数满足 $\chi_\Delta \circ (f \times f) = \chi_\Delta$. 这等价于上面的左图交换.

- 由例 4.1.12 中的讨论, 公式 $\forall y \in Y\, \exists x \in X\, f(x) = y$ 成立等价于 $\operatorname{im} f = Y$, 即 f 为满射.

$\square$

例 4.1.14 (“有物” 与 “非空”)

在意象中, 称对象 X “*有物*” (inhabited), 是指 $X \to 1$ 为满射; 在内语言中此即公式 $\exists x \in X \top$ 成立. 称 X “*非空*” (nonempty) 是指公式 $\neg(\forall x \in X \bot)$ 成立. 一般而言, 有物与非空是不同的概念; 这一点从后面介绍的拓扑空间上的层语义的例子 (4.2.8) 可以看出 (考虑一个稠密开集作为子终对象, 它不是有物的, 却是非空的).

例 4.1.15 (满射的集合)

由 X 到 Y 的满射的 “集合” 为

$$\mathrm{Epi}(X, Y) = \{f \in Y^X \mid \forall y \in Y\, \exists x \in X\, f(x) = y\} = \{f \in Y^X \mid \operatorname{im} f = Y\}.$$

例 4.1.16 (单元集)

回忆 “单元集映射” $\{-\}\colon X \to PX$ 是 $\delta_X\colon X \times X \to \Omega$ 对应的态射 (例 1.1.20). 换言之,

$$\{x\} = \{y \in X \mid y = x\}.$$

PX 上有一个谓词 “是单元集”. 首先我们定义*子单元集* (subsingleton), 也即单元集的子集[3]:

$$\ulcorner S \text{ 是子单元集} \urcorner := \forall x \in S\, \forall y \in S\, x = y.$$

接着定义

$$\ulcorner S \text{ 是单元集} \urcorner := \ulcorner S \text{ 是子单元集} \urcorner \wedge \exists x \in S \top = (\exists! x \in S \top).$$

(其中 $\exists!$ 表示存在唯一, 见定义 B.1.12) 可以证明

$$\forall S \in PX\, \big(\ulcorner S \text{ 是单元集} \urcorner \Leftrightarrow \exists x \in X\, S = \{x\}\big).$$

例 4.1.17 (函数及其图像)

设 $\Gamma \in P(X \times Y)$ 使得公式 $\forall x\, \exists! y\, (x, y) \in \Gamma$ 成立. 设 Γ 对应态射 $\widetilde{f}\colon X \to PY$, 则有 $\forall x\, \exists y\, \widetilde{f}(x) = \{y\}$, 也即 $\operatorname{im} f \subset \operatorname{im}\{-\}$. 这说明 $\widetilde{f}$ 穿过一个态射 $f\colon X \to Y$. 进一步, 可以证明

$$Y^X \simeq \{\Gamma \in P(X \times Y) \mid \forall x\, \exists! y\, (x, y) \in \Gamma\}.$$

例 4.1.18 (商集)

集合论中, 商集由等价类的集合构造; 在内语言中我们也可仿照这一构造. 首先回顾等价关系 (1.3.12) 的定义. 内语言中, 集合 X 上的等价关系是满足如下条件的二元关系 $\sim$:

- $x \sim x$;
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
- $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

对于 $x \in X$ 定义 "等价类"

$$[x] := \{x' \in X \mid x' \sim x\},$$

从而有映射 $[-]\colon X \to PX$. 于是商集 $X/{\sim}$ 可定义为

$$X/{\sim} := \{[x] \mid x \in X\} := \operatorname{im}([-]\colon X \to PX).$$

注意此时我们有

$$\forall \alpha \in (X/{\sim})\, \exists x \in X\, \alpha = [x].$$

例 4.1.19 (Boole 意象)

一个意象是 Boole 的, 当且仅当公式 $\forall p \in \Omega\, (p \vee \neg p)$ 成立. 注意这个公式不是说 "$p = \top$ 或 $p = \bot$" (后者是二值性, 见注 1.3.63), 因为 $\vee$ 是内语言, 而 "或" 是 "外部" 语言.

[3]在经典逻辑中只有两个不同的子单元集, 即空集与单元集; 但在意象的内语言中则不然: 子单元集对应意象的子终对象, 见定义 1.3.26.

例 4.1.20 (内蕴选择公理)

一个意象满足内蕴选择公理 (定义 1.3.66), 当且仅当对任意对象 X, Y 如下公式成立.

$$\forall f \in \mathrm{Epi}(X, Y)\, \exists g \in X^Y\, \forall y \in Y\, f(g(y)) = y.$$

因为一般的意象不一定是 Boole 的, 也不一定满足内蕴选择公理, 所以在内语言中进行推理一般不能使用以上两例中写出的公式. 内语言中可以使用的推导法则是*直觉主义谓词演算* (intuitionistic predicate calculus).

4.2 Kripke–Joyal 语义

语义 (semantics) 是将一种形式语言 (如前面介绍的 Mitchell–Bénabou 语言) 的公式转化为另一种语言 (如通常数学语言) 的方法. 回忆 Mitchell–Bénabou 语言中, 含一个变量 $x\colon X$ 的公式 $\phi(x)$ 被解释为一个态射 $\phi(x)\colon X \to \Omega$. 子对象 $\{x \mid \phi(x)\}$ 是 $\top\colon 1 \to \Omega$ 沿 $\phi(x)$ 的拉回 (定义 4.1.9). 设 X 有整体元素 $x_0\colon 1 \to X$, 那么 x_0 满足公式 ϕ 当且仅当下图中虚线态射存在.

$$\begin{tikzcd}
 & \{x \mid \phi(x)\} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
1 \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "x_0"'] & X \arrow[r, "\varphi(x)"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

将 “整体元素” 推广为 “广义元素”, 我们得到如下的定义.

定义 4.2.1

称广义元素 $x_0\colon U \to X$ 满足公式 ϕ, 是指下图中虚线态射存在, 也即 U 包含于公式 ϕ 确定的子对象.

$$\begin{tikzcd}
 & \{x \mid \phi(x)\} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
U \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "x_0"'] & X \arrow[r, "\phi(x)"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

此时记 $U \models \phi(x_0)$. 由于后文介绍的 “力迫法” 的影响, 这个条件也称为 U *力迫* (forces) $\phi(x_0)$.

命题 4.2.2

对于广义元素 $x_0\colon U \to X$, 设 $p\colon U' \twoheadrightarrow U$ 为满射, 若 $U' \models \phi(x_0 p)$, 则 $U \models \phi(x_0)$.

证明. 由条件有交换图 $\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p"'] & \{x \mid \phi(x)\} \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, "x_0"'] & X \end{tikzcd}$. 作 $\{x \mid \phi(x)\}$ 沿 x_0 的拉回 $\widetilde{U}$, 那么 $\widetilde{U} \to U$ 既单又满, 故为同构. 这说明 $U \models \phi(x_0)$. 这是满射关于单射的一种提升性质. □

命题-定义 4.2.3 (Kripke–Joyal 语义的递归定义)

设 $x_0 \colon U \to X$ 为广义元素, 如下条款递归地给出了 $U \models \phi(x_0)$ 的定义 ("按公式 ϕ 的复杂度归纳"):

(1) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $U \models \phi(x_0) \wedge \psi(x_0)$ 当且仅当 $U \models \phi(x_0)$ 且 $U \models \psi(x_0)$.

(2) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $U \models \phi(x_0) \vee \psi(x_0)$ 当且仅当存在 $p \colon V \to U$ 与 $q \colon W \to U$, 使得 $p + q \colon V + W \to U$ 满, 且 $V \models \phi(x_0 p)$, $W \models \psi(x_0 q)$.

(3) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $U \models \phi(x_0) \Rightarrow \psi(x_0)$ 当且仅当对任意 $p \colon V \to U$, 只要 $V \models \phi(x_0 p)$, 就有 $V \models \psi(x_0 p)$; 这又等价于 $U \wedge \{x \mid \phi(x)\} \models \psi(x_0)$.

(4) 对于公式 $\phi(x)$, $U \models \neg\phi(x_0)$ 当且仅当对任意 $p \colon V \to U$, 只要 $V \models \phi(x_0 p)$, 就有 $V \simeq 0$.

(5) 对于公式 $\phi(x, y)$, $U \models \exists y \phi(x_0, y)$ 当且仅当存在满射 $p \colon V \twoheadrightarrow U$ 以及广义元素 $y_0 \colon V \to Y$ 使得 $V \models \phi(x_0 p, y_0)$.

(6) 对于公式 $\phi(x, y)$, $U \models \forall y \phi(x_0, y)$ 当且仅当对任意 $y_0 \colon V \to Y$, $p \colon V \to U$, 都有 $V \models \phi(x_0 p, y_0)$; 这又等价于 $U \times Y \models \phi(x_0 \pi_1, y \pi_2)$, 其中 π_1, π_2 为 $U \times Y$ 向两个分量的投影.

证明. 这些性质的证明基本上是直接验证定义, 我们提供一些细节.

在 (2) 中, $x_0 \colon U \to X$ 穿过 $\{x \mid \phi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \mid \phi(x)\} \vee \{x \mid \psi(x)\}$, 当且仅当 U 的两个子对象 $\{u \in U \mid \phi(x_0 u)\}$, $\{u \in U \mid \psi(x_0 u)\}$ 之并等于 U. 取 V, W 为这两个子对象即可.

在 (4) 中, 若 $x_0 \colon U \to X$ 穿过 $\{x \mid \exists y \phi(x, y)\}$, 作如下拉回,

$$\begin{tikzcd} \{(u, y) \mid \phi(x_0 u, y)\} \arrow[r] \arrow[d] & \{(x, y) \mid \phi(x, y)\} \arrow[d] \\ U \arrow[r] & \{x \mid \exists y \phi(x, y)\} \end{tikzcd}$$

因为右边为满射, 所以左边 $\{(u, y) \mid \phi(x_0 u, y)\} \to U$ 为满射. □

层语义

Kripke–Joyal 语义在景上 (特别地, 在拓扑空间上) 有更直观的表述.

命题-定义 4.2.4

设 $\phi(x)$ 是 Grothendieck 意象 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的内语言中含一个变量 $x \in X$ 的公式. 对于 $\mathcal{C}$ 的对象 c 与 $x_0 \in X(c)$, 如下条件等价,

- $x_0 \in \{x \mid \phi(x)\}(c)$, 其中 $\{x \mid \phi(x)\}$ 是 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中 X 的子对象;
- $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的态射 $x_0 \colon よ(c) \to X$ 穿过 $\{x \mid \phi(x)\} \hookrightarrow X$;
- $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 中的态射 $x_0 \colon aよ(c) \to X$ 穿过 $\{x \mid \phi(x)\} \hookrightarrow X$.

当上述条件成立时, 记 $c \models \phi(x_0)$.

命题 4.2.5 (层语义的局部性)

若存在 c 的覆盖 (筛) $\{f_i \colon c_i \to c\}$ 使得对每个 i 都有 $c_i \models \phi(x_0 f_i)$, 那么 $c \models \phi(x_0)$.

证明. 取 f_i 生成的筛 $S \to よ(c)$, 则有满射 $\sum_i よ(c_i) \to S$. 层化后有满射 $\sum_i aよ(c_i) \to aよ(c)$ (层化保持满射, 命题 1.3.5). 于是由命题 4.2.2 即证. □

命题-定义 4.2.6 (层语义)

设 X 是 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的对象, $\phi(x)$ 是 X 上的公式, c 是 $\mathcal{C}$ 的对象, $x_0 \in X(c)$. 如下条款递归地给出了 $c \models \phi(x_0)$ 的定义 (“按公式 ϕ 的复杂度归纳”):

(1) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $c \models \phi(x_0) \wedge \psi(x_0)$ 当且仅当 $c \models \phi(x_0)$ 且 $c \models \psi(x_0)$.

(2) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $c \models \phi(x_0) \vee \psi(x_0)$ 当且仅当存在覆盖 $\{f_i \colon c_i \to c\}$, 使得对每个 i, $c_i \models \phi(x_0 f_i)$ 或 $c_i \models \psi(x_0 f_i)$.

(3) 对于公式 $\phi(x), \psi(x)$, $c \models \phi(x_0) \Rightarrow \psi(x_0)$ 当且仅当对任意 $p \colon d \to c$, 只要 $d \models \phi(x_0 p)$, 就有 $d \models \psi(x_0 p)$.

(4) 对于公式 $\phi(x)$, $c \models \neg\phi(x)$ 当且仅当对任意 $p \colon d \to c$, 只要 $d \models \phi(x_0 p)$, 就有 d 被空集覆盖.

(5) 对于公式 $\phi(x, y)$, $c \models \exists y \phi(x_0, y)$ 当且仅当存在覆盖 $\{f_i \colon c_i \to c\}$ 以及元素 $y_i \in Y(c_i)$ 使得对每个 i 有 $c_i \models \phi(x_0 f_i, y_i)$.

(6) 对于公式 $\phi(x,y)$, $c \models \forall y \phi(x_0,y)$ 当且仅当对任意 $y_0 \in Y(d)$, $p\colon d \to c$, 都有 $d \models \phi(x_0 p, y_0)$.

例 4.2.7 (一个点上的层语义)

一个点上的层意象 $\mathsf{Set} \simeq \mathrm{Sh}(*)$ 中 $* \models \phi(x_0)$ 即是公式 $\phi(x_0)$ 在通常数学的意义下成立.

例 4.2.8 (拓扑空间上的层语义)

设 X 为拓扑空间, 那么 $\mathrm{Sh}(X)$ 的内语言中的命题 (即终对象 1 上的公式) 对应于 X 的开集, 直观上这个开集表示该命题成立的范围. 此时对于 $U, V \in \mathrm{Open}(X)$, 有 $U \models V$ 等价于 $U \leq V$. 例如,

- $\neg U$ 对应开集 U 的补集的内部. 因此, $X \models (\neg\neg U)$ 当且仅当 $\neg U = \varnothing$, 当且仅当 U 是 X 的稠密开集.

- 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为环化空间, 即拓扑空间 X 配备 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的环 $\mathcal{O}_X$. 对于 $f \in O_X$, 命题
$$\ulcorner f \text{ 可逆}\urcorner := \exists g\, fg = 1$$
表示 "f 可逆的地方". 由命题 4.2.6 (5), 对于开集 U, $U \models \ulcorner f \text{ 可逆}\urcorner$ 当且仅当存在 U 的开覆盖 $\{U_i\}$ 以及 $g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ 使得 $U_i \models (fg_i = 1)$.

- 所谓*局部环化空间* (locally ringed space) 是指一个环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$, 使得 $\mathcal{O}_X$ 的每个茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是局部环. 这等价于 $\mathcal{O}_X$ 在内语言中是一个局部环. 准确地说, 这等价于 $\mathcal{O}_X$ 上如下公式成立:
$$\ulcorner x + y \text{ 可逆}\urcorner \Rightarrow \ulcorner x \text{ 可逆}\urcorner \vee \ulcorner y \text{ 可逆}\urcorner.$$
使用这种语言可以简化代数几何中的许多命题以及它们的证明, 见 Ingo Blechschmidt 的博士论文 [4].

例 4.2.9 (Zariski 景上的层语义)

回忆 Zariski 景 (定义 3.4.23) 是有限表现环的范畴的对偶范畴, 配备如下覆盖结构: 对于环 A 中生成单位理想的一族元素 f_i, $\mathrm{Spec}\, A[f_i^{-1}] \to \mathrm{Spec}\, A$ 为覆盖.

4.3 模态与层化

将 Lawvere–Tierney 拓扑 (定义 3.7.1) 视为一种模态 (B.5), 可以在内语言中构造其层化. 首先我们以内语言重新定义 Lawvere–Tierney 拓扑. 本节中的 “集合” 是指某个固定的意象中的对象.

定义 4.3.1 (Lawvere–Tierney 拓扑, 内语言定义)

满足如下条件的映射 $\Box\colon \Omega \to \Omega$ 称作 *Lawvere–Tierney 拓扑*, 或模态:

- $\varphi \Rightarrow \Box\varphi$;
- $\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$;
- $\Box(\varphi \land \psi) \Leftrightarrow \Box\varphi \land \Box\psi$.

对于景的 Grothendieck 拓扑给出的 Lawvere–Tierney 拓扑, $\Box\varphi$ 的直观是 “φ 在局部上成立” (注 3.7.2). 一般地, $\Box\varphi$ 是 φ 的某种 “弱化”.

条件 $\Box(\varphi \land \psi) \Leftrightarrow \Box\varphi \land \Box\psi$ 等价于模态 $\Box$ 单调递增: 对任意 $\varphi, \psi\colon \Omega$, 若 $\varphi \Rightarrow \psi$, 则 $\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$.

例 4.3.2

在 Set (即经典逻辑) 中只有两个模态, $\Box\varphi = \varphi$ 以及 $\Box\varphi = \top$.

例 4.3.3

如下映射都是 Lawvere–Tierney 拓扑:

- $\Box\varphi = (\mu \Rightarrow \varphi)$, 其中 μ 是一个固定的命题 (即类型 Ω 的常量);
- $\Box\varphi = (\nu \lor \varphi)$, 其中 ν 是一个固定的命题;
- $\Box\varphi = \neg\neg\varphi$ (其中用到 $\neg\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$, 这是因为 $\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$, 见命题 2.2.15).

定义 4.3.4 (分离性与层条件, 内语言定义)

对于给定的 Lawvere–Tierney 拓扑 $\Box$, 称集合 F “$\Box$-*分离*” 是指如下公式成立:

$$\forall x, y \in F, \quad \Box(x = y) \Rightarrow x = y.$$

称集合 F 为 $\Box$-*层*是指 F $\Box$-分离, 且如下公式成立:

$$\forall S \subset F, \quad \Box(\ulcorner S \text{ 是单元集} \urcorner) \Rightarrow \exists x \in F. \Box(x \in S).$$

(其中 $\forall S \subset F$ 是 $\forall S \in \Omega^F$ 的意思.)

若 $\Box$ 的直观是某命题局部上成立, 那么 F $\Box$-分离的直观就是 "若 F 的两个元素 x, y 在局部上相等, 则它们相等"; F 为 $\Box$-层的直观就是 "若子集 $S \subset F$ 在局部上是单元集, 则存在 F 的元素 x 局部上属于 S".

定义 4.3.5 (+ 构造)

对任意集合 F, 定义 F^+ 为如下商集 (4.1.18):

$$F^+ = \{S \subset F \mid \Box\ulcorner S \text{ 为单元集}\urcorner\}/\!\sim, \quad \text{其中} \quad S \sim T :\Leftrightarrow \Box(S = T).$$

典范的映射 $F \to F^+$ 由 $x \mapsto [\{x\}]$ 给出.

注意 $S \sim T \Rightarrow \big(\Box(x \in S) \Leftrightarrow \Box(x \in T)\big)$.

命题 4.3.6

对任意集合 F,

- F^+ $\Box$-分离;
- 若 F $\Box$-分离, 则 F^+ 为 $\Box$-层.

证明.

- 要证明 F^+ $\Box$-分离, 即如下公式在 F^+ 上恒成立:

$$\Box(x = y) \Rightarrow x = y.$$

在内语言中这个命题是明显的: 由 F^+ 的定义, 有

$$\begin{aligned} &\forall S, T \in \{S \subset F \mid \Box\ulcorner S \text{ 为单元集}\urcorner\} \\ &\Box([S] = [T]) \Leftrightarrow \Box\Box(S = T) \Leftrightarrow \Box(S = T) \Leftrightarrow [S] = [T]. \end{aligned}$$

- [4]要证明 F^+ 为层, 即证明如下公式成立:

$$\forall S \subset F^+, \quad \Box(\ulcorner S \text{ 是单元集}\urcorner) \Rightarrow \exists \alpha \in F^+ \; \alpha \in S.$$

定义压平 $f\colon PF^+ \to PF$ 如下:

$$f(S) := \{x \in F \mid \exists [A] \in S \, \Box(x \in A)\}.$$

这里, $\exists [A]\in S$ 是 $\exists A\,([A]\in S\wedge\cdots)$ 的意思. 其中 "压平" 的直观是将多层的 $\{\}$ 替换为单层. 例如, 当 S 为单元集 $\{[\{a\}]\}$ 时, $f(S)=\{a\}$, 这是因为

$$\begin{aligned}\exists [A]\in S\,\Box(x\in A) &\Rightarrow \exists A\,\big([A]=[\{a\}]\big)\wedge\Box(x\in A)\\ &\Rightarrow \exists A\,\Box(A=\{a\}\wedge x\in A)\\ &\Rightarrow \Box(x=a)\\ &\Rightarrow x=a\,(\text{由 }\Box\text{-分离性}).\end{aligned}$$

由单元集的定义,

$$\ulcorner S\text{ 为单元集}\urcorner\Rightarrow\exists A\subset F\,\big(\Box\ulcorner A\text{ 为单元集}\urcorner\wedge S=\{[A]\}\big).$$

而

$$\begin{aligned}\ulcorner A\text{ 为单元集}\urcorner\wedge S=\{[A]\} &\Rightarrow \exists a\in F\,S=\big\{[\{a\}]\big\}\\ &\Rightarrow \exists a\in F\,f(S)=\{a\}\\ &\Rightarrow \ulcorner f(S)\text{ 为单元集}\urcorner.\end{aligned}$$

综合上述论证, 使用模态 $\Box$ 的性质, 我们证明了

$$\Box(\ulcorner S\text{ 为单元集}\urcorner)\Rightarrow\Box(\ulcorner f(S)\text{ 为单元集}\urcorner).$$

[未完成: 证明] $\Box$

4.4 内位象

命题 4.4.1 (内位格)

设 $\mathcal{S}$ 为意象. 定义 $\mathcal{S}$ 的内位格 (internal frame) 为 $\mathcal{S}$ 的内语言中定义的位格 (定义 2.1.1). 具体地, 一个内位格包含如下信息:

- 一个对象 A;
- 运算 $\wedge\colon A\times A\to A$, 以及 $\bigvee\colon PA\to A$, 满足 "有限交" 和 "任意并" 的条件;
- 结合律
$$\forall a\in A\,\forall I\in PA\,\Big(a\wedge\bigvee I=\bigvee\{a\wedge b\mid b\in I\}\Big).$$

[未完成: Elephant C1.6]

[4] 此证明来自杨家同.

4.5 非标准分析, 滤商与超滤范畴

非标准分析起源于对无穷小与极限等概念的重新审视. 不同于 Cauchy–Weierstrass 的 ε-δ 方法, 它将无穷小量视为扩充实数集中实实在在的对象. 一种称作*传达原理*的工具提供了经典分析与非标准分析之间的桥梁.

基本概念

定义 4.5.1 (超滤)

Boole 代数 B 上的*超滤*是 Boole 代数同态 $B \to \{\bot, \top\}$ 下 $\top$ 的原像. 超滤 $\mathcal{F}$ 也可由如下等价的条件之一定义:

- $\mathcal{F}$ 是极大的真滤子;
- $\mathcal{F}$ 是真滤子, 且对任意 $a \in B$, 要么 $a \in \mathcal{F}$, 要么 $\neg a \in \mathcal{F}$.

集合 S 上的超滤是指 Boole 代数 2^S 上的超滤.

注 4.5.2

一个集合上超滤构成的空间是其子集 Boole 代数的 Stone 空间, 这是代数–几何对偶的一例. 参见定义 2.1.10 后的注, 以及 2.3 节.

滤商

超滤范畴

4.6 可计算性理论与有效意象

通常数学中可定义的函数不一定能在计算机上编程计算, 其中最著名的是停机问题: 不存在一个程序能够判断任何程序是否停机. 研究类似问题的学科称作*可计算性理论*. 有效意象 (effective topos) Eff 是一个可用内语言研究可计算性理论的意象, 或用一种诗意的表达, 是 "可计算数学的世界" (相对于 Set 是 "通常数学的世界").

基础知识

首先我们需要用形式化的语言描述计算的概念. 我们知道, 通用的*计算机*是这样工作的:

- 计算机可以执行一些 (有限个) 基本*指令* (instructions); *程序* (program) 是有限个指令的序列 (特别地, 这意味着只有可数个程序);
- 计算机可以存储, 输入或输出*数据* (data)[5], 程序也是一种数据;
- 计算机一次只执行一条指令[6].

数据是多种多样的, 例如一个程序可以作为数据输入另一个程序, 两个数据可以放在一起成为一个数据. 为了将所有数据表示为同一种东西, 我们需要*编码* (code). 一种常用的编码是 *Gödel* 数, 它将任何一个数据对应到一个确定的自然数; 我们不需要其细节, 而只要知道如下性质:

-
- 对于两个自然数 n, m, 数对 (n, m) 可编码为一个自然数, 记为 $\langle n, m\rangle$;

若以 Gödel 数来编码所有数据, 则我们考虑的程序是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的某种函数; 它在可计算性理论中称为*部分递归函数* (partial recursive function).

定义 4.6.1 (部分递归函数)

对于集合 X, Y, *部分函数* $f\colon X \to Y$ 是指定义在 X 的一个子集上取值于 Y 的函数. 对于 $x \in X$, 以符号 $f(x)\downarrow$ 表示 $f(x)$ 有定义. 在部分函数 $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}(k \geq 0)$ 中, 归纳地定义*基础递归函数* (primitive recursive function):

- 常值函数 $\bar{n}\colon (x_1, \cdots, x_k) \mapsto n$ 是基础递归函数;
- 后继 $\mathsf{succ}\colon n \mapsto n+1$ 是基础递归函数;
- 投影 $(x_1, \cdots, x_k) \mapsto x_i$ 是基础递归函数;
- 基础递归函数的复合是基础递归函数;
- 给定基础递归函数 $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 以及 $h\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, 如下定义的函数 f 也是基础递归函数, 这个过程称作*基础递归* (primitive recursion):

$$
\begin{aligned}
f(0, x_1, \cdots, x_k) &= g(x_1, \cdots, x_k),\\
f(n+1, x_1, \cdots, x_k) &= h(n, f(n, x_1, \cdots, x_k), x_1, \cdots, x_k).
\end{aligned}
$$

若子集 $A \subset \mathbb{N}$ 的特征函数 1_A 是基础递归函数, 则称之为*基础递归谓词*.

[5] 我们假设储存空间是无限的.

[6] 并行计算机可一次执行多条指令, 但它不改变计算的能力, 只是增加计算的效率.

例 4.6.2 (常见的基础递归函数)

很多函数都是基础递归函数.

- 加法 $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ 是基础递归函数, 因为它有如下定义:
$$0 + x = x,$$
$$(n+1) + x = \mathsf{succ}(n+x).$$
- 乘法, 幂, 阶乘都是基础递归函数.
- 前驱 $\mathsf{pred}\colon n \mapsto \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n-1 & n > 0 \end{cases}$ 是基础递归函数.
- 谓词 "等于零" 是基础递归谓词:
$$\text{等于零}(0) = 1,$$
$$\text{等于零}(n+1) = 0.$$
- 谓词 "大于等于", "等于", "是素数" 都是基础递归谓词.

定义 4.6.3 (部分递归函数)

*部分递归函数*的定义是在基础递归函数的基础上增加如下操作: 给定

定义 4.6.4 (实现)

归纳地定义 "自然数 n 实现公式 φ" 如下 (关于公式, 见定义 B.1.12, B.1.14):

- φ 为原子公式 (关系或等式). 当 φ 取值为真时, 我们称 0 实现 φ;
- $\varphi = (\psi \wedge \chi)$. 当 m 实现 ψ 且 n 实现 χ 时, 我们称 $\langle m, n\rangle$ 实现 φ;
- $\varphi = (\psi \vee \chi)$. 当 m 实现 ψ 时, 我们称 $\langle 0, m\rangle$ 实现 φ, 当 n 实现 χ 时, 我们称 $\langle 1, n\rangle$ 实现 φ; (注意: $\psi \vee \chi$ 要被实现, 必须要明确指出 ψ, χ 中的某一个被实现)
- $\varphi = (\psi \Rightarrow \chi)$. 若每当 m 实现 φ 时, 都有 $n(m)$ 良定义且 $n(m)$ 实现 χ, 我们称 n 实现 φ;
-

4.7 综合微分几何与光滑无穷小分析

综合微分几何的理论

我们首先在本小节叙述一种偏向语法的 (或公理化的) 理论, 而暂时不关心这个理论是否存在一个模型. 我们将看到这种理论比通常的微分几何更加符合直观.

公理 4.7.1 (空间)

综合微分几何所谓的空间 (或称集合) 是一个固定的意象 $\mathcal{E}$ 中的对象; 光滑映射 (或称映射) 是 $\mathcal{E}$ 中的态射.

公理 4.7.2 (直线)

综合微分几何所谓的直线是 $\mathcal{E}$ 中一个固定的环 R.

注 4.7.3

字母 R 提示了这个对象与通常微分几何的对象 $\mathbb{R}$ 在直观上的相似性, 但它与 $\mathbb{R}$ 有不同的性质, 如 "幂零无穷小量" 的存在性. 因此, 我们不能要求 R 是域.

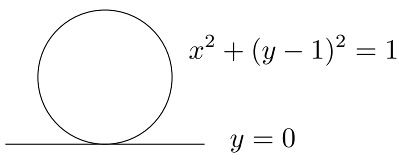
定义 4.7.4 (直线上原点的一阶无穷小邻域)

定义 R 上 "原点的一阶无穷小邻域"

$$D = \{x \in R \mid x^2 = 0\}.$$

例 4.7.5 (相切曲线的共同切向量)

平面 R^2 上的直线 $y = 0$ 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的交集是 D. 这是因为将 $y = 0$ 代入圆的方程, 就得到 $x^2 + 1 = 1$, 也即 $x^2 = 0$.



直观上, 直线与圆相切, 两者在相切处有一条公共的 "无穷小线段". 更一般地, 任意两条相切的曲线都有一条公共的形如 D 的无穷小线段, 这便是两条曲线共同的切向量.

Kock–Lawvere 公理与导数

公理 4.7.6 (Kock–Lawvere 公理)

对任意映射 $f\colon D \to R$, 存在唯一的 $a, b \in R$, 使得

$$f(d) = a + d \cdot b, \quad \forall d \in D.$$

换言之, 作为 R-代数有

$$\mathrm{Hom}(D, R) \simeq R[x]/(x^2).$$

Kock–Lawvere 公理反映了如下的直观: R 上的一个函数在一个很小的邻域上近乎是一次函数. 由此, 我们立刻得到如下的推论.

命题-定义 4.7.7 (导函数)

对任意函数 $f\colon R \to R$, 存在唯一的函数 $f'\colon R \to R$ 满足

$$f(x+d) = f(x) + d \cdot f'(x), \quad \forall x \in R \forall d \in D.$$

称 f' 为 f 的*导函数*. 归纳地定义 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$.

也就是说, 综合微分几何要求任何函数 $R \to R$ 都是任意次可导的.

Weil 代数与无穷小几何对象

无穷小线段 D 对应代数 $R[x]/(x^2)$. 一般地, 在代数–几何对偶中与无穷小几何对象相对应的代数是 R 上的 *Weil* 代数[7].

定义 4.7.8 (Weil 代数)

Weil 代数是形如 $W = R \oplus J$ 的 R-代数, 其中 J 是有限生成自由 R-模, 且为幂零理想. 等价地,

$$W = R[x_1, \cdots, x_n]/I,$$

且存在正整数 N 使得 $x_i^N \in I\,(i = 1, \cdots, n)$.

注 4.7.9

上面的概念在 “经典数学” (经典逻辑) 中对应*局部 Artin 代数*, 其中 Artin 代数是指不存在无限的理想下降链 (这称为*下降链条件*) 的代数. 设 k 为域, A 是局部 Artin k-代数, $\mathfrak{m}$ 是 A 的唯一极大理想, 并且额外假设 $k \to A/\mathfrak{m}$ 是同构. 可以证明[8]$A \simeq k \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ 是有限维 k-线性空间且为幂零理想. 定义 4.7.8 即是这个结果的类比.

[7] Weil 代数有两种含义, 这里所说的不是来自 Lie 代数的那种 Weil 代数.

局部 Artin 环在代数几何的形变理论中有重要作用, 这正是因为它对应无穷小几何对象.

定义 4.7.10 (Weil 代数的谱)

对于 Weil 代数 W, 定义 W 的谱为 R-代数同态的空间

$$\operatorname{Spec} W = \operatorname{Hom}_{R\mathsf{Alg}}(W, R),$$

称之为无穷小几何对象.

例 4.7.11 (常见的无穷小几何对象)

- 点
$$\mathrm{pt} \simeq \{x \in R \mid x = 0\} = \operatorname{Spec} R;$$
- 无穷小线段的平方
$$D^2 \simeq \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 = y^2 = 0\} = \operatorname{Spec} R[x, y]/(x^2, y^2);$$
- R^2 上原点的一阶无穷小邻域
$$D(2) := \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 = xy = y^2 = 0\} = \operatorname{Spec} R[x, y]/(x^2, xy, y^2);$$
- 高阶无穷小邻域
$$D_k := \{x \in R \mid x^{k+1} = 0\} = \operatorname{Spec} R[x]/(x^{k+1})\ (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

前面介绍的 Kock–Lawvere 公理可表述为 $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} R[x]/(x^2), R) \simeq R[x]/(x^2)$. 类似地有如下公理.

公理 4.7.12 (Kock–Lawvere 公理)

对于 Weil 代数 W, 有
$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} W, R) \simeq W.$$

[8]由中山 (Nakayama) 引理以及下降链条件可得 $\mathfrak{m}$ 幂零; 又由下降链条件可得每个 $\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ 是有限维 k-线性空间, 从而 A 是有限维 k-线性空间.

注 4.7.13 (Weil 代数与 Kock–Lawvere 公理的直观)

设 $W = R \oplus J$ 是 Weil 代数. 投影 $W \to R$ 对应点 pt 到无穷小几何对象 $\operatorname{Spec} W$ 的原点的嵌入

$$\mathrm{pt} = \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} W.$$

Kock–Lawvere 公理说的是 Weil 代数 W 等同于 $\operatorname{Spec} W$ 上的函数代数. 投影 $W \to R$ 可视为 $\operatorname{Spec} W$ 上的函数在原点处取值; 理想 J 是投影 $W \to R$ 的核, 可视为在原点取值为 0 的函数的集合. 要求 J 为幂零理想, 也即要求在原点取值为 0 的函数都幂零, 直观上说明 $\operatorname{Spec} W$ 是 "无穷小" 的.

Lawvere 以如下的性质刻画无穷小几何对象.

定义 4.7.14 (无穷小对象, 奇妙右伴随)

对于空间 S, 若 $(-)^S$ 有右伴随, 则称 S 为*无穷小对象*. 记该右伴随为 $(-)_S$, 称之为*奇妙右伴随* (amazing right adjoint).

例 4.7.15

在集合范畴 Set 中, 只有终对象 1 是无穷小对象.

注 4.7.16

回忆对意象中任意对象 S, $(-)^S$ 都有左伴随 $(-) \times S$, 而 $(-)^S$ 有右伴随是非常稀奇的事情. 重要的是此时 $(-)^S$ *保持余极限*. 一个直观如下. 设空间 X 被一族空间 U_i 覆盖 (X 可写成 U_i 和 $U_i \times_X U_j$ 的某种余极限), 那么 X^S 也被 U_i^S 覆盖, 即 S 到 X 的任何映射都必须穿过某个 U_i; 这是 S 的像 "太小" 导致的.
类似的性质在不是意象的范畴中也有用处. 例如 Abel 群范畴 Ab 中, 函子 $\operatorname{Hom}(A, -)$ 保持余极限当且仅当 A 是有限生成投射 $\mathbb{Z}$-模, 这也是一种 "小" 的性质.

[**未完成: 使用 SDG 的例子, 如 Riemann 曲率**]

[**未完成: 无穷小对象的定义, amazing right adjoint**]

综合微分几何的模型

本小节介绍综合微分几何的一些模型. 相对简单的模型就能实现 Kock–Lawvere 公理; 而为了使模型满足更多的公理, 以及更加贴近传统的微分几何 (更加 "有用"), 我们就需要作越来越复杂的调整. 构造综合微分几何模型的贯穿始终的思想是代数–几何对偶.

“代数” 模型

首先考虑一个最简单的模型.

定义 4.7.17

考虑有限表现仿射 $\mathbb{R}$-概形范畴 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$. 回忆, 有限表现 $\mathbb{R}$-代数即形如 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_m)$ 的代数; 对于有限表现 $\mathbb{R}$-代数 A, 以 $\operatorname{Spec} A$ 表示其在对偶范畴中的化身.

所谓代数模型 (algebraic model) 是 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上的层意象

$$\mathsf{Fun}(\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}},\mathsf{Set}).$$

定义 4.7.18 (直线)

定义 直线

$$R := よ(\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]).$$

注 4.7.19

在第 5 章我们将会讲到, 这里考虑的意象是 $\mathbb{R}$-代数理论的分类意象, 而 R 是一般 $\mathbb{R}$-代数 (generic $\mathbb{R}$-algebra).

这些结论对有限生成 $\mathbb{R}$-代数范畴同样成立.

注意到对 $A \in \mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}$,

$$R(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}}(\mathbb{R}[x], A) \simeq A \text{ (作为集合)},$$

我们发现, R 正是代数范畴到集合范畴的遗忘函子

$$R \simeq \text{遗忘}\colon \mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}} \to \mathsf{Set}.$$

因此, 使用米田方法, 我们就得到

命题 4.7.20

R 是交换环.

有了 R, 我们考虑 “由方程定义的子流形”

$$M = \{(x_1,\cdots,x_n) \in R^n \mid f_1 = \cdots = f_m = 0\},$$

其中 $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式. 其范畴语义为拉回

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ R^n \arrow[r, "(f_1,\cdots,f_m)"'] & R^m, \end{tikzcd}$$

对应 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}$ 中的推出

$$\begin{tikzcd} ? & \mathbb{R} \arrow[l] \\ \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n] \arrow[u] & \mathbb{R}[y_1, \cdots, y_m], \arrow[u] \arrow[l, "y_i \mapsto f_i"] \end{tikzcd}$$

故

$$M = よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)).$$

定义 4.7.21 (直线上原点的一阶无穷小邻域)

定义

$$D := \{x \in R \mid x^2 = 0\} = よ\big(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)\big).$$

我们验证它满足公理 4.7.6, 以外部语言叙述即

命题 4.7.22

$$R^D(A) \simeq A[x]/(x^2).$$

证明. 由预层意象指数对象的构造 (命题 3.3.8 的证明),

$$\begin{aligned} R^D(A) &= \operatorname{Hom}(よ(\operatorname{Spec} A) \times D, R) \\ &\simeq \operatorname{Hom}\big(よ(\operatorname{Spec} A) \times よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)), よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x])\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}\big(よ(\operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)), よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x])\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}}(\mathbb{R}[x], A \otimes \mathbb{R}[x]/(x^2)) \\ &\simeq A \otimes \mathbb{R}[x]/(x^2)) \simeq A[x]/(x^2) \text{ (作为集合)}. \end{aligned}$$

其中用到 $\mathbb{R}$-代数的张量积是 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}$ 中的和, 即 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}^{\mathrm{op}}$ 中的积. □

注 4.7.23

[未完成: 写到前言?] 至此, 我感到有必要介绍对待层的一种观点或一套术语. 范畴 R (这里是某种环范畴) 到 Set 的函子又称 R 上的变集合 (varying set over R, 见 [19] 8.3 节, 回忆 “变集范畴” 1.2.6), R 的每个对象称为一个阶段 (stage), R 的态射称为

阶段之间的转移 (transition), 对于 R 的对象 A 与函子 $X\colon \mathsf{R}\to\mathsf{Set}$, $X(A)$ 的元素称为变集合 X 在阶段 A 的元素.
Grothendieck 的概形是函子 $\mathsf{Ring}\to\mathsf{Set}$, 也即环范畴上的变集合. 对于环 A, 一个概形的 A-点即是这个函子在阶段 A 的元素. 例如 Fermat 概形为函子 $A\mapsto\{(x,y,z)\in A^3\mid x^n+y^n=z^n\}$, 它在阶段 $\mathbb{R}$ 当然有点, 而人们关心的是其在阶段 $\mathbb{Q}$ 是否就有点. 因此, 一个概形可理解为同时在所有环上解一个方程组.

光滑代数

$\mathbb{R}$-代数上的运算是多项式运算; 若将多项式运算扩充为全体 “光滑” 运算, 则可产生一个更接近微分几何的模型.

定义 4.7.24 (光滑代数)

光滑代数 (C^∞-代数) 是指满足如下条件的集合 A: 对每个非负整数 n 与每个 n 元光滑函数 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 都有一个 n 元运算, 称为*光滑运算* $A(f)\colon A^n\to A$, 使得 $f\mapsto A(f)$ 保持复合, 即对于 $h=g\circ(f_1,\cdots,f_k)$, 有

$$A(h)=A(g)\circ(A(f_1),\cdots,A(f_k)).$$

换言之, 光滑代数是 Lawvere 理论 CartSp 的模型 (例 A.8.14). 光滑代数的同态是保持所有光滑运算的映射. 记光滑代数的范畴为 $C^\infty\mathsf{Alg}$.

注 4.7.25

如上定义的 C^∞-代数首先是 $\mathbb{R}$-代数: 考虑 0 元函数 $\mathbb{R}^0\to\mathbb{R}$ 就得到了常量 $A^0\to A$, 考虑加法与乘法函数 $+,\times\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 就得到 A 上的加法与乘法, 考虑映射 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto x(y+z)=xy+xz$, 使用 $f\mapsto A(f)$ 保持复合的条件, 就得到 A 上的分配律, 如此这般.

例 4.7.26

设 M 是光滑流形, 那么 M 上的光滑函数空间 $C^\infty(M)$ 构成光滑代数: 对 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 定义 $A(f)(f_1,\cdots,f_n)=f\circ(f_1,\cdots,f_n)$.

例 4.7.27

$\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 是光滑代数: 对 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 定义

$$A(f)(a_1 + b_1\varepsilon, \cdots, a_n + b_n\varepsilon) = f(a_1, \cdots, a_n) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(a_1,\cdots,a_n)} b_i\varepsilon.$$

$\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 可视为 "无穷小线段上的光滑函数空间".

例 4.7.28

光滑流形上一点处的光滑函数芽 (定义 3.1.6) 构成光滑代数.

类比于 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 是 n 个元素生成的自由 $\mathbb{R}$-代数 (交换含幺代数), 有如下命题.

命题 4.7.29

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 n 个元素生成的自由光滑代数.

证明. 要证明的是对任意光滑代数 A 与任意 n 个元素 $a_1, \cdots, a_n \in A$, 存在唯一的同态 $\varphi\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to A$ 将每个坐标函数 x_i 映射到 a_i. 由定义, 对任意 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, φ 必须把 $f = f \circ (x_1, \cdots, x_n)$ 映射到 $f(a_1, \cdots, a_n)$, 这便唯一确定了 φ; 而它确实将投影 x_i 映射到 a_i: $x_i(a_1, \cdots, a_n) = a_i$. □

类比于位格与位象的关系, 以及环与仿射概形的关系, 我们作如下的定义. 其中记号遵循 Moerdijk 与 Reyes [24].

定义 4.7.30 (光滑处所)

定义光滑处所 (smooth locus, 复数 loci) 的范畴 $\mathbb{L}$ 为有限生成光滑代数范畴的对偶,

$$\mathbb{L} := C^\infty\mathsf{Alg}_{\mathrm{fg}}^{\mathrm{op}},$$

对于光滑代数 A, 记 ℓA 为 A 在对偶范畴中的化身.

我们发现意象 $\widehat{\mathbb{L}} = \mathsf{Fun}(C^\infty\mathsf{Alg}_{\mathrm{fg}}, \mathsf{Set})$ 是综合微分几何某种意义上的模型 (不过它尚且缺少一些微分几何关心的性质).

定义 4.7.31

定义直线

$$R := よ(\ell C^\infty(\mathbb{R})).$$

4.8 量子理论与 Bohr 意象

> A description of physical reality is made in terms of two sets of objects: observables and states.
>
> Ludwig Faddeev,
> *Elementary Introduction to Quantum Field Theory*

一个物理系统最核心的对象是其中的状态与可观测量. 可观测量的代数与状态的空间互为对偶: 例如经典力学中, 可观测量是状态空间上的函数; 反过来, 状态空间上的点可视为可观测量代数到 $\mathbb{R}$ 的代数同态.

量子理论有多种不同的公理化, 我们考虑的公理化使用 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 表示量子系统, 可观测量是 $\mathcal{A}$ 中的自伴元素, 而状态是线性映射 $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. 此外人们常常以一个 Hilbert 空间 H 表示系统中的纯态 (pure states), 可观测量通过一个表示 $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathrm{End}(H)$ 对应到 H 上的自伴算子, 而纯态 $\psi \in H$ 对应一个映射 $\rho\colon A \mapsto \langle\psi|A|\psi\rangle := \langle\psi, \pi(A)\psi\rangle$, 它给出状态 ψ 下可观测量 A 的 "期望值". 在这种公理化的量子理论中, 每个量子系统都对应一个意象, 称为 *Bohr* 意象, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个意象的内语言中成为交换 C^*-代数, 且系统中的状态与可观测量在这个意象的内语言中可理解为一个经典力学系统的状态和可观测量.

C^*-代数, 经典语境与 Bohr 景

定义 4.8.1 (C^*-代数, $*$-子代数)

C^*-代数是 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 代数[9] $\big(\mathcal{A}, \|-\|\big)$, 带有 "伴随" 运算 $(-)^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 满足对任意 $x \in \mathcal{A}$,

- $(a^*)^* = a$,
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ $(\lambda \in \mathbb{C})$,
- $(ab)^* = b^* a^*$,
- $\|a^* a\| = \|a\| \cdot \|a^*\| = \|a\|^2$.

C^*-代数的 $*$-子代数是指关于 $(-)^*$ 封闭的子代数.

[9] Banach 代数是配有乘法的完备赋范线性空间, 满足 $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. 后面我们将要在意象内部使用 C^* 代数的概念, 这需要谨慎地定义实数, 但我们忽略这一问题.

定义 4.8.2 (量子力学系统, 可观测量)

- 一个量子力学系统 (quantum mechanical system) 是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$;
- 系统中的可观测量 (observable) 是 $\mathcal{A}$ 中的自伴元素, 即满足 $a^* = a$ 的元素;
- 系统中的状态 (state) 是线性函数 $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, 满足
  - (正性) $\rho(aa^*) \geq 0$;
  - (归一性) $\rho(1) = 1$.

例 4.8.3 (Hilbert 空间上的有界线性算子的代数)

对于 Hilbert 空间 H, H 上的有界线性算子的代数 $\mathcal{B}(H)$ 是 C^*-代数, 其中 a^* 是 a 的伴随算子. 事实上, 每个 C^*-代数都同构于某个形如 $\mathcal{B}(H)$ 的代数的 $*$-子代数, 因此后者也可作为 C^*-代数的一种具体定义. 量子力学最初就是使用 Hilbert 空间上的自伴算子叙述的.

我们给出经典力学系统的一种定义. 注意经典与量子系统的相似性.

定义 4.8.4 (Poisson 代数)

*Poisson 代数*是 $\mathbb{R}$ 上的含幺交换结合代数 $\mathcal{A}$ 配备一个运算 $\{-,-\}\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 称为 *Poisson 括号*, 满足

- $(\mathcal{A}, \{-,-\})$ 是 Lie 代数;
- 对任意 $a \in \mathcal{A}$, $\{a,-\}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是导子, 也即 $\{a, xy\} = \{a, x\}y + x\{a, y\}$.

例 4.8.5 (辛流形上的光滑函数代数)

在经典力学中, 相空间 (phase space) 是一个辛流形 (X, ω), 其上的光滑函数代数 $C^\infty(X)$ 有自然的 Poisson 代数结构: 对 $f \in C^\infty(X)$ 定义向量场 v_f 满足 $\omega(v_f, -) = df$, 则 $\{f, g\} := \omega(v_f, v_g)$ 给出 $C^\infty(X)$ 上的 Poisson 代数结构.

定义 4.8.6 (经典力学系统)

- 一个经典力学系统 (classical mechanical system) 是一个 Poisson 代数 $(\mathcal{A}, \{-,-\})$;
- 系统中的可观测量 (observable) 是 $\mathcal{A}$ 中的元素;

- 系统中的状态 (state) 是线性函数 $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, 满足
  - (正性) $\rho(a^2) \geq 0$;
  - (归一性) $\rho(1) = 1$.
- 系统中的纯态 (pure state) 是满足上面条件的代数同态 $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

注 4.8.7 (相空间上的点对应纯态)

由定义 4.8.6, 对于辛流形 (X, ω), X 上的一个点 p 对应一个纯态 $C^\infty(X) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$. 在 X 为紧流形的情形, 可以证明纯态 $C^\infty \to \mathbb{R}$ 一定形如 $f \mapsto f(p)$.

量子力学中的 Heisenberg 不确定性原理表明, 不交换的可观测量不可同时确定, 而一族相交换的可观测量可以同时确定. 因此我们格外关注那些交换的子代数. 因为一个状态对应的函数 $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 只有在交换的子代数上局部地谈论才有意义, 我们自然应当视之为交换子代数范畴上的一个层.

定义 4.8.8 (经典语境)

对于量子力学系统 $\mathcal{A}$, 称 $\mathcal{A}$ 的一个交换 $*$-子代数为一个经典语境 (classical context). 记 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 为经典语境在包含关系下构成的偏序集.

注 4.8.9

语境这个名字的含义是, 一个可观测量只在某些特定的语境下才有确定的值. 在一个固定的交换 $*$-子代数中, 可观测量的表现无异于一个经典系统, 故称之为经典语境.

这里我们稍微偏题, 介绍偏序集上的层.

偏序集上的层

定义 4.8.10 (Alexandroff 空间)

若一个拓扑空间中开集的任意交仍是开集, 则称其为 *Alexandroff* 空间. 记 Alexandroff 空间构成的 Top 的全子范畴为 AlexSp.

定义 4.8.11 (偏序集上的 Alexandroff 空间)

设 P 为偏序集. 称子集 $Q \subset P$ 为向上封闭集是指对任意 $x \in Q, y \in P$, 若 $x \leq y$, 则 $y \in Q$. 定义 P 上的 *Alexandroff* 空间 $\mathrm{Alex}\, P$ 是以 P 为底层集合, 以向上封闭集为开集的拓扑空间; 它满足定义 4.8.10 的条件. 记 $\uparrow x = \{y \in P \mid x \leq y\}$; 那么所有 $\uparrow x$ 构成 $\mathrm{Alex}\, P$ 的开集基, 且 $\uparrow x$ 是包含 x 的所有开集的交. 由偏序集给出 Alexandroff 空间的构造是一个函子

$$\mathrm{Alex}\colon \mathsf{Poset} \to \mathsf{AlexSp}.$$

命题 4.8.12 (偏序集等价于 T0 Alexandroff 空间)

记 $\mathsf{T0AlexSp} \hookrightarrow \mathsf{AlexSp}$ 为满足 T0 条件 (对任意两个不同的点, 存在开集包含其中一个而不包含另一个) 的 Alexandroff 空间的全子范畴, 则定义 4.8.11 给出了范畴等价

$$\mathrm{Alex}\colon \mathsf{Poset} \simeq \mathsf{T0AlexSp},$$

其逆定义如下: 对一个 T0 Alexandroff 空间, 定义其底层集合上的关系 $\leq$ 使得 $x \leq y$ 当且仅当所有包含 x 的开集都包含 y, 这给出了一个偏序集.

命题 4.8.13

对任意偏序集 P 有范畴等价

$$\mathrm{Presh}(P^{\mathrm{op}}) \simeq \mathsf{Fun}(P, \mathsf{Set}) \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{Alex}\, P).$$

证明. 设 F 为 $\mathrm{Alex}\, P$ 上的层, 它限制在子范畴 $\{\uparrow x \mid x \in P\}^{\mathrm{op}} \simeq P$ 上即给出函子 $P \to \mathsf{Set}$. 另一方面, 对于函子 $G\colon P \to \mathsf{Set}$, 定义 $\mathrm{Alex}\, P$ 上的预层

$$F\colon \mathrm{Open}(\mathrm{Alex}\, P) \to \mathsf{Set}, U \mapsto \lim_{x \in U} G(x),$$

设 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ 为开覆盖, 对任意一族相容的元素 $(s_i \in F(U_i))_{i \in I}$, 设 $s_i = (t_x \in G(x))_{x \in U_i}$, 那么 $s := (t_x)_{x \in U} \in F(U)$ 是满足 $s|_{U_i} = s_i$ 的唯一元素. 这说明 F 是层. 容易验证以上两个构造互逆. $\square$

Bohr 意象

定义 4.8.14 (Bohr 景, Bohr 意象)

对于量子力学系统 A, 定义其 *Bohr* 景为拓扑空间 $\mathrm{Alex}\,\mathcal{C}(A)$, *Bohr* 意象为 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Alex}\,\mathcal{C}(A))$; 由命题 4.8.13, Bohr 意象也等价于函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}(A),\mathsf{Set})$.

Gelfand 对偶

定义 4.8.15 (Gelfand 谱)

对于交换 C^*-代数 $\mathcal{A}$, 定义其 *Gelfand* 谱

$$\Sigma(\mathcal{A}) := \{C^*\text{-代数同态}\,\lambda\colon \mathcal{A}\to\mathbb{C}\},$$

其拓扑为使得所有映射 $\Sigma(\mathcal{A})\to\mathbb{C}, \lambda\mapsto\lambda(x)$ 都连续的最弱拓扑. 由 Gelfand–Mazur 定理, Gelfand 谱 $\Sigma(\mathcal{A})$ 也是 $\mathcal{A}$ 的极大理想的集合.

$\Sigma(\mathcal{A})$ 上拓扑的定义旨在保证每个元素 $x\in A$ 都对应 $\Sigma(\mathcal{A})$ 上的一个复值连续函数. 如下定理表明这个对应实际上是一个同构; 这是代数–几何对偶的一例.

命题 4.8.16 (Gelfand 对偶)

记 CC^* 为交换 C^*-代数的范畴, CHaus 为紧 Hausdorff 空间的范畴, 那么 Gelfand 谱给出反变函子 $\Sigma\colon \left(\mathsf{CC}^*\right)^{\mathrm{op}}\to\mathsf{CHaus}$, 且有范畴等价

$$\left(\mathsf{CC}^*\right)^{\mathrm{op}} \underset{C(-,\mathbb{C})}{\overset{\Sigma}{\rightleftarrows}} \mathsf{CHaus},$$

其中 $C(X,\mathbb{C})$ 是空间 X 上复值连续函数的 C^*-代数.

Gelfand 对偶的证明需要选择公理 (命题 1.3.65), 从而不能在一般的意象中使用. 选择公理此处用于构造空间的点; 若将紧 Hausdorff 空间推广为*无点拓扑学*中的相应概念——*紧完全正则位象* (compact completely regular locale), 则可得到 Gelfand 对偶的构造性证明 (见 [10]), 从而可以将其推广到任何意象.

定义 4.8.17 (谱预层)

对于语境 $A_1\subset A_2$, 有限制映射 $\Sigma(A_2)\to\Sigma(A_1)$. 这定义了 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 上的预层 Σ.

注 4.8.18

预层 Σ 整合了所有经典语境的几何信息.
一般而言, 一个可观测量只能给出预层 Σ 的局部截面, 而无法给出整体截面.

Bohr 意象中对象 Σ 的构造可视为将 Gelfand 谱的构造由交换代数推广到非交换代数, 成为与交换子代数相对偶的空间的系统. 它实际上是 Bohr 意象中的内蕴位象 (internal locale). 而交换子代数的全体构成 Bohr 意象中的一个*内蕴代数*. 由此, Bohr 意象的内语言允许我们像谈论经典态一样谈论量子态.

Bohr 意象中的命题

在一个经典系统中, 命题是状态空间的子集, 表示这个命题在何种状态下成立. 类似地, 量子系统中的命题是预层意象中 Σ 的子对象, 或称子函子.

4.9 Cohen 力迫法

1874 年, Georg Cantor 证明了自然数与实数 (又称连续统) 之间不存在一一对应[10]. Cantor 接着于 1878 年提出了*连续统假设* (continuum hypothesis),

$$\boxed{\text{在自然数集合 } N \text{ 与连续统 } PN \text{ 之间不存在其它的基数.}}$$

1940 年, Kurt Gödel 证明连续统假设与 Zermelo–Fraenkel 集合论相容. 1963 年, Paul Cohen 证明了连续统假设独立于带有选择公理的 Zermelo–Fraenkel 集合论 (ZFC), 即 ZFC 既不能证明, 也不能证伪连续统假设.

在 1.3 节我们介绍了 Boole 意象. 我们可以在这样的意象中做 “经典数学”. 下面的内容本质上等同于 Cohen 证明连续统假设独立于 ZFC 所使用的方法, 只不过翻译到了意象的语境.

命题 4.9.1

存在一个 Boole 意象, 其中选择公理成立, 而连续统假设不成立.

基础知识

回忆任何意象上都有一个 Lawvere–Tierney 拓扑 $\neg\neg$. 有趣的是, 它总是给出一个 Boole 意象.

[10] 不过他的第一个证明并非现在流行的对角线论证.

命题 4.9.2

对任意意象 $\mathcal{C}$, $\mathrm{Sh}_{\neg\neg}\mathcal{C}$ 为 Boole 意象.

证明. 由 Boole 意象的内语言刻画 (4.1.19), 我们要在 $\mathrm{Sh}_{\neg\neg}\mathcal{C}$ 中证明 $\forall p \in \Omega(p \vee \neg p)$. [**未完成:**] □

定义 4.9.3 (基数的比较)

对于一个意象中的两个对象 X, Y, 若存在单射 $X \to Y$, 且 $\mathrm{Epi}(X, Y) \simeq 0$, 则称 X 的基数小于 Y, 记为 $X < Y$.

回忆 $\mathrm{Epi}(X, Y)$ 的定义 (4.1.15), $\mathrm{Epi}(X, Y) \simeq 0$ 当且仅当公式 $\forall f \in Y^X \neg(\operatorname{im} f = Y)$ 成立.

4.10 凝聚态数学

第 5 章　语法景与分类意象

5.1 语法范畴: 语法–语义对偶

> The importance of syntactic categories lies in the fact that they allow us to associate with a theory (in the sense of axiomatic presentation), which is a 'linguistic', unstructured kind of entity, a well-structured mathematical object whose 'geometry' embodies the syntactic aspects of the theory.
>
> Olivia Caramello, [8]

范畴逻辑学的一个一般性的现象是理论 (一阶逻辑, 类型论等等) 与范畴之间的对应. 某些范畴可以为理论提供*语义* (semantics), 某些理论可以作为范畴的*语法* (syntactics). 语法–语义对偶可类比于代数–几何对偶, 语法是 "代数", 语义则是 "几何". 这一点已经在 2.3 节体现.

附录 A.8 节介绍了 Lawvere 理论. 一个 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 作为范畴可视为其万有模型所在的范畴 (注 A.8.10). 在万有模型中成立的公式恰是理论 $\mathbb{T}$ 中可证的所有公式. 一般地, 对于一阶理论 $\mathbb{T}$, 我们可以构造一个包含万有模型的范畴 $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, 其对象和态射是理论 $\mathbb{T}$ 的任何模型按照 $\mathbb{T}$ 的语法的要求所必须具备的对象和态射.

定义 5.1.1 (几种一阶理论的语法范畴)

设 $\mathbb{T}$ 是符号表 Σ 上的几何 (正则, 凝聚, 一阶) 理论 (定义 B.1.21). 定义其*语法范畴* (syntactic category) $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ 为如下的范畴,

- 其对象是 Σ 上带语境的几何 (正则, 凝聚, 一阶) 公式 $(\vec{x}, \phi)$ 的 α-等价类, α 等价是指两个公式仅有变量名的差异.
- 对象 $(\vec{x}, \phi)$ 到 $(\vec{y}, \psi)$ 的态射 (其中不妨设语境 $\vec{x}, \vec{y}$ 不交) 是公式 $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ 的 $\mathbb{T}$-可证等价类, 满足 $\mathbb{T}$-可证的*函数性* (functionality), 即如下相继式 $\mathbb{T}$-可证:
  - $\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \phi \wedge \psi$;
  - (像的存在性) $\phi \vdash_{\vec{x}} \exists \vec{y}\, \theta$;
  - (像的唯一性) $\theta \wedge \theta[\vec{z}/\vec{y}] \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \vec{y} = \vec{z}$, 这里 $\theta[\vec{z}/\vec{y}]$ 是指将 θ 中的 $\vec{y}$ 替换为 $\vec{z}$, $\vec{y} = \vec{z}$ 表示 $(y_1 = z_1) \wedge \cdots \wedge (y_n = z_n)$.
- 对象 $(\vec{x}, \phi)$ 到自身的恒等态射为 $\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x}')$.
- 态射 $\theta\colon (\vec{x}, \phi) \to (\vec{y}, \psi)$, $\eta\colon (\vec{y}, \psi) \to (\vec{z}, \chi)$ 的复合为 $\exists \vec{y}\, (\eta \wedge \theta)$.

定义 5.1.2 (代数理论的语法范畴)

设 $\mathbb{T}$ 是符号表 Σ 上的代数理论. 定义其*语法范畴* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{alg}}$ 为如下的范畴,

- 其对象是 Σ 上带语境的原子公式的有限合取.
- 对象 $(\vec{x}, \phi)$ 到 $(\vec{y}, \psi)$ 的态射是一列项 $\vec{t} = (t_1(\vec{x}), \cdots, t_m(\vec{x}))$, 使得 $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi(t_1(\vec{x}), \cdots, t_m(\vec{x}))$ 是 $\mathbb{T}$-可证的.

注 5.1.3

由定义, 一个理论的语法范畴依赖于理论所属的类别 (几何, 正则, 凝聚, $\cdots$). 一个代数理论也可以视为凝聚理论, 但一个代数理论的语法范畴与它作为凝聚理论的语法范畴不同.

命题 5.1.4

代数理论 $\mathbb{T}$ 的语法范畴等价于其有限生成模型的范畴的对偶范畴.

类型论的语境范畴

附录 B.4 节简单介绍了类型论.

定义 5.1.5

对于一种类型论 T, 其**语境范畴** (category of contexts) $\mathrm{Con}(T)$ 定义如下.

- $\mathrm{Con}(T)$ 的对象为类型论 T 的语境;
- $\mathrm{Con}(T)$ 中的态射为语境之间的代换.

5.2 分类意象

> The notion of classifying topos really formalizes the notion of "content" of a mathematical theory. If you discover that two theories have the same classifying topos, this means that the two theories tell the same story in different languages.
>
> Olivia Caramello

$$\begin{tikzcd} \text{空间} \arrow[d, squiggly] & \text{分类空间} \arrow[d, squiggly] \\ \text{意象} & \text{分类意象} \end{tikzcd}$$

在代数拓扑中, 对于拓扑群 G 可构造分类空间 BG, 使得 (足够好的) 空间 X 上 G-主丛的等价类一一对应于 X 到 BG 的映射同伦类 (被 BG "分类"),

$$G\mathsf{Bund}(X) \simeq [X, BG];$$

从而恒等映射 id_{BG} 对应着 BG 上一个*万有 G-主丛* $EG \to BG$, "万有" 意指任何 G-主丛都是通过某个映射 $X \to BG$ 将其拉回得到.

类似地, 在许多情形下, 意象 $\mathcal{C}$ 上的一种结构 T (即某个理论的模型) 可由它到一个特殊的意象的态射来分类, 这就是*分类意象*的概念; 某种结构 T 的分类意象可视为 "所有 T 构成的空间", 也可称作 T 的*模空间*. 若将意象 $\mathcal{C}$ 视为空间, 那么 $\mathcal{C}$ 上的一个结构 T 可视为空间的 "每一点" 上都有一个结构 T, 从而这给出 $\mathcal{C}$ 到模空间的一个几何态射. 例如, 设 $\mathcal{E}$ 为环的分类意象, 那么 $\mathcal{E}$ 应当视为 "所有环构成的空间" (上的层范畴), 拓扑空间 X 上的一个环层即是 X 的 "每一点" 上都有一个环, 这等同于 $\mathrm{Sh}(X)$ 到 $\mathcal{E}$ 的一个几何态射. 与分类空间的情况类似, 分类意象到自身的恒等态射对应着其上的 "*万有 T 结构*", 又称*重言* (tautological) T 结构.

G-旋子的分类意象

定义 5.2.1 (群作用)

设 $\mathcal{C}$ 为意象, G 为 $\mathcal{C}$ 中的群, 其乘法映射与单位元分别为 $m\colon G \times G \to G$, $e\colon 1 \to G$. 设 X 为 $\mathcal{C}$ 的对象. 定义 X 上的 *G-左作用*为一个映射 $\rho\colon G \times X \to X$, 满足如下交换图.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "m"'] & G \times X \arrow[d, "\rho"] \\ G \times X \arrow[r, "\rho"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\rho"] \\ & X \end{tikzcd}$$

等价地, 群作用也可定义为半群的同态 $G \to X^X$.

下面的概念是 "空间上的 G-主丛" 的推广, 取自 [18] VIII.2 节.

定义 5.2.2 (意象上的 G-旋子)

设 G 为群. 定义 $\mathcal{C}$ 上的一个 *G-旋子*[1](torsor) 为 $\mathcal{C}$ 的对象 T, 以及 $\underline{G}$ (记号见注 3.8.4) 在 T 上的作用 $\mu\colon \underline{G} \times T \to T$, 满足

(i) 映射 $T \to 1$ 为满射, 即 T "有物" (关于有物与非空的讨论, 见 4.1.14);

(ii) 群作用 μ 诱导同构 $(\mu, \pi_2)\colon \underline{G} \times T \to T \times T$.

记 $\mathcal{C}$ 上的 G-旋子构成范畴为 $\mathsf{Tors}_G(\mathcal{C})$, 其中态射是保持 G-左作用的映射.

[1] Torsor 似乎没有通行的中文译名, 这可能是因为它在拓扑学中一般被称作*主丛*. 这里我跟随我的一位老师将其译为*旋子*.

例 5.2.3 (集合范畴中的 G-旋子)

由于集合范畴 Set 是一个点上的层范畴, Set 中的 G-旋子即是 "一个点上的 G-主丛", 即一个非空集合 T, 带有 G-左作用 $\mu\colon G\times T\to T$, 满足 $(\mu,\pi_2)\colon G\times T\to T\times T$ 为双射. 后一个条件等价于这个作用是自由且传递的: "自由" 等价于 $(\mu,\pi_2)\colon G\times T\to T\times T$ 为单射, "传递" 等价于其为满射.
另一种看法是, 两个映射 $\mu,\pi_2\colon G\times T\to T$ 给出了一个范畴 (具体地, G 在 T 上作用的*作用群胚*) 的箭头集合到对象集合的两个映射, 分别将一个箭头映射到其终点与起点. 那么 $(\mu,\pi_2)\colon G\times T\to T\times T$ 为双射就是说, 作用群胚的任何两个对象 x,y 之间有且仅有一个态射 $x\to y$.

例 5.2.4 (空间上的 G-主丛)

仍设 G 为离散群. 拓扑空间 X 上的 G-主丛等价于平展映射 $E\to X$, 带有 X 上的 G-左作用 $\underline{G}\times E\to E$, 使得每个纤维 E_x 非空且带有 G 的自由传递作用. 这等价于层意象 $\mathrm{Sh}(X)$ 上的 G-旋子.

就像分类空间 BG 上有万有 G-主丛, 意象 $G\mathsf{Set}$ 上有*万有 G-旋子*; 它就是 G 在自身上的 G-右作用, 记为 R_G.

首先说明 R_G 是 $G\mathsf{Set}$ 上的 G-旋子. 回忆几何态射 $\gamma\colon G\mathsf{Set}\to\mathsf{Set}$ (例 3.8.23), 其逆像函子 $\gamma^*\colon\mathsf{Set}\to G\mathsf{Set}$ 将集合对应到其自身, 带有平凡 G-右作用; 直像函子 $\gamma_*\colon G\mathsf{Set}\to\mathsf{Set}$ 将 G-集合对应到其不动点集. 群作用 $\mu\colon\underline{G}\times R_G\to R_G$, $(g,h)\mapsto gh$ 是 G-集合的态射, 因为*左作用与右作用交换*, $\mu(g,hk)=ghk=\mu(g,h)k$. 映射 $(\mu,\pi_2)\colon\underline{G}\times R_G\to R_G\times R_G$ 为 $(g,h)\mapsto(gh,h)$, 从而为 G-集合的同构.

命题 5.2.5 (万有 G-旋子)

R_G 是万有 G-旋子, 即对任何意象 $\mathcal{C}$ 上的 G-旋子 T, 有一对伴随

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & G\mathsf{Set}, \arrow[l, shift right, "-\times_G T"'] \end{tikzcd}$$

且有 $T\simeq R_G\times_G T$. 这一构造给出了范畴等价

$$\mathsf{Tors}_G(\mathcal{C})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos}(\mathcal{C},G\mathsf{Set}).$$

顾名思义, 这对伴随是 "张量–同态伴随" 的类比, 参见命题 3.8.19, 3.8.27.

证明. 略. 我们仅给出这一对函子的定义.

- 因为 T 带有 G-左作用, 所以对 $\mathcal{C}$ 的对象 X, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ 带有自然的 G-右作用. 这给出了函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)\colon \mathcal{C} \to G\mathsf{Set}$.
- 设集合 Y 带有 G-右作用. 定义 $\mathcal{C}$ 的对象 $Y \times_G T$ 为

$$Y \times_G T := \mathrm{coeq}\left(\, \underline{Y} \times \underline{G} \times T \rightrightarrows \underline{Y} \times T \,\right),$$

其中两个映射分别是 $\underline{G}$ 右作用于 $\underline{Y}$ 和左作用于 T. 参考定义 3.8.15.

$\square$

意象上的旋子是一个理论的模型.

定义 5.2.6 (G-旋子的理论)

设 G 为离散群, 定义 G-旋子的理论 $\mathbb{T}_G$. 其中只有一个类型 T, 对每个元素 $g \in G$ 都有一个一元函数符号 g, 公理如下.

- (群作用) 对每一对 $g, h \in G$ 有一条公理 $\vdash_x g(hx) = (gh)x$ (注意这里没有用到任意量词 $\forall$);
- (有物) $\vdash \exists x.\top$;
- (自由性) 对每一对不同的 $g, h \in G$ 有一条公理 $(gx = hx) \vdash_x \bot$ (同上, 这里没有用到 $\forall$);
- (传递性) $\vdash_{(x,y)} \bigvee\limits_{g \in G} gx = y$.

理论 $\mathbb{T}_G$ 是一种几何理论 (定义 B.1.21), 因为它用到了 “真” $\top$, 存在量词 $\exists$, “假” $\bot$ 和无穷析取 $\bigvee$.

对象的分类意象

命题 5.2.7 (对象分类子)

记 Fin 为有限集合的范畴. 意象 $\mathsf{Set}^{\mathsf{Fin}}$ 是对象分类子 (object classifier), 即对任何意象 $\mathcal{C}$, 有范畴等价

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}^{\mathsf{Fin}}).$$

证明. $\mathsf{Fin}^{\mathrm{op}}$ 是一个对象自由生成的有限乘积范畴, 也即对任何具有有限乘积的范畴 $\mathcal{C}$, 其对象等同于保持有限乘积的函子 $\mathsf{Fin}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$. 而由自由余完备化的性质 (命题 A.4.9), 后者又对应一个函子 $\mathsf{Set}^{\mathsf{Fin}} = \widehat{\mathsf{Fin}^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{C}$, 其保持有限乘积与任意余极限. $\square$

子终对象的分类意象

考虑范畴 $2=\{\bullet \longrightarrow \bullet\}$. 例 1.2.6 介绍的 “变集范畴” $\mathsf{Fun}(2,\mathsf{Set}) \simeq \widehat{2}$ 还有一个特殊的名字叫 *Sierpiński 意象*, 因为它与 Sierpiński 空间有关.

命题-定义 5.2.8 (Sierpiński 空间)

开集函子 $\mathrm{Open}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ 是可表函子, 其表示对象称为 *Sierpiński 空间*.

[未完成:]

群的分类意象

本节构造群的分类意象. 群是一种 Lawvere 理论 (附录 A.8 节); 下面的论述适用于一般的 Lawvere 理论, 从而逐字逐句地替换可得到环, Boole 代数等结构的分类意象.

设范畴 $\mathcal{C}$ 有有限积. $\mathcal{C}$ 中的群对象构成一个范畴 $\mathsf{Grp}(\mathcal{C})$. A.8 节提到它等同于群的 Lawvere 理论 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$ 到 $\mathcal{C}$ 的保持有限积的函子的范畴. 进一步, 对于两个具有有限积的范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$, 以及保持有限积的函子 $f\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$, 有对应的函子 $\mathsf{Grp}(\mathcal{C})\to\mathsf{Grp}(\mathcal{D})$.

对于意象间的几何态射 $f\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$, 其逆像部分 (见定义 3.8.1) $f^*\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 保持有限极限, 故保持有限积, 从而诱导了函子 $\mathsf{Grp}(\mathcal{D})\to\mathsf{Grp}(\mathcal{C})$; 这表示 $\mathsf{Grp}(-)$ 关于意象是 “反变” 的.

下面我们将构造一个意象 $\mathcal{E}$, 称为*群的分类意象*, 使得有自然的范畴等价

$$\mathsf{Grp}(\mathcal{C}) \simeq \mathsf{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{E}).$$

环的分类意象

[未完成: 单独讲一下和代数几何的关系]

几何理论的分类意象

[未完成: 几何命题理论的 “分类位象”] 2.3.18

定义 5.2.9 (几何理论的语法景和分类意象)

设 $\mathbb{T}$ 为一几何理论.
$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}},)$

[未完成: 以 torsor 的语法景举例]

第 6 章 相对意象

在相对的观点下, 意象之间的几何态射 $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$, 即 “相对于” $\mathcal{S}$ 的 意象, 可视为 $\mathcal{E}$ 是某个景上的 $\mathcal{S}$-值层范畴. 当然, 这里的 “景” 与 “层” 的概念是在 $\mathcal{S}$ 的内语言中谈论的.

6.1

定义 6.1.1 (旋子)

设 $\mathcal{S}$ 为意象, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{S}$ 的内蕴范畴, $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ 为相对意象. 定义 $\mathcal{E}$ 中的 $\mathcal{C}$-旋子为 $\mathcal{S}$-索引函子 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$, 使得

命题 6.1.2 (Diaconescu 定理)

设 $\mathcal{S}$ 为意象, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{S}$ 的内蕴范畴, $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ 为相对意象. 那么有范畴等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}opos/\mathcal{S}}(\mathcal{E}, \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S})) \simeq \mathsf{Tors}(\mathcal{C}, \mathcal{E}).$$

第 7 章 高阶意象

Quite contrary to superficial perception, higher topos theory provides just the mathematical context that physicists are often intuitively but informally assuming anyway.

Urs Schreiber, [27]

$$\begin{tikzcd} \text{集合} \arrow[d, rightsquigarrow] & \text{意象} \arrow[d, rightsquigarrow] \\ \text{空间} & \infty\text{-意象} \end{tikzcd}$$

7.1 ∞-范畴: 单纯集模型

粗略地说, 一个 ∞-范畴含有如下成分: 对象, 对象之间的态射, 态射之间的 2-态射, $\cdots$, k-态射之间的 $(k+1)$-态射, 以至于无穷. 我们使用的 ∞-范畴又称 $(\infty,1)$-范畴, 意为对所有 $k>1$, k-态射都可逆.

在实践中, ∞-范畴有许多不同而可以互相转化的模型, 就像一个算法由许多不同的编程语言实现. 单纯集 (定义 3.3.4) 就是一种实用的 "编程语言". 为了得到具体可感的对象从而产生安全感, 我们先介绍用单纯集表达的一种 ∞-范畴的模型, 它是 Lurie [23] 使用的模型, 也是最简单的模型; 但重要的是后面我们陈述的关于无穷范畴的任何结论都可叙述为模型无关的形式.

定义 7.1.1 (角形)

回忆单纯集 Δ^n 为 $[n]\in\Delta$ 在米田嵌入下的像 $よ([n])$. 对于单射 $[m]\to[n]$, 设其像为 J, 定义单纯集 Δ^J 为对应的态射 $\Delta^m\to\Delta^n$ 的像 (作为 Δ^n 的子对象). 对于 $0\le k\le n$, 定义

$$\Lambda^n_k := \bigcup_{k\in J\neq[n]} \Delta^J,$$

称为*角形* (horn). 其中对应 $0<k<n$ 的角形称为*内角形* (inner horn).

角形是用来描述单纯集模型 ∞-范畴中一些结构的图形. 如下是角形 Λ^2_k $(k=0,1,2)$ 的示意图. 可以看到它们是互不同构的单纯集 (尽管它们的几何实现都是互相同胚的), 其中内角形 Λ^2_1 中的两个箭头可以复合, 而 Λ^2_0,Λ^2_2 中的箭头不能复合.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$$

$$\Lambda^2_0 \qquad\qquad \Lambda^2_1 \qquad\qquad \Lambda^2_2$$

定义 7.1.2 (∞-范畴)

∞-范畴 (又称*拟范畴*) 是满足如下条件的单纯集 $\mathcal{X}$: 对所有整数 $0<k<n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n,\mathcal{X})\to\mathrm{Hom}(\Lambda^n_k,\mathcal{X})$$

是满射; 换言之, 如下提升总存在 (但*不要求唯一*):

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & X. \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

称之为内角形的填充 (filler).
设单纯集 $\mathcal{X}$ 是 ∞-范畴. 定义

- $\mathcal{X}$ 中的对象为 X_0 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^0 \to X$;
- $\mathcal{X}$ 中的态射 (箭头) 为 X_1 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^1 \to X$, 对象 x 上的恒等态射 id_x 为映射 $\Delta^1 \to \Delta^0 \xrightarrow{x} X$;
- $\mathcal{X}$ 中的实心三角形为 X_2 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^2 \to X$, 对于实心三角形 $\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd}$, 称 h 为 f 与 g 的一个复合. (很明显, 复合不是唯一的.) 若 id_x 为 f, g 的一个复合, 则称 g 为 f 的一个逆. (当然, 逆也不是唯一的.)

定义 7.1.3 (单纯集的对偶)

考虑函子 $(-)^{\mathrm{op}}\colon \Delta \to \Delta$. 对于单纯集 $\mathcal{X}$, 定义其对偶 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} := \mathcal{X} \circ (-)^{\mathrm{op}}\colon \Delta \to \mathsf{Set}$.

例 7.1.4 (普通范畴的脉)

回忆一个普通范畴 $\mathcal{C}$ 的脉 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ (例 A.4.14) 定义如下,

$$\mathrm{N}\mathcal{C}_n = \mathsf{Fun}(0 \to 1 \to \cdots \to n, \mathcal{C}),$$

即 $\mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ 的元素是 $\mathcal{C}$ 中连续的 n 个箭头. 由于对任意 $0 < k < n$, Λ^n_k 都包含一条折线 $0 \to 1 \to \cdots \to n$, 故映射 $\Lambda^n_k \to \mathrm{N}(\mathcal{C})$ 总能提升为 $\Delta^n \to \mathrm{N}(\mathcal{C})$, $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ 是一个 ∞-范畴.

注 7.1.5 (∞-范畴单纯集模型的注意事项)

定义 7.1.2 中有两点需要注意; 如果忽视这两点, 就会得到另外两种东西.

- 只有内角形可以填充. 若所有角形都可以填充, 则可证明 $\mathcal{X}$ 的所有态射都可逆, 我们称之为 ∞-*群胚*.
- 内角形填充不要求唯一. 若内角形填充存在且唯一, 则 $\mathcal{X}$ 实际上来自一个普通范畴的脉. 直观上, ∞-范畴是一种 "弱化" 的范畴, 其中的复合是在同伦意义下谈论的. 可以证明[1], 对 ∞-范畴中的两个态射 $f\colon x \to y, g\colon y \to z$, 其所有可能的复合构成一个*可缩 Kan 复形* (定义 7.1.9).

因此, ∞-范畴可视为普通范畴与 ∞-群胚的共同推广.

命题-定义 7.1.6 (∞-群胚, Kan 复形模型)

定义 *∞-群胚* (又称 *Kan 复形*) 是满足如下等价条件之一的 ∞-范畴 $\mathcal{X}$:

- $\mathcal{X}$ 中所有态射都可逆;
- $\mathcal{X}$ 中所有角形都可填充, 即对所有整数 $0 \le k \le n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$$

  是满射.

证明. [未完成:] □

例 7.1.7 (基本 ∞-群胚)

拓扑空间 X 的奇异单纯集 $\mathrm{Sing}\, X$ 是 ∞-群胚, 称为*基本 ∞-群胚* $\pi_\infty(X)$.

命题-定义 7.1.8 (函子, 函子范畴)

定义 ∞-范畴之间的*函子*为单纯集的映射. 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 与任意单纯集 A, 单纯集的指数对象 $\mathcal{X}^A$ 都是 ∞-范畴. 特别地, 对于无穷范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 定义*函子范畴* $\mathsf{Fun}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. 函子范畴中的态射称为*自然变换* (换言之, 两个函子 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 之间的自然变换是单纯集映射 $\Delta^1 \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$).

定义 7.1.9 (范畴等价, 可缩)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 之间的函子 $u\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, 称 u 为一个*等价*是指存在函子 $v\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, 以及两个可逆的自然变换 $uv \to \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \to vu$. 称等价于 Δ^0 的 ∞-范畴是*可缩的*.

定义 7.1.10 (态射集)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 以及其中的对象 x, y, 定义单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x, y)$ 为如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \arrow[d, "{(s,t)}"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x,y)}"'] & \mathcal{X} \times \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

其中 $s, t\colon \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ 将 $\mathcal{X}$ 的态射对应到其起点与终点.
更一般地, 对 $\mathcal{X}$ 中 $n+1$ 个对象 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为如下

[1] https://kerodon.net/tag/0078

的拉回.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0,\cdots,x_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^n,\mathcal{X}) \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r, "{(x_0,\cdots,x_n)}"'] & \mathcal{X}^{n+1} \end{tikzcd}$$

如果 ∞-群胚是空间的模型, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y)$ 就是两点 x,y 之间的道路的空间.

例 7.1.11

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-群胚, x 为其中的对象, 那么单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,x)$ 在同伦论上又叫*环路空间* $\Omega(\mathcal{X},x)$, 其连通分支的集合给出*基本群* $\pi_1(\mathcal{X},x)$.

如下命题表示我们考虑的 ∞-范畴中 "k-态射都可逆" $(k>1)$.

命题 7.1.12

对 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 中的任意两个对象 x,y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y)$ 是 ∞-群胚.

同伦

命题-定义 7.1.13 (态射的同伦, 同伦范畴)

对于两个态射 $f,g\colon x\to y$, 称 f *同伦于* g 是指 g 为 f 与 id_y 的一个复合; 记 $f\sim g$. 态射的同伦为等价关系.
对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 定义其*同伦范畴* $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 为如下的范畴: $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象即为 $\mathcal{X}$ 的对象, 态射为 $\mathcal{X}$ 中态射的同伦类, 态射的复合是良定义的.

证明. 我们证明同伦是一个等价关系: 由下面的示意图以及 ∞-范畴的定义, 可知若 $f\sim g$ 则 $g\sim f$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & y \\ y \arrow[r, "\mathrm{id}_y"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_y"] & y \arrow[u, "\mathrm{id}_y"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

有趣的是, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ (视为单纯集), 同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 正是 $\mathcal{X}$ 在 Cat 中的几何实现 (例 A.4.14). 它是将 ∞-范畴 "截断" 为 1-范畴的结果.

命题 7.1.14

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, 考虑函子 $\mathcal{X} \to \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}))$ 将 $\mathcal{X}$ 的点映射到 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象, n-单形映射到 $\mathrm{Ho}(X)$ 的连续 n 个态射. 那么这个函子给出了范畴的同构

$$|\mathcal{X}| \simeq \mathrm{Ho}(\mathcal{X}),$$

其中 $|-|$ 是例 A.4.14 提到的脉函子的左伴随.

同伦范畴还可通过单纯范畴定义: 由定义 7.1.23, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, $\mathfrak{C}[\mathcal{X}]$ 是一个 sSet-充实范畴; 将其中的态射单纯集替换为连通分支便得到同伦范畴. 见 HTT [23] 定义 1.1.5.14. 总结起来, 我们有如下图表.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[rr, shift left, "\mathrm{Ho}"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] \arrow[dr, shift left, "{\mathfrak{C}[-]}"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Cat} \arrow[ll, shift left, "\mathrm{N}"] \arrow[dl, shift left, "i"] \arrow[dl, phantom, "\perp"] \\
& \mathsf{sCat} \arrow[ul, shift left, "\mathrm{N}^c"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{ho}"] &
\end{tikzcd}$$

我们还需要描述 ∞-范畴的全子范畴.

定义 7.1.15

设 $\mathcal{C}$ 是 ∞-范畴, $\mathcal{S} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 是其同伦范畴的子范畴. 定义 $\mathcal{S}$ 张成的 $\mathcal{C}$ 的全子范畴为如下 (作为单纯集的) 拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \times_{\mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
\mathcal{S} \arrow[r] & \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))
\end{tikzcd}$$

单纯范畴

∞-范畴的另一种模型是用单纯范畴描述的, 其优点包括

- 用单纯范畴模型方便给出某些具体的 ∞-范畴以及函子;
- 单纯范畴中态射的复合唯一定义;

但这种模型的同伦论较难处理.

定义 7.1.16 (单纯范畴)

单纯范畴是指充实于 sSet 的范畴. 具体地, 我们有一个对象集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 对 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有一个单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 对 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有恒等态射 $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Hom}(x, x)$, 对 $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有单纯集映射

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z),$$

满足结合律与幺元律.
等价地, 单纯范畴也可定义为小范畴范畴 Cat 中的内蕴单纯集 $\mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$, 满足 "对象的单纯集" $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \mathrm{Ob} \circ \mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 是常值单纯集.
记 (小) 单纯范畴的范畴为 sCat, 其中的态射是单纯范畴之间的 sSet-充实函子.

定义 7.1.17 (纤维性单纯范畴)

若单纯范畴 $\mathcal{C}$ 的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 均为 Kan 复形 (即前面定义的 ∞-群胚), 则称之为*纤维性* (fibrant) 单纯范畴; 它是 ∞-范畴的另一种模型. 换言之, ∞-范畴可视为充实于 ∞-群胚的范畴.

例 7.1.18 (拓扑空间范畴)

拓扑空间范畴 Top 具有单纯范畴结构:

$$\mathrm{Hom}(X, Y)_n := \{\text{连续函数 } |\Delta^n| \times X \to Y\ \}.$$

命题-定义 7.1.19 (∞-范畴的极大子 ∞-群胚)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴. 记 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为所有边都可逆的单形 $\Delta^n \to \mathcal{X}$ 构成的子单纯集, 则 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为 $\mathcal{X}$ 的*极大子 ∞-群胚*, 即任何 ∞-群胚到 $\mathcal{X}$ 的函子唯一地穿过 $\mathcal{X}^{\simeq}$; ∞-群胚 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 又称 $\mathcal{X}$ 的*核心* (core). (关于普通范畴的极大子群胚, 见例 A.2.7.)

例 7.1.20 (∞-范畴的单纯范畴)

记 $\infty\mathsf{Cat}$ 为 (小) ∞-范畴的范畴 (它是一个普通范畴), 对 ∞-范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 定义 $\mathrm{Hom}_{\infty\mathsf{Cat}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为 $\mathsf{Fun}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的极大子 ∞-群胚; 这样 $\infty\mathsf{Cat}$ 构成一个纤维性单纯范畴.

例 7.1.21 (链复形范畴)

设 R 为环, $\mathsf{Ch}(R)$ 为 R 上的链复形的范畴. 回忆 R 上的**链复形**是指 R-模范畴中的一个图表

$$M_\bullet = \cdots \to M_2 \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0 \xrightarrow{\partial} M_{-1} \xrightarrow{\partial} M_{-2} \to \cdots ,$$

满足 $\partial \circ \partial = 0$. $\mathsf{Ch}(R)$ 可赋予单纯范畴结构. 首先构造 $\mathbb{Z}$ 上的链复形 $C_\bullet(\Delta^n)$: 对于 $0 \le k \le n$ 其第 k 位置是 Δ^n 的非退化 k-单形自由生成的 Abel 群, 边界映射 $\partial := \sum_{i=0}^{k}(-1)^i d_i$ 来自单形的面映射 d_i. 例如

$$C_\bullet(\Delta^2) = \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to 0 \to \cdots .$$

(熟悉代数拓扑的读者知道, $C_\bullet(X)$ 就是用于计算单纯同调 $H_\bullet(X)$ 的那个链复形.) 定义

$$\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(R)}(M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet(\Delta^n), N_\bullet).$$

这个范畴是 (现代的) 代数 K-理论的起点. 函子 $C_\bullet \colon \Delta \to \mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$ 给出的脉–几何实现伴随限制为单纯 Abel 群与非负位置链复形之间的范畴等价

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sAb} \arrow[r, shift left, "|-|_{C_\bullet}"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathsf{Ch}_{\ge 0}(\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left, "\mathrm{N}"] \end{tikzcd} ,$$

称为 *Dold–Kan* 对应.

定义 7.1.22 (偏序集的道路范畴)

对于偏序集 $(S, \le)$, 定义其**道路范畴**为一个单纯范畴 $\mathrm{Path}(S)$, 其对象集为 S, 对两个元素 $x, y \in S$, 单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}(S)}(x, y)$ 是 "由 x 到 y 道路的空间", 它定义为所有形如 $\{x = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_m = y\}$ 的链构成的偏序集的脉, 其序关系为包含关系的反序 (最大元为 $x \le y$). $\mathrm{Path}(S)$ 中态射的复合即是链的并.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 2 \\ & 1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

S

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, bend left=15, "0\le 2"] \arrow[rr, bend right=15, "0\le 1\le 2"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow"] \arrow[dr, "0\le 1"'] & & 2 \\ & 1 \arrow[ur, "1\le 2"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Path}(S)$

定义 7.1.23 (单纯范畴的融贯脉)

考虑函子 $\mathrm{Path}\colon \Delta \to \mathsf{sCat}$, 其对应的脉–几何实现伴随 (命题 A.4.11, 但要使用 sSet-充实版本)

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[r, shift left, "\mathfrak{C}[-]"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{sCat} \arrow[l, shift left, "\mathrm{N}^{\mathrm{c}}"] \end{tikzcd}$$

中的脉 N^{c} 称为单纯范畴的*融贯脉*[2](coherent nerve). 另一边, “几何实现” $\mathfrak{C}[-]$ 又称为拟范畴的 *Joyal 固化* (rigidification).

我们不加证明地陈述如下技术性引理.

命题 7.1.24

纤维性单纯范畴的融贯脉是 ∞-范畴.

定义 7.1.25 (∞-范畴的 ∞-范畴)

定义 ∞-范畴的 ∞-范畴, 以及 ∞-群胚的 ∞-范畴为

$$\infty\mathcal{C}at := \mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Cat}), \quad \infty\mathcal{G}pd := \mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Gpd}).$$

正如集合范畴 Set 是范畴的 “原型”, 在 ∞-范畴中, 扮演这个角色的是 $\infty\mathcal{G}pd$. 它可视为某种 “空间” (不一定是传统意义上的拓扑空间) 的 ∞-范畴, 其中各阶态射表达了空间之间映射的各阶同伦; 许多作者直接称其为*空间的 ∞-范畴*, 如 HTT [23] 1.2 节. 我们将会看到, 类似于 Set 是终范畴 1 自由生成的余完备范畴, $\infty\mathcal{G}pd$ 是 1 自由生成的余完备 ∞-范畴.

伴随

定义 7.1.26 (∞-范畴之间的伴随)

∞-范畴之间的一对伴随 $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, shift right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$ 是如下资料,

- 两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$,
- 两个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (称为*左伴随*), $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (称为*右伴随*),
- 两个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ (称为*单位*), $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (称为*余单位*);

[2] 又称*同伦融贯脉* (homotopy coherent nerve).

满足如下 2-态射的关系,

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\
& \mathcal{D} \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
\sim \mathrm{id}_F,
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & & \mathcal{D} \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\sim \mathrm{id}_G,
$$

其中第一个式子中 $\sim$ 表示 id_F 是 ∞-范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 中两个态射 $F \to FGF$, $FGF \to F$ 的一个复合.
记 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 为 $\infty\mathcal{C}at$ 的同伦 2-范畴, 其中 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)}(\mathcal{C},\mathcal{D}) := \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D}))$. 由定义, ∞-范畴之间的伴随等同于 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 中的伴随.

命题 7.1.27 (∞-范畴之间的伴随与 Hom-函子)

设 $\mathcal{D} \mathrel{\substack{\xleftarrow{F} \\ \perp \\ \xrightarrow[G]{}}} \mathcal{C}$ 为 ∞-范畴之间的伴随, 则对任意对象 $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, 函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(C), G(D)) \xrightarrow{\eta_C^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

为同伦等价.

极限与余极限

定义 7.1.28 (终对象, 始对象)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{X}$ 中的对象. 若对任意对象 y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(y,x)$ 都可缩, 则称 x 为 $\mathcal{X}$ 的一个终对象. 对偶地定义始对象.
等价的定义是, $\mathcal{X}$ 的终对象是 (唯一的) 函子 $\mathcal{X} \to 1$ 的右伴随 $1 \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ 的始对象是函子 $\mathcal{X} \to 1$ 的左伴随 $1 \to \mathcal{X}$; 这告诉我们终对象和始对象的概念实际上存在于 ∞-范畴构成的 2-范畴中, 见例 A.2.3.

定义 7.1.29 (俯范畴, 仰范畴)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{X}$ 中的对象. 定义俯范畴 $\mathcal{X}/x$ 为如下的拉回:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}/x \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{X}) \arrow[d, "t"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "x"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}
$$

其中 $t\colon \mathsf{Fun}(\Delta^1, X) \to X$ 将 $\mathcal{X}$ 的态射对应到其终点.

由定义, 俯范畴 $\mathcal{X}/x$ 的对象是 $\mathcal{X}$ 中以 x 为终点的箭头. 可以说明 id_x 是 $\mathcal{X}/x$ 的终对象.

定义 7.1.30 (极限, 余极限)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, I 为单纯集 (称为指标集或指标范畴), $F\colon I \to \mathcal{C}$ 为单纯集映射 (称为 $\mathcal{C}$ 中的一个图表). 类似于普通范畴中极限的定义, 我们可以构造一个 (广义的) "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$, 其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象到 F 的锥. 具体地, $\mathcal{C}_{/F}$ 为如下拉回.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{/F} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{C}^I)_{/F} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "\text{常值}"'] & \mathcal{C}^I \end{tikzcd}$$

其中 "常值": $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\Delta^0} \to \mathcal{C}^I$ 是 $I \to \Delta^0$ 的拉回, 它将 $\mathcal{C}$ 的对象 $x\colon \Delta^0 \to \mathcal{C}$ 对应到 x 处的 "常值图表" $I \to \Delta^0 \to \mathcal{C}$, 就像普通范畴的情形一样. 定义图 F 的极限为 "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$ 的终对象; 对偶地, 定义 F 的余极限为 "仰范畴" $\mathcal{C}_{F/}$ 的始对象.

注 7.1.31 (同伦极限, 同伦余极限)

∞-范畴中的极限和余极限与所谓同伦极限, 同伦余极限有关.

拓扑空间范畴 Top 中的极限和余极限不是同伦不变的. 例如, 下图 (a) 的推出是 S^{n+1} (S^n 是 n 维球面, D^{n+1} 是 $(n+1)$ 维圆盘, $S^n \to D^{n+1}$ 是圆盘的边界), 将 D^{n+1} 替换为与之同伦等价的一个点 $*$ 得到图 (b), 但 (b) 的推出却不是 S^{n+1}, 而是一个点 $*$. 相比之下, 同伦极限, 同伦余极限则是同伦不变的概念; 例如 (a), (b) 的同伦推出都是 S^{n+1}.

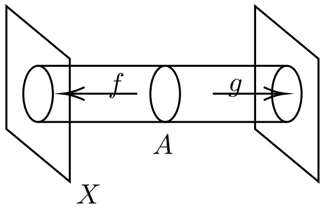
$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & D^{n+1} \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

(a) (b) (c)

对一般的两个映射 $f\colon A \to X$, $g\colon A \to Y$, 图 (c) 的同伦推出可构造为

$$X \sqcup (A \times [0,1]) \sqcup Y \Big/ \sim, \quad \text{其中} \quad (a,0) \sim f(a), (a,1) \sim g(a).$$

直观上这是将以 A 为底的柱形两端分别粘到 X 和 Y 上所得的空间. 对于每个点 $a \in A$, 普通的推出粗暴地将 $f(a), g(a)$ 粘在一起, 而同伦推出只是在两者之间连了一条线段. 连一条线段与直接粘起来看似 (在同伦的意义下) 等价, 实则保留了更多的信息: 因为两点之间可连多条线段, 即可以多种方式粘在一起.



同伦推出的例子可以启发一般的同伦余极限. 设 $T\colon I\to \mathsf{Top}$ 为拓扑空间的图表. 对指标范畴 I 每个长为 n 的态射链 $i_0\to i_1\to\cdots\to i_n$, 以及每个点 $a\in T(i_0)$, 普通的推出会粗暴地将 a 经过这些映射所到的每个点粘在一起, 而同伦推出则是在这些点之间连上一个拓扑 n-单形 $|\Delta^n|$. 具体地, 先由 T 构造一个自然的单纯空间 $\mathsf{s}T\colon \Delta^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Top}$, 使得

$$\mathsf{s}T_n=\coprod_{i_0\to i_1\to\cdots\to i_n}T(i_0).$$

对于单纯空间 $X\colon\Delta^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Top}$, 定义其几何实现为如下的余等化子,

$$|X|:=\operatorname{coeq}\Big[\coprod_{[n]\to[k]}X_k\times|\Delta^n|\rightrightarrows\coprod_n X_n\times|\Delta^n|\Big]$$

其中两个映射分别为

$$\coprod_{\sigma\colon[n]\to[k]}(\sigma^*\colon X_k\to X_n)\times|\Delta^n|,$$
$$\coprod_{\sigma\colon[n]\to[k]}X_k\times(|\sigma|\colon|\Delta^n|\to|\Delta^k|).$$

那么 T 的同伦余极限可构造为

$$\operatorname{hocolim}T:=|\mathsf{s}T|.$$

同伦极限和同伦余极限表现了 ∞-范畴中的极限和余极限. 见 [23] 定理 4.2.4.1.

例 7.1.32

对于 $I=\varnothing$, 空图表 $F\colon I\to\mathcal{C}$ 的极限即是 $\mathcal{C}$ 的终对象.

例 7.1.33 (推出, 拉回)

考虑 $I=\Lambda^2_2$ (见定义 7.1.1 及其后的插图), 则 $F\colon I\to X$ 等同于两个态射 $x\to z$, $y\to z$. 称 F 的极限为 ∞-拉回, 简称拉回, 记为 $x\times_z y$. 对偶地, 形如 Λ^2_0 的图的余极限称为 ∞-推出, 简称推出.

单纯集映射 $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$ 的同伦推出为 $Y \sqcup_{\{0\}\times X} (\Delta^1 \times X) \sqcup_{\{1\}\times X} Z$, 拓扑空间的同伦推出也可类似定义, 不过将 Δ^1 改为区间 $[0,1]$.

定义 7.1.34 (环路空间)

Hom 函子, 预层与 ∞-米田引理

> Perhaps the main technical challenge in extending classical categorical results to the ∞-categorical context is in merely *defining* the Yoneda embedding.
>
> Emily Riehl & Dominic Verity,
> *The Comprehension Construction*

我们希望定义 ∞-版本的预层范畴, 并建立米田引理. 参考注 A.4.2, 我们首先需要一个函子 $\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \infty\mathcal{G}pd$. 这个函子同样可借助单纯范畴构造. 注意这并非 ∞-范畴理论中陈述米田引理的唯一方法.

定义 7.1.35 (预层 ∞-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴. 定义

$$\widehat{\mathcal{C}} := \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \infty\mathcal{G}pd)$$

为 $\mathcal{C}$ 上的预层 ∞-范畴.

命题 7.1.36

[未完成: 自由余完备化]

7.2 ∞-意象

[未完成: HTT Ch.6 ∞-意象]

定义 7.2.1 (自反局部化)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, 定义 $\mathcal{C}$ 的一个自反局部化为函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 其具有全忠实的右伴随. 进一步, 若 a 为正合函子 (保持有限极限), 则称之为*正合局部化*. 这与普通范畴中的自反局部化 (定义 A.3.1) 在语法上完全相同.

如下是 Grothendieck 意象的 ∞ 版本.

定义 7.2.2 ∞-意象

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 若存在 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个正合局部化

$$\widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{X},$$

则称 $\mathcal{X}$ 为 *∞-意象*.

命题 7.2.3 (∞-意象的等价定义, ∞-Giraud 公理)

∞-意象等价于局部小, 可表现, 余完备, 拉回保持余极限, 且内群胚有效的 ∞-范畴.

7.3 ∞-层 ∞-意象及其表现

∞-层是层在 ∞-范畴中的类比. 正如层构成意象, ∞-层也构成 ∞-意象.

Grothendieck 拓扑与层

[未完成: 层, HTT 6.2.2]

7.4 上同调

如下定义的上同调基本涵盖了数学中所有名为 “某某上同调” 的概念.

定义 7.4.1 (上同调)

给定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X, A, 定义 X 的取值于 A 的 0 阶上同调为

$$H^0(X, A) := \pi_0 \operatorname{Hom}(X, A).$$

态射 $c\colon X \to A$ 称为上圈 (cocycle), 态射的同伦 $c_1 \to c_2$ 称为上边界 (coboundary), 等价类 $[c] \in \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ 称为上同调类 (cohomology class). 通常我们考虑的范畴 $\mathcal{C}$ 是 ∞-意象.

例

例 7.4.2 (奇异上同调, K-理论等)

$A = K(\mathbb{Z}, n)$

例 7.4.3 (层上同调)

例 7.4.4 (群上同调)

7.5 n-范畴

定义 7.5.1 (局部对象)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, S 为 $\mathcal{C}$ 中一族态射的集合, 称 $\mathcal{C}$ 的对象 x 为 S-局部对象是指对 S 中任意态射 $f\colon a \to b$,

$$f^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(b, x) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$$

为 ∞-群胚的等价. 这是定义 A.3.9 在 ∞-范畴中的类比.

定义 7.5.2 (球面)

归纳定义 $\infty\mathcal{G}pd$ 的 n 维球面 $S^n\,(n \geq -1)$ 如下:

- $S^{-1} = \varnothing$;
- 对 $n \geq -1$, S^{n+1} 是如图所示的推出.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

定义 7.5.3 (n-群胚)

对整数 $n \geq -2$, 定义 n-群胚为 $\infty\mathcal{G}pd$ 中关于 $\{S^{n+1} \to *\}$ 的局部对象 (定义 7.5.1).

例 7.5.4 (低维群胚的例子)

在同伦等价的意义下,

- (-2)-群胚是一个点.
- (-1)-群胚是空集或一个点.
- 0-群胚是集合, 也即离散群胚.

东西, 结构, 性质

[未完成:]

第 8 章　凝聚意象

8.1　凝聚的动机, 基本概念

拓扑空间范畴 Top 与集合范畴 Set 之间存在如下的伴随四元组,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left=7.5, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift left=-2.5, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, phantom, shift left=0, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left=7.5, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right=2.5, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, phantom, "\perp"] \\
\end{tikzcd}$$

其中

- Π_0 给出拓扑空间的连通分支的集合;
- disc 将集合对应到离散空间;
- Γ 将拓扑空间遗忘为其底层集合;
- codisc 将集合对应到余离散空间 (即只有空集和全集两个开集的拓扑空间).

定义 8.1.1 (凝聚意象)

凝聚意象 (cohesive topos) 是指一个意象 $\mathcal{E}$ 带有如下伴随四元组,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, shift left=9, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right=3, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, phantom, "\perp"] \arrow[l, leftarrow, shift left=3, "\Gamma"] \arrow[l, phantom, shift left=6, "\perp"] \arrow[l, hook, shift left=9, "\mathrm{codisc}"]
\end{tikzcd}$$

使得 Π_0 保持有限乘积.

例 8.1.2 (集合族)

考虑集合族范畴 Fam (例 A.9.2), 又称变集范畴 (例 1.2.6), Sierpiński 意象 (定义 5.2.8). 这里, 我们将一个集合族 $W \to X$ 想象为一个大集合 W 分成了 X 那么多组, 于是有凝聚的直观. Fam 是一个凝聚意象, 其中

- $\Pi_0\colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto X$;
- $\mathrm{disc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}, X \mapsto (\mathrm{id}\colon X \to X)$, 一个集合 X 可以完全拆散分成 X 那么多组;
- $\Gamma\colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto W$;
- $\mathrm{codisc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}$, $X \mapsto (X \to \{*\})$, 一个集合 X 可以完全不拆, 分成 1 组.

例 8.1.3 (单纯集)

单纯集范畴 sSet 是一个凝聚意象, 其中

- $\Pi_0\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, 即 X 的连通分支的集合;
- $\mathrm{disc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, 将集合 X 对应到常值单纯集 (也就是离散单纯集) X;
- $\Gamma\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X_0 = \mathrm{Hom}(\Delta^0, X)$;
- $\mathrm{codisc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, $\mathrm{codisc}(X)_n := X^{n+1}$.

例 8.1.4 (光滑空间)

光滑空间范畴 $\mathrm{Sh}(\mathsf{CartSp})$ (例 3.4.21) 是一个凝聚意象, 其中

- $\Pi_0\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, 即 X 的连通分支的集合;
- $\mathrm{disc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, 将集合 X 对应到常值单纯集 (也就是离散单纯集) X;
- $\Gamma\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X_0 = \mathrm{Hom}(\Delta^0, X)$;
- $\mathrm{codisc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, $\mathrm{codisc}(X)_n := X^{n+1}$.

第 A 章　范畴论基础

本章提供书中使用的一些范畴论概念和结论, 而不是成体系的范畴论教程.

A.1 2-范畴

假设读者已经熟悉范畴, 函子, 自然变换的概念.

定义 A.1.1 (严格 2-范畴)

严格 2-范畴是指 Cat-充实范畴, 其中 Cat 是 (小) 范畴的范畴. 具体地说, 一个严格 2-范畴 $\mathcal{C}$ 包含如下资料,

- 一族对象 $A, B, C, \cdots$;
- 对每两个对象 A, B 有一个范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 其中的对象称为 $\mathcal{C}$ 的态射, 态射称为 $\mathcal{C}$ 的 2-态射;
- 对每三个对象 A, B, C 有一个函子 "复合" $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$;
- 对每个对象 A 有一个对象 "恒等" $i_A\colon 1 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$;

满足如下严格的结合律,[1]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(C,D)\times\mathrm{Hom}(B,C)\times\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\circ_{B,C,D}"] \arrow[d, "\circ_{A,B,C}"'] & \mathrm{Hom}(B,D)\times\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\circ_{A,B,D}"] \\
\mathrm{Hom}(C,D)\times\mathrm{Hom}(A,C) \arrow[r, "\circ_{A,C,D}"'] & \mathrm{Hom}(A,D)
\end{tikzcd}$$

以及如下严格的单位律.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "i_B\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{id}\times i_A"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \\
\mathrm{Hom}(B,B)\times\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\circ_{A,B,B}"'] & \mathrm{Hom}(A,B) & \mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[l, "\circ_{A,A,B}"]
\end{tikzcd}$$

[1] "严格" 的含义是, 这张图中两条路径给出的函子严格相等 (也即构成 1-范畴 Cat 中的交换图). 图中我使用了 "三个范畴的乘积", 而更严格的写法应该分别写出两种顺序的乘积 $(- \times -) \times -$ 与 $- \times (- \times -)$, 并以幺半范畴 Cat 中的结合子相连接 (例如定义 A.1.10 中就完整地写出了结合子). 类似地, 后面的图中我使用了 $\mathrm{Hom}(A, B) \times 1$ 与 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 的同构, 而这也应该理解为幺半范畴中的单位子.

严格 2-范畴的概念不够好, 因为我们不应该要求两个函子相等, 而是应该要求指定一个自然同构.[2]

定义 A.1.2 (弱 2-范畴)

一个弱 2-范畴 (以下简称 2-范畴, 又叫 *bicategory*) $\mathcal{C}$ 包含如下资料,

- 一族对象 $A, B, C, \cdots$;
- 对每两个对象 A, B 有一个范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 其中的对象称为 $\mathcal{C}$ 的态射, 态射称为 $\mathcal{C}$ 的 2-态射;
- 对每三个对象 A, B, C 有一个函子 "复合" $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$;
- 对每个对象 A 有一个对象 "恒等" $i_A\colon 1 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$;
- 对每两个对象 A, B 有两个自然同构 "单位子 (unitor)"
$$\rho_{A,B}\colon (-\circ i_A) \overset{\simeq}{\Rightarrow} (-),\ \ \lambda_{A,B}\colon (i_B \circ -) \overset{\simeq}{\Rightarrow} (-);$$
- 对每四个对象 A, B, C, D 有一个自然同构 "结合子 (associator)"
$$\alpha_{A,B,C,D}\colon \big((-\circ -)\circ -\big) \overset{\simeq}{\Rightarrow} \big(-\circ(-\circ -)\big);$$

满足五边形恒等式, 又叫结合律的融贯性 (coherence).

$$\begin{tikzcd}
 & (-\circ -)\circ(-\circ -) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((-\circ -)\circ -)\circ - \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & & -\circ(-\circ(-\circ -)) \\
(-\circ(-\circ -))\circ - \arrow[r, "\alpha"'] & -\circ((-\circ -)\circ -) \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

以及三角形恒等式, 又叫单位律的融贯性.

$$\begin{tikzcd}
(-\circ i)\circ - \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho"'] & -\circ(i\circ -) \arrow[d, "\lambda"] \\
 & -\circ -
\end{tikzcd}$$

---

[2] 在范畴的 2-范畴 $\mathcal{C}at$ 中, 1-态射 (函子) 之间不能谈论相等, 只能谈论自然同构; 而 2-态射 (自然变换) 之间可以谈论相等. 一般地, 对于 n-范畴 (无论何种模型) 中小于 n 阶的态射, 我们都不能谈论相等, 只能谈论等价; 而对于 n-范畴中的 n-态射则有相等的概念, 如集合中的元素, 范畴中的态射, 2-范畴中的 2-态射等等.

注 A.1.3 (横向复合, “须”)

复合 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ 的函子性给出了 2-态射的横向复合

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C & = & A \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "g'f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\cdot\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

以及所谓 “须” (whiskering) 运算 (也可视为 2-态射与 1-态射的横向复合).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, "g"] & C & = & A \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "gf'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g\cdot\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

例 A.1.4 (范畴的 2-范畴)

范畴, 函子以及自然变换构成一个严格 2-范畴 $\mathcal{C}at$.

例 A.1.5 (群的 2-范畴)

群等同于仅有一个对象, 且所有态射均为同构的范畴. 群构成 $\mathcal{C}at$ 的子 2-范畴 $\mathcal{G}rp$. 我们具体写出 $\mathcal{G}rp$ 中的 2-态射. 对于群同态 $\varphi,\psi\colon G\to H$, 一个 2-态射 $\alpha\colon\varphi\to\psi$ 是一个元素 $h\in H$, 满足如下交换图, 即 $\psi(g)=h\varphi(g)h^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\varphi(g)"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[d, "h"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi(g)"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

例 A.1.6 (幺半范畴)

幺半范畴 (monoidal category) 是范畴 $\mathcal{M}$ 带有如下资料:

- 二元运算 $\otimes\colon\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$;
- “单位” $1\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$;
- 自然同构 “单位子”

$$\rho\colon(-\otimes 1)\xrightarrow{\simeq}(-),\ \ \lambda\colon(1\otimes -)\xrightarrow{\simeq}(-);$$

- 自然同构 “结合子”

$$\alpha\colon\big((-\otimes -)\otimes -\big)\xrightarrow{\simeq}\big(-\otimes(-\otimes -)\big);$$

满足三角形恒等式以及五边形恒等式. 对比定义 A.1.2, 可知幺半范畴 $\mathcal{M}$ 可视为仅有一个对象的 2-范畴, 记为 $\mathcal{BM}$. 具体地, $\mathcal{M}$ 的对象是 $\mathcal{BM}$ 中的 1-态射, 运算 $\otimes$ 是 $\mathcal{BM}$ 中 1-态射的复合, 而 $\mathcal{M}$ 中的五边形恒等式正是 2-范畴 $\mathcal{BM}$ 中的五边形恒等式.

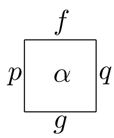
幺半范畴的例子包括

- 模范畴 $R\mathsf{Mod}$ 带有张量积 $\otimes_R$, 单位为 R;
- 范畴的范畴 Cat 带有范畴的乘积 $\times$, 单位为 1;
- 带点拓扑空间范畴带有压缩积 (smash product) $\wedge$, 单位为 S^0;
- 增广单纯形范畴 (augmented simplex category) Δ_+, 即有限全序集 $[-1] = \varnothing, [0] = \{0\}, [1] = \{0,1\}, [2] = \{0,1,2\}, \cdots$ 以及保序映射构成的范畴, 带有运算 $[m] \oplus [n] = [m+n+1]$, 单位为 $[-1]$.

例 A.1.7 (基本 2-群胚)

记 $I = [0,1]$ 为单位区间. 设 X 为拓扑空间, 定义 X 的基本 2-群胚 $\Pi_2(X)$ 为如下的 2-范畴,

- 对象为 X 的点;
- 态射为 X 中的道路 (对两点 p, q, 由 p 到 q 的道路 $f\colon p \to q$ 是连续映射 $f\colon I \to X$, 满足 $f(0) = p, f(1) = q$);
- 2-态射为道路之间的定端点同伦, 再模掉更高阶的同伦; 对于 p 到 q 的两条道路 f, g, 所谓定端点同伦 $\alpha\colon f \to g$ 是连续映射 $\alpha\colon I \times I \to X$, 如下图所示.

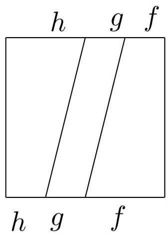


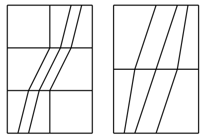
  若两个这样的同伦 $\alpha, \alpha'\colon I \times I \to X$ 相对于正方形的边界同伦, 则将其视为同一个 2-态射.

- 对每三个点 p, q, r, 复合 $\cdot\colon \operatorname{Hom}(q,r) \times \operatorname{Hom}(p,q) \to \operatorname{Hom}(p,r)$ 的定义为

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} g(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ f(2t-1) & 1/2 < t \le 1 \end{cases}.$$

这个复合不满足严格的结合律，但存在如左下图显式的同伦 $\alpha\colon (f\cdot g)\cdot h \to f\cdot(g\cdot h)$. 五边形公理体现为如右下图两个同伦之间的同伦.





考虑点 p 处的恒等态射，即常值道路 i_p; 它到自身的 2-态射构成一个群，即 X 的第二阶同伦群 $\pi_2(X,p)$.

例 A.1.8 (局部离散 2-范畴)

一个普通范畴 $\mathcal{C}$ 可视为 2-范畴: 其态射范畴 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 为离散范畴，即 2-态射仅有恒等. 称这样的 2-范畴为*局部离散 2-范畴* (locally discrete 2-category).

定义 A.1.9 (对偶)

一个 2-范畴 $\mathcal{C}$ 不仅有一种 "对偶", 而是有三种:

- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, 反转 1-态射的方向;
- $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$, 反转 2-态射的方向;
- $\mathcal{C}^{\mathrm{coop}}$, 同时反转 1-态射和 2-态射的方向.

定义 A.1.10 (2-函子)

2-范畴之间一种合适的函子概念是 *2-函子* (又称*伪函子*, pseudofunctor[3]), 它的定义是将严格 2-函子的定义中的等式改为自然同构. 具体地，对于 2-范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$, 一个 2-函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 包含如下资料,

- 对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 A, 有一个 $\mathcal{D}$ 的对象 $F(A)$;
- 对 $\mathcal{C}$ 的每两个对象 A,B, 有一个函子 $F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$;
- (*保持态射的复合*) 对 $\mathcal{C}$ 的每三个对象 A,B,C, 有一个自然同构

$$\gamma_{A,B,C}\colon F_{A,C}(-\circ-) \xrightarrow{\simeq} F_{B,C}(-)\circ F_{A,B}(-);$$

- (保持恒等态射) 对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 A, 有一个自然同构

$$\iota_A\colon F_{A,A}\circ i_A \xrightarrow{\simeq} i_{F(A)};$$

满足如下融贯性等式.

$$\begin{tikzcd}
& F((-\circ-)\circ-) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[rr, "\gamma"] & & F(-\circ-)\circ F(-) \arrow[d, "\gamma"] \\
F(-\circ(-\circ-)) \arrow[d, "\gamma"'] & & & (F(-)\circ F(-))\circ F(-) \arrow[dl, "\alpha"] \\
F(-)\circ F(-\circ-) \arrow[rr, "\gamma"'] & & F(-)\circ(F(-)\circ F(-)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(-)\circ F(i) \arrow[r, "\iota"] & F(-)\circ i \arrow[d, "\rho"] \\
F(-\circ i) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\rho"'] & F(-)
\end{tikzcd}$$

例 A.1.11 (Hom 函子)

对于 2-范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X, 有 2-函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}at$.

- 在对象层面, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)$ 即 $\mathcal{C}$ 本身的资料;
- 对两个对象 A, B, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}\big(\mathrm{Hom}(X,A),\mathrm{Hom}(X,B)\big)$ 来自于复合函子 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B)$;
- 2-函子的定义中其它结构和性质皆出自 2-范畴 $\mathcal{C}$ 的结构和性质.

类似地, 有 2-函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}at$.

2-范畴中的万有性质

[3]注意我们所说的 2-范畴均为弱 2-范畴. 此外有若干种不同的 2-函子的概念, 但 "伪函子" 这个名字不好听, 故以 2-函子称呼这种概念.

命题-定义 A.1.12 (2-范畴的终对象)

设 $\mathcal{C}$ 为 2-范畴, 称 $\mathcal{C}$ 的对象 1 为终对象是指对任何对象 X, $\mathrm{Hom}(X,1)$ 等价于终范畴. 展开所有定义, 这意味着对任何对象 X 存在 1-态射 $X \to 1$, 且对任何两个 1-态射 $f, g\colon X \to 1$, 存在唯一的 2-态射 $\alpha\colon f \to g$, 且 α 为同构.
与普通范畴中类似, 终对象 (乃至一般的极限) 可定义为函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$ 的表示对象.

俯 2-范畴

定义 A.1.13 (俯 2-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 2-范畴, X 为其对象. 定义俯 2-范畴 $\mathcal{C}/X$ 如下,

- 对象为 $\mathcal{C}$ 中的态射 $Y \to X$;
- 态射为 (差一个 2-同构的) 交换图
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\overset{\simeq}{\Rightarrow}"] & Z; \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
- 2-态射为如下的图.
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\overset{\simeq}{\Rightarrow}"] & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

A.2 伴随

2-范畴是谈论伴随的自然的语境.

定义 A.2.1 (伴随)

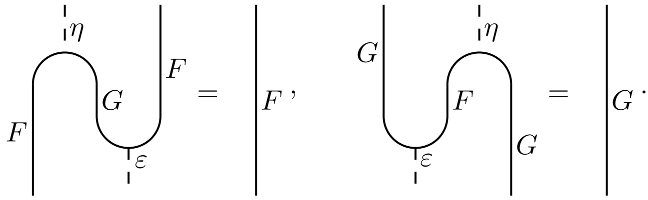
一个 2-范畴中的一组伴随 $\begin{tikzcd} D \arrow[r, shift right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$ 是如下资料:

- 两个对象 C, D,
- 两个态射 $F\colon C \to D$ (称为左伴随), $G\colon D \to C$ (称为右伴随),
- 两个 2-态射 $\eta\colon \mathrm{id}_C \to GF$ (称为单位), $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_D$ (称为余单位);

满足如下 2-态射的等式,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & C \arrow[dr, "F"] & \\
& D \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & D
\end{tikzcd} = \mathrm{id}_F, \qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & C \\
D \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & D \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd} = \mathrm{id}_G\,.$$

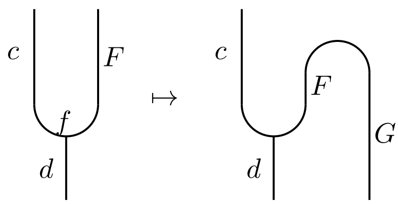
这个条件也可用线图[4]表示为



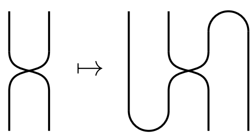
例 A.2.2 (伴随函子)

2-范畴 $\mathcal{C}at$ 中的伴随就是熟知的伴随函子. 对于伴随函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, 如下的线图给出了映射

$$\mathrm{Hom}(Fc, d) \to \mathrm{Hom}(c, Gd).$$



其中我们将对象 c 视为函子 $1 \to \mathcal{C}$. 考虑一个形如  的线图, 我们得到上述映射为同构. 更一般地, 两对伴随给出的如下对应为同构, 有人称为 “搭档” (mates).



例 A.2.3 (终点)

设一个 2-范畴 $\mathcal{C}$ 有终对象 1. 对于 $\mathcal{C}$ 的对象 X, 若 1-态射 $X \to 1$ 有右伴随, 则称 X 有终点. 例如 2-范畴 $\mathcal{C}at$ 的一个对象有终点就是说它有终对象. 因此, 表达 “范畴的

[4]线图是表示一些 2-范畴结构的工具. 在一个图中, 平面区域表示 2-范畴的对象, 平面区域之间的分界线表示 1-态射, 分界线上的分段点表示 2-态射.

终对象” 可使用 $\mathcal{C}at$ 中纯粹 2-范畴的语言, 而无需 “拆开” 这个范畴本身的结构.

命题-定义 A.2.4 (游走的伴随)

如下定义一个 2-范畴 Adj, 其中

- 有两个对象 C, D;
- 态射由两个态射 $F\colon C \to D$, $G\colon D \to C$ 自由生成;
- 2-态射由 $\eta\colon \mathrm{id}_C \to GF$, $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_D$ 在定义 A.2.1 中的关系下自由生成.

那么 Adj 是游走的伴随 (walking adjunction), 即任何 2-范畴 $\mathcal{X}$ 中的一对伴随等同于一个 2-函子 $\mathsf{Adj} \to \mathcal{X}$. 稍具体一些, Adj 中的态射范畴可表示如下.

- $\mathrm{Hom}(C, C) = \mathrm{id}_C \xrightarrow{\eta} GF \rightleftarrows GFGF \cdots$. 记 Δ_+ 为有限全序集 $[-1], [0], [1], [2], \cdots$ 与保序映射构成的范畴 (其中 $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$, $[-1] = \varnothing$), 则 $\mathrm{Hom}(C, C) \simeq \Delta_+$. Δ_+ 是所谓增广单纯形范畴 (augmented simplex category), 即单纯形范畴 Δ 添加一个始对象 $[-1]$. 后面将会提到 (注 A.7.4) 由于 Δ_+ 中的 $[0]$ 是游走的幺半群 (例 B.2.23), 保持幺半范畴结构的函子 $\Delta_+ \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ 等同于 $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ 中的幺半群, 也即 $\mathcal{C}$ 上的单子.
- $\mathrm{Hom}(C, D) = F \underset{\varepsilon}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} FGF \rightleftarrows FGFGF \cdots$. 记 $\Delta_\perp$ 为 Δ 的对象 $[0], [1], [2], \cdots$ 以及其中保持最小元的映射构成的子范畴. 则 $\mathrm{Hom}(C, D) \simeq \Delta_\perp$.
- $\mathrm{Hom}(D, D) \simeq \mathrm{Hom}(C, C)^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{Hom}(D, C) \simeq \mathrm{Hom}(C, D)^{\mathrm{op}}$.

伴随保持极限

现在我们谈论范畴之间的伴随函子.

命题 A.2.5

右伴随保持极限, 左伴随保持余极限.

证明. 由对偶性, 我们仅须证明前一个命题, 即右伴随保持极限. 设有伴随 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathcal{C}$, 设

$X\colon I\to\mathcal{D}$ 是任意图表 (I 是小范畴). 若极限 $\lim_i X_i$ 存在, 则有自然同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G\lim_i X_i) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,\lim_i X_i) && (1)\\
&\simeq \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,X_i) && (2)\\
&\simeq \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,GX_i) && (3)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\lim_i GX_i). && (4)
\end{aligned}$$

由米田引理, 得同构 $G\lim_i X_i\simeq\lim_i GX_i$, 故右伴随保持极限[5]. 该证明可总结于下图中:

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{\mathcal{C}} & & \widehat{\mathcal{D}} \arrow[ll, "F^*"'] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\text{よ}"] & & \mathcal{D} \arrow[ll, "G"'] \arrow[ur, "\text{よ}"'] & \\
& (\widehat{\mathcal{C}})^I \arrow[uu, "\lim"] & & (\widehat{\mathcal{D}})^I \arrow[ll, "F^*"] \arrow[uu, "\lim"'] \\
\mathcal{C}^I \arrow[uu, "\lim"] \arrow[ur, "\text{よ}^I"'] & & \mathcal{D}^I \arrow[ll, "G^I"] \arrow[uu, "\lim"'] \arrow[ur, "\text{よ}^I"'] &
\end{tikzcd}$$

正方体的左右两面 ("米田嵌入保持极限") 用在 (2), (4) 两处; 上下两面表达了 F 是 G 的左伴随, 用在 (1), (3) 两处; "后" 面 (F^* 和 F^* 所在的方块) 是由于 "预层的极限逐点计算". 由于米田嵌入是全忠实函子, 我们得到正方体的 "前" 面 (G 和 G^I 所在的方块) 交换, 而这正是要证的结论. □

例 A.2.6

遗忘函子 $\mathsf{Top}\to\mathsf{Set}$ 同时有左伴随和右伴随.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, "\text{遗忘}"] \arrow[r, phantom, shift left=1.5ex, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=1.5ex, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right=3ex, "\text{离散}"'] \arrow[l, shift left=3ex, "\text{平凡}"]
\end{tikzcd}$$

因此这个遗忘同时保持极限与余极限; 换言之, 拓扑空间的极限与余极限可用底层集合的极限与余极限来计算.

[5]严格地说, 我们不仅要证明存在同构 $G\lim_i X_i\simeq\lim_i GX_i$, 还要证明 (由极限的泛性质给出的) 典范的态射 $G\lim_i X_i\to\lim_i GX_i$ 是同构. 追踪上述一串自然同构的每一步, 可以发现所得的态射 $G\lim_i X_i\simeq\lim_i GX_i$ 确实是由极限的泛性质给出的.

例 A.2.7

群胚是一种特殊的范畴, 即有嵌入 $i\colon \mathsf{Gpd} \to \mathsf{Cat}$. 这个函子同时有左伴随和右伴随.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Gpd} \arrow[r, "i"] & \mathsf{Cat} \arrow[l, bend right, "\pi_1"'] \arrow[l, bend left, "\text{极大子群胚}"] \end{tikzcd}$$

(其中 π_1 给出范畴的基本群胚, 即一个范畴中 "形式地加入所有态射的逆" 得到的群胚.) 因此 i 同时保持极限与余极限.

命题 A.2.8 (伴随产生一对全子范畴的等价)

设有伴随

$$\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C},$$

其单位和余单位分别为 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$, $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. 考虑

- $\mathcal{C}$ 中由使得 $\eta_X\colon X \to GF(X)$ 为同构的 X 构成的全子范畴 $\widetilde{\mathcal{C}}$, 以及
- $\mathcal{D}$ 中由使得 $\varepsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ 为同构的 Y 构成的全子范畴 $\widetilde{\mathcal{D}}$,

那么 F 与 G 限制为一对互逆的范畴等价

$$\widetilde{G}\colon \widetilde{\mathcal{D}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{C}}, \quad \widetilde{F}\colon \widetilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathcal{D}}.$$

证明. 由条件, η 限制为自然变换

$$\widetilde{\eta} = \eta|_{\widetilde{\mathcal{C}}}\colon \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{C}}} \to \widetilde{G}\widetilde{F},$$

且 $\widetilde{\eta}$ 的每个分量 $\widetilde{\eta}_X\colon X \to \widetilde{G}\widetilde{F}(X)$ 均为同构. 因此 $\widetilde{\eta}$ 为自然同构. 类似地, $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\colon \widetilde{F}\widetilde{G} \to \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ 为自然同构. □

例 A.2.9 (Galois 对应)

偏序集之间的 *Galois* 对应是指一对伴随

$$P^{\mathrm{op}} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} Q,$$

也即两个反序的映射 $F\colon Q \to P$, $G\colon P \to Q$, 满足对于 $x \in P, y \in Q$,

$$x \le FG(x), \quad y \le GF(y).$$

命题 A.2.8 给出偏序集的同构

$$\{x \in P \mid x = FG(x)\}^{\mathrm{op}} \simeq \{y \in Q \mid y = GF(y)\}.$$

命题 A.2.10

对于伴随函子 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$,

- F 全忠实当且仅当单位 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ 为同构;
- G 全忠实当且仅当余单位 $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为同构.

证明. 考虑下图,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\eta_Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \arrow[d, "\simeq"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(Y))
\end{tikzcd}$$

F 全忠实, 即上边为自然同构, 当且仅当斜边为自然同构, 即 (由米田引理) η 为自然同构. 第二个结论是对偶的; 考虑下图即可.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_X,Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X),G(Y)) \arrow[d, "\simeq"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FG(X),Y)
\end{tikzcd}$$

□

伴随的自然变换

类似于函子之间的自然变换, 伴随之间也有自然变换

定义 A.2.11 (伴随的自然变换)

设有两对伴随

$$\mathcal{C} \underset{G_1}{\overset{F_1}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathcal{D}\ , \qquad \mathcal{C} \underset{G_2}{\overset{F_2}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathcal{D}\ .$$

定义伴随之间的自然变换 $(F_1 \dashv G_1) \to (F_2 \dashv G_2)$ 为一对自然变换 $\alpha\colon F_1 \to F_2$, $\beta\colon G_2 \to G_1$, 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_2-,-) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1-,-) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G_2-) \arrow[r, "\beta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G_1-)
\end{tikzcd}$$

由米田引理, 给定 α 可以唯一确定 β, 反之亦然.

命题-定义 A.2.12

范畴, 伴随以及伴随之间的自然变换构成一个 2-范畴 $\mathcal{C}at_{\mathrm{Adj}}$.

伴随三元组

定义 A.2.13 (伴随三元组)

范畴 (或一般 2-范畴中的对象) $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 之间的伴随三元组 (adjoint triple) 是如下三个函子与两组伴随,

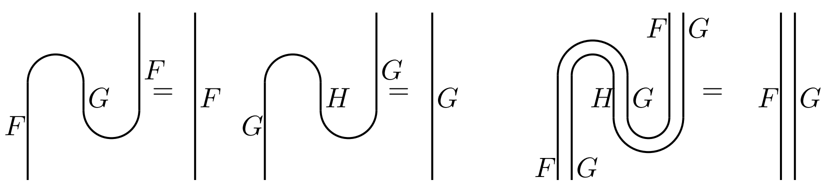
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "G" description] & \mathcal{D}. \arrow[l, bend right, "F"'] \arrow[l, bend left, "H"]
\end{tikzcd}$$

事实上, 伴随三元组 $F \dashv G \dashv H$ 等同于 2-范畴 $\mathcal{C}at_{\mathrm{Adj}}$ 中的伴随 $(F \dashv G) \dashv (G \dashv H)$.

命题 A.2.14 (伴随三元组诱导伴随)

伴随三元组 $F \dashv G \dashv H$ 诱导两对伴随 $GF \dashv GH, FG \dashv HG$.

证明. 对于伴随函子, 结论很容易验证. 对一般的 2-范畴中的伴随, 其证明 (的一部分) 可用线图表示如下.



$\square$

命题 A.2.15

对于定义 A.2.13 中的伴随三元组 $F \dashv G \dashv H$, 第一个伴随的单位 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to GF$ 为同构当且仅当第二个伴随的余单位 $GH \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为同构. 因此, 由命题 A.2.10, F 全忠实当且仅当 H 全忠实.

证明. 考虑如下交换图,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X,Y) & \mathrm{Hom}(X,GH(Y)) \arrow[l, "\mathrm{Hom}(X,\varepsilon_Y)"'] \\ \mathrm{Hom}(GF(X),Y) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(\eta_X,Y)"] & \mathrm{Hom}(F(X),H(Y)) \arrow[l, "\simeq"] \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

伴随给出右边与下边的同构, 故左边为同构当且仅当上边为同构. 由米田引理即证. □

伴随函子的 Frobenius 互反律

Frobenius 互反律是在代数拓扑, 表示论, 逻辑等等许多场合出现的一种重要现象.

定义 A.2.16 (Frobenius 互反律)

设范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 具有乘积, 考虑一对伴随函子 $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "f_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}$. 若对 $\mathcal{C}$ 的任意对象 X 与 $\mathcal{D}$ 的任意对象 Y, 典范的投影映射

$$\pi\colon f_!(f^*Y \times X) \to Y \times f_!(X)$$

为同构, 则称这对伴随满足 *Frobenius 互反律* (reciprocity). 这个概念还可推广到更一般的幺半范畴, 其中乘积推广为某种运算 $\otimes$, 要求 f^* 保持 $\otimes$.

命题 A.2.17 (基变换)

设范畴 $\mathcal{C}$ 存在拉回, 对于态射 $f\colon X \to Y$, 记 $f_! = \Sigma_f$ 为拉回 $f^*\colon \mathcal{C}/Y \to \mathcal{C}/X$ 的左伴随 (命题 1.1.32), 那么这对伴随满足 Frobenius 互反律.

证明. 此时 Frobenius 互反律说的是对任意态射 $U \to X$ 与 $V \to Y$, $f^*V \times_X U \simeq U \times_Y U$. 这是因为下图中两个小方块为拉回, 故大长方形为拉回.

$$\begin{tikzcd} f^*V \times_X U \arrow[r] \arrow[d] & f^*V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

□

命题 A.2.18

设范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 存在拉回, 且为积闭范畴 (定义 1.1.2). 对于伴随函子 $\mathcal{C} \underset{f_!}{\overset{f^*}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{D}$, 其满足 Frobenius 互反律当且仅当 f^* 保持指数对象.

证明. Frobenius 互反律说的是下图的外层方块交换, 而 f^* 保持指数对象说的是下图的里层方块交换; 由伴随的唯一性, 两者等价.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, shift right, "(-)^W"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift right, "(-)\times W"'] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \\
\mathcal{C} \arrow[u, shift left=3, "f_!"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] \arrow[r, shift left, "(-)^{f^*W}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left, "(-)\times f^*W"] \arrow[u, shift right=3, "f_!"'] \arrow[u, phantom, "\vdash"]
\end{tikzcd}$$

□

这个结论的推论包括 “拉回保持指数对象” (命题 1.1.42) 以及位象开映射的等价定义 (命题 2.2.22).

A.3 自反子范畴与局部化

定义 A.3.1 (自反子范畴, 自反局部化)

若一个全子范畴的嵌入 $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 有左伴随 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 则称 i 为*自反子范畴* (reflective subcategory), a 为*自反局部化* (reflective localization).

$$\mathcal{D} \underset{i}{\overset{a}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$$

对于 $\mathcal{C}$ 的对象 c, $a(c)$ 称作 c 的*反映* (reflection). 若进一步有 a 保持有限极限, 则称之为 (左) *正合局部化* (left-exact localization).

注意文献中有些地方以 “局部化” 代指我们所谓正合局部化.

由定义, 每个对象 c 到其反映有典范的态射 $c \to a(c)$, 来自上述伴随的单位 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to i \circ a$; 而且 c 到 $\mathcal{D}$ 的任何对象的态射都唯一地穿过这个态射. 由命题 A.2.10, 一对伴随 $\mathcal{D} \underset{i}{\overset{a}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$ 构成自反子范畴当且仅当对 $\mathcal{D}$ 的所有对象 d, 余单位 $\varepsilon_d\colon ai(d) \to d$ 为同构.

例 A.3.2

将偏序集视为范畴, 那么嵌入 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ 为自反子范畴, 反映函子 $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ 为向上取整. 对于实数 r 与整数 n, $r \le n$ 当且仅当 $a(r) \le n$.

例 A.3.3

Abel 群范畴 Ab 是群范畴 Grp 的自反子范畴, 群 G 的反映是其 Abel 化 (abelianization) $G/[G,G]$. 类似地, 对于环 R, 交换 R-代数的范畴是 R-代数范畴的自反子范畴, 代数 A 的反映是 A 商掉由交换子生成的理想.

例 A.3.4

设 R 为环, 子集 $S \subset R$ 包含 1 且对乘法封闭[6]. R 关于 S 的局部化 $S^{-1}R$ 是在 R 中 "强行使得 S 的元素都可逆" 得到的环, 可构造为 "分式环"

$$\left\{\frac{x}{s} \;\middle|\; x \in R, s \in S\right\} \Big/ \left(\frac{x}{s} \sim \frac{x'}{s'} \Leftrightarrow \exists t \in S, t(xs' - x's) = 0\right).$$

$(S^{-1}R)$-模范畴可视为 R-模范畴的全子范畴, 即

$$(S^{-1}R)\mathsf{Mod} \simeq \{M \in R\mathsf{Mod} \mid \forall s \in S, s \text{ 在 } M \text{ 上的作用可逆}\}.$$

$(S^{-1}R)\mathsf{Mod}$ 作为 $R\mathsf{Mod}$ 的自反子范畴, 其嵌入与反映恰为张量–同态伴随

$$\begin{tikzcd} (S^{-1}R)\mathsf{Mod} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}(S^{-1}R,-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & R\mathsf{Mod}. \arrow[l, shift left, "S^{-1}R\otimes-"'] \end{tikzcd}$$

容易证明 $S^{-1}R \otimes -$ 保持有限极限; 人们称 $S^{-1}R$ 为平坦 R-代数. 在代数–几何对偶中, 局部化可类比为向量丛限制到子空间上的过程.

一个范畴 $\mathcal{C}$ 的全体自反子范畴在包含关系下构成一个偏序集. 关于这个偏序, 有如下实用结论.

命题 A.3.5

设 $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{C}$ 的自反子范畴, 如图,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, hook, shift right, "i_1"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "a_1"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, hook, shift right, "i_2"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "a_2"'] \end{tikzcd}$$

则以下条件等价.

[6]这是一种饱和性条件, 其目的是使用分式计算 (calculus of fractions). 后面我们将介绍范畴的局部化中的类似方法.

(1) i_1 穿过 i_2;

(2) a_1 穿过 a_2;

(3) 存在一对伴随 $\mathcal{D} \underset{i_3}{\overset{a_3}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{E}$ 使得 $i_1 = i_2 i_3$, $a_1 = a_3 a_2$.

证明.

- (3) ⇒ (1), (3) ⇒ (2) 是明显的.
- (1) ⇒ (3). 令 $a_3 = a_1 i_2$ 即可.
- (2) ⇒ (3). 令 $i_3 = a_2 i_1$ 即可.

□

自反子范畴中的极限与余极限可由原来范畴中的极限和余极限得到.

命题 A.3.6 (自反子范畴中的极限与余极限)

设 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 为自反子范畴, 记其反映函子为 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. 对任意图 $X\colon I \to \mathcal{D}$,

- $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i$ 存在当且仅当 $\lim_i^{\mathcal{C}} X_i$ 存在, 且此时有 $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i \simeq \lim_i^{\mathcal{C}} X_i$.
- 当 $\operatorname{colim}_i^{\mathcal{C}} X_i$ 存在时, $\operatorname{colim}_i^{\mathcal{D}} X_i$ 存在, 且有 $\operatorname{colim}_i^{\mathcal{D}} X_i \simeq a(\operatorname{colim}_i^{\mathcal{C}} X_i)$, 注意这里需要取 a 下的像.

证明.

- 假设 $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i$ 存在. 嵌入 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 作为右伴随保持极限, 故 $\lim_i^{\mathcal{C}} X_i$ 存在且同构于 $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i$.
- 假设 $\lim_i^{\mathcal{C}} X_i$ 存在. 那么有自然同构
$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \lim_i^{\mathcal{C}} X_i) &\simeq \lim_i^{\mathsf{Set}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i) \\ &\simeq \lim_i^{\mathsf{Set}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a(-), X_i) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a(-), \lim_i^{\mathcal{C}} X_i),\end{aligned}$$
这说明 $\lim_i^{\mathcal{C}} X_i$ 差一个同构落在 $\mathcal{D}$ 中, 因而 $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i \simeq \lim_i^{\mathcal{C}} X_i$.
- 假设 $\operatorname{colim}_i^{\mathcal{C}} X_i$ 存在. 反映 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 作为左伴随保持余极限, 故 $\lim_i^{\mathcal{D}} X_i$ 存在且同构于 $a(\lim_i^{\mathcal{C}} X_i)$.

□

自反局部化是一般的局部化概念的特例. 在某些范畴中, 一些态射本来不可逆, 但我们希望它们可逆; 通过局部化我们可以构造一个新的范畴让这些态射变得可逆, 同时新的范畴尽可能逼近原来的范畴.

定义 A.3.7 (局部化)

设 $\mathcal{C}$ 为范畴, W 为 $\mathcal{C}$ 中的一族态射. 若存在范畴 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 与函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$ 满足如下条件, 则称之为 $\mathcal{C}$ 关于 W 的*局部化*.

- 对任意 $w \in W$, $a(w)$ 为同构;
- (*万有性质*) 对任意范畴 $\mathcal{E}$ 与函子 $b\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, 若 b 将 W 的元素变为同构, 则 b 穿过 a 有 "唯一" 的分解, "唯一" 是指两种分解至多差一个唯一的自然同构. 更具体地说, 存在函子 $f\colon \mathcal{C}[W^{-1}] \to \mathcal{E}$ 以及自然同构 $\rho\colon b \stackrel{\simeq}{\Rightarrow} fa$, 且对任意两个自然同构 $\rho\colon b \stackrel{\simeq}{\Rightarrow} fa, \rho'\colon b \stackrel{\simeq}{\Rightarrow} f'a$ 都存在唯一的自然同构 $\kappa\colon f \to f'$, 满足 $\rho' = (\kappa \cdot a)\rho$.

注意局部化的万有性质是 2-范畴中的始对象 (定义 A.1.12), 故 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 是在范畴等价 (而非范畴同构) 的意义下唯一确定的.

命题 A.3.8 (自反子范畴是局部化)

对于自反子范畴 (A.3.1)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, hook, shift right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}, \arrow[l, shift right, "a"'] \end{tikzcd}$$

记

$$W = \big\{\mathcal{C} \text{ 中的态射 } f \mid a(f) \text{ 可逆}\big\},$$

则函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出定义 A.3.7 中的局部化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$.

证明. 我们要证明对任意范畴 $\mathcal{E}$ 以及函子 $b\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, 若 b 将 W 的元素变为同构, 则 b 穿过 a 有唯一的分解. 考虑伴随的单位 $\eta\colon \mathrm{id}_\mathcal{C} \to ia$, 作如下自然变换 $\rho\colon b \to bia$.

$$\rho = b \cdot \eta = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_\mathcal{C}"] \arrow[dr, "a"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[r, "b"] & \mathcal{E} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c, 由于 $\eta_c\colon c \to ia(c)$ 被 a 变为同构[7], 按定义它也被 b 变为同构. 因此 ρ 为自然同构.[8] 我们得到一个 b 穿过 a 的分解.

[7]这是由于 "幂等性" $iaia \simeq ia$.

[8]若一个自然变换在每个对象上给出同构, 那么它是自然同构.

对任意一个 b 穿过 a 的分解 $\rho'\colon b \xrightarrow{\simeq} b'a$, 考虑伴随的余单位 $\varepsilon\colon ai \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (由命题 **??** 它对 $\mathcal{D}$ 的每个对象都给出同构), 我们得到如下自然变换 $\kappa\colon bi \to b'$.

$$\kappa = \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & & \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & {} & \mathcal{D} \arrow[ur, "b'"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\rho'"] & \end{tikzcd}$$

那么 κ 为自然同构. 进一步, 由伴随的定义有如下等式,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "a"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho'"] & \mathcal{E} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & {} & \mathcal{D} \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho'"] & \mathcal{E} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd}$$

即 $\rho' = (\kappa \cdot a)\rho$. 这样的 κ 是唯一的, 因为 ρ', ρ 均为自然同构, 而 a 是本质满函子. □

局部对象

在自反局部化 (A.3.8) 中, 子范畴 $\mathcal{D}$ 有一种实用的描述: 它是*局部对象*的子范畴.

定义 A.3.9 (局部对象)

设 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射, X 为 $\mathcal{C}$ 的对象. 若对任意 $(f\colon A \to B) \in S$,

$$\mathrm{Hom}(f, X)\colon \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$$

均为双射 ([1] 将这个条件称作 X *垂直于* f), 则称 X 为 S-*局部对象* (local object). 记 S-局部对象的全子范畴为 $\mathcal{C}_S \hookrightarrow \mathcal{C}$.

直观上, "在 S-局部对象 X 看来", S 中的态射 $f\colon A \to B$ 就像是一个同构.

定义 A.3.10 (S-等价)

设 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射, $f\colon A \to B$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射. 若对任意 S-局部对象 X,

$$\mathrm{Hom}(f, X)\colon \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$$

均为双射, 则称 f 为 S-*等价*.

定义 A.3.11 (局部化态射)

设 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射. 对于态射 $f\colon X \to X'$, 若 X' 为 S-局部对象且 f 为 S-等价, 则称之为 S-*局部化态射*.

例 A.3.12 (完备 Boole 代数作为位格范畴的局部对象)

考虑一个元素 a 生成的自由位格 $\{\bot, a, \top\}$ (定义 2.1.1) 与自由 Boole 代数 $\{\bot, a, \neg a, \top\}$. 位格范畴 Frm 中关于态射

$$\{\bot, a, \top\} \hookrightarrow \{\bot, a, \neg a, \top\}$$

的局部对象为完备 *Boole* 代数. 位格 $\mathcal{O}(X)$ 的局部化态射是"双重否定子位象" $X_{\neg\neg} \hookrightarrow X$ (例 2.2.17).

例 A.3.13 (Abel 群作为群范畴的局部对象)

考虑 2 个元素生成的自由群 F_2 以及自由 Abel 群 $\mathbb{Z}^2$. 群范畴 Grp 中关于态射 $F_2 \to \mathbb{Z}^2$ 的局部对象即为 Abel 群. 群 G 的局部化态射即商映射 $G \to G/[G, G]$.

命题 A.3.14 (局部对象关于极限封闭)

设 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射, $X\colon I \to \mathcal{C}_S \hookrightarrow \mathcal{C}$ 为 S-局部对象的图. 假设 X 的极限 $\lim_i X_i$ 存在, 那么 $\lim_i X_i$ 是 S-局部对象.

证明. 对任意 $(f\colon A \to B) \in S$ 以及 $g\colon A \to \lim_i X_i$, 由于 X_i 为 S-局部对象, 锥 $(\pi_i \circ g\colon A \to X_i)_{i\in I}$ 确定了唯一的锥 $(h_i\colon B \to X_i)_{i\in I}$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \lim_i X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ B \arrow[r, "h_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

□

上述性质的应用之一是预层范畴中的层关于极限封闭 (命题 3.6.1, 3.7.9).

命题 A.3.15 (自反子范畴可视为局部对象的子范畴)

沿用命题 A.3.8 的记号, 子范畴 $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 等价于 W-局部对象的全子范畴 $\mathcal{C}_W \hookrightarrow \mathcal{C}$.

证明. 对于 $\mathcal{D}$ 的对象 X, 由于自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, i(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(a(-), X),$$

知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, i(X))$ 将 W 的元素对应到集合的双射, 即 $i(X)$ 是 W-局部对象.

另一方面, 设 $\mathcal{C}$ 的对象 Y 是 W-局部对象, 我们证明 $\eta_Y : Y \to ia(Y)$ 为同构. 首先, η_Y 是 W 的元素, 由 Y 是 W-局部对象得同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta_Y, Y) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(ia(Y), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y).$$

考虑右边的元素 id_Y 在左边的原像, 知 η_Y 有左逆 $\eta_Y^{-1} : ia(Y) \to Y$. 但 $ia(Y)$ 也是 W-局部对象, 同理可得 η_Y^{-1} 有左逆. 左逆的左逆一定是自身. 这证明了 $\eta_Y : Y \to ia(Y)$ 为同构. □

上面说明自反子范畴是局部对象的子范畴; 另一方面, 我们希望局部对象的子范畴是自反子范畴, 从而通过自反子范畴的 "反映" $c \to a(c)$, 每个对象 c 都被一个尽可能接近的 S-局部对象替代. 这不总是可行的 (例 A.3.12 的完备 Boole 代数范畴不是自反子范畴), 但对于可表现范畴有一些部分的结论.

命题 A.3.16

设 S 是可表现范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射构成的小集合. 那么 $\mathcal{C}_S \hookrightarrow \mathcal{C}$ 为自反子范畴.

见 [1] 命题 1.36.

注 A.3.17 (强饱和态射族)

对于余完备范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射 S, 称其为*强饱和态射族* (strongly saturated class of morphisms) 是指 S 关于沿 $\mathcal{C}$ 中任何态射的推出封闭, 关于箭头范畴 $\mathsf{Fun}(\bullet \to \bullet, \mathcal{C})$ 中的余极限封闭, 且满足三选二性质: 若三个态射 f, g, h 满足 $f = gh$, 只要其中两个属于 S, 则三个都属于 S.

任何一族态射 S 都生成一个最小的强饱和态射族 $\overline{S}$. 可以证明, 在命题 A.3.16 中, 对于 S-局部对象的子范畴 $\mathcal{C}_S \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的左伴随 $a \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$, 被 a 变为同构的态射的族恰为 $\overline{S}$. [23] 5.5.4.15 证明了这一命题的 ∞-范畴版本, 当然它可以逐字翻译为普通范畴的版本.

命题 A.3.18 (正合局部化的判定)

设 $\mathcal{C}$ 具有有限极限, 沿用命题 A.3.8 的记号, a 是正合局部化当且仅当 W 关于基变换稳定, 即 W 的元素的拉回仍是 W 的元素.

证明. 该证明取自 nLab.[9] 命题的一半是显然的: 假设 a 是正合局部化, 那么 a 保持拉回, 而同构的拉回为同构, 故 W 的元素的拉回仍是 W 的元素.

另一方面, 假设 W 关于基变换稳定. 首先, 因为 $\mathcal{C}$ 的终对象显然是 W-局部对象, 所以 a 保持终对象. 下面证明 a 保持拉回. 注意 W 满足 "三选二性质": 若三个态射 f, g, h 满足

[9] `https://ncatlab.org/nlab/show/reflective+sub-(infinity,1)-category`

$f = gh$, 只要其中两个属于 W, 则三个都属于 W. 考虑任意两个态射 $X \to Y \leftarrow Z$. 以下论证中涉及的态射 $X \to a(X)$ 默认为伴随的单位 η_X. 注意 $\eta_X \in W$.

容易说明 $a(X) \times_{a(Y)} a(Z)$ 是 W-局部对象. 因此, 要证明 a 保持拉回, 只需证明 $(X \times_Y Z \to a(x) \times_{a(Y)} a(Z)) \in W$. 将其分解为

$$X \times_Y Z \to X \times_{a(Y)} Z \to a(x) \times_{a(Y)} Z \to a(x) \times_{a(Y)} a(Z).$$

只需证明这三个态射均属于 W.

- 对于第一个态射 $X \times_Y Z \to X \times_{a(Y)} Z$, 它是 $\Delta\colon Y \to Y \times_{a(Y)} Y$ 的拉回 (左下图), 又 $\pi_1\Delta = \mathrm{id}_Y$, π_1 是右下图的拉回.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\Delta"] \\ X \times_{a(Y)} Z \arrow[r] & Y \times_{a(Y)} Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times_{a(Y)} Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & a(Y) \end{tikzcd}$$

- 第二个和第三个态射的原理相同; 第二个态射是如下的拉回.

$$\begin{tikzcd} X \times_{a(Y)} Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times Z \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X \times \mathrm{id}_Z"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\ a(X) \times_{a(Y)} Z \arrow[r, hook] & a(X) \times Z \arrow[r] & a(X) \end{tikzcd}$$

□

命题 A.3.19 (指数理想的判定)

设 $\mathcal{C}$ 为积闭范畴, $\mathcal{D}$ 为自反子范畴, 反映函子为 a. 称 $\mathcal{D}$ 为指数理想 (exponential ideal) 是指对任意 $\mathcal{C}$ 的对象 X 与 $\mathcal{D}$ 的对象 Y, 都有 Y^X 为 $\mathcal{D}$ 的对象 (至多相差一个同构). 那么 $\mathcal{D}$ 为指数理想当且仅当 a 保持有限积.

证明. 由于 a 保持有限积且 $aa = a$, 有自然同构 $a(Z \times X) \simeq a(Z) \times a(X) \simeq a(a(Z) \times X)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z \times X), Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(a(Z) \times X), Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z) \times X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z), Y^X), \end{aligned}$$

故任何态射 $Z \to Y^X$ 唯一地穿过 $Z \to a(Z)$, 这说明 Y^X 是 $\mathcal{D}$ 的对象.

另一方面, 假设对任意 $\mathcal{C}$ 的对象 X 与 $\mathcal{D}$ 的对象 Y, 都有 Y^X 为 $\mathcal{D}$ 的对象. 那么有自然同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z\times X,Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y^X)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z),Y^X)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z)\times X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a(Z)\times a(X),Y).
\end{aligned}$$

故任何态射 $Z\times X\to Y$ 唯一地穿过 $Z\times X\to a(Z)\times a(X)$, 这说明 $a(Z)\times a(X)\simeq a(Z\times X)$. $\square$

分式计算

局部化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 有一种明显的构造: 其对象与 $\mathcal{C}$ 相同, 而态射为折线形的图表

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \bullet \arrow[dl, "w_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & \bullet \arrow[dl, "w_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \cdots & & \bullet \arrow[dl, "w_r"'] \arrow[dr, "f_r"] & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet \arrow[ur, leftarrow] & & \bullet \arrow[ul, leftarrow] & & \bullet
\end{tikzcd} \quad (w_i\in W).$$

实践中未必需要如此复杂的态射. 正如环的局部化 $S^{-1}R$ 的元素可写成分式 $x/s\,(s\in S)$, 我们也希望范畴的局部化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 中态射可写成 fw^{-1} $(w\in W)$, 如下图. 将态射写成这种形式的方法称作*右分式计算*[10]. 这对态射族 W 有一定的要求.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\bullet \arrow[rr, dashed, "fw^{-1}"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

定义 A.3.20 (分式计算)

若范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射 W 满足如下条件, 则称 $(\mathcal{C},W)$ 具有*右分式计算* (calculus of right fractions):

(0) W 包含所有恒等态射, 且关于态射复合封闭;

(1) 如图, 给定 $w\in W$ 与 f, 总存在 $w'\in W$ 与 f' 使下图交换;

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "w'"'] & \bullet \arrow[d, "w"] \\
\bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

(2) 如图, 若 $w\in W$ 余等化 f,g, 总存在 $w'\in W$ 等化 f,g.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed, "w'"] & \bullet \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \bullet \arrow[r, "w"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

[10]这里 fw^{-1} 是一个纯粹形式的记号. 称之为 “右分式” 的原因是 w^{-1} 在右边, 但这种称呼在文献中并不统一.

设计条件 (1)(2) 是为了如下的命题.

命题-定义 A.3.21 (分式计算的构造)

设 $(\mathcal{C}, W)$ 具有右分式计算. 如下构造定义了范畴 $\mathcal{C}[W^{-1}]$.

- 其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象;
- 态射 $X \to Y$ 为 $\mathcal{C}$ 中图表 $fw^{-1} :=$ $X \xleftarrow{w} \bullet \xrightarrow{f} Y$ 的等价类, 其中 $w \in W$;
- 两个态射 fw^{-1}, $f'(w')^{-1}$ 等价是指存在 s, t 使得下图交换, 且 $ws = w't \in W$;

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & & \\
& \bullet \arrow[dl, "w"'] \arrow[drrr, "f"] & & \bullet \arrow[dr, "f'"] \arrow[dlll, "w'"'] & \\
X & & & & Y
\end{tikzcd}$$

  (我们也可将这种等价做成一个 2-态射, 从而形成一个 2-范畴.)

- 态射的复合: 给定图中的 f, w, g, v $(w, v \in W)$, 由定义 A.3.20 (1), 存在 f', v' $(v' \in W)$ 使下图交换.

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl, "v'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
& \bullet \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & \bullet \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

  定义 $(gv^{-1}) \circ (fw^{-1})$ 为 $(gf')(wv')^{-1}$.

证明. 我们需要证明上面的等价关系以及态射复合的良定性. 首先证明一个引理: 在定义 A.3.20 (1) 中, 态射 $f'(w')^{-1}$ 的等价类是唯一确定的. 考虑下图, 给定 f, w, f', w', f'', w'' $(w, w', w'' \in W)$, 取 g, v $(v \in W)$ 使 $w''g = wv$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\widetilde{w}"] & \bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & \bullet \arrow[r, "f''"] \arrow[ddl, "w''"] & \bullet \arrow[dd, "w"] \\
& \bullet \arrow[urr, "f'"'] \arrow[d, "w'"'] & & \\
& \bullet \arrow[rr, "f"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

此时不一定有 $f''g = f'v$, 但有 $wf''g = wf'v$; 由定义 A.3.20 (2), 存在 $\widetilde{w} \in W$ 使得 $f''g\widetilde{w} = f'v\widetilde{w}$. 这证明了 $f'(w')^{-1}$ 与 $f''(w'')^{-1}$ 等价.

下面说明等价关系的传递性. 考虑下图, 给定 $f_1, w_1, f_2, w_2, f_3, w_3$ $(w_1, w_2, w_3 \in W)$, 以

及 p, q, s, t 构成 $f_1w_1^{-1}, f_2w_2^{-1}, f_3w_3^{-1}$ 之间的两个等价, 我们要证明 $f_1w_1^{-1}$ 与 $f_3w_3^{-1}$ 等价.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "n"] \arrow[d, "m"'] & \bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & \bullet \arrow[d, "f_3"] \arrow[dl, "w_3"'] \\
\bullet \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \bullet \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "w_2"'] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "w_1"'] \arrow[urr, "f_1"] & \bullet &
\end{tikzcd}$$

注意 $w_2q, w_2s \in W$. 由前述引理知 $q(w_2q)^{-1}$ 等价于 $s(w_2s)^{-1}$, 即存在 m, n 使得上图交换, 且 $w_2qm = w_2sn \in W$. 那么 pm, tn 给出了 $f_1w_1^{-1}$ 与 $f_3w_3^{-1}$ 之间的等价.

由传递性, 我们还得到等价关系的另一种刻画. 注意到在如下交换图中, fw^{-1} 必然等价于 $f'(w')^{-1}$; 称下图为一个基础等价. 由传递性, 两个态射 $f_1w_1^{-1}$, $f_2w_2^{-1}$ 等价当且仅当它们可以通过一系列基础等价 (方向任意) 相连接.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[r, "t"] \arrow[dl, "w"'] \arrow[drr, "f", near end] & \bullet \arrow[dr, "f'"] \arrow[dll, "w'"', near end] & \\
X & & & Y
\end{tikzcd}$$

我们还需要说明复合的良定性. 注意由前面的引理, 只要给定两个态射 fw^{-1}, gv^{-1} 的代表元 f, w, g, v, 就唯一确定了复合 $(gv^{-1}) \circ (fw^{-1})$. 考虑如下交换图 $(u, v, v', w, w' \in W)$, 有 $(gh)(wu)^{-1} = (g'th)(w'su)^{-1}$. 这说明基础等价给出相同的复合, 故复合不依赖于等价类的代表元的选取.

$$\begin{tikzcd}
& & & \bullet \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & & \\
& \bullet \arrow[dl, "w'"'] \arrow[drr, "f'", near end] & \bullet \arrow[l, "s"'] \arrow[dll, "w", near end] \arrow[dr, "f"] & & \bullet \arrow[r, "t"] \arrow[dl, "v"'] \arrow[drr, "g", near end] & \bullet \arrow[dll, "v'", near end] \arrow[dr, "g'"] & \\
X & & & Y & & & Z
\end{tikzcd}$$

定义函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$ 将态射 $f\colon X \to Y$ 变为态射 $f(\mathrm{id}_X)^{-1}$. 在完成上述所有构造之后, 验证它是局部化不过是例行公事: 对任意函子 $b\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, 若 b 将 W 的元素变为同构, 则可构造函子 $b'\colon \mathcal{C}[W^{-1}] \to \mathcal{E}$, 将态射 fw^{-1} 对应到态射 $b(f)b(w)^{-1}$ (它不依赖代表元 f, w 的选取). 我们发现 $b = b'a$. 余下的细节留给读者. □

上述构造所得的范畴 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 中的同态集可等价地表示如下.

命题 A.3.22

设 $(\mathcal{C}, W)$ 具有右分式计算, 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(X, Y) \simeq \operatorname{colim}_{(X' \to X) \in W} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y).$$

A.4 预层范畴与米田嵌入

固定如下记号: $\mathcal{C}$ 为小范畴, $よ\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}} = \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 为米田嵌入.

米田引理

由 $\mathcal{C}$ 的对象 c, 可得 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c)$. 这事实上是 $\mathcal{C}$ 到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的嵌入.

定义 A.4.1 (米田嵌入)

小范畴 $\mathcal{C}$ 的*米田嵌入*是指函子 $よ\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$, $c \mapsto よ(c) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c)$. 米田嵌入的像 $よ(c)$ 称为*可表函子* (representable functor).

注 A.4.2

米田嵌入是 Hom 函子 $\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 对应的函子 $\mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$. 这是因为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 “范畴的范畴” Cat 中的指数对象.

一个自然变换 $よ(c) \to F$ 由其中 $\mathrm{id}_c \in よ(c)(c)$ 的像 ($F(c)$ 的元素) 唯一决定, 因此有如下的结论.

命题 A.4.3 (米田引理)

对任意 $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, 有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c), F) \simeq F(c),$$

其两个方向的映射分别为

$$\begin{aligned} (\alpha\colon よ(c) \to F) \quad &\mapsto \quad \alpha_c(\mathrm{id}_c) \in F(c), \\ \big((f\colon d \to c) \mapsto (F(f)(a) \in F(d))\big) \quad &\leftarrow\!\shortmid \quad (a \in F(c)) \end{aligned}$$

注 A.4.4

米田引理在逻辑上是平凡的; 它带给我们的观点, 即 $\mathcal{C}$ 的对象 c *可等同于函子* $よ(c)$, 比命题本身更重要.

可表函子的余极限

定义 A.4.5 (元素的范畴)

对 $X \in \widehat{\mathcal{C}}$, 定义 X 的元素的范畴 $\int_{\mathcal{C}} X$ 如下. 其对象为 (c, x), $x \in X(c)$, 态射 $(c, x) \to (d, y)$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon c \to d$, 满足 $X(f)(y) = x$. 由定义, 存在 "投影" 函子 $\pi_X\colon \int_{\mathcal{C}} X \to \mathcal{C}$, $(c, x) \mapsto c$.

与之对偶, 设 $X \in \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$, 定义 X 的元素的范畴 $\int^{\mathcal{C}} X$ 如下. 其对象为 (c, x), $x \in X(c)$, 态射 $(c, x) \to (d, y)$ 为 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon c \to d$, 满足 $X(f)(x) = y$. 此时存在投影函子 $\pi_X\colon \int^{\mathcal{C}} X \to \mathcal{C}$, $(c, x) \mapsto c$.

元素的范畴是一种 Grothendieck 构造 (定义 A.9.9).

注 A.4.6 (元素的范畴同构于 "广义俯范畴")

由米田引理, X 的元素的范畴同构于如下范畴: 其对象为态射 よ$(c) \to X$, 其态射为形如

$$\begin{tikzcd} よ(c) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ よ(d) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

的交换图; 这是 $\widehat{\mathcal{C}}/X$ 的全子范畴. 若将 X 视为 $\mathcal{C}$ 的 "广义元素", 则 X 的元素的范畴可视为 "俯范畴" $\mathcal{C}/X$. 特别地, 当 $X =$ よ(c) 时, X 的元素的范畴同构于 $\mathcal{C}/c$.

在其它文献中, 这个范畴有时也记作 (よ $\downarrow X$) 或 (よ$, X$).

事实上, 所有态射 よ$(c) \to X$ 共同将 X 表示为一个余极限.

命题 A.4.7 (预层为可表函子的余极限)

$\widehat{\mathcal{C}}$ 的对象 X 是如下余极限:

$$X \simeq \operatorname{colim}\left(よ \circ \pi_X\colon \int_{\mathcal{C}} X \to \widehat{\mathcal{C}}\right) = \operatorname{colim}_{よ(c) \to X} よ(c),$$

其万有余锥由所有态射 よ$(c) \to X$ 给出.

证明. 任给余锥 $\left(\phi_{c,x}\colon よ(c) \to Y\right)_{(c,x)}$, 定义态射 $\eta\colon X \to Y$, $\eta_c\colon X(c) \to Y(c)$, $x \mapsto \phi_{c,x}$.

那么下图交换, 并且 η 是唯一使得下图交换的态射.

$$\begin{tikzcd} よ(c) \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "\phi_{c,x}"'] & X \arrow[d, "\eta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

□

例 A.4.8 (单纯集)

对于 $\mathcal{C} = \Delta$ (例 3.3.4), $\widehat{\mathcal{C}}$ 中对象 X 的元素可视为单纯集 X 中的单纯形, 包含退化的单纯形. 此时上述命题即是说 X 等同于其所有单纯形的粘合. 这符合了单纯集是由单纯形组成的直观.

自由余完备化, 脉与几何实现

在上个小节, 我们看到 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 经过某种添加余极限的过程得到的余完备范畴. 称 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的*自由余完备化* (free cocompletion); 以下命题解释了这句话中 "自由" 的含义, 即余完备范畴到一般范畴的 "遗忘" 的左伴随.

命题 A.4.9

设 $\mathcal{C}$ 是 (小) 范畴, $\mathcal{D}$ 是余完备范畴, 那么米田嵌入 $よ\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 给出了等价

$$よ^*\colon \mathsf{Fun}^{\mathrm{colim}}(\widehat{\mathcal{C}}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

其中 $\mathsf{Fun}^{\mathrm{colim}}$ 表示保持余极限的函子构成的范畴. 换言之, 对任意函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 存在本质唯一[11]的保持余极限的函子 $L\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "よ"] \arrow[dr, "F"'] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[d, dashed, "L"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

例 A.4.10

Set 是终范畴 1 的自由余完备化; 这就是说, 对任意余完备范畴 $\mathcal{D}$, 一个保持余极限的函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathcal{D}$ 由对象 $F(1)$ 唯一确定.

事实上我们可以具体写出命题 A.4.9 中的函子 L.

[11] 这里 "本质唯一" 是指两个满足条件的函子之间差一个唯一的自然同构. 这也是 2-范畴中的泛性质 (定义 A.1.12).

命题 A.4.11

设 $\mathcal{C}$ 是 (小) 范畴, $\mathcal{D}$ 是余完备范畴. 对任意函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 存在一对伴随

$$\widehat{\mathcal{C}} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathcal{D},$$

其中 $R\colon \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{C}}$, $R(d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F-, d)$; 其左伴随 L 由如下余极限给出:

$$L(X) = X \otimes_{\mathcal{C}} F \operatorname{colim}\left(F \circ \pi_X \colon \int_{\mathcal{C}} X \to \mathcal{D}\right) = \operatorname{colim}_{よ(c)\to X} F(c).$$

作为左伴随, L 自然保持余极限 (命题 A.2.5). 我们有时称 L 为 F 的*米田扩张*.

注 A.4.12

上面的伴随可解读为脉 (nerve, 函子 R) 与几何实现 (geometric realization, 函子 L) 的伴随, 其中 $\mathcal{C}$ 是某种几何图形构成的范畴 (如下面例子中的 Δ). 脉与几何实现的概念由 Daniel Kan 1958 年的文章 *Functors involving c.s.s complexes* 提出. 这篇文章也首次引入了 *Kan 扩张* (定义 A.6.1). 事实上, *几何实现是沿米田嵌入的左 Kan 扩张*.

注 A.4.13

上面的伴随还是一种张量–同态伴随. 若将右伴随 R 理解为 "同态集" (它是定义 3.8.26 的进一步推广); 则左伴随 L 也可记为 "张量积" $- \otimes_{\mathcal{C}} F\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$.

例 A.4.14 (单纯集的几何实现)

设 $\mathcal{C} = \Delta$ (例 3.3.4), $\mathcal{D} = \mathsf{Top}$ 为拓扑空间范畴. 我们知道 Top 是余完备的. 设 $F\colon \Delta \to \mathsf{Top}$ 将 $[n]$ 对应到 n-维标准拓扑单形, 也即 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 $(n+1)$ 个基向量的闭包. 那么命题 A.4.11 给出了 "脉–几何实现伴随"

$$\mathsf{sSet} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|-|}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Top}\ , \quad \mathrm{Sing}(X)_n = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\Delta^n, X),$$

其中 "脉" 函子 Sing 给出拓扑空间的*奇异单纯集* (singular simplicial set), 而几何实现 $|-|$ 将单纯集 X 对应到一个 CW 复形

$$|X| = \operatorname{colim}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|,$$

它是 X 的所有单形 $\Delta^n \to X$ 的几何实现 "粘起来" (取余极限) 的结果.

在以上讨论中, 可将 Top 改为小范畴的范畴 Cat ($F\colon \Delta \to \mathsf{Cat}$ 将 $[n]$ 对应到范畴 $0 \to 1 \to \cdots \to n$), 得到范畴版本的脉–几何实现伴随

$$\mathsf{sSet} \underset{\mathrm{N}}{\overset{|-|}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathsf{Cat}\ ,\quad \mathrm{N}(\mathcal{C})_n := \mathsf{Fun}(0 \to 1 \to \cdots \to n, \mathcal{C}).$$

在 ∞-范畴理论中我们还会用到单纯集与单纯范畴的脉–几何实现伴随

$$\mathsf{sSet} \underset{\mathrm{N}^{\mathrm{c}}}{\overset{\mathfrak{C}[-]}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathsf{sCat}\ ,$$

见定义 7.1.23.

例 A.4.15 (几何空间与函子 Ring $\to$ Set 的几何实现)

(本例需要一些背景知识.) 定义*几何空间* (又称*局部环化空间*) $(X, \mathcal{O}_X)$ 为拓扑空间 X 配备环层 $\mathcal{O}_X$, 使得每个茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ (定义 3.1.6) 为局部环. 我们知道几何空间的范畴 GeoSp 是余完备的.

设 $\mathcal{C} = \mathsf{Aff}$ 为仿射概形的范畴 (它等价于交换环范畴的对偶 $\mathsf{Ring}^{\mathrm{op}}$), $\mathcal{D} = \mathsf{GeoSp}$ 为几何空间的范畴. 我们知道仿射概形是几何空间, 即存在嵌入函子 $F\colon \mathsf{Aff} \to \mathsf{GeoSp}$. 注意到 $\widehat{\mathcal{C}} \simeq \mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}, \mathsf{Set})$. 那么命题 A.4.11 给出 “脉–几何实现伴随”

$$\mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}, \mathsf{Set}) \underset{R}{\overset{|-|}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathsf{GeoSp},$$

其中右伴随 R 给出几何空间的*点函子* (functor of points), 它是代数几何中表示几何空间的一种方便工具. 这对伴随给出两边某个全子范畴的等价 (命题 A.2.8), 这个全子范畴正是*概形*的范畴. 换言之, 概形既可视为满足某些条件的几何空间, 又可视为满足某些条件的函子 Ring $\to$ Set. 本例取自 Demazure 和 Gabriel 的 *Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups* 1.1 节.

预层范畴的俯范畴

预层范畴的俯范畴仍是预层范畴. 这个事实可证明预层范畴的局部积闭性.

命题 A.4.16

预层范畴的俯范畴等价于 “广义俯范畴” 上的预层范畴: 对 $X \in \widehat{\mathcal{C}}$, 记 X 的元素的范畴为 $\mathcal{C}/X$ (注 A.4.6), 则

$$\widehat{\mathcal{C}}/X \simeq \widehat{\mathcal{C}/X}.$$

证明. 对于 $\widehat{\mathcal{C}}/X$ 的对象 $F \to X$, 定义 $\mathcal{C}/X$ 上的预层

$$G = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}/X}(-, F).$$

换言之, G 在 $\mathcal{C}/X$ 的对象 $s\colon \text{よ}(c) \to X$ 上的取值为 s 在映射 $F(c) \to X(c)$ 下的原像.

反过来, 对于 $\mathcal{C}/X$ 上的预层 G, 定义 $\widehat{\mathcal{C}}/X$ 的对象 $F \to X$ 如下. 预层 F 在对象 $c \in \mathcal{C}$ 上的取值为

$$F(c) := \coprod_{s\colon \text{よ}(c) \to X} G(s),$$

带有自然的投影 $F(c) \to X(c)$ (将 $G(s)$ 中的元素映射到 s), 也即自然变换 $F \to X$.

容易验证, 上述两个构造是互逆的范畴等价. □

注 A.4.17

意象 $\widehat{\mathcal{C}}/X$ 可视为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 上的平展空间 (注 3.1.14). 因此命题 A.4.16 可类比于 “层范畴的俯范畴等价于平展空间上的层范畴”.

例 A.4.18

设 $\mathcal{C} = 1$ 是终范畴, X 是 $\widehat{\mathcal{C}} \simeq \mathsf{Set}$ 的对象, 那么 $\mathcal{C}/X \simeq X$ (视为离散范畴). 此时上述命题化为

$$\mathsf{Set}/X \simeq \mathsf{Set}^X.$$

A.5 可表现范畴

可表现范畴在范畴论中具有重要的地位, 因为有如下粗略的类比:

$$\begin{tikzcd}
\text{(有限) 集} \arrow[d, "\text{自由生成}"'] & \text{(小) 范畴} \arrow[d, "\text{自由余完备化}"] \\
\text{多项式环} \arrow[d, "\text{商}"'] & \text{预层范畴} \arrow[d, "\text{局部化}"] \\
\text{(有限表现) 环} & \text{可表现范畴}
\end{tikzcd}$$

介绍可表现范畴 (以及许多重要范畴论概念) 的一本很好的教科书是 [1].

可表现对象

当一个结构由一些基础的元素生成时, 我们总是认为生成元的数量越少越好. 例如一个环的生成元越少就越简单. 为了描述可表现对象的生成元的多少, 我们需要一些基数的概

念. 所谓基数是指集合的同构类, 而基数的加法是集合的和 (不交并). $\aleph_0$ (读作 aleph 零) 是自然数集的基数.

定义 A.5.1 (正则基数)

正则基数 (regular cardinal) 是指满足如下条件的无限基数 λ: 对任意 $\alpha < \lambda$ 以及 α 个基数 $\lambda_i (i < \alpha)$, 有 $\sum_i \lambda_i < \lambda$. 简言之, 正则基数 λ 不能写成少于 λ 个小于 λ 的基数之和.

设 λ 为正则基数, 那么小于 λ 的集合构成的范畴具有较好的封闭性, 称之为一个*宇宙* (但它尚未构成 Grothendieck 宇宙, 后者的要求更高). 在承认选择公理的前提下, 存在任意大的正则基数. 换言之, "小" 等价于 "小于某个正则基数". "小于正则基数 λ" 的性质可视为 "有限性" 的推广. 这里的小于都是指严格小于.

例 A.5.2

$\aleph_0$ 是正则基数 (无限集不能写成有限个有限集之和), $\aleph_1$ 是正则基数 (不可数集不能写成可数个可数集之和).

定义 A.5.3 (λ-小)

称一个范畴 "λ-小" 是指其中对象和态射的数量都小于 λ. 若 I 是 λ-小范畴, 则称函子 $X: I \to \mathcal{C}$ 为 λ-小的图.

定义 A.5.4 (λ-滤范畴, λ-滤余极限)

回忆对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的图 $X: I \to \mathcal{C}$, 其上的锥是 $\mathcal{C}$ 的对象 c (称为*顶点*) 以及一族相容的态射 $c \to X(i)$. 对偶地, *余锥*是 $\mathcal{C}$ 的对象 c 以及一族相容的态射 $X(i) \to c$.
设 λ 为正则基数. 若一个范畴中任意 λ-小的图都存在余锥, 则称之为 *λ-滤范畴* (λ-filtered category). 对偏序集而言, 这个条件即是说任意基数小于 λ 的子集都有上界, 称这样的偏序集为 *λ-正向集* (λ-directed set). 以 λ-滤范畴为指标范畴的余极限称为 *λ-滤余极限* (λ-filtered colimit).
滤范畴 (filtered category) 是指 $\aleph_0$-滤范畴, 即每个有限图都有余锥的范畴. 滤范畴的对偶称为*余滤范畴* (cofiltered category), 即每个有限图都有锥的范畴.[12]

注意, λ-滤范畴中对象的多少没有限制, 但我们默认谈论*小余极限*, 也即默认指标范畴的对象构成一个小集合 (从而是 κ-小的, κ 为某个正则基数).

如下是一个有广泛应用的命题, 尤其是 $\lambda = \aleph_0$ 的特例.

[12]不幸的是, 有些文献中 "滤范畴" 和 "余滤范畴" 的概念与此处定义的相反, 如 [18].

命题 A.5.5 (λ-滤范畴的等价刻画)

设 J 为小范畴, λ 为正则基数, 则 J 为 λ-滤范畴当且仅当 Set 中任意 J-余极限与 λ-小极限交换.

证明. 设 J 为 λ-滤范畴, I 为 λ-小范畴, $X\colon I\times J\to \mathsf{Set}$ 为任意函子, 我们证明如下典范的映射为双射 (这个映射的存在不需要 I, J 满足任何条件):

$$\operatorname{colim}_j \lim_i X_{i,j} \to \lim_i \operatorname{colim}_j X_{i,j}. \tag{$\star$}$$

任取 $\lim_i \operatorname{colim}_j X_{i,j}$ 的元素 $(x_{i,j(i)}\in X_{i,j(i)})_{i\in I}$. 由条件, 存在余锥 $(f_i\colon j(i)\to j')_{i\in I}$, 则 $(X(f_i)(x_{i,j(i)})\in X_{i,j'})_{i\in I}$ 为 $\lim_i X_{i,j'}$ 的元素. 容易验证这是 ($\star$) 的逆.

另一方面, 设 J 为小范畴, 假设对任意 λ-小范畴 I 以及任意函子 $X\colon I\times J\to \mathsf{Set}$, ($\star$) 总是双射. 对任意 λ-小范畴 I 以及任意函子 $f\colon I\to J$, 考虑

$$X\colon I^{\mathrm{op}}\times J\to \mathsf{Set},\quad X_{i,j}:=\operatorname{Hom}_J(f(i),j).$$

那么对固定的 $j\in J$, $\lim_i X_{i,j}$ 的元素等同于 J 中图表 f 上以 j 为顶点的余锥, 故 $\operatorname{colim}_j \lim_i X_{i,j}$ 非空当且仅当图表 f 上有余锥. 又有对固定的 i, $\operatorname{colim}_j X_{i,j}=1$, 故 $\lim_i \operatorname{colim}_j X_{i,j}=1$. 这说明 J 为 λ-滤范畴. □

使用 λ-小余极限和 λ-滤余极限可构造任意余极限. 具体地, 有如下结论.

命题 A.5.6

设 λ 为正则基数. 范畴 $\mathcal{C}$ 中任意图 $X\colon I\to\mathcal{C}$ 的余极限 (如果它存在) 可写为 X 的一族 λ-小的子图的有限余极限的 λ-滤余极限.

证明. 令 P 为 I 的所有 λ-小子范畴在包含关系下构成的偏序集. 那么

$$\operatorname{colim}_{i\in I} X_i \simeq \operatorname{colim}_{J\in P} \operatorname{colim}_{j\in J} X_j.$$

□

例 A.5.7

自然数的偏序集 $0\to 1\to 2\to\cdots$ 是 $\aleph_0$-滤范畴, 因为其中任何有限子集都有上界.

定义 A.5.8 (λ-可表现对象)

设 λ 为正则基数. 称范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 c 为 *λ-可表现对象* (λ-presentable object, 又称 *λ-紧对象*) 是指 $\operatorname{Hom}(c,-)\colon\mathcal{C}\to\mathsf{Set}$ 保持 λ-滤余极限[13]. 具体地, 对任意以 λ-滤范

畴 I 为指标范畴的图 X_i, 态射 $c \to \operatorname{colim}_i X_i$ 总穿过某个 $X_j \to \operatorname{colim}_i X_i$.
称一个对象为可表现对象 (又称小对象) 是指存在正则基数 λ 使得它是 λ-可表现对象. 有限表现对象是指 $\aleph_0$-可表现对象.

λ-可表现性是反映一个对象在某种意义上比较小的性质. 注意 λ 越小, 这个性质就越强; 对于 $\mu > \lambda$, λ-可表现对象一定是 μ-可表现对象.

命题 A.5.9 (小对象的小余极限仍是小对象)

设 I 是 λ-小范畴, $X \colon I \to \mathcal{C}$ 为图, 且图中每个对象 X_i 为 λ-可表现对象. 那么 $\operatorname{colim}_i X_i$ 为 λ-可表现对象.

证明. 设 J 为 λ-滤范畴, $Y \colon J \to \mathcal{C}$ 为图. 那么

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_i X_i, \operatorname{colim}_j Y_j) \\
&\simeq \lim_i \operatorname{Hom}(X_i, \operatorname{colim}_j Y_j) && \text{(余极限的定义)} \\
&\simeq \lim_i \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}(X_i, Y_j) && (X_i \text{ 为 } \lambda\text{-可表现对象}) \\
&\simeq \operatorname{colim}_j \lim_i \operatorname{Hom}(X_i, Y_j) && \text{(命题 A.5.5)} \\
&\simeq \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_i X_i, Y_j). && \text{(余极限的定义)}
\end{aligned}$$

□

例 A.5.10 ($\aleph_0$-可表现性与拓扑紧性的联系)

设 X 为拓扑空间. 容易说明, 范畴 $\operatorname{Open}(X)$ 的对象 U 是 $\aleph_0$-可表现对象当且仅当 U 作为拓扑空间是紧空间. 不幸的是, 紧空间不一定是拓扑空间范畴 Top 的 $\aleph_0$-可表现对象. 缺乏可表现对象是范畴 Top 性质不好的原因之一.

例 A.5.11 (集合范畴中的 λ-可表现对象)

Set 中的 λ-可表现对象即为基数小于 λ 的集合. 单元集显然是 λ-可表现对象; 由命题 A.5.9, 基数小于 λ 的集合是 λ-可表现对象.
另一方面, 注意到任意集合可表示为 λ-小集合的 λ-滤余极限: 对集合 S, 令

$$I := \big\{ T \subset S \;\big|\; |T| < \lambda \big\},$$

则有

$$S = \operatorname{colim}_{T \in I} T.$$

[13] 此处以及下面使用的滤余极限均可替换为正向极限, 即以正向集为指标范畴的余极限. 可以证明, 一个范畴具有滤余极限等价于其有正向极限, 一个函子保持滤余极限等价于其保持正向极限, 见 [1] 1.A 节.

由 λ 为正则基数, 任何少于 λ 个 λ-小集合之和仍为 λ-小集合. 因此该余极限为 λ-滤余极限. 假设 S 是 λ-可表现对象, 则 $\operatorname{colim}_{T\in I}\operatorname{Hom}(S,T)\to\operatorname{Hom}(S,S)$ 为同构, 故 id_S 穿过某个含入映射 $T\hookrightarrow S$, 这表明 $|S|<\lambda$.

例 A.5.12 (群范畴中的 λ-可表现对象)

群范畴 Grp 的 λ-可表现对象即为少于 λ 个生成元和少于 λ 个关系所表现的群. (例如 $\lambda=\aleph_0$ 时, Grp 的 λ-可表现对象又叫*有限表现群*.) 这一规律适用于任何代数理论 (参见定义 A.8.1, A.8.3 以及 [1] 3.A 节).
对任意群 G, 与上一例类似, 考虑

$$I:=\bigl\{H\le G\bigm| H\ \text{由少于}\ \lambda\ \text{个元素生成}\bigr\},$$

那么 $G=\operatorname{colim}_{H\in I}H$. 若 G 为 λ-可表现对象, 则 id_G 穿过某个同态 $H\hookrightarrow G$, G 可由少于 λ 个元素生成. 进一步, 设 F 为少于 λ 个元素生成的自由群, 且有满同态 $\varphi\colon F\to G$. 令

$$J:=\bigl\{K=F/{\sim}\bigm| \sim\ \text{由}\ \ker\varphi\ \text{中少于}\ \lambda\ \text{个元素生成}\bigr\},$$

容易说明 $G=\operatorname{colim}_{K\in J}K$, 其中每个 K 到 G 有典范的满同态. 若 G 为 λ-可表现对象, 则 id_G 穿过某个同态 $K\to G$, 说明 G 可由少于 λ 个生成元和少于 λ 个关系所表现.

例 A.5.13 (可表函子是预层范畴的可表现对象)

预层范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的可表函子 $よ(c)$ 是 $\aleph_0$-可表现对象, 因为 $\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(よ(c),-)\colon\widehat{\mathcal{C}}\to\mathsf{Set}$ 保持任意余极限.

定义 A.5.14 (λ-可表现范畴)

设 λ 为正则基数. 范畴 $\mathcal{C}$ 称为 *λ-可表现范畴*[14]是指 $\mathcal{C}$ 余完备, 且存在一族 λ-可表现对象构成的集合, 使得任何对象都可表示为这族对象的某个 λ-滤余极限.
称一个范畴为*可表现范畴*是指存在正则基数 λ 使得它是 λ-可表现范畴.

[14] 可表现范畴又叫*局部可表现范畴* (locally presentable category), "局部" 是为了强调可表现这一性质是形容范畴中的对象, 而非范畴这一整体.

命题 A.5.15

对于小范畴 $\mathcal{C}$, 预层范畴 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 $\aleph_0$-可表现范畴.

证明. 所需结论是如下事实的推论.

- 可表函子是 $\aleph_0$-可表现对象 (例 A.5.13);
- $\aleph_0$-可表现对象的有限余极限是 $\aleph_0$-可表现对象 (命题 A.5.9, $\lambda = \aleph_0$);
- 任意余极限都可写为先取有限余极限再取 $\aleph_0$-滤余极限 (命题 A.5.6);
- 预层可写为可表函子的余极限 (命题 A.4.7).

□

注 A.5.16

可表现范畴的定义显示了它并不是一个关于 "对偶" 对称的概念, 即可表现范畴的对偶不一定是可表现范畴. 甚至可以证明 ([1] 1.64), 若 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 均为可表现范畴, 那么 $\mathcal{C}$ 只能是完备格.

稠密子范畴

定义 A.5.17 (稠密子范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为范畴, $\mathcal{D}$ 为其全子范畴. 若对 $\mathcal{C}$ 的任意对象 c, 所有由 $\mathcal{D}$ 的对象到 c 的箭头构成余极限余锥, 则称 $\mathcal{D}$ 为*稠密子范畴*.

注意这个概念与景的 J-稠密子范畴 (定义 3.6.11) 不同, 但精神上相似: 在直观上, $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}$ 中稠密就是说 $\mathcal{C}$ 的对象 (以及态射) 可完全由 $\mathcal{D}$ 的对象出发的态射来 "探测". 这与注 3.3.2 提到的 "探测" 的想法亦相通; 命题 A.5.21 建立了 $\mathcal{C}$ 与 $\widehat{\mathcal{D}}$ 之间的联系.

例 A.5.18 (米田嵌入是稠密子范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为小范畴. 通过米田嵌入 $よ\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$, 可将 $\mathcal{C}$ 视为 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的稠密子范畴 (命题 A.4.7).

例 A.5.19 (偏序集范畴的稠密子范畴)

在偏序集范畴 Pos (甚至小范畴的范畴 Cat) 中, 对象 $\{0 \leq 1\}$ 构成稠密子范畴. 注意 $\{0 \leq 1\}$ 到自身有三个态射, 分别是恒等映射以及两个常值映射.

例 A.5.20 (图范畴的稠密子范畴)

此处所谓图是指一个集合配备一个二元关系. 在图的范畴 Gra 中, 两个对象 $\bullet$ 以及 $\bullet \to \bullet$ 构成稠密子范畴.

命题 A.5.21

设 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 为全子范畴, 且 $\mathcal{D}$ 为小范畴. 考虑函子

$$y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{D}}, \quad c \mapsto \operatorname{Hom}(-, c)\big|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}},$$

则有

- y 全忠实当且仅当 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是稠密子范畴;
- 对固定的正则基数 λ, y 保持 λ-滤余极限当且仅当 $\mathcal{D}$ 的所有对象都是 $\mathcal{C}$ 的 λ-可表现对象.

见 [1] 命题 1.26. 两个命题的证明都是直接展开定义验证.

命题 A.5.22

设范畴 $\mathcal{C}$ 余完备, $\mathcal{D}$ 为其稠密子范畴, 则命题 A.5.21 中的函子 y 将 $\mathcal{C}$ 表示为 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的自反子范畴.

证明. 结合命题 A.5.21 与 A.4.11 即证. □

可表现范畴的性质与判定

命题 A.5.23

对于正则基数 λ, 范畴 $\mathcal{C}$ 是 λ-可表现范畴, 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是某个预层范畴 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的自反子范畴 ($\mathcal{D}$ 为小范畴), 且 $\mathcal{C}$ 关于 $\widehat{\mathcal{D}}$ 中的 λ-滤余极限封闭.

证明. 假设 $\mathcal{C}$ 是 λ-可表现范畴, 由定义, $\mathcal{C}$ 中有一族 λ-可表现对象构成一个稠密子范畴 $\mathcal{D}$, 且 $\mathcal{D}$ 为小范畴. 由命题 A.5.22, 知 $\mathcal{C}$ 为 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的自反子范畴.

另一方面, 假设 $\mathcal{C}$ 是 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的自反子范畴, 且关于 $\widehat{\mathcal{D}}$ 中的 λ-滤余极限封闭. 由余完备范畴的自反子范畴是余完备范畴 (命题 A.3.6), 知 $\mathcal{C}$ 余完备. 此外, $\mathcal{C}$ 的对象都可写为 $\widehat{\mathcal{D}}$ 中可表函子在 $\widehat{\mathcal{D}}$ 中的余极限, 从而可写为 λ-可表现对象在 $\widehat{\mathcal{D}}$ 中的 λ-滤余极限 (命题 A.5.6). 为了证明最终的结论, 只需证明左伴随 $a\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}$ 保持 λ-可表现对象. 设 d 是 $\mathcal{D}$ 的 λ-可表现对象. 对任意 λ-滤范畴 I, 任意图 $X\colon I \to \mathcal{C}$, 由条件, $\mathcal{D}$ 中的余极限 $\operatorname{colim}_i X_i$ 差一个同构落

在 $\mathcal{C}$ 中. 因此有

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a(d), \operatorname{colim}_i X_i) &\simeq \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(d, \operatorname{colim}_i X_i) \\ &\simeq \operatorname{colim}_i \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}}(d, X_i) \simeq \operatorname{colim}_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a(d), X_i).\end{aligned}$$

这说明 $a(d)$ 为 λ-可表现对象, 结论得证. □

命题 A.5.24

可表现范畴是完备范畴.

证明. 这是因为完备范畴的自反子范畴是完备范畴 (命题 A.3.6). □

命题 A.5.25

(1) 对于小范畴 A 与 λ-可表现范畴 $\mathcal{C}$, 函子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathsf{A}, \mathcal{C})$ 是 λ-可表现范畴 ([1] 推论 1.54).

(2) 对于 λ-可表现范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 X, 俯范畴 $\mathcal{C}/X$ 与仰范畴 $X\backslash\mathcal{C}$ 是 λ-可表现范畴 ([1] 命题 1.57).

可表现范畴的伴随函子定理

伴随函子定理是说在合适的条件下, 保持极限 (余极限) 的函子一定有左 (右) 伴随. 如下是可表现范畴中的两个结论; 注意其中有一些细节是极不平凡的.

命题 A.5.26 (可表现范畴的伴随函子定理)

设 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是可表现范畴之间的函子.

- f 有右伴随当且仅当 f 保持余极限;
- f 有左伴随当且仅当 f 保持极限和 λ-滤余极限 (λ 为某个正则基数). (这是 [1] 1.66.)

两个结论不对称, 是因为可表现范畴的概念关于对偶不对称 (见注 A.5.16).

如下是偏序集中的两个结论.

命题 A.5.27 (偏序集的伴随函子定理)

设 $f\colon A \to B$ 是偏序集之间的函子 (即保序映射),

- 假设 A 有任意并, 则 f 有右伴随当且仅当 f 保持任意并;

- 假设 A 有任意交, 则 f 有左伴随当且仅当 f 保持任意交.

A.6 Kan 扩张

定义 A.6.1 (Kan 扩张)

设 $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为函子. 对另一范畴 $\mathcal{D}$, 记 $p^*\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 为 p 诱导的函子, 即 $h\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ 对应 $p^*h\colon \mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{C}' \xrightarrow{h} \mathcal{D}$.

- 若 p^* 有左伴随 $p_!\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{D})$, 则称之为沿 p 的左 *Kan* 扩张;
- 若 p^* 有右伴随 $p_*\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{D})$, 则称之为沿 p 的右 *Kan* 扩张.

定义 A.6.2 (局部 Kan 扩张)

设 $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为函子. 对函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,

- 若存在 $p_!F\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ 使得有自然同构
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F, p^*-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C}',\mathcal{D})}(p_!F, -),$$
则称 $p_!F$ 为 F 沿 p 的左 *Kan* 扩张;
- 若存在 $p_*F\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ 使得有自然同构
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(p^*-, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C}',\mathcal{D})}(-, p_*F),$$
则称 p_*F 为 F 沿 p 的右 *Kan* 扩张.

例 A.6.3 (极限)

设 $\mathcal{C}'$ 为终范畴 1, 那么 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}', \mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}$, 函子 $p^*\colon \mathcal{D} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 将 $\mathcal{D}$ 的对象 d 对应到常值函子 $\mathrm{const}_d\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
对函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,

- F 的左 Kan 扩张是余极限,
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F, \mathrm{const}_d) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\operatorname{colim} F, d);$$
- F 的右 Kan 扩张是极限,
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(\mathrm{const}_d, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d, \lim F).$$

例 A.6.4 (沿米田嵌入的 Kan 扩张)

设 $\mathcal{C}' = \widehat{\mathcal{C}}$, $p = \text{よ}\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 为米田嵌入. 设 $\mathcal{D}$ 为余完备范畴. 命题 A.4.9 给出了任意函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 沿 よ 的唯一的左 Kan 扩张 $\text{よ}_! F\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$, 命题 A.4.11 给出了它的具体表达式.

例 A.6.5 (预层范畴之间的伴随)

对任意函子 $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 存在三元伴随 (命题 3.8.24)

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, shift left=8, "p_!"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\perp"] \arrow[r, shift right=8, "p_*"'] & \widehat{\mathcal{C}'}, \arrow[l, "p^*"']
\end{tikzcd}
$$

展开定义, 得

- 对 $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, $p_!(F)(c') = \operatorname{colim}_{c' \to pc} F(c)$ (一个特例: 拓扑空间上预层的逆像);
- 对 $F \in \widehat{\mathcal{C}'}$, $p^*(F)(c) = F(pc)$ (一个特例: 拓扑空间上预层的直像);
- 对 $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, $p_*(F)(c') = \lim_{pc \to c'} F(c)$.

这说明当定义 A.6.1 中的 $\mathcal{D}$ 取 Set 时, 左右 Kan 扩张总存在. 更一般地, 当 $\mathcal{D}$ 余完备时左 Kan 扩张 $p_!$ 存在, 当 $\mathcal{D}$ 完备时右 Kan 扩张 p_* 存在.

A.7 单子论

定义 A.7.1 (单子和余单子)

范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个单子 (monad) (T,η,μ) 是一个自函子 $T\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 以及两个自然变换 $\mu\colon T^2\to T$, $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to T$, 满足自函子范畴 $\mathsf{End}(\mathcal{C})$ 中幺半群的条件, 即如下交换图.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

对偶地, 余单子 (comonad) (S,ρ,δ) 是一个自函子 $T\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 以及两个自然变换 $\rho\colon S\to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\delta\colon S\to S^2$, 满足如下交换图.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & S^2 \arrow[d, "\delta S"] \\ S^2 \arrow[r, "S\delta"'] & S^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\mathrm{id}_S"'] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_S"] & \\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\, S & S^2 \arrow[l, "\rho S"] \arrow[r, "S\rho"'] & S\,\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

注 A.7.2

在历史文献中可见单子的曾用名“三元组” (triple), 这个名字是无趣的. 相对有趣的是, 单子被某些作者称为代数理论 (algebraic theory). 后面我们将说明单子与代数理论 (定义 B.1.21) 的关系. 直观上, TX 的元素是某种代数理论中以 X 中元素为变量的项. 对于单子 T 以及两个态射 $X\to TY$, $Y\to TZ$, 可以指定一个“代数复合” $X\to TZ$:

$$X\to TY\to TTZ\to TZ.$$

命题-定义 A.7.3 (伴随产生单子和余单子)

一对伴随函子

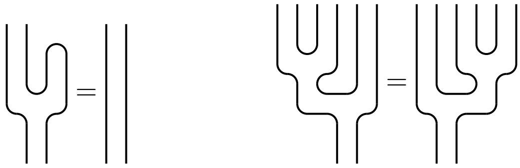
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

确定了

- $\mathcal{C}$ 上的一个单子 (T,η,μ), 其中 $T=GF\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, $\eta\colon \mathrm{id}_C\to GF$ 是单位, 而 $\mu\colon T^2=GFGF\to GF=T$ 来自余单位 $\epsilon\colon FG\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$;

- $\mathcal{D}$ 上的一个余单子 (S,ρ,δ), 其中 $S=FG\colon\mathcal{D}\to\mathcal{D}$, $\rho\colon FG\to\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 是余单位, 而 $\delta\colon S=FG\to FGFG=S^2$ 来自单位 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to GF$.

证明. 下图描绘了验证 T 为单子所需的幺元律和结合律.



□

注 A.7.4

一对伴随函子可视为一个 2-函子 $\mathsf{Adj} \to \mathcal{C}at$ (定义 A.2.4). 事实上, 记 Mnd 为 Adj 中 C 上的全子 2-范畴, 则一个单子等同于一个 2-函子 $\mathsf{Mnd} \to \mathcal{C}at$, 因此一对伴随自然产生一个单子. 另外, $\mathrm{Hom}(C, C) \simeq \Delta_+$ 中的对象 $[0]$ 是 "游走的幺半群" (参见例 B.2.23), 而范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子是 $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ 中的幺半群, 因此对应一个函子 $\Delta_+ \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$.

定义 A.7.5 (单子的代数, 余单子的余代数)

设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子. 定义范畴 $\mathcal{C}$ 上的 T-代数为 $\mathcal{C}$ 的对象 c 配备一个态射 $h\colon Tc \to c$, 满足如下交换图.

$$\begin{tikzcd} T^2c \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_c"'] & Tc \arrow[d, "h"] \\ Tc \arrow[r, "h"'] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"'] & Tc \arrow[d, "h"] \\ & c \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ 上两个 T-代数之间的态射即是 $\mathcal{C}$ 中保持上述交换图的态射. 记 $\mathcal{C}$ 上 T-代数的范畴为 $\mathcal{C}^T$, 这个范畴又称为 T 的 *Eilenberg–Moore* 范畴.
对偶地, 设 S 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的余单子, 定义 S-余代数 (coalgebra) 是 $\mathcal{C}$ 的对象 c 配备一个态射 $h\colon c \to Sc$, 满足如下交换图.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & Sc \arrow[d, "\delta_c"] \\ Sc \arrow[r, "Sh"'] & S^2c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"'] & Sc \arrow[d, "\rho_c"] \\ & c \end{tikzcd}$$

命题 A.7.6 (T-代数的自由–遗忘伴随)

设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子, 则有如下伴随:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "\text{自由}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}^T, \arrow[l, shift left, "\text{遗忘}"] \end{tikzcd}$$

其中自由函子将 c 对应到 $(Tc, \mu_c\colon T^2c \to Tc)$, 遗忘函子将 $(c, h\colon Tc \to c)$ 对应到 c.

命题-定义 A.7.7 (比较函子)

在伴随产生的单子 (命题 A.7.3) 中, 存在 $\mathcal{D}$ 到 T-代数范畴的比较函子 (comparison functor) $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$, 将对象 d 对应到 T-代数 Gd, 其 T-代数结构为

$$TGd = GFGd \xrightarrow{G\epsilon} Gd.$$

例 A.7.8 (可能单子)

集合范畴到自身的函子 $T\colon X \mapsto X+1$ 是单子, 乘法 $X+1+1 \to X+1$ 将两个 1 映射到一个 1. 在函数式编程中这个函子称为*可能单子* (maybe monad), $X+1$ 中的 1 称为*无* (nothing). $X+1$ 的元素可能是 X 的元素, 也可能无. 可能单子上的代数为集合 X 配备一个映射 $X+1 \to X$, 限制到 X 上为恒等; 这样的一个映射相当于一个*带基点集合* (pointed set).

例 A.7.9 (集合与 M-集合之间的自由–遗忘伴随)

设 M 是 (集合范畴 Set 中的) 幺半群, 那么 $T\colon X \mapsto M \times X$ 给出了集合范畴上的一个单子, 乘法 $\mu\colon T^2 \to T$ 由 M 的乘法 $M \times M \to M$ 给出. 定义 A.7.1 中的交换图对应 M 的结合律和左右单位律.
记 BM 为带有 M-作用的集合的范畴, 那么 Set 与 BM 之间有如下的伴随, 其中 “自由” 函子将集合 X 对应到 $M \times X$.

$$\mathsf{Set} \underset{\text{遗忘}}{\overset{\text{自由}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{B}M$$

单子 T 正是这对伴随由命题 A.7.3 给出的单子 “遗忘 $\circ$ 自由”.
此时, 一个 T-代数 (X, h) 即为一个带有 M-作用的集合, $h\colon M \times X \to X$ 为 M-作用, 而定义 A.7.5 中的交换图则对应 M-作用的结合律和单位律. 因此, 比较函子 $K\colon \mathsf{B}M \to \mathsf{Set}^T$ 是范畴的同构.

例 A.7.10 (集合与幺半群之间的自由–遗忘伴随, 词单子)

以 Mon 表示幺半群范畴, 那么集合范畴 Set 与 Mon 之间存在伴随

$$\mathsf{Set} \underset{\text{遗忘}}{\overset{\text{自由}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Mon}.$$

这对伴随给出的单子 $T=$ 遗忘 $\circ$ 自由: $\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 将集合 X 对应到 X 生成的自由幺半群的底层集合

$$TX = \coprod_{n \geq 0} X^n,$$

也即 X 上列表的集合. 自然变换 $\mu\colon T^2 \to T$ 将 "列表的列表" 拼接起来变为一个列表. 一个 T-代数 X 即为一个幺半群. 注意比较函子 $K\colon \mathsf{Mon} \to \mathsf{Set}^T$ 是等价. 在函数式编程中, 这个函子也称为**词单子** (word monad).

例 A.7.11 (环的变换)

设 $A \to B$ 是交换环的同态, 则有伴随

$$A\mathsf{Mod} \underset{\mathrm{Hom}_B(B,-)}{\overset{(-)\otimes_A B}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} B\mathsf{Mod}.$$

其中 $\mathrm{Hom}_B(B,-)$ 相当于将 B-模通过同态 $A \to B$ 视为 A 模. 上述伴随是一般双模的张量–同态伴随的特例 (参考命题 3.8.19). 它给出

- $A\mathsf{Mod}$ 上的单子 (T,η,μ), $T = (-)\otimes_A B$, $\eta_N\colon N \to N \otimes_A B, x \mapsto x \otimes 1$, $\mu_N\colon N \otimes_A B \otimes_A B \to N, x \otimes b \otimes b' \mapsto x \otimes bb'$;
- $B\mathsf{Mod}$ 上的余单子 (S,ρ,δ), $S = (-)\otimes_A B$, $\rho_M\colon M \otimes_A B \to M, x \otimes b \mapsto xb$, $\delta_M\colon M \otimes_A B \to M \otimes_A B \otimes_A B, x \otimes b \mapsto x \otimes 1 \otimes b$.

代数学著名教材 [29] 的第 7 章介绍了这个单子的应用.

例 A.7.12 (反变幂集函子与其对偶函子的伴随)

反变幂集函子是指 Set 上的幂对象函子 $P\colon \mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ (定义 1.1.25). 考虑其对偶 (即同一个函子, 不过所有箭头反向) $P^{\mathrm{op}}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$. 自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}}(P^{\mathrm{op}}Y, X) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, PY) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X \times Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(Y, PX)$ 表明有如下伴随.

$$\mathsf{Set} \underset{P}{\overset{P^{\mathrm{op}}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$$

在代数–几何对偶 (参考 Stone 对偶, 命题 2.3.13) 之下, 集合作为 "几何" 对应的 "代数" 称为**完备原子型 *Boole* 代数** (complete atomic Boolean algebra).

对于某些伴随产生的单子 T, 我们发现 T-代数的范畴恰好等价于伴随另一边的范畴; 因此这一对伴随可视为范畴 $\mathcal{C}$ 与其上的 T-代数范畴 $\mathcal{C}^T$ 之间的自由–遗忘伴随. 于是有如

下的定义.

定义 A.7.13 (单子性伴随)

设一对伴随函子

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

确定了一个单子 $T = GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. 若比较函子 $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ 构成范畴等价, 则称这对伴随为*单子性伴随* (monadic adjunction), 称右伴随 G 为*单子性函子*. 换言之, G 可视为 $\mathcal{C}$ 上某个单子的代数范畴到 $\mathcal{C}$ 的遗忘函子.

例 A.7.14

自反子范畴的嵌入 $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是单子性的; 也即 $\mathcal{D}$ 的对象可视为单子 $ia\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的代数.

例 A.7.15 (平坦下降)

在例 A.7.11 中, 若 B 是*忠实平坦* A-代数 (即 $B \otimes_A -$ 是忠实函子且保持有限极限), 则伴随是单子性的.

A.8 万有代数

万有代数可视为群, 环, 模, Boole 代数等概念的共同推广, 又称*等式逻辑* (equational logic), 是一阶逻辑的简单例子. 本节介绍 William Lawvere 1963 年的博士论文 [20] 引入的研究万有代数的范畴论方法.

Lawvere 理论

定义 A.8.1 (Lawvere 理论)

一个 *Lawvere 理论*是一个保积函子 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{T}$ ($\mathbb{N}$ 是有限集 $0, 1, 2, \cdots$ 构成的 Set 的全子范畴), 在对象集上为双射. 我们将 $\mathbb{N}$ 的对象 n 在这个函子下的像仍记为 n.

Lawvere 理论将一个代数理论的运算记录在范畴 T 的态射中, 态射 $n \to 1$ 为 n 元运算. 例如在群的理论中, 乘法是一个态射 $2 \to 1$, 而取逆是一个态射 $1 \to 1$. Lawvere 理论对应的范畴 $\mathbb{T}$ 是一种 "句法范畴" (但与定义 5.1.1 中的句法范畴尚有差距).

定义 A.8.2 (Lawvere 理论的模型)

对于 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 以及具有有限乘积的范畴 $\mathcal{C}$, 定义 $\mathbb{T}$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中的模型为保积函子

$$A\colon \mathbb{T} \to \mathcal{C},$$

而模型之间的同态为保积函子之间的自然变换. 称 $A(1)$ 为 A 的底集 (underlying set). 记 $\mathbb{T}$ 在 Set 中的模型的范畴为 $\mathbb{T}$Mod.

定义 A.8.3 (Lawvere 理论的表现)

一个 (单类型) 代数理论的表现 (presentation of an algebraic theory) $\mathcal{T}$ 是如下资料,

- 任意多个变量;
- 一些运算符号, 每一个运算符号对应一个固定的非负整数, 称为其元数 (arity[15]);
- 一些公理, 其中每个公理形如 $s = t$, s, t 为项 (terms)[16], 而项的归纳定义如下:
  - 每个变量是一项;
  - 若 f 是 n 元运算符号, $t_1, \cdots, t_n$ 各是一项, 则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 是一项. (特别地, 每个零元运算是一项, 即一个常数.)

注 A.8.4

这里 "Lawvere 理论的表现" 是定义 B.1.21 中 "代数理论" 的单类型情形. 后面我们将看到, 一个 "Lawvere 理论的表现" 唯一确定了一个 Lawvere 理论, 但后者的表现远远不是唯一的. 例如群的理论可以仅由一种运算 $(a, b) \mapsto a^{-1}b$ 表现, 又如 $\mathbb{Z}$-模和 Abel 群是同样的结构. 作为范畴的 Lawvere 理论包含了所有的运算, 因而是一种 "坐标无关" 式的概念. Lawvere 理论与其表现的关系正如一个群与其 "生成元–关系" 表现的关系, 只不过在范畴层级上高了一级.

定义 A.8.5 (通过 Lawvere 理论的表现定义其模型)

设 $\mathcal{T}$ 是 Lawvere 理论的表现 (定义 A.8.3). 定义一个 $\mathcal{T}$-模型 M 为如下资料:

- 集合 M (称作该模型的底层集合),

[15] 元数 arity 来自一元 unary, 二元 binary 等词的词尾 -ary.

[16] 为了严谨, 我们应该补充说明: 对每一条公理 $s = t$, 改变 s, t 中某个变量的名称仍是一条公理. 但这种事情是不重要的.

- 对每个非负整数 n 以及 n 元运算符号 f, 一个映射 $[\![f]\!]\colon M^n \to M$;

满足所有的公理, 也即当 $\mathcal{T}$ 中的变量取值为 M 的任何元素时, 公理 $s = t$ 的两端总是取相等的值. 其中, 一个项 t 的取值 $[\![t]\!]$ 归纳定义如下:

- 每个变量 x 可取 M 中任意的值, $[\![x]\!] \in M$;
- 若 f 是 n 元运算符号, $t_1, \cdots, t_n$ 各是一项, 则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 的取值是 $[\![f]\!]([\![t_1]\!], \cdots, [\![t_n]\!])$. (特别地, 每个零元运算取 M 中一个固定的值.)

所有 $\mathcal{T}$-模型构成一个范畴 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}$, 其中的态射为保持所有运算的映射. 对于两个 Lawvere 理论的表现 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, 若 $\mathcal{T}_1\mathsf{Mod} \simeq \mathcal{T}_2\mathsf{Mod}$, 则称 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ **森田等价** (Morita equivalence).[17]

设 $\mathcal{C}$ 是任何具有有限乘积的范畴, 我们也可类似地定义 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的模型, 以及模型的范畴 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$.

命题-定义 A.8.6 (有限生成自由模型)

设 $\mathcal{T}$ 为代数理论的表现, $n \geq 0$. 记 $T(n)$ 为其中仅涉及 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的项的集合. 在 $T(n)$ 上定义等价关系 $\sim$ 由如下条件生成:

- 对于公理 $s = t$, 有 $s \sim t$;
- 对于 n 元运算符号 f, 若 $s_i \sim t_i \, (i = 1, \cdots, n)$, 则有 $f(s_1, \cdots, s_n) \sim f(t_1, \cdots, t_n)$.

则商集 $F(n) := T(n)/\!\sim$ 是 **n 个元素生成的自由 $\mathcal{T}$-模型**, 也即对任意 $\mathcal{T}$-模型 M, 集合映射 $\{x_1, \cdots, x_n\} \to M$ 唯一地延拓为 $\mathcal{T}$-模型态射 $F(n) \to M$.

由上述命题, 对任意 $\mathcal{T}$-模型 M 有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathsf{Mod}}(F(n), M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\mathsf{Mod}}(F(1), M)^n.$$

这表明 $F(n)$ 在范畴 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}$ 中同构于 n 个 $F(1)$ 的和. 特别地, $F(0)$ 是 0 个对象的和, 也即 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}$ 的始对象.

[17] 森田纪一 (1915-1995), 日本数学家, 研究代数和拓扑学. 代数学上, 森田等价的概念最早是指两个环的模范畴的等价. 环上的模是 Lawvere 理论的特例, 故这里的森田等价可视为代数学上森田等价的推广.

命题-定义 A.8.7 (Lawvere 理论与其表现的关系)

设 $\mathcal{T}$ 是 Lawvere 理论的表现 (定义 A.8.3). 那么 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}$ 中由有限生成自由模型构成的全子范畴的对偶范畴构成一个 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$, 且有范畴等价

$$\mathcal{T}\mathsf{Mod} \simeq \mathbb{T}\mathsf{Mod}.$$

此时称 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{T}$ 的一个表现.

证明. 首先证明 $\mathbb{T}$ 为 Lawvere 理论. 前面提到 $F(n)$ 在 $\mathcal{T}\mathsf{Mod}$ 中同构于 n 个 $F(1)$ 的和, 因此 $F(n)$ 在 $\mathbb{T}$ 中同构于 n 个 $F(1)$ 的积.

给定保积函子 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$, 我们构造一个 $\mathcal{T}$-模型 M 如下. 令底层集合 $M = A(F(1))$. 对 $\mathcal{T}$ 中每个 n 元运算符号 f, 有一个元素 $[f(x_1, \cdots, x_n)] \in F(n)$ (方括号表示 $\sim$-等价类), 对应一个 $\mathcal{T}$-模型态射 $\bar{f}\colon F(1) \to F(n)$, 即对偶范畴 $\mathbb{T}$ 中的态射 $F(n) \to F(1)$. 而 A 为保积函子, 故 $M^n \simeq A(F(n))$. 定义

$$[\![f]\!] := A(\bar{f})\colon M^n \simeq A(F(n)) \to A(F(1)) = M.$$

下面说明 M 是 $\mathcal{T}$-模型. 对每条公理 $s = t$ (其中仅含有变量 $x_1, \cdots, x_n$), 由 $\sim$ 的定义有 $[s] = [t] \in F(n)$, 从而有 $\bar{s} = \bar{t}\colon F(1) \to F(n)$, $[\![s]\!] = [\![t]\!]\colon M^n \to M$.

反之, 给定 $\mathcal{T}$-模型 M, 我们构造保积函子 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$. 令 $A(F(n)) = M^n$, 由积的性质我们只需要指定态射 $F(n) \to F(1)$ 对应的映射 $M^n \to M$. 而态射 $F(n) \to F(1)$ 等同于变量 $x_1, \cdots, x_n$ 构成的一个项 (的等价类) $[t] \in F(n)$, 项的取值 $([\![x_1]\!], \cdots, [\![x_n]\!]) \mapsto [\![t]\!]$ 便给出了映射 $M^n \to M$. 由 $[\![-]\!]$ 的定义, 这确实给出了一个函子 $\mathbb{T} \to \mathsf{Set}$.

容易说明如上构造的函子性. 它们给出了范畴等价 $\mathcal{T}\mathsf{Mod} \simeq \mathbb{T}\mathsf{Mod}$. □

例 A.8.8

一个 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 有一种极大的表现 $\mathcal{T}$, 即所有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}}(n, 1)$ 的元素都是一个 n 元运算符号, 所有态射之间的等式都是一条公理. 很明显, 此时有 $\mathcal{T}\mathsf{Mod} \simeq \mathbb{T}\mathsf{Mod}$ (因为此时定义 A.8.5 所要求的正是保积函子的定义).

例 A.8.9 (群的 Lawvere 理论)

群的 Lawvere 理论 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$ 由二元运算 m, 一元运算 i, 零元运算 e 以及三者满足的关系所表现. 定义 $F(n)$ 为 n 个元素生成的自由群, $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$ 为所有 $F(n)$ 在 Grp 中构成的全子范畴的对偶范畴. 群范畴中 $F(n)$ 与 $F(m)$ 的余积 (群的自由积) 为 $F(n+m)$, 所以在 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$ 中有 $F(n) \simeq F(1)^n$. 设 $A\colon \mathbb{T}_{\mathrm{Grp}} \to \mathsf{Set}$ 为保积函子, 记 $G = A(F(1))$,

我们可以具体写出 G 上的乘法映射:

$$G \times G \simeq A(F(2)) \xrightarrow{A(m)} A(F(1)) = G,$$

其中群同态 $F(1) \to F(2)$ 将 $F(1)$ 的生成元映射到 $F(2)$ 两个生成元的乘积.

注 A.8.10 (游走模型)

我们形象地称对象 $F(1)$ 为理论 $\mathbb{T}$ 的*游走模型* (walking model), 因为理论 $\mathbb{T}$ 的任何模型都是 $F(1)$ 在相应范畴中的一个化身. 例如对于群的理论 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$, 其在拓扑空间范畴 Top 中的模型 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}} \to \mathsf{Top}$ 即为拓扑群, 在光滑流形范畴 Man 中的模型 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}} \to \mathsf{Man}$ 即为 Lie 群. 一般地, 在一个理论的句法范畴中有这个理论的游走模型, 该理论在任何范畴中的模型都是游走模型的化身.

例 A.8.11 (格的 Lawvere 理论)

格的 Lawvere 理论 $\mathbb{T}_{\mathrm{Lat}}$ 由二元运算 $\wedge, \vee$ 以及如下关系所表现:

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z, & x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z, \\ x \wedge y &= y \wedge x, & x \vee y &= y \vee x, \\ x \wedge x &= x, & x \vee x &= x, \\ x \wedge (x \vee y) &= x, & x \vee (x \wedge y) &= x. \end{aligned}$$

例 A.8.12 (R-模的 Lawvere 理论)

固定一个 (Set 中的) 环 R. R-模的 Lawvere 理论 $\mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}}$ 由二元运算 $+$, 每个元素 $r \in R$ 对应的一元运算 ρ_r 以及对应每两个元素 r, s 的如下关系所表现:

$$\begin{aligned} \rho_r(x + y) &= \rho_r(x) + \rho_r(y), \\ \rho_r(\rho_s(x)) &= \rho_{rs}(x), \\ \rho_{r+s}(x) &= \rho_r(x) + \rho_s(x). \end{aligned}$$

记 R^n 为 n 个元素生成的自由 R-模, 那么 $\mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}}$ 为所有 R^n 在 $R\mathsf{Mod}$ 中构成的全子范畴的对偶范畴. $R\mathsf{Mod}$ 中 R^n 与 R^m 的余积为 R^{n+m}, 所以在 $\mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}}$ 中有 $R^n \simeq (R^1)^n$. 设 $A\colon \mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}} \to \mathsf{Set}$ 为保积函子, 记 $M = A(R^1)$, 则 M 上的 R-模结构由如下资料给出:

$$+\colon M \times M \simeq A(R^2) \xrightarrow{A(+)} A(R^1) \simeq M,$$

$$\times r\colon M \simeq A(R^1) \xrightarrow{A(\rho_r)} A(R^1) \simeq M.$$

例 A.8.13 (平凡的 Lawvere 理论)

$\mathbb{T} = \mathbb{N}^{\mathrm{op}}$ 本身是一个 Lawvere 理论. $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的模型等同于 $\mathcal{C}$ 的对象. 该理论由 0 个运算符号和 0 个公理所表现. 由于我们一般以集合范畴中模型的名称来命名一个 Lawvere 理论, 平凡的 Lawvere 理论也可称作 "集合的 Lawvere 理论". $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$ 是一个对象生成的自由有限乘积范畴, 也即对任意具有有限乘积的范畴 $\mathcal{C}$, 其中的对象等同于保积函子 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

例 A.8.14 (光滑代数)

微分流形 $\mathbb{R}^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 构成的范畴 CartSp 是一个 Lawvere 理论. 每个光滑映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都对应这种代数结构中的一个 n 元运算. 例如这种代数结构至少要包含加法与乘法 $+, \times\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 包含所有实数 $\mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$, 还包含如 $\sin, \exp$ 等运算. Lawvere 理论 CartSp 的模型称作*光滑代数*. 光滑流形上的函数代数 $C^\infty(M)$ 是最简单的光滑环, 而一些更广义的几何对象上的 "函数代数" 也构成光滑环, 如 "无穷小线段上的函数代数" $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ 等.

模型的表现

给定一个 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$, 我们描述如何用生成元和关系表现一个 $\mathbb{T}$-模型. 以 $F(n)$ 表示 n 个元素生成的自由 $\mathbb{T}$-模型 (定义 A.8.6).

定义 A.8.15 (有限表现模型)

设 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$ 是 $\mathbb{T}$-模型. 若存在 m, n 使得 A 可表示为余等化子

$$A \simeq \operatorname{coeq}(s, t\colon F(m) \rightrightarrows F(n)),$$

则称 A 为*有限表现* $\mathbb{T}$-模型; 具体地, A 是由 n 个生成元和 m 个关系表现的 $\mathbb{T}$-模型, 此处每个关系是指一个等式 $s_i = t_i$, $s_i, t_i \in F(n)$, $1 \le i \le m$.

有限表现群, 有限表现环, 有限表现 R-模, 有限表现 R-代数 (R 为环) 等等概念均为上述概念的特例.

命题 A.8.16 (有限表现的等价定义)

有限表现 $\mathbb{T}$-模型等价于范畴 $\mathbb{T}\mathsf{Mod}$ 中的有限表现对象 (定义 A.5.8); 换言之, $\mathbb{T}$-模型 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$ 有限表现当且仅当 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{T}\mathsf{Mod}}(A, -)$ 保持滤余极限.

证明.

- 设 $A \simeq \operatorname{coeq}(s, t\colon F(m) \rightrightarrows F(n))$, 则有自然同构

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathbb{T}\mathsf{Mod}}(A, B) &\simeq \operatorname{eq}\left(\operatorname{Hom}_{\mathbb{T}\mathsf{Mod}}(F(n), B) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{\mathbb{T}\mathsf{Mod}}(F(m), B)\right)\\ &\simeq \operatorname{eq}\left(B^n \rightrightarrows B^m\right)\end{aligned}$$

  而集合的滤余极限与有限极限交换 (命题 A.5.5), 故 $\operatorname{Hom}(A, -)$ 保持滤余极限.

- 设 $\operatorname{Hom}(A, -)$ 保持滤余极限. 与例 A.5.12 中的证明完全类似, 考虑

$$I := \{B \leq A \mid B \text{ 由有限个元素生成}\},$$

  那么 $A = \operatorname{colim}_{B \in I} B$, 从而 id_A 穿过某个同态 $B \hookrightarrow A$, A 可由有限个元素生成. 进一步, 设 F 为有限生成自由 $\mathbb{T}$-模型, 且有满同态 $\varphi\colon F \to A$ (这里是指底层集合上为满射). 令

$$J := \left\{K = F/{\sim} \;\middle|\; \sim \text{ 由 } \ker\varphi \text{ 中有限个元素生成}\right\},$$

  容易说明 $A = \operatorname{colim}_{K \in J} K$, 其中每个 K 到 A 有典范的满同态. 那么 id_A 穿过某个同态 $K \to A$, 说明 A 可由有限个生成元和有限个关系所表现.

□

代数理论之间的态射

所有 Lawvere 理论构成一个范畴. 我们将看到 Lawvere 理论之间的态射体现了不同代数结构之间的关系.

定义 A.8.17 (Lawvere 理论之间的态射)

设 $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ 为 Lawvere 理论. 定义 Lawvere 理论之间的态射 $\mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ 为保持乘积且将 1 映射为 1 的函子. 如此所有 Lawvere 理论构成范畴 Law.

Lawvere 理论之间的态射 $f\colon \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ 可理解为将 $\mathbb{T}_2$ 的游走模型视为 $\mathbb{T}_1$-模型的方法. 由此我们可将任意范畴中的 $\mathbb{T}_2$-模型转化为 $\mathbb{T}_1$-模型. 特别地, 有函子 $f^*\colon \mathbb{T}_2\mathsf{Mod} \to \mathbb{T}_1\mathsf{Mod}$, 它正是与 f 的复合.

例 A.8.18 (常见的 Lawvere 理论态射)

(1) 集合的 Lawvere 理论 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$ 是 Law 的始对象, 对应遗忘函子 $\mathbb{T}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Set}$.

(2) 幺半群的 Lawvere 理论到群的 Lawvere 理论有态射 $\mathbb{T}_{\mathrm{Mon}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$, 对应遗忘函子 $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Mon}$. 根据注 A.8.10, 我们称 “游走的群是一个幺半群”. 既然游走的群是幺半群, 那么所有的群便都是幺半群.

(3) Abel 群的 Lawvere 理论到环的 Lawvere 理论有态射 $\mathbb{T}_{\mathrm{Ab}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Ring}}$, 对应遗忘函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Ab}$, "取加法群". 根据注 A.8.10, 我们称 "游走的环是一个 (加法) 群".

(4) 幺半群的 Lawvere 理论到环的 Lawvere 理论有态射 $\mathbb{T}_{\mathrm{Mon}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Ring}}$, 对应遗忘函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Mon}$, "取乘法幺半群".

(5) 固定一个域 k, 由 k 上的结合代数 A 可得一个 Lie 代数, 其 Lie 括号为 $[a,b] = ab - ba$. 这给出了 k 上的 Lie 代数的 Lawvere 理论到 (结合) 代数的 Lawvere 理论的态射 $\mathbb{T}_{\mathrm{Lie}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Alg}}$, 对应函子 $\mathsf{Alg}_k \to \mathsf{Lie}_k$.

(6) 环同态 $f\colon R \to S$ 给出 Lawvere 理论的态射 $f\colon \mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}} \to \mathbb{T}_{S\mathrm{Mod}}$ ($\mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}}$ 的定义见 A.8.12). 这对应 "遗忘函子" $S\mathsf{Mod} \to R\mathsf{Mod}$.

(7) $\mathbb{R}$-代数的 Lawvere 理论到光滑代数的 Lawvere 理论有态射 $\mathbb{T}_{\mathbb{R}\mathrm{Alg}} \to \mathsf{CartSp}$, 对应遗忘函子 $C^\infty\mathsf{Alg} \to \mathbb{R}\mathsf{Alg}$; "光滑代数至少是一个 $\mathbb{R}$-代数" (注 4.7.25).

命题 A.8.19

对于 Lawvere 理论之间的态射 $f\colon \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$, 函子 $f^*\colon \mathbb{T}_2\mathsf{Mod} \to \mathbb{T}_1\mathsf{Mod}$ 有左伴随 $f_!\colon \mathbb{T}_1\mathsf{Mod} \to \mathbb{T}_2\mathsf{Mod}$.

证明. 这个证明参考了 [5] 3.7.7. 回忆 $f^*\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{T}_2, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Fun}(\mathbb{T}_1, \mathsf{Set})$ 有左伴随

$$f_!\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{T}_1, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Fun}(\mathbb{T}_2, \mathsf{Set}),$$

它是沿 f 的左 Kan 扩张 (例 A.6.5),

$$f_!(A)(n) = \operatorname{colim}_{m\to n} A(m),$$

其中指标范畴由 $\mathbb{T}_2$ 中的态射 $m \to n$ (m 跑遍 $0, 1, 2, \cdots$) 构成. 我们要证明对于保积函子 $A\colon \mathbb{T}_1 \to \mathsf{Set}$, 有 $f_!(A)$ 也是保积函子. 注意由于 $\mathbb{T}_2$ 的对象 n 是 n 个 1 的积, 故一个态射 $m \to n$ 等同于 n 个态射 $m \to 1$. 那么

$$\begin{aligned} f_!(A)(n) &\simeq \operatorname{colim}_{m\to n} A(m) \\ &\simeq \operatorname{colim}_{m\to 1, \cdots, m\to 1} A(m) \\ &\simeq \big(\operatorname{colim}_{m\to 1} A(m)\big)^n \simeq f_!(A)(1)^n. \end{aligned}$$

□

上述构造的直观是, $f_!(A)$ 的底层集合 (即 $f_!(A)(1)$) 由所有形如 $\varphi(a_1, \cdots, a_m)$ 的项构成, 其中 $a_1, \cdots, a_m$ 是 A 的底层集合 (即 $A(1)$) 的元素, $\varphi\colon m \to 1$ 是理论 $\mathbb{T}_2$ 中的 m 元运算.

例 A.8.20

对于例 A.8.18 提到的每个态射 f, 我们来描述 $f_!$.

(1) $f\colon \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{T}$, $f_!\colon \mathsf{Set} \to \mathbb{T}\mathsf{Mod}$ 是 "自由" 函子.

(2) $f\colon \mathbb{T}_{\mathrm{Mon}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$, $f_!\colon \mathsf{Mon} \to \mathsf{Grp}$ 给出幺半群的 "泛包络群", 对于交换幺半群它是所谓 Grothendieck 群.

(3) $f\colon \mathbb{T}_{\mathrm{Ab}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Ring}}$, $f_!\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ring}$ 给出 Abel 群 A 的张量代数 $TA = \bigoplus_{n\geq 0} A^{\otimes n}$.

(4) $f\colon \mathbb{T}_{\mathrm{Mon}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Ring}}$, $f_!\colon \mathsf{Mon} \to \mathsf{Ring}$ 给出幺半群 G 的群代数 $\mathbb{Z}[G]$.

(5) $f\colon \mathbb{T}_{\mathrm{Lie}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{Alg}}$, $f_!\colon \mathsf{Lie}_k \to \mathsf{Alg}_k$ 给出 Lie 代数的泛包络代数 (universal enveloping algebra).

(6) $f\colon \mathbb{T}_{R\mathrm{Mod}} \to \mathbb{T}_{S\mathrm{Mod}}$, $f_!\colon R\mathsf{Mod} \to S\mathsf{Mod}$ 是 "环的变换" (见 A.7.11).

(7) $f\colon \mathbb{T}_{\mathbb{R}\mathrm{Alg}} \to \mathsf{CartSp}$, 此时 $f_!$ 没有简单的描述, 但有一些例子, 如 $f_!(\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]) \simeq C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 这是因为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 n 个元素自由生成的光滑代数 (命题 4.7.29). 我们猜测对一般的 $\mathbb{R}$-代数 A, $f_!(A)$ 是 A 对应的几何对象上光滑函数的代数.

单子与代数理论

一个 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 的自由–遗忘伴随

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\mathsf{Mod} \arrow[r, shift right, "\text{遗忘}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right, "\text{自由}"'] \end{tikzcd}$$

生成了 Set 上的单子 $T =$ 遗忘 $\circ$ 自由,

$$TX = \operatorname{colim}_{n\to 1} X^n.$$

且使得集合上的 $\mathbb{T}$-模型结构一一对应于 T-代数结构. 在这种意义上, 单子是 Lawvere 理论的推广.

- 对于 $\mathbb{T}$-模型 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$, 注意 "遗忘$A = A(1)$". 由 $\mathrm{id}_{A(1)}$ 在伴随下给出态射 "自由$A(1) \to A$", 再遗忘, 得到映射

$$TA(1) = \text{遗忘} \circ \text{自由}A(1) \to \text{遗忘}A = A(1).$$

- 对于 T-代数 $(X, h\colon TX \to X)$, 定义 $A\colon \mathbb{T} \to \mathsf{Set}$, 将对象 n 对应到 X^n, 态射 $\varphi\colon n \to 1$ 对应到

$$X^n \to \operatorname{colim}_{n\to 1} X^n = TX \xrightarrow{h} X,$$

其中第一个箭头是余极限余锥中 φ 对应的箭头.

若 Lawvere 理论 $\mathbb{T}$ 具有某个表现 $\mathcal{T}$, 那么单子 T 也可由自由模型的构造 (定义 A.8.6) 得出, 即所有项的集合商掉由公理可证的等价关系. 这与自由群的构造是完全类似的.

A.9 纤维范畴与索引范畴

纤维范畴是 "相对" 版本的范畴 (正如概形态射是相对版本的概形), 即一个底范畴的每个对象上有一个范畴 ("纤维") , 且纤维关于底范畴中的对象有某种函子性. 与纤维范畴相近的一个概念是索引范畴 (indexed category), 它明确定义了纤维的函子性. 纤维范畴与索引范畴之间通过 Grothendieck 构造相联系.

纤维范畴可用于描述逻辑或类型论. 底范畴的一个对象是一个*语境*, 而其上的纤维是这个语境中发生的事情.

给出索引范畴与纤维范畴的严格定义之前, 我们先看几个例子.

例 A.9.1 (谓词)

此处所说的*谓词* (predicate) 是一个集合 X 以及一个子集 $U \hookrightarrow X$. 所有谓词 $(X, U \hookrightarrow X)$ 构成一个范畴 Pred, 态射为交换图

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

遗忘函子 $\mathsf{Pred} \to \mathsf{Set}, (X, U) \mapsto X$ 是一个纤维范畴, 集合 X 上的纤维是其所有子集构成的偏序集 PX. 对集合的映射 $f\colon X \to Y$, 有函子 (偏序集态射) $f^*\colon PY \to PX$. 另外, 投影 $\pi\colon X \times Y \to X$ 对应的函子 $\pi^*\colon PX \to P(X \times Y)$ 同时有左右伴随 $\exists \dashv \pi^* \dashv \forall$, 见注 1.3.22. 这体现了*谓词逻辑的操作可以定义为纤维范畴* $\mathsf{Pred} \to \mathsf{Set}$ *的纤维之间的结构*. 谓词逻辑的另一个操作是*概括* (comprehension), 即给定一个谓词, 取出满足该谓词的元素构成的子集. 在这里概括不过是函子 $(X, U) \mapsto U$. 这个函子是 "真" $\top\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Pred}, X \mapsto (X, X)$ 的右伴随.

例 A.9.2 (集合族)

一个*集合族* (family of sets) 不过是一个集合映射 $W \to X$. 所以集合族是谓词的某种推广. (谓词又可视为*真值族*.) 所有集合族构成一个范畴 Fam, 态射为方块交换图. 遗忘函子 $\mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}, (W \to X) \mapsto X$ 是一个纤维范畴, 集合 X 上的纤维 Fam_X 同构于俯范畴 Set/X, 也即 Set^X. 集合的映射 $f\colon X \to Y$ 诱导函子 $f^*\colon \mathsf{Set}/Y \to \mathsf{Set}/X$. 投影 $\pi\colon X \times Y \to X$ 对应的函子 $\pi^*\colon \mathsf{Set}/X \to \mathsf{Set}/(X \times Y)$ 同时有左右伴随 $\Sigma \dashv$

$\pi^* \dashv \Pi$, 见命题 1.1.40.

例 A.9.3 (俯范畴)

考虑 "箭头范畴" $\bullet \longrightarrow \bullet$, 前面的例子 $\mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$ 可推广为函子 $t \colon \mathcal{C}^{\bullet\to\bullet} \to \mathcal{C}$, 将一个箭头对应到它的终点. 此时对象 c 上的纤维正是俯范畴 $\mathcal{C}/c$, 当 $\mathcal{C}$ 有拉回时, 对于态射 $f\colon c \to d$ 有函子 $f^*\colon \mathcal{C}/d \to \mathcal{C}/c$. 事实上, t 是纤维范畴当且仅当 $\mathcal{C}$ 有拉回 (见 [13] 命题 1.1.6).

例 A.9.4 (对象族)

这是例 A.9.2 的另一种推广. 设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴, 定义其 (集合指标的) 对象族范畴 $\mathsf{Fam}(\mathcal{C})$ (category of set-indexed families) 如下:

- $\mathsf{Fam}(\mathcal{C})$ 的对象为 (I, X), 其中 I 为集合 (视为离散范畴), $X\colon I \to \mathcal{C}$ 为函子;
- 对象 (I, X) 到 (J, Y) 的态射为映射 $f\colon I \to J$ 以及一族态射 $X_i \to Y_{f(i)}$.

将对象族 (I, X) 对应到指标集 I 的遗忘函子 $\mathsf{Fam}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Set}$ 是纤维范畴, 指标集 I 上的纤维 $\mathsf{Fam}(\mathcal{C})_I$ 同构于 $\mathsf{Fun}(I, \mathcal{C})$, 即以 I 为指标的对象族的范畴. 指标集的映射 $f\colon I \to J$ 诱导了函子 $\mathsf{Fam}(\mathcal{C})_J \to \mathsf{Fam}(\mathcal{C})_I$, 将 (J, Y) 对应到 $(I, Y \circ f)$.
这个例子说明纤维范畴表达了对象族的直观: Top 上的纤维范畴的对象是 "一族连续变化的对象"; 光滑流形范畴上纤维范畴的对象是 "一族光滑变化的对象", 等等等等.
例 A.9.6 表达了 "向量丛是一族连续变化的向量空间".

例 A.9.5 (符号表)

此处所谓的符号表 (signature) Σ 是由一族类型 $A, B, \cdots$ 以及一些函数符号 $f\colon A_1, \cdots, A_n \to B$ (注意 A, B, f 只是形式的记号) 构成的, 参考定义 B.1.5, 但此处不考虑关系符号. 符号表之间的态射是类型集合之间的映射加上函数符号的合适的对应. 由此, 符号表构成一个范畴 Sign, 有纤维范畴 $\mathsf{Sign} \to \mathsf{Set}$, 将符号表遗忘为其中类型的集合. 这个纤维范畴也是如下的拉回,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sign} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fam} \arrow[d] \\ \mathsf{Set} \arrow[r] & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

其中函子 $\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 将集合 T 对应到 $\coprod_{n \geq 0} T^n \times T$.
设 Σ 为符号表, 定义 Σ 的模型 M 是将类型实现为具体的集合, 将函数符号实现为具体的函数的方法, 详见定义 B.2.1.

例 A.9.6 (空间上的向量丛)

考虑向量丛的范畴 VBun, 其中

- 对象 (X, E) 为拓扑空间 X 搭配一个 X 上的向量丛 E;
- 态射 $(X, E) \to (Y, F)$ 为连续映射 $f\colon X \to Y$ 搭配向量丛同态 $E \to f^*F$.

典范的投影函子 $\pi\colon \mathsf{VBun} \to \mathsf{Top}, (X, E) \mapsto X$ 是一个纤维化, 对象 X 上的纤维为 X 上向量丛的范畴.

例 A.9.7 (环上的模)

考虑模的范畴 Mod, 其中

- 对象 (R, M) 为环 R 搭配一个 R-模 M;
- 态射 $(R, M) \to (S, N)$ 为环同态 $\varphi\colon R \to S$ 搭配 R-模同态 $M \to \varphi^*N$ (φ^*N 是 N 通过 φ 视为 R-模, 又称*标量限制*, restriction of scalars).

典范的投影函子 $\pi\colon \mathsf{Mod} \to \mathsf{Ring}, (R, M) \mapsto R$ 是一个纤维化, 对象 R 上的纤维为 R-模范畴 $R\mathsf{Mod}$.

在上面的许多例子中我们看到这样的结构: 一个范畴 $\mathcal{S}$ 的每个对象 i 上各自有一个范畴 $\mathcal{C}(i)$, 并且这些范畴之间沿着 $\mathcal{S}$ 的态射存在着联系. 于是我们得到*索引范畴*的概念.

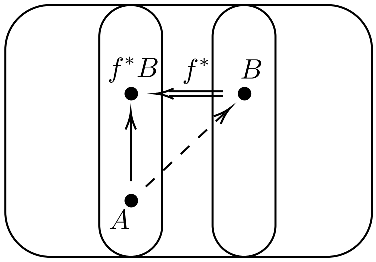
定义 A.9.8 (索引范畴)

设 $\mathcal{S}$ 为范畴. 定义一个 *$\mathcal{S}$-索引范畴* ($\mathcal{S}$-indexed category) 为一个 2-函子 $\mathcal{C}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$, 其中 $\mathcal{S}$ 视为局部离散 2-范畴 (例 A.1.8). $\mathcal{S}$-索引范畴构成一个 2-范畴 $\mathcal{C}at_{\mathcal{S}}$.

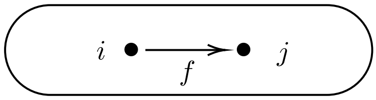
定义 A.9.9 (Grothendieck 构造)

设 $\mathcal{C}\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$ 是 $\mathcal{S}$-索引范畴. 对于 $\mathcal{S}$ 的态射 $f\colon i \to j$, 记函子 $\mathcal{C}(f)\colon \mathcal{C}(j) \to \mathcal{C}(i)$ 为 f^*, 则由 2-函子的定义 (A.1.10), 对 $f\colon i \to j$, $g\colon j \to k$, 有自然同构 $\gamma_{i,j,k}\colon (gf)^* \xrightarrow{\sim} f^*g^*$. 定义 $\mathcal{C}$ 的 *Grothendieck 范畴* $\mathsf{G}(\mathcal{C})$ 如下:

- 其对象 (i, A) 为 $\mathcal{S}$ 的对象 i 搭配 $\mathcal{C}(i)$ 的对象 A;
- 态射 $(f, \varphi)\colon (i, A) \to (j, B)$ 为 $\mathcal{S}$ 的态射 $f\colon i \to j$ 搭配 $\mathcal{C}(i)$ 的态射
$$\varphi\colon A \to f^*(B).$$
- 态射 $(f, \varphi)\colon (i, A) \to (j, B)$, $(g, \psi)\colon (j, B) \to (k, C)$ 的复合为



$\mathsf{G}(\mathcal{C})$



S

$$\left(gf, A \xrightarrow{\varphi} f^*B \xrightarrow{f^*(\psi)} f^*g^*C \xrightarrow{\gamma^{-1}} (gf)^*C\right)\colon (i, A) \to (k, C).$$

γ 的融贯性保证了上述复合的结合律, 使得 $\mathsf{G}(\mathcal{C})$ 构成一个 1-范畴. $\mathsf{G}(\mathcal{C})$ 到 $\mathcal{S}$ 有明显的投影函子 $(i, A) \mapsto i$, 这是一个纤维范畴. 将索引范畴对应到此纤维范畴的过程称为 *Grothendieck* 构造, 它是一个 2-函子

$$\mathsf{G}\colon \mathcal{C}at_{\mathcal{S}} \to \mathcal{C}at/\mathcal{S}.$$

例 A.9.10 (俯范畴作为索引范畴)

设范畴 $\mathcal{C}$ 有拉回, 即对态射 $f\colon c_1 \to c_2$ 有俯范畴之间的函子 $f^*\colon \mathcal{C}/c_2 \to \mathcal{C}/c_1$. 进一步, 有 2-函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$, 将对象 c 对应到俯范畴 $\mathcal{C}/c$. 其 Grothendieck 范畴为 $\mathcal{C}^{\bullet\to\bullet}$, 即 $\mathcal{C}$ 中的态射构成的范畴, 见例 A.9.3.

Grothendieck 范畴的直观是 "纤维丛的全空间". 在一个 Grothendieck 范畴 $\mathsf{G}(\mathcal{C})$ 中, 与 (带联络的) 纤维丛相似地, 我们可以定义垂直和水平的态射: 态射 (id_i, φ) 是垂直的 (即 "纤维方向" 的), 而 (f, id_A) 是水平的. 很明显, 任何态射 $(f, \varphi)\colon (i, A) \to (j, B)$ 都可分解为一个垂直态射 (id_i, φ) 后接一个水平态射 (f, id_{f^*B}).

在几何学中, 一个纤维丛的联络等同于在全空间上对每个点指定一些水平方向. 有了联络, 就可在纤维之间作平行移动. 要在范畴之间做类似的事情, 就需要将水平态射的概念抽象到一般的 "纤维范畴" $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$, 而这将解释纤维范畴定义的动机.

定义 A.9.11 (水平态射)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{S}$ 为 1-范畴, $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ 为函子. 对于态射 $h\colon c' \to c$, 若以下条件成立, 则称之为 *π-水平态射* (prone morphism, 又称 Cartesian morphism): 对任意态射 $k\colon c'' \to c$

以及任意分解 $\pi(k)=\pi(h)x$, 存在唯一的态射 $\ell\colon c''\to c$ 满足 $k=h\ell$ 且 $x=\pi(\ell)$.

$$
\begin{tikzcd}
& c' \arrow[r, "h"] & c \\
c'' \arrow[ur, dashed, "\exists!\ell"] \arrow[urr, "k"'] & & \\
& \Downarrow & \\
& \pi(c') \arrow[r, "\pi(h)"] & \pi(c) \\
\bullet \arrow[ur, "x"] \arrow[urr, "\pi(k)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

π-水平态射的直观为 “拉回”; 且在下例中它完全就是拉回.

例 A.9.12 (向量丛范畴中的水平态射)

继续例 A.9.6, 考虑下图, 其中 $K\to L$, $E\to M$ 为向量丛.

$$
\begin{tikzcd}
& f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
K \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[urr] \arrow[d] & N \arrow[r, "f"'] & M \\
L \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

由拉回的泛性质, 存在唯一的向量丛态射 $K\to f^*E$ 使其交换. 这说明向量丛的拉回构成 $\pi\colon \mathsf{VBun}\to\mathsf{Top}$ 的水平态射.

定义 A.9.13 (纤维范畴, Grothendieck 纤维化, Street 纤维化)

对于函子 $\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{S}$, 若如下条件成立, 则称之为纤维范畴 (fibered category, 或称 *Grothendieck* 纤维化): 对 $\mathcal{C}$ 的任意对象 c 以及 $\mathcal{S}$ 中任意态射 $f\colon s\to\pi(c)$, 都存在 π-水平态射 $\widetilde{f}\colon c'\to c$ 使得 $\pi(\widetilde{f})=f$. 换言之, 若一个态射 f 的终点有提升, 则该态射有水平提升 $\widetilde{f}$.
若上面条件中的 $\pi(\widetilde{f})=f$ 改为较弱的条件 $\pi(\widetilde{f})\simeq f$ (在 $\mathcal{S}/\pi(c)$ 中), 则称之为 *Street* 纤维化[18].
若 $\pi^{\mathrm{op}}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 为纤维化, 则称 π 为对偶纤维化 (opfibration). 既是纤维化又是对偶纤维化的函子称为双纤维化 (bifibration).

[18] Ross Street, 澳大利亚范畴学家.

注 A.9.14 (水平提升的唯一性与分裂纤维化)

在纤维化的定义 (A.9.13) 中, 没有提到水平提升 $\widetilde{f}$ 是唯一的; 但由水平态射的定义, f 的任意两个水平提升 $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ 之间由唯一的同构相联系.

$$
\begin{tikzcd}
c'' \arrow[rr, "\widetilde{f}_2"] \arrow[d, dashed, shift left, "\exists!"] & & c \\
c' \arrow[u, dashed, shift left, "\exists!"] \arrow[urr] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \widetilde{f}_1"] & \\
s \arrow[rr, "f"'] & & \pi(c)
\end{tikzcd}
$$

假设选择公理, 那么我们可以给每个 f 选择一个水平提升; 这额外的信息称为纤维化的分裂 (cleavage). 带有分裂的纤维化称作分裂纤维化 (cloven fibration, 或 split fibration).

例 A.9.15 (预层作为纤维范畴)

范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层 $X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为索引范畴 (纤维范畴), 其纤维为离散范畴. 此时 Grothendieck 构造 (定义 A.9.9) 退化为 “元素的范畴” (定义 A.4.5).

命题-定义 A.9.16 (由纤维范畴给出索引范畴)

给定纤维范畴 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$, 我们构造相应的 2-函子 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$.

- $\mathcal{S}$ 的对象 X 对应范畴 $\mathcal{C}_X := \pi^{-1}(X)$.
- 对于 $\mathcal{S}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$, 如下定义函子 $f^*\colon \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$,
  - 对于 $\mathcal{C}_Y$ 的对象 E, 由纤维范畴的定义, 存在 f 的水平提升 $\widetilde{f}\colon E' \to E$, 令 $f^*(E) = E'$ (这一步或者需要选择公理, 或者需要 π 的一个分裂, 见注 A.9.14),
  - 对于 $\mathcal{C}_Y$ 中的态射 $\varphi\colon E_1 \to E_2$, 由水平态射的定义 (A.9.11), 下图中存在唯一的 $\varphi'\colon f^*E_1 \to f^*E_2$.

$$
\begin{tikzcd}
& f^*E_2 \arrow[rr] & & E_2 \\
f^*E_1 \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi'"] \arrow[rr] & & E_1 \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
& X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
X \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

定义 $f^*(\varphi) = \varphi'$. 唯一性保证了该构造确实定义了一个函子.

- 对于 $\mathcal{S}$ 中的态射 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, 下图中存在唯一的同构 $f^*g^*\simeq(gf)^*$.

$$
\begin{tikzcd}
f^*g^*E \arrow[r] \arrow[d, dashed, shift left, "\exists!"] & g^*E \arrow[r] & E \\
(gf)^*E \arrow[u, dashed, shift left, "\exists!"] \arrow[urr] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

由上述讨论, 以及 $\mathcal{S}$ 是局部离散 2-范畴, 容易验证 2-函子的定义 (A.1.10) 要求的融贯性.

命题 A.9.17 (双纤维化产生伴随)

设 $\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{S}$ 为双纤维化, 则 $\mathcal{S}$ 中的态射 $f\colon X\to Y$ 产生一对伴随

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_X \arrow[r, shift left=1.5, "f_!"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}_Y \arrow[l, shift left=1.5, "f^*"]
\end{tikzcd}
$$

其中 f^* 是定义 A.9.16 中的 f^*, 而 $f_!$ 是纤维范畴 $\pi^{\mathrm{op}}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ 的相应构造.

证明. 这是由于自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Y}(f_!-,-)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_X}(-,f^*-).$$

□

命题 A.9.18

在命题 A.9.17 的对应下, 一对伴随等同于 $\{0\to1\}$ 上的一个双纤维化.

证明. 设有伴随 $\begin{tikzcd}\mathcal{C}_0 \arrow[r, shift left=1.5, "G"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}_1 \arrow[l, shift left=1.5, "H"]\end{tikzcd}$, 考虑如下的范畴 $\mathcal{C}$,

- 其对象类为 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0\sqcup\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$;

- 态射集为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')=\begin{cases}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(c,c') & c,c'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_i\\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(Gc,c')\text{ 即 }\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(c,Hc') & c\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0,c'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1\\ \varnothing & c\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1,c'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0\end{cases}$.

定义函子 $\pi\colon\mathcal{C}\to\{0\to1\}$, 将 $\mathcal{C}_0$ 的对象映射到 0, $\mathcal{C}_1$ 的对象映射到 1, $\mathcal{C}_0$ 中的态射映射到

id_0, $\mathcal{C}_1$ 中的态射映射到 id_1, 其余的态射映射到 $f\colon 0 \to 1$. 我们验证 π 是双纤维化.

$$\begin{tikzcd}
& Hc' \arrow[rr, "\widetilde{\varepsilon}_{c'}"] & & c' \\
c \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[urrr, "k"] \arrow[rr, "\widetilde{\eta}_c"'] & & Gc \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[rr] & & 1 \\
0 \arrow[ur] \arrow[urrr] \arrow[rr] & & 1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

如图, 对任意 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_0$, $c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$,

- $\mathrm{id}_{Gc} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(Gc, Gc)$ (即 $\eta_c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(c, HGc)$) 给出 $\widetilde{\eta}_c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gc)$;
- $\mathrm{id}_{Hc'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(Hc', Hc')$ (即 $\varepsilon_{c'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(GHc', c')$) 给出 $\widetilde{\varepsilon}_{c'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Hc', c')$.

任意态射 $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ 唯一地穿过 $\widetilde{\eta}_c$ 与 $\widetilde{\varepsilon}_{c'}$. 这说明 $\widetilde{\eta}_c$ 为 π^{op}-水平态射, 而 $\widetilde{\varepsilon}_{c'}$ 为 π-水平态射; 从而 π, π^{op} 均为纤维化. 很明显, 该双纤维化在命题 A.9.17 的对应下给出的伴随正是 $G \dashv H$. □

注 A.9.19

事实上, 双纤维化 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ 等同于 2-函子 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at_{\mathrm{Adj}}$ ($\mathcal{C}at_{\mathrm{Adj}}$ 的定义见 A.2.12).

例 A.9.20 (双纤维化产生的伴随的例子)

- 例 A.9.7 中的纤维化 Mod → Ring 是双纤维化. 环同态 $\varphi\colon A \to B$ 诱导了模范畴之间的伴随 $\varphi_! \dashv \varphi^*$, $\varphi_! = (-) \otimes_A B$, $\varphi^* = \mathrm{Hom}_B(B, -)$ (见例 A.7.11).
- 设范畴 $\mathcal{C}$ 具有拉回, 则例 A.9.3 提到的函子 $t\colon \mathcal{C}^{\bullet\to\bullet} \to \mathcal{C}$ 是双纤维化. $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$ 诱导了俯范畴之间的伴随 $\Sigma_f = f_! \dashv f^*$ (见例 1.1.32).

等变对象

A.10 下降

[未完成:]

粗略地说, 下降 (descent) 是许多场合出现的一种现象: 在一族变化的范畴 (即纤维范畴) $\mathcal{C}_X$ 中, 对于某种态射 $f\colon Y \to X$, 为了给出 $\mathcal{C}_X$ 中的一个对象 u, 只需要给出其 “逆像” $f^*(u)$ 以及某种额外的信息, 有时称为 “粘贴资料” (gluing datum) ξ. 称 $(f^*(u), \xi)$ 为一个

下降资料 (descent datum, 复数 data). 当 Y 是 X 的某种覆盖时, 下降资料是层条件的类比, 下降的现象说明某些对象和态射可“局部地”定义.

例 A.10.1 (向量丛的下降)

设拓扑空间 X 有开覆盖 $\{U_i\}$; 令 $Y = \coprod_i U_i$, 所有 U_i 的嵌入给出了映射 $p\colon Y \to X$. 此时, 为了给出 X 上的一个向量丛 E, 只需要给出 Y 上的一个向量丛 F ($F = p^*(E)$), 也即每个 U_i 上的一个向量丛 F_i, 以及 U_i, U_j 相交之处的粘贴资料

$$\varphi_{ij}\colon F_i|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\simeq} F_j|_{U_i\cap U_j},$$

满足 $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{F_i}$, 以及交换图

$$\begin{tikzcd}
F_i|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & F_k|_{U_i\cap U_j\cap U_k}. \\
& F_j|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

上述粘贴资料可表示为更抽象的形式. 注意到

$$Y \times_X Y \simeq \coprod_{i,j} U_i \cap U_j, \quad Y \times_X Y \times_X Y \simeq \coprod_{i,j,k} U_i \cap U_j \cap U_k, \tag{$\star$}$$

记 $\pi_\alpha\colon Y \times_X Y \to Y$ 为第 α 分量的投影 ($\alpha = 1, 2$), $\pi_{\alpha\beta}\colon Y \times_X Y \times_X Y \to Y \times_X Y$ 为第 α, β 分量的投影 ($1 \le \alpha < \beta \le 3$), $\Delta\colon Y \to Y \times_X Y$ 为对角映射; 这些映射满足如下的关系:

$$\pi_1\pi_{13} = \pi_1\pi_{12}, \quad \pi_1\pi_{23} = \pi_2\pi_{12}, \quad \pi_2\pi_{13} = \pi_2\pi_{23}, \quad \pi_1\Delta = \pi_2\Delta = \mathrm{id}_Y\,.$$

在 ($\star$) 的观点下, 这些映射可分别写为

$$\Delta = (U_i \to U_i \cap U_i)_i,\ \pi_1 = \big(U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i\big)_{i,j},\ \pi_{12} = \big(U_i \cap U_j \cap U_k \hookrightarrow U_i \cap U_j\big)_{i,j,k}.$$

故对于 $F = (F_i)_i$, 有 $\pi_1^*F = (F_i|_{U_i\cap U_j})_{i,j}$, $\pi_2^*F = (F_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j}$, $\pi_{13}^*\pi_1^*F = \pi_{12}^*\pi_1^*F = (F_i|_{U_i\cap U_j\cap U_k})_{i,j,k}$ 等等. 那么粘贴资料等同于 $Y \times_X Y$ 上的向量丛同构

$$\varphi\colon \pi_1^*F \xrightarrow{\simeq} \pi_2^*F,$$

满足 $\Delta^*\varphi = \mathrm{id}_F$ 以及交换图

$$\begin{tikzcd}
& \pi_{13}^*\pi_1^*F \arrow[rr, "\pi_{13}^*(\varphi)"] & & \pi_{13}^*\pi_2^*F \arrow[dr, equal] & \\
\pi_{12}^*\pi_1^*F \arrow[ur, equal] \arrow[dr, "\pi_{12}^*(\varphi)"'] & & & & \pi_{23}^*\pi_2^*F. \\
& & \pi_{12}^*\pi_2^*F = \pi_{23}^*\pi_1^*F \arrow[urr, "\pi_{23}^*(\varphi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $\pi_1^*F = F\times_Y (Y\times_X Y)\simeq F\times_X Y$, 类似地 $\pi_2^*F\simeq Y\times_X F$, $\pi_{13}^*\pi_1^*F\simeq F\times_X Y\times_X Y$ 等等; 故粘贴资料也可表示为一个同构 $\varphi\colon F\times_X Y\to Y\times_X F$, 满足交换图

$$\begin{tikzcd} F\times_X Y\times_X Y \arrow[rr, "\pi_{13}^*(\varphi)"] \arrow[dr, "\pi_{12}^*(\varphi)"'] & & Y\times_X Y\times_X F. \\ & Y\times_X F\times_X Y \arrow[ur, "\pi_{23}^*(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

例 A.10.2 (模的下降)

设环 R 的谱 $\operatorname{Spec}(R)$ 有一个有限的开覆盖 $\{\operatorname{Spec}R_{f_i}\}_{1\le i\le n}$, 其中 $f_i\in R$ 生成了 R 的单位理想. (关于谱的开覆盖, 见例 2.2.7.) 令 $S=\prod_{i=1}^n R_{f_i}$, 一个 S-模 M 等同于一组 R_{f_i}-模 M_i. 此时, 为了给出一个 R-模, 只需要给出一个 S 模 M, 以及 $R_{f_if_j}$ 上的粘贴资料

$$\varphi_{ij}\colon (M_i)_{f_j}\xrightarrow{\simeq}(M_j)_{f_i},$$

满足 $\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{M_i}$, 以及交换图

$$\begin{tikzcd} (M_i)_{f_jf_k} \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & (M_k)_{f_if_j} \\ & (M_j)_{f_if_k}. \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

(注. $(M_i)_{f_j}$ 是 M_i 关于 f_j 生成的乘法封闭子集 $\{1,f_j,f_j^2,\cdots\}$ 的局部化, 见例 A.3.4. 这个局部化对应到开子空间 $\operatorname{Spec}R_{f_i}$ 的限制. 对任意两个元素 f_i,f_j, 作为 $\operatorname{Spec}R$ 的子空间有 $\operatorname{Spec}R_{f_i}\cap\operatorname{Spec}R_{f_j}=\operatorname{Spec}(R_{f_i}\otimes_R R_{f_j})=\operatorname{Spec}R_{f_if_j}$.)
上述粘贴资料可表示为更抽象的形式. 注意到

$$S\otimes_R S\simeq\prod_{i,j=1}^n R_{f_i}\otimes_R R_{f_j}\simeq\prod_{i,j=1}^n R_{f_if_j},\quad S\otimes_R S\otimes_R S\simeq\prod_{i,j,k=1}^n R_{f_if_jf_k}, \tag{$\star\star$}$$

记 $\mu_\alpha\colon S\to S\otimes_R S$ 为第 α 分量的含入 $(\alpha=1,2)$, $\mu_{\alpha\beta}\colon S\otimes_R S\to S\otimes_R S\otimes_R S$ 为第 α,β 分量的含入 $(1\le\alpha<\beta\le 3)$, $m\colon S\otimes_R S\to S$ 为乘法映射, 这些映射满足如下的关系:

$$\mu_{12}\mu_1=\mu_{13}\mu_1,\quad \mu_{12}\mu_2=\mu_{23}\mu_1,\quad \mu_{23}\mu_2=\mu_{13}\mu_2,\quad m\mu_1=m\mu_2=\mathrm{id}_S\,.$$

在 $(\star\star)$ 的观点下,

$$m\colon (a_{ij})_{1\le i,j\le n}\mapsto (a_{ii})_{1\le i\le n},\ \mu_1\colon (a_i)_{1\le i\le n}\mapsto (a_i)_{1\le i,j\le n}.$$

对于环同态 $f\colon A\to B$, 考虑函子 $f_! = (-)\otimes_A B\colon A\mathsf{Mod}\to B\mathsf{Mod}$. 故对于 $M=(M_i)_i$, 有 $(\mu_1)_!M \simeq M\otimes_S(S\otimes_R S)\simeq M\otimes_R S = \big((M_i)_{f_j}\big)_{i,j}$, $(\mu_{13})_!(\mu_1)_!M = (\mu_{12})_!(\mu_1)_!M = \big((M_i)_{f_jf_k}\big)_{i,j,k}$ 等等. 那么粘贴资料等同于 $S\otimes_R S$ 上的模同构

$$\varphi\colon(\mu_1)_!M\xrightarrow{\simeq}(\mu_2)_!M,$$

满足 $m_!\varphi=\mathrm{id}_M$ 以及交换图

$$\begin{tikzcd}
& (\mu_{13})_!(\mu_1)_!M \arrow[rr, "(\mu_{13})_!(\varphi)"] & & (\mu_{13})_!(\mu_2)_!M \arrow[dr, equal] & \\
(\mu_{12})_!(\mu_1)_!M \arrow[ur, equal] \arrow[dr, "(\mu_{12})_!(\varphi)"'] & & & & (\mu_{23})_!(\mu_2)_!M. \\
& (\mu_{12})_!(\mu_2)_!M \arrow[r, equal] & (\mu_{23})_!(\mu_1)_!M \arrow[urr, "(\mu_{23})_!(\varphi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

也即一个 $S\otimes_R S$-模同构

$$\varphi\colon M\otimes_R S\to S\otimes_R M,$$

满足

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_R S\otimes_R S \arrow[rr, "(\mu_{13})_!(\varphi)"] \arrow[dr, "(\mu_{12})_!(\varphi)"'] & & S\otimes_R S\otimes_R M. \\
& S\otimes_R M\otimes_R S \arrow[ur, "(\mu_{23})_!(\varphi)"'] &
\end{tikzcd}$$

例 A.10.3 (“丛” 的下降)

定义 A.10.4 (用单子表达下降)

设 $\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{S}$ 为双纤维化. 对于 $\mathcal{S}$ 中的态射 $f\colon X\to Y$, 定义下降资料的范畴 $\mathrm{Des}_\pi(f)$ 为伴随 $f_!\dashv f^*$ 对应的单子 $f^*f_!$ 的代数范畴, 也即

- $\mathrm{Des}_\pi(f)$ 的对象为[未完成:]

A.11 内范畴

定义 A.11.1 (内范畴)

设范畴 $\mathcal{S}$ 具有拉回 (实际上不需要存在全部的拉回, 只需要存在下面用到的拉回即可). 定义 $\mathcal{S}$ 上的一个*内范畴* (internal category) C 为如下资料,

- 对象 C_0, C_1, 分别代表 “对象集” 与 “态射集”;
- 态射 $s, t \colon C_1 \to C_0$, 分别代表态射的起点与终点;
- 态射 $e \colon C_0 \to C_1$, 代表对象上的恒等态射;
- 态射 $c \colon C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$, 代表态射的复合;

满足如下条件,

- $se = te = \mathrm{id}_{C_0}$ (恒等态射的起点和终点是自己);
- $sc = s\pi_1, tc = t\pi_2$ (复合态射的起点和终点);
- $c(c \times \mathrm{id}_{C_1}) = c(\mathrm{id}_{C_1} \times c)$ (结合律);
- $c(\mathrm{id}_{C_1} \times e) = \pi_1, c(e \times \mathrm{id}_{C_1}) = \pi_2$ (单位律).

对于意象或正则范畴, $\mathcal{S}$ 的内范畴也可直接定义为小范畴的理论在 $\mathcal{S}$ 中的模型 (例 B.1.10, 例 B.1.32).

对于内范畴 C, D, 定义一个*内函子* (internal functor) $f \colon C \to D$ 为态射 $f_0 \colon C_0 \to D_0$, $f_1 \colon C_1 \to D_1$, 要求与所有结构态射 s, t, e, c 相容. 对于内函子 $f, g \colon C \to D$, 定义*内自然变换* (internal natural transformation) $\alpha \colon f \to g$ 为态射 $\alpha \colon C_0 \to D_1$, 满足 $s\alpha = f_0$, $t\alpha = g_0$, 且 $c(\alpha t, f_1) = c(g_1, \alpha s) \colon C_1 \to D_1$. 其中最后一个等式对应交换图

$$\begin{tikzcd}
f(c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "f(h)"'] & g(c) \arrow[d, "g(h)"] \\
f(d) \arrow[r, "\alpha_d"'] & g(d).
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}$ 上的内范畴, 内函子与内自然变换构成 2-范畴 $\mathcal{C}at(\mathcal{S})$.

注 A.11.2 (内脉)

通过内脉 (internal nerve) 操作, $\mathcal{S}$ 上的内范畴 C 可视为 $\mathcal{S}$ 中的单纯对象 $N(C)\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$, 其中

$$N(C)_n := \underbrace{C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \cdots \times_{C_0} C_1}_{n \text{ 个 } C_1}$$

是 "n 个首尾相连态射的集合". 由此, $\mathcal{S}$ 上的内范畴等同于保持拉回的函子 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$. 此时内范畴之间的内函子对应单纯同伦.

例 A.11.3 (Lie 群, Lie 群胚)

回忆 Lie 群是光滑流形范畴 Man 中的群. 正如群胚是群的推广, 我们可定义 Lie 群胚为 Man 的内群胚. 读者可尝试写下*内群胚*的定义, 即在内范畴的基础上增加一个态射 $i\colon C_1 \to C_1$ 表示态射的逆, 满足 $si = t, ti = s, c(i, \mathrm{id}) = et, c(\mathrm{id}, i) = es$. 那么, Lie 群则是 Man 中以一个点为 "对象集" 的内群胚.

定义 A.11.4 (内范畴对应的索引范畴)

设 C 是 $\mathcal{S}$ 上的内范畴. 定义索引范畴 $[C]\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at$ 如下:

- 将 $\mathcal{S}$ 的对象 I 对应到范畴 C^I, 其对象为态射 $I \to C_0$, 态射为态射 $I \to C_1$;
- 将 $\mathcal{S}$ 中的态射 $f\colon I \to J$ 对应到函子 $f^*\colon C^J \to C^I$.

这是 "对象族范畴" (例 A.9.4) 的推广. 范畴 C^I 中的对象是 "以 I 为索引的一族对象".

定义 A.11.5 (内函子范畴)

设 C, D 是 $\mathcal{S}$ 上的内范畴, 则 $[C, D]$ [未完成:]

第 B 章　形式逻辑基础

Mathematicians are committed to rigorous reasoning, but they usually shy away from formal logic.

William M. Farmer, *The seven virtues of simple type theory*

B.1　一阶逻辑

我们即将引入的逻辑学中的若干基本概念可以视为“数学语言由什么构成”这个问题的一种完全形式化的回答. 写出语言的形式定义之前, 我们先从日常的数学语言中最熟悉的例子开始, 对语言的每个成分建立感性的认知.

数学语言中最常见的成分是*公式* (formula).

例 B.1.1 (公式)

$1+1=2$ 是一个公式, 其中

- $1, 2$ 是自然数, 即是*类型* (type) $\mathbb{N}$ 的*项* (terms);
- 加号 $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个*函数符号* (function symbol);
- 将两个 1 放在一起得到 $(1,1)$, 它的类型是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$;
- 以 $+$ 作用于 $(1,1)$, 得到 $1+1$, 类型为 $\mathbb{N}$;
- 以 $=$ 连接类型 $\mathbb{N}$ 的两个项 $1+1$ 与 2, 得到公式 $1+1=2$.

公式中可以带有*变量* (variables).

例 B.1.2 (带自由变量的公式)

$y=x^2$ 是一个*带自由变量* (free variables) 的公式, 其中

- x, y 是类型 $\mathbb{R}$ 的*变量*, 变量是项的一种, 所以 x, y 也是类型 $\mathbb{R}$ 的项;
- 平方 $(-)^2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个函数符号, 以 $(-)^2$ 作用于 x 得到 x^2, 它是类型 $\mathbb{R}$ 的项, 带一个*自由变量* x;
- 以 $=$ 连接类型 $\mathbb{R}$ 的两个项 y 与 x^2, 得到公式 $y=x^2$.

对公式中的自由变量, 我们可使用 “存在” 和 “任意” 这两个*量词* (quantifiers).

例 B.1.3 (带量词的公式)

$\neg\exists x\ x^2=-1$ 是一个不含自由变量的公式, 其中

- x 是类型 $\mathbb{R}$ 的变量, x^2 是类型 $\mathbb{R}$ 的项, 带一个自由变量 x;
- $x^2=-1$ 是带一个自由变量 x 的公式;
- *量词* $\exists x$ 放在含自由变量 x 的公式前面, 得到不含自由变量的公式 $\exists x\ x^2=-1$ (变量 x 在这里称为*约束变量* (bound variable));
- 逻辑运算 $\neg$ (“非”) 放在公式 $\exists x\ x^2=-1$ 前面, 得到公式 $\neg\exists x\ x^2=-1$.

例 B.1.4 (素数)

如下公式表达了 “p 是素数”:

$$\neg(p=1) \wedge \forall x\big((\exists y\ x \cdot y = p) \Rightarrow (x = 1 \vee x = p)\big),$$

其中 x, y, p 是类型 $\mathbb{N}$ 的变量, 整个公式有一个自由变量 p.

一阶语言的基本要件

符号表

语言的形式化定义依赖于一个符号表 (signature).[1]

定义 B.1.5 (符号表)

一个 (一阶) 符号表 Σ 由如下内容构成:

- 一族类型 (types), 每个类型可有任意多个变量 (variables)[2];
- 一些函数符号 (function symbols), 每一个函数符号 f 具有固定的类型 $A_1, \cdots, A_n, B$, 记作 $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$, 非负整数 n 称为 f 的元数 (arity); (当 $n=0$ 时, 函数符号 f 是 “零元函数”, 也即类型 B 的常数, 不妨记作 $f \in B$.)
- 一些关系符号 (relation symbols), 又叫谓词 (predicates), 每一个关系符号 R 具有固定的类型 $A_1, \cdots, A_n$, 记作 $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$, 非负整数 n 称为 R 的元数. (当 $n=0$ 时, 关系符号是 “零元关系”, 也即原子命题 (atomic proposition).)

注 B.1.6

如果我们在定义 B.1.5 中加入类型的有限积, 那么就不需要多元函数和多元关系; 但这样定义也有一些代价, 例如本来只有一个类型 G 的语言将会需要无穷多个类型 $1, G, G^2, \cdots$.
另外, 在定义 B.1.5 中, 关系符号与函数符号被区分开了; 但在通常的数学语言中我们可以认为某类型 A 上的关系符号不过是 A 到 “真值集合” 类型 $\{\top, \bot\}$ 的函数符号. 在一般意象的内语言中, $\{\top, \bot\}$ 的角色由子对象分类子 Ω 扮演.

[1] 逻辑学中的 signature 似乎没有通行的中文译名. 由于它给出了语言中所用的符号的集合, 试译为符号表.

[2] 要求一个类型有任意多个变量的目的是, 在任何场景我们都可以自由地声明一个此前从未出现的变量. 类型 X 的变量 x 不是 X 的元素, 只是一个形式上的符号, 不携带任何信息. 你可以想象 x 是 “未定元”, 但这种说法不具有数学上的含义.

例 B.1.7 (初等算术)

初等算术的语言的符号表包括

- 类型 $\mathbb{N}$;
- 常数 0, 一元函数符号 S (后继), 二元函数符号 $+, \times$ (加法, 乘法);
- 关系符号 $<$.

例 B.1.8 (Zermelo–Fraenkel 集合论)

Zermelo–Fraenkel (简称 ZF) 集合论的符号表包括

- 类型 S ("所有东西都是集合");
- 二元关系符号 $\in$.

例 B.1.9 (群)

群的语言的符号表包括

- 类型 G;
- 常数 1 (单位元), 一元函数符号 $(-)^{-1}\colon G \to G$ (逆), 二元函数符号 $\cdot\colon GG \to G$ (乘法);

没有关系符号[3].
读者可试着写出环的符号表.

例 B.1.10 (小范畴)

小范畴的语言的符号表包括

- 类型 O (对象), M (态射);
- 一元函数符号 $s, t\colon M \to O$, (态射的起点与终点), 一元函数符号 $\mathrm{id}\colon O \to M$ (对象的恒等态射);
- 三元关系符号 $C \hookrightarrow MMM$, $C(f, g, h)$ ("h 等于 $f \circ g$").

注意, 范畴中并非任意两个态射都能复合, 故表达复合关系只能使用三元关系符号, 而不能使用二元函数符号.

[3]或者说有一个关系符号 "=". 等号是默认存在的.

项, 公式

定义 B.1.11 (项)

设 Σ 为一符号表, 其上的*项* (terms) 由如下条款归纳定义.

- 一个类型 A 的单独一个变量 x 是一项;
- 对于函数符号 $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$, 若 $x_1, \cdots, x_n$ 分别是类型 $A_1, \cdots, A_n$ 的项, 则 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是类型 B 的项.

定义 B.1.12 (公式的形成规则)

语言中的*公式* (formulae) 有如下*形成规则* (formation rules), 同时我们归纳地定义公式中的*自由变量* (free variables).

(i) (关系) 对于关系符号 $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$, 若 $x_1, \cdots, x_n$ 分别是类型 $A_1, \cdots, A_n$ 的项, 则 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是公式, 其中的自由变量是所有在某个 x_i 中出现的变量;

(ii) (等式) 对于*相同类型*的项 x, y, $(x = y)$ 是公式, 其中的自由变量是所有出现在 x 或 y 中 (或两者兼有) 的变量;

(iii) (真) $\top$ 是公式, 其中没有自由变量;

(iv) (且, 又叫*合取*, conjunction) 对于公式 ϕ, ψ, $(\phi \wedge \psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(v) (假) $\perp$ 是公式, 其中没有自由变量;

(vi) (或, 又叫*析取*, disjunction) 对于公式 ϕ, ψ, $(\phi \vee \psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(vii) (蕴含) 对于公式 ϕ, ψ, $(\phi \Rightarrow \psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(viii) (否定) 对于公式 ϕ, $\neg\phi$ 是公式, 其中自由变量即为 ϕ 的自由变量;

(ix) (存在量词) 对于公式 ϕ 以及变量 x, $(\exists x\, \phi)$ 是公式, 其中的自由变量为 ϕ 的自由变量去掉 x (我们允许 ϕ 中不含 x);

(x) (存在唯一) 对于公式 ϕ 以及变量 x, 引入一个记号 $\exists! x\, \phi$ 表示

$$(\exists x\, \phi) \wedge \forall x \forall x' \big(\phi \wedge \phi[x'/x] \Rightarrow x' = x\big),$$

其中 $\phi[x'/x]$ 为将公式 ϕ 中的自由变量 x 替换为 x' 所得的公式.

(xi) (全称量词) 对于公式 ϕ 以及变量 x, $(\forall x\,\phi)$ 是公式, 其中的自由变量为 ϕ 的自由变量去掉 x;

(xii) (无穷析取) 对于公式 $\phi_i\,(i \in I)$, 若其中的自由变量有限, 则 $\bigvee_{i\in I} \phi_i$ 是公式 (包括 $\perp$), 其中的自由变量为 ϕ_i 的自由变量的并;

(xiii) (无穷合取) 对于公式 $\phi_i\,(i \in I)$, 若其中的自由变量有限, 则 $\bigwedge_{i\in I} \phi_i$ 是公式 (包括 $\top$), 其中的自由变量为 ϕ_i 的自由变量的并.

注 B.1.13

在语法的层面, 项与公式是两种不同的东西; 但项与公式可以有相同的语义: Mitchell–Bénabou 语言 (4.1 节) 中的公式不过是 Ω 类型的项.

定义 B.1.14 (几类公式)

对于固定的符号表 Σ, 几类公式由如下形成规则定义.

- 原子公式 (atomic formulae) : 关系与等式.
- *Horn* 公式[4] : 原子公式, 真, 二元合取 (有限合取).
- 正则公式 (regular formulae) : 原子公式, 真, 二元合取, 存在量词.
- 凝聚公式 (coherent formulae) : 原子公式, 真, 二元合取, 存在量词, 假, 二元析取.
- 一阶公式 (first-order formulae) : 所有由有限规则 (定义 B.1.12 去掉最后两条) 构造的公式.
- 几何公式 (geometric formulae) : 原子公式, 真, 二元合取, 存在量词, 假, 以及无穷析取.
- 无限一阶公式 (infinitary first-order formulae) : 所有由定义 B.1.12 的规则构造的公式.

[4] Alfred Horn (1918-2001), 美国数学家, 以格论与万有代数方面的工作闻名.

例 B.1.15

在环的语言中, “x 幂零” 可表达为如下的几何公式 (使用无穷析取):

$$(x=0)\vee(x\cdot x=0)\vee(x\cdot x\cdot x=0)\vee\cdots;$$

“x 可逆” 可表达为如下的几何公式 (使用存在量词):

$$\exists y\, xy=1.$$

但如下表达 “非零元都可逆” 的公式不是几何公式:

$$\neg(x=0)\Rightarrow\exists y\, xy=1,$$

因为使用了 “蕴涵”.

注 B.1.16

由有限规则定义的一类公式构成集合, 而后两类公式 (几何公式, 无限一阶公式) 只能说构成类.
由于几何公式可能涉及无穷析取, 它不再属于 (有限的) 一阶逻辑.

一阶理论

定义 B.1.17 (语境)

语境 (context) 是一列有限个名称互不相同的变量 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$. 其中每个变量 x_i 有确定的类型 A_i, 这些类型可能相同也可能不同.
设 $\vec{x}$ 是一个语境. 对于项 t (定义 B.1.11) 或公式 ϕ (定义 B.1.12), 若 $\vec{x}$ 包含了其中的所有自由变量, 则称 $\vec{x}$ *适合于* (is suitable for) 项 t 或公式 ϕ. 此时, 我们也以 $\vec{x}.\phi$, $\vec{x}.t$ 表示*带语境的公式* (formula-in-context), *带语境的项* (term-in-context).

定义 B.1.18 (相继式)

符号表 Σ 上的一个*相继式* (sequent) 是指一个形式的表达式

$$\phi\vdash_{\vec{x}}\psi,$$

意指 “在语境 $\vec{x}$ 中, 若 ϕ, 则 ψ”, 其中 ϕ,ψ 是符号表 Σ 上的公式, $\vec{x}$ 是一个适合于 ϕ,ψ 的语境.
我们用 $\vdash_{\vec{x}}\psi$ 表示 $\top\vdash_{\vec{x}}\psi$.

注 B.1.19

在完整的一阶逻辑中不需要一般的相继式, 因为 $\phi \vdash_{(x_1,\cdots,x_n)} \psi$ 可表示为 $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n(\phi \Rightarrow \psi)$.

定义 B.1.20 (理论)

符号表 Σ 上的一个*理论* (theory) $\mathbb{T}$ 是若干条*公理* (axioms) 的集合, 每个公理是 Σ 上的一个相继式.

定义 B.1.21 (几类不同的理论)

- 称理论 $\mathbb{T}$ 为*命题理论* (propositional theory), 是指其符号表中没有类型, 仅有零元关系符号.
- 称理论 $\mathbb{T}$ 为*代数理论* (algebraic theory), 是指其符号表中没有关系符号 (等号除外), 且仅包含形如 $\vdash_{\vec{x}} (s = t)$ 的公理. 这是定义 A.8.3.
- 称理论 $\mathbb{T}$ 为 *Horn* (*正则*, *凝聚*, *几何*, *一阶*) *理论*, 是指其公理只涉及 Horn (正则, 凝聚, 几何, 一阶) 公式. 几类公式的定义见 B.1.14.
- 对于正则理论 $\mathbb{T}$, 称其为*本质代数* (essentially algebraic, 又称 Cartesian) 的理论, 是指 $\mathbb{T}$ 的公理具有一个良序, 满足如下条件: 对每个公理 σ, 以 $\mathbb{T}_{<\sigma}$ 表示 σ 之前的公理构成的子集, 则 σ 涉及的所有存在性都是 $\mathbb{T}_{<\sigma}$-可证的存在唯一性.

每种一阶逻辑都有配套的*推理系统* (deduction system). 推理系统包含形如

$$\frac{\Gamma}{\sigma}$$

的推理规则, 表示由若干相继式 Γ 可以得到相继式 σ. 双横线 $\dfrac{\tau}{\sigma}$ (双横线) 表示 $\dfrac{\tau}{\sigma}$ 与 $\dfrac{\sigma}{\tau}$ 两条规则.

首先是*相继式演算* (sequent calculus) 的结构性规则 (structural rules). 这些规则在

定义 B.1.22 (相继式演算的结构性规则)

- *恒等公理* (identity axiom),

$$\frac{}{\phi \vdash_{\vec{x}} \phi}.$$

- *替换规则* (substitution rule), 记 $\phi[t/y]$ 为将公式 ϕ 中的自由变量 y 替换为同

类型的项 t 所得的公式, 那么有规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\phi[t/y] \vdash_{\vec{x}} \psi[t/y]}.$$

- 剪切规则 (cut rule),

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{x}} \Delta, \phi \quad \phi, \Sigma \vdash_{\vec{x}} \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash_{\vec{x}} \Delta, \Pi}.$$

(这里公式 ϕ 被 “剪掉” 了.)

定义 B.1.23 (一阶逻辑的推理系统)

在结构性规则 (定义 B.1.22) 的基础上, 一阶逻辑的推理系统还可能包含如下公理与规则.

- 有限合取规则, 包含公理

$$\phi \vdash_{\vec{x}} \top \quad (\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \phi \quad (\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \psi$$

与推理规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x}} \psi \quad \phi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\phi \vdash_{\vec{x}} (\psi \wedge \chi)}.$$

- 有限析取规则, 包含公理

$$\bot \vdash_{\vec{x}} \phi \quad \phi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi) \quad \psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi)$$

与推理规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x}} \chi \quad \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{(\phi \vee \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi}.$$

- 无限合取与析取规则, 其公理与推理规则与前两条类似.
- 蕴涵规则, 有公理

$$\frac{\phi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \Rightarrow \chi)}.$$

- 存在量词规则, 有公理

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{(\exists y.\phi) \vdash_{\vec{x}} \psi},$$

其中 ψ 不含自由变量 y.

- 全称量词规则, 有公理

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\phi \vdash_{\vec{x}} (\forall y.\psi)}.$$

- 分配公理
$$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\vec{x}} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi).$$
- *Frobenius* 公理
$$\phi \wedge (\exists y.\psi) \vdash_{\vec{x}} \exists y.(\phi \wedge \psi).$$
- 排中律
$$\top \vdash_{\vec{x}} \phi \vee \neg\phi.$$

注 B.1.24

注意上述规则由逻辑连接词 (或量词) 的引入规则和消去规则构成. 所谓引入规则就是如何得到一个公式, 消去规则就是如何使用一个公式.

定义 B.1.25

在结构性规则的基础上, 几种逻辑有如下推理规则 (inference rules).

- 代数逻辑 (algebraic logic), 没有附加规则.
- *Horn* 逻辑, 有限合取规则.
- 正则逻辑 (regular logic), 有限合取规则, 存在量词规则, Frobenius 公理.
- 凝聚逻辑 (coherent logic), 有限合取与析取规则, 存在量词规则, 分配公理, Frobenius 公理.
- 几何逻辑 (geometric logic), 有限合取规则, 无限析取规则, 存在量词规则, 无限分配公理, Frobenius 公理.
- 直觉主义一阶逻辑 (intuitionistic first-order logic), 除排中律以外的所有有限规则.
- 经典一阶逻辑 (classical first-order logic), 所有有限规则.

定义 B.1.26

称相继式 σ 在代数 (Horn, 正则, 凝聚, $\cdots$) 理论 $\mathbb{T}$ 下可证, 是指存在一个形如下图的树 (读者可自行补充树的严格定义),

$$\dfrac{\dfrac{\sigma_1 \qquad \sigma_2}{\sigma_3} \qquad \sigma_4}{\sigma}$$

其中上方无横线的相继式 (图中为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$) 为 $\mathbb{T}$ 中的公理, 且每条横线的上方与下方均来自相应逻辑的某条推理规则.

例 B.1.27

在经典一阶逻辑中, 分配公理 $\phi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\vec{x}} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ 有如下的证明. 简便起见, 记 $p = (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} p}{\psi \vdash_{\vec{x}} \phi \Rightarrow p} \qquad \dfrac{\phi \wedge \chi \vdash_{\vec{x}} p}{\chi \vdash_{\vec{x}} \phi \Rightarrow p}}{\psi \vee \chi \vdash_{\vec{x}} \phi \Rightarrow p}}{\phi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\vec{x}} p}$$

其中四行使用的规则依次为: 有限析取规则, 蕴涵规则, 有限析取规则, 蕴涵规则. 然而在凝聚逻辑 (定义 B.1.25) 中缺少蕴涵规则, 故需要分配公理. 类似地, 凝聚逻辑也需要 Frobenius 公理.

例 B.1.28 (初等算术的理论)

继续例 B.1.7, 初等算术的一种理论有如下的公理:

- $\vdash_x \neg(Sx = 0)$;
- $Sx = Sy \vdash_{(x,y)} x = y$;
- $\neg(x = 0) \vdash_x \exists y. Sy = x$;
- $\cdots$ (略)

初等算术有许多不同但互相等价的公理系统.

例 B.1.29 (Zermelo–Fraenkel 集合论)

继续例 B.1.8, ZF 有如下的公理 (我们将 $\forall y. y \in x \Rightarrow \cdots$ 简记为 $\forall y \in x. \cdots$, 将 $\exists y. y \in x \wedge \cdots$ 简记为 $\exists y \in x. \cdots$, 将 $\forall z \in x. z \in y$ 简记为 $x \subset y$, 并且参考注 B.1.19 省略符号 $\vdash_{\ldots}$):

- (外延) $\forall x. \forall y. \forall z. (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$;
- (配对) $\forall x. \forall y. \exists z. \forall w. \big(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y)\big)$;

- (并) $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in y \Leftrightarrow \exists w \in x.z \in w)$;
- (幂集) $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in y \Leftrightarrow z \subset x)$;
- (无穷) $\exists x.\exists y \in x.\forall z \in x.\exists t \in x.z \subset t \wedge z \neq t$;
- (良基) $\forall x.\forall y \in x.\exists z \in x.\forall w \in x.(\neg w \in z)$;
- (分离公理模式) 对每个公式 ϕ (不含自由变量 y), 有一条公理 $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in x \Leftrightarrow z \in x \wedge \phi)$;
- (替换公理模式) 对每个公式 ϕ (不含自由变量 w), 有一条公理 $\forall x.\big[(\forall y \in x.\exists! z.\phi) \Rightarrow \exists w.\forall y \in x. \Rightarrow \exists z \in w.\phi)\big]$, 其中 $\exists! z.\phi$ 是指 $\exists z.\phi \wedge \big(\forall z.\forall z'.(\phi \wedge \phi[z'/z]) \Rightarrow z' = z\big)$.

ZF 是一种经典一阶理论.

例 B.1.30 (群的理论)

继续例 B.1.9, 群的理论有如下的公理:

- $\vdash_{(x,y,z)} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- $\vdash_x x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$;
- $\vdash_x 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

群的理论是一种代数理论 (定义 B.1.21). 类似地, 读者可写出环的理论的公理. 环的理论也是一种代数理论. 每一种 Lawvere 理论 (A.8 节) 都可以视为这里定义的代数理论.

例 B.1.31 (环上的模的理论)

定义 “环上的模” 的理论: 其符号表包括两个类型 R, M, 常数 $0 \in M$, 二元函数 $\cdot\colon RM \to M$, $+\colon MM \to M$, $+\colon RR \to R$, $\cdot\colon RR \to R$. 有如下的公理,

- R 关于 $+, \cdot$ 构成环;
- M 关于 $+$ 构成交换群;
- $\vdash_{(r,x,y)} r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$, 其中 $r\colon R$, $x, y\colon M$;
- $\vdash_{(r,s,x)} r \cdot (s \cdot x) = (r \cdot s) \cdot x$, 其中 $r, s\colon R$, $x\colon M$.

“环上的模” 的理论是一种代数理论. 注意该理论不同于 R-模的 Lawvere 理论 (定义 A.8.12); 它具有两个类型, 而 Lawvere 理论仅有一个类型.

例 B.1.32 (小范畴的理论)

继续例 B.1.10, 小范畴的理论有如下的公理:

- (首尾相接的两个态射可以复合) $s(f) = t(g) \vdash_{(f,g)} \exists h\, C(f,g,h)$,
- (复合唯一) $C(f,g,h) \wedge C(f,g,k) \vdash_{(f,g,h,k)} h = k$.

小范畴的理论是*正则理论* (定义 B.1.21), 因为其公理只涉及原子公式, 二元合取, 以及存在量词. 由于复合的唯一性, 小范畴的理论是*本质代数的* (定义 B.1.21).

例 B.1.33 (局部环的理论)

在代数中, *局部环*[5]是指满足如下条件的环 R:

- $0 \neq 1$,
- 对任意 $x, y \in R$, 若 $x + y = 1$, 则 x 与 y 至少有一个可逆.

根据这种定义, 我们写出局部环的理论, 即环的理论加上两条公理

- $(0 = 1) \vdash \perp$,
- $x + y = 1 \vdash_{(x,y)} (\exists z.xz = 1) \vee (\exists z.yz = 1)$.

局部环的理论是一种*凝聚理论* (定义 B.1.21), 因为其公理只涉及原子公式, 假, 二元析取, 以及存在量词. 读者还可试着写出整环的理论, 并说明它也是一种凝聚理论.

例 B.1.34 (域的理论)

域是指非零元均可逆的环. 在环的理论中加入公理

- $\vdash_x (x = 0) \vee (\exists y.xy = 1)$

就得到了一种域的理论[6]. 它也是一种*凝聚理论*.

[5] 局部环还有一种使用极大理想的定义, 但它难以用一阶理论表达.

[6] 在构造主义数学中, 域有不止一种理论, 它们只是恰好在集合范畴 (Boole 意象) 中有相同的模型.

注 B.1.35

一阶逻辑能够表达的理论是有限制的. 例如*挠群* (torsion group, 即所有元素都是有限阶元素的群) 没有一阶理论. 另外, 在域的一阶理论中, 不存在一个公式表达 “x 是单位根”. 参见 [22] 第一讲.

B.2 一阶逻辑的范畴语义

一阶语言在范畴中的解释

一阶语言可在具有合适结构的范畴中获得*解释* (interpretation), 又称*范畴语义* (categorical semantics). 由此我们可以谈论这种语言上的理论在范畴中的模型.

定义 B.2.1 (范畴中的 Σ-结构)

固定符号表 Σ. 设范畴 $\mathcal{C}$ 有有限乘积. 定义 $\mathcal{C}$ 中的一个 *Σ-结构* M 为如下信息:

- 对 Σ 中的每个类型 A, 指定 $\mathcal{C}$ 的对象 MA;
- 对 Σ 中的每个函数符号 $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$, 指定 $\mathcal{C}$ 的态射 $Mf\colon MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$;
- 对 Σ 中的每个关系符号 $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$, 指定 $\mathcal{C}$ 中的子对象 $MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

范畴 $\mathcal{C}$ 中两个 Σ-结构之间的态射 $h\colon M \to N$ 是一族态射 $h_A\colon MA \to NA$, 满足合适的交换图. 所有 Σ-结构构成一个范畴 $\Sigma\text{-}\mathsf{Str}(\mathcal{C})$.

命题 B.2.2

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是具有有限乘积的范畴, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是保持有限乘积与单射的函子. 那么 F 诱导了函子 $\Sigma\text{-}\mathsf{Str}(F)\colon \Sigma\text{-}\mathsf{Str}(\mathcal{C}) \to \Sigma\text{-}\mathsf{Str}(\mathcal{D})$.

定义 B.2.3 (Σ-结构对项的解释)

给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 Σ-结构 M, 我们将 Σ 上的项 (定义 B.1.11) *解释为* M 中的态射. 具体地, 设 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 是一个语境 (定义 B.1.17), $x_i\colon A_i$, $\vec{x}.t$ 是带语境的项, $t\colon B$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ 是如下定义的态射 $MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$:

- 若 $t = x_i$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!] = \pi_i$ 是第 i 分量的投影;

- 若 $t = f(t_1, \cdots, t_m)$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!] = Mf \circ \big([\![\vec{x}.t_1]\!], \cdots, [\![\vec{x}.t_m]\!]\big)$.

设 $\vec{x}$ 是适合于项 t 的语境, 那么 $\vec{x}$ 添加一个与 t 无关的变量 y 后仍是适合于 t 的语境. 根据上述定义, 两个带语境的项 $\vec{x}.t$ 与 $(\vec{x}, y).t$ 的解释不同 (因为定义域不同), 但仅仅相差一个投影. 一般的这种现象可总结为如下命题.

命题 B.2.4 (项的代换性质)

设 $\vec{y}.t$ 是符号表 Σ 上带语境的项, 在范畴 $\mathcal{C}$ 中可解释, 其中 $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m), y_i \colon B_i$, $t \colon C$. 设 $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_m), s_i \colon B_i$ 是任意的项, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)\,(x_i \colon A_i)$ 是适合于 $\vec{s}$ 的语境. 那么, 对 $\mathcal{C}$ 上任意 Σ-结构 M, 有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[r, "{([\![\vec{x}.s_1]\!], \cdots, [\![\vec{x}.s_m]\!])}"] \arrow[dr, "{[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!]}"'] & MB_1 \times \cdots \times MB_m \arrow[d, "{[\![\vec{y}.t]\!]}"] \\
& MC
\end{tikzcd}$$

这称为项的*代换性质* (substitution property).

证明. 对 t 的 "复杂度" 归纳, 由定义直接验证. $\square$

例 B.2.5 (弱化)

项的代换性质 (B.2.4) 的一个常见的特例是 $\vec{s} = \vec{y} \subset \vec{x}$ 的情形. 此时 $([\![\vec{x}.s_1]\!], \cdots, [\![\vec{x}.s_m]\!])$ 是一个投影映射 π, 性质 $[\![\vec{x}.t]\!] = [\![\vec{y}.t]\!] \circ \pi$ 称为项的*弱化性质* (weakening property).

下面定义公式的解释所需的几种范畴.

定义 B.2.6 (正则范畴)

若一个范畴中存在有限极限和像 (定义 1.3.18), 且拉回保持像, 则称之为*正则范畴* (regular category). 由命题 1.3.20, 正则范畴中态射 $f \colon X \to Y$ 的拉回 $f^* \colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 有左伴随 $\exists_f$. 正则范畴之间的*正则函子* (regular functor) 是指保持有限极限与像的函子.

定义 B.2.7 (凝聚范畴)

若一个*正则范畴*中所有对象的子对象格都存在*有限并*, 且拉回保持有限并, 则称之为*凝聚范畴* (coherent category). 凝聚范畴之间的*凝聚函子*是指保持有限并的*正则函*

子.

定义 B.2.8 (Heyting 范畴)

若一个凝聚范畴中所有态射 $f\colon X \to Y$ 对子对象的拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 有右伴随 $\forall_f\colon \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(Y)$, 则称之为 *Heyting* 范畴. Heyting 范畴之间的函子是保持所有 $\forall_f$ 的凝聚函子.

由第一章, 意象是正则范畴, 凝聚范畴, Heyting 范畴.

定义 B.2.9 (几何范畴)

若一个正则范畴中所有对象的子对象格都存在任意并, 且被拉回保持, 则称之为几何范畴 (geometric category).

由偏序集的伴随函子定理 (A.5.27), 几何范畴一定是 Heyting 范畴.

意象不一定是几何范畴, 但 Grothendieck 意象一定是几何范畴.

由定义 2.1.1, 位格等同于构成几何范畴的偏序集.

定义 B.2.10 (Σ-结构对公式的解释)

设 M 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的 Σ-结构. 我们归纳地将 Σ 上的一个带语境的公式 $\vec{x}.\phi$ (其中 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i\colon A_i$) 解释为一个子对象

$$[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n.$$

- (关系) 若 $\phi(\vec{x})$ 形如 $R(t_1, \cdots, t_m)$, R 为类型 $B_1 \cdots B_m$ 的关系符号, t_i 为公式, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ 为如下拉回.

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[r] \arrow[d, hook] & MR \arrow[d, hook] \\
MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[r, "{([\![\vec{x}.t_1]\!], \cdots, [\![\vec{x}.t_m]\!])}"] & MB_1 \times \cdots \times MB_m
\end{tikzcd}$$

- (等式) 若 $\phi(\vec{x})$ 形如 $(s = t)$, s, t 为类型 B 的项, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 为两个态射 $[\![\vec{x}.s]\!], [\![\vec{x}.t]\!]\colon MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$ 的等化子.

- (真) 若 $\phi = \top$, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是 $MA_1 \times \cdots \times MA_n$ 作为自身的子对象.

- (且) 若 $\phi = \psi \wedge \chi$, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是子对象 $[\![\vec{x}.\psi]\!]$ 与 $[\![\vec{x}.\chi]\!]$ 的交 (拉回).

- (假) 若 $\phi = \bot$, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是 $MA_1 \times \cdots \times MA_n$ 的子对象 $\bot$.

- (或) 若 $\phi = \psi \vee \chi$ 且 $\mathcal{C}$ 是凝聚范畴 (定义 B.2.7), 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是子对象 $[\![\vec{x}.\psi]\!]$ 与 $[\![\vec{x}.\chi]\!]$ 的并.
- (蕴涵) 若 $\phi = (\psi \Rightarrow \chi)$, 且 $\mathcal{C}$ 是 *Heyting* 范畴, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是 $[\![\vec{x}.\psi]\!] \Rightarrow [\![\vec{x}.\chi]\!]$.
- (存在量词) 若 $\phi = \exists y.\psi$ 且 $\mathcal{C}$ 是正则范畴, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!] = \exists_\pi([\![(\vec{x}, y).\psi]\!])$, 其中 π 为 $MA_1 \times \cdots \times MA_n \times MB$ 到前 n 分量的投影.
- (全称量词) 若 $\phi = \forall y.\psi$ 且 $\mathcal{C}$ 是 *Heyting* 范畴, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!] = \forall_\pi([\![(\vec{x}, y).\psi]\!])$, 其中 π 同上.
- (无穷析取) 若 $\phi = \bigvee_i \psi_i$ 且 $\mathcal{C}$ 是几何范畴, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是所有 $[\![\vec{x}.\psi_i]\!]$ 的并.
- (无穷合取) 若 $\phi = \bigwedge_i \psi_i$ 且 $\mathcal{C}$ 具有子对象的任意交, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是所有 $[\![\vec{x}.\psi_i]\!]$ 的交.

回忆几类公式的定义 (B.1.14), 我们发现在正则范畴中可以解释正则公式, 在凝聚范畴中可以解释凝聚公式, 在几何范畴中可以解释几何公式, 凡此种种, 不一而足. 任何逻辑公式都有适当的范畴结构可以解释之.

命题 B.2.11 (公式的代换性质)

设 $\vec{y}.\phi$ 是符号表 Σ 上带语境的公式, 在范畴 $\mathcal{C}$ 中可解释, 其中 $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_m), y_i \colon B_i$. 设 $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_m), s_i \colon B_i$ 是任意的项, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)\,(x_i \colon A_i)$ 是适合于 $\vec{s}$ 的语境. 那么, 对 $\mathcal{C}$ 上任意 Σ-结构 M, 有如下拉回.

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.\phi[\vec{s}/\vec{y}]]\!]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\![\vec{y}.\phi]\!]} \arrow[d] \\
MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[r, "{([\![\vec{x}.s_1]\!], \cdots, [\![\vec{x}.s_m]\!])}"] & MB_1 \times \cdots \times MB_m
\end{tikzcd}$$

证明. 对 ϕ 的 “复杂度” 归纳, 由定义直接验证. □

一阶理论在范畴中的模型

定义 B.2.12 (Σ-结构对相继式的满足)

设 M 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Σ-结构, $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ 是一个相继式. 称 M 满足 $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ (记作 $M \models (\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$) 是指 $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \leq [\![\vec{x}.\psi]\!]_M$.

定义 B.2.13 (一阶理论在范畴中的模型)

设 $\mathbb{T}$ 是符号表 Σ 上的一阶理论, M 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的 Σ-结构, 且 $\mathbb{T}$ 的公理在 $\mathcal{C}$ 中可解释. 若 M 满足 $\mathbb{T}$ 的所有公理, 则称 M 为 $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个模型 (model). 记 $\mathbb{T}$ 的模型在 $\Sigma\text{-}\mathsf{Str}(\mathcal{C})$ 中构成的满子范畴为 $\mathbb{T}\text{-}\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$.

一阶逻辑的推理系统可以证明关于其模型的命题, 这个性质称为一阶逻辑的*可靠性* (soundness).

命题 B.2.14 (可靠性)

设 $\mathbb{T}$ 为符号表 Σ 上的 Horn (正则, 凝聚, 几何, $\cdots$) 理论, M 为 $\mathbb{T}$ 在合适的范畴 $\mathcal{C}$ 中的模型, 则对任何 $\mathbb{T}$-可证 (定义 B.1.26) 的相继式 σ, 都有 $M \models \sigma$.

证明. 我们只需对定义 B.1.23 的每种规则 $\dfrac{\Gamma}{\sigma}$ 验证若 $M \models \Gamma$, 则 $M \models \sigma$. 这基本上是平凡的. 例如, 存在量词规则的可靠性正是由于存在量词的解释是拉回的左伴随 (定义 B.2.10). 又如, 分配公理的可靠性是由于相应的范畴中子对象的运算 $A \wedge -$ 保持二元并. $\square$

注 B.2.15

反之, 只要找到一个模型 M *不满足* σ, 就说明 σ 在理论 $\mathbb{T}$ 中*不可证*.

提纲

提纲 (sketch) 是 Ehresmann 1966 年左右 (即 Lawvere 的博士论文 [20] 之后不久) 提出的另一种定义 “理论” 的方法.

定义 B.2.16 (提纲)

定义*提纲* $\mathscr{S}$ 为三元组 $(\mathcal{T}, L, C)$, 其中 $\mathcal{T}$ 为范畴, L, C 分别为 $\mathcal{T}$ 中若干个锥和余锥的集合. 提纲 $\mathscr{S} = (\mathcal{T}, L, C)$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中的*模型*为函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$, 满足 L 中的锥被对应到 $\mathcal{C}$ 中的*极限*锥, C 中的锥被对应到 $\mathcal{C}$ 中的*余极限*余锥. 模型之间的态射即自然变换. 记 $\mathscr{S}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的模型的范畴为 $\mathscr{S}\mathsf{Mod}$. 若 L, C 的元素本身为 $\mathcal{T}$ 中的极限锥, 余极限余锥, 则称 $\mathscr{S}$ 为*正规提纲* (normal sketch).

另一种等价的定义是, 一个提纲为四元组 (G, D, L, C), 其中 G 为有向图, D 为 G 中的若干图表的集合 (G 中的图表是指有向图的态射 $G' \to G$), L, C 分别为 G 中若干个锥和余锥的集合. 提纲 (G, D, L, C) 在范畴 $\mathcal{C}$ 中的模型为有向图态射 $G \to \mathcal{C}$ (范畴可视为有向图), 使得 D 中的图表被对应到 $\mathcal{C}$ 中的交换图, L 中的锥被对应到 $\mathcal{C}$ 中的极限锥, C 中的锥被对应到 $\mathcal{C}$ 中的余极限余锥. 因为 G, D 生成一个自由范畴 $\mathcal{T}$, 使得将 D 的元素变为交换图的有向图态射 $G \to \mathcal{C}$ 一一对应于函子

$\mathcal{T} \to \mathcal{C}$, 故该定义与前面三元组的定义等价. 该定义的优势在于可以用较小的图表表现一个理论.

定义 B.2.17 (有限乘积提纲, 有限极限提纲)

对于提纲 $\mathscr{S} = (\mathcal{T}, L, C)$, 若 L 中元素均为有限的离散锥 (即仅有顶点出发的态射的锥), 而 C 为空, 则称 $\mathscr{S}$ 为*有限乘积提纲* (finite product sketch, FP sketch); 若 L 中元素均为有限锥, 而 C 为空, 则称 $\mathscr{S}$ 为*有限极限提纲* (finite limit sketch, FL sketch). Lawvere 理论可视为特殊的有限乘积提纲.

对于有限乘积提纲 $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}\mathsf{Mod}$ 等价于一个代数理论的模型的范畴.

定义 B.2.18 (正则提纲)

对于提纲 $\mathscr{S} = (\mathcal{T}, L, C)$, 若 L 中元素均为有限锥, 而 C 中的余锥均形如

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "k"'] & Y \arrow[d, "\ell"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(Z 为顶点) 且

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "k"] & Y \arrow[d, "\ell"] \\ Y \arrow[r, "\ell"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\in L$, 则称 $\mathscr{S}$ 为*正则提纲* (regular sketch).

定义 B.2.19 (凝聚提纲)

对于提纲 $\mathscr{S} = (\mathcal{T}, L, C)$, 若 L 中元素均为有限锥, 而 C 中的余锥均为定义 B.2.18 中的余锥或为有限离散余锥, 则称 $\mathscr{S}$ 为*凝聚提纲* (coherent sketch).

教条

一种理论 (如前面提到的正则, 凝聚, 几何理论) 与一种有特定结构的范畴相对应; 这些范畴, 其间保持特定结构的函子, 以及这些函子之间的自然变换构成一个 2-范畴. 那么这个 2-范畴包含了这一种理论的全部信息. 于是我们抽象出下面的概念.

定义 B.2.20 (教条)

定义一个*教条*[7] (doctrine) 为一个 2-范畴. 称该 2-范畴的对象为*理论*, 称两个理论 C_1, C_2 之间的态射 $C_1 \to C_2$ 为理论 C_1 在 C_2 中的*模型*. 理论 C_1 在 C_2 中的*模型的范畴*即为范畴 $\mathrm{Hom}(C_1, C_2)$.

[7] "教条" 可能不是最好的翻译, 但由于本书其它地方不会使用这一概念, 此处姑且用之.

注 B.2.21 (生成元–关系与无坐标表示)

以 2-范畴表示教条实际上是一种“无坐标”式的定义, 而形如 B.2.7 的定义则是“生成元–关系”式的定义. 二者的关系正是 Lawvere 理论 (A.8.1) 及其表现 (定义 A.8.3) 的关系, 只是在范畴层级上更上了一级.

例 B.2.22 (有限乘积范畴的教条)

具有有限乘积的范畴构成一个教条, 其中态射为保持有限乘积的函子. 群的理论 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}}$, 以及任何一个 Lawvere 理论, 都是这个教条的对象. 群的理论在另一具有有限乘积的范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个模型 (也即 $\mathcal{C}$ 中的一个群) 正是一个态射 $\mathbb{T}_{\mathrm{Grp}} \to \mathcal{C}$.

类似地, 正则范畴, 几何范畴等等与几种逻辑相关的几种范畴都构成教条.

下面是一个在前述框架之外的例子.

例 B.2.23 (幺半范畴的教条)

幺半范畴 (例 A.1.6) 构成一个教条, 其中态射为保持“$\otimes$”的函子. 该教条中的一个重要的理论是*幺半范畴中的幺半群*的理论. 定义幺半范畴 $\mathcal{M}$ 中的*幺半群*为 $\mathcal{M}$ 的对象 M 配备“乘法” $\mu\colon M \otimes M \to M$ 与“单位” $\eta\colon 1 \to M$, 满足幺半群对应的交换图 (但范畴论乘积改为 $\otimes$):

$$
\begin{tikzcd}
 & M \otimes (M \otimes M) \arrow[r, "\mu"] & M \otimes M \arrow[dd, "\mu"] \\
(M \otimes M) \otimes M \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & & \\
M \otimes M \arrow[rr, "\mu"'] & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \otimes M \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes 1 \arrow[l, "\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

(α, λ, ρ 的含义见例 A.1.6.) *幺半范畴中的幺半群的理论*是幺半范畴 Δ_+, 即有限全序集 $[-1], [0], [1], [2], \cdots$ 与保序映射构成的范畴, 其幺半范畴结构满足 $[m] \otimes [n] = [m+n+1]$, 单位为 $[0]$. 幺半范畴 Δ_+ 中的 $[0]$ 是*游走的幺半群* (walking monoid), 也即任何幺半范畴 $\mathcal{M}$ 中的幺半群 M 等同于保持 $\otimes$ 的函子 $\Delta_+ \to \mathcal{M}$, 且该函子将 $[0]$ 映射到 M.

B.3 高阶逻辑

高阶逻辑相比一阶逻辑拥有表达能力更强的语义, 如允许将存在量词和全称量词用于函数与子集. 相应地, 其范畴语义需要范畴上更多的结构.

高阶语言的基本要件

定义 B.3.1 (符号表)

高阶逻辑的一个符号表 Σ 由如下内容构成:

- 一族基本类型 (basic types);
- 一些函数符号 (function symbols);
- 一些关系符号 (relation symbols);

并且我们归纳地定义 Σ 上的类型:

- 每个基本类型都是一个类型;
- (零元积) 1 是一个类型;
- (二元积) 对任意两个类型 A, B, 有一个类型 $A \times B$;
- (函数类型) 对任意两个类型 A, B, 有一个类型 $[A \to B]$;
- (幂) 对任意类型 A, 有一个类型 PA; 记 $\Omega = P1$;
- (列表) 对任意类型 A, 有一个类型 LA.

对每个函数符号 f 指定两个类型 A, B, 记 $f\colon A \to B$; 对每个关系符号 R 指定一个类型 A, 记 $R \hookrightarrow A$. 这里的 A, B 可以是基本类型, 也可以是由上述归纳规则定义的类型. 例如 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ 时, $f\colon A \to B$ 是 n 元函数.

高阶逻辑比一阶逻辑多了函数类型, 幂以及列表的操作, 使得可以谈论 "对任意子集 $A \subset X$" "对任意函数 $f\colon X \to Y$" 之类.

定义 B.3.2 (项)

设 Σ 为高阶逻辑的符号表, 归纳定义 Σ 上的项.

- 一个类型 A 的单独一个变量 x 是一项;
- 对于函数符号 $f\colon A \to B$, 若有一项 $x\colon A$, 则有 $f(x)\colon B$.
- (1, 引入法则) 类型 1 有一个项 $\star$;
- (二元对, 引入法则) 对于 $s\colon A$, $t\colon B$, 有 $(s, t)\colon A \times B$;
- (二元对, 消去法则) 对于 $t\colon A \times B$, 有 $\mathsf{fst}(t)\colon A$, $\mathsf{snd}(t)\colon B$, 分别代表取二元对

的第一项和第二项;

- (函数, 引入法则) 对于类型 A 的变量 x 与 $t\colon B$ (其中 t 的自由变量可包含 x, 也可不包含 x), 有 $\big(\lambda x.t\big)\colon [A \to B]$, 其自由变量为 t 的自由变量去掉 x;
- (函数, 消去法则) 对于 $f\colon [A \to B]$ 以及 $t\colon A$, 有 $\mathsf{app}(f,t)\colon B$, 其自由变量为 f 与 t 的自由变量之并;
- (子集, 引入法则) 对公式 ϕ 以及 $x\colon A$, 有 $\{x \in A \mid \phi\}\colon PA$, 其自由变量为 ϕ 的自由变量去掉 x;
- (列表, 引入法则) 对于类型 A, 有 "空列表" $[\,]\colon LA$; 对于 $s,t\colon LA$ 有 "列表的拼接" $\mathsf{cons}(s,t)\colon LA$; 此外, 列表还有一个引入法则 "迭代器" (iterator), 即递推构造列表的法则, 这里略去 (见 [15] D4.1.2).

其中没有提到子集的消去法则, 是因为子集的消去法则给出的是一个原子公式 (下面的定义 B.3.3), 而非一个项.

对于 Σ 中的函数符号 $f\colon A \to B$, 取类型 A 的变量 x, 由函数的引入法则 $\lambda x.f(x)\colon [A \to B]$ 是类型 $[A \to B]$ 的一个常量 (因为按定义其自由变量是 $f(x)$ 的自由变量去掉 x, 也即没有自由变量).

定义 B.3.3 (原子公式)

设 Σ 为高阶逻辑的符号表, 定义下列公式为 Σ 上的原子公式.

- (关系) 对关系符号 $R \hookrightarrow A$ 与 $t\colon A$, 关系 $R(t)$ 为原子公式, 其中的自由变量为 t 的自由变量;
- (等式) 对 $s,t\colon A$, 等式 $s = t$ 为原子公式, 其中的自由变量为 s,t 的自由变量之并;
- (成员关系, 即 "子集的消去法则") 对 $t\colon A$ 与 $S\colon PA$, 成员关系 $t \in S$ 为原子公式, 其中的自由变量为 S,t 的自由变量之并.

相比一阶逻辑中的原子公式 (定义 B.1.14), 高阶逻辑多了成员关系.

定义 B.3.4 (公式)

高阶逻辑中的公式由原子公式以及定义 B.1.12 中的法则归纳定义.

定义 B.3.5 (Σ-结构)

设 Σ 为高阶逻辑的一个符号表, $\mathcal{C}$ 为合适的范畴. 定义 $\mathcal{C}$ 上的 Σ-结构 M 为如下资料:

- 对 Σ 中每个基本类型 A 指定 $\mathcal{C}$ 的一个对象 MA (由此可归纳地对每个类型也指定一个对象, 如 1 对应终对象, $A \times B$ 对应 $MA \times MB$, $[A \to B]$ 对应指数对象 MB^{MA}, PA 对应幂对象 $P(MA)$);
- 对 Σ 中每个函数符号 $f\colon A \to B$ 指定一个态射 $Mf\colon MA \to MB$.
- 对 Σ 中每个关系符号 $R \hookrightarrow A$ 指定一个子对象 $MR \hookrightarrow MA$.

定义 B.3.6 (项的解释)

设 $\vec{x}.t$ 是带语境的项, 其中 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n), x_i\colon A_i$. 记 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$.

- (1, 引入法则) 若 $t = \star\colon 1$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!]$ 是唯一的映射 $MA \to 1$.
- (二元对, 引入法则) 若 $t = (r, s)\colon B_1 \times B_2$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!] = ([\![\vec{x}.r]\!], [\![\vec{x}.s]\!])\colon MA \to MB_1 \times MB_2$.
- (二元对, 消去法则) 若 $t = \mathsf{fst}(s)$, $s\colon B \times C$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!] = \pi_1 \circ [\![\vec{x}.s]\!]\colon MA \to MB$, 对 snd 类似定义;
- (函数, 引入法则) 若 $t = (\lambda z.s)\colon [B \to C]$, 变量 z 不出现在语境 $\vec{x}$ 中, 则 $[\![\vec{x}.t]\!]$ 是 $[\![(\vec{x}, z).s]\!]\colon MA \times MB \to MC$ 对应的态射 $MA \to MC^{MB}$.
- (函数, 消去法则) 若 $t = \mathsf{app}(r, s)$, $r\colon [B \to C]$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!]$ 是复合

$$MA \xrightarrow{([\![\vec{x}.r]\!], [\![\vec{x}.s]\!])} MC^{MB} \times MB \xrightarrow{\mathrm{ev}} MC.$$

- (子集, 引入法则) 若 $t = \{z \in B \mid \phi\}$, 则 $[\![\vec{x}.t]\!]$ 是 $[\![(\vec{x}, z), \phi]\!] \hookrightarrow MA \times MB$ 对应的态射 $MA \to P(MB)$.
- (列表, 引入法则) 略 (见 [15] D4.1.5).

定义 B.3.7 (公式的解释)

原子公式以及一般的公式的解释沿用定义 B.2.10, 只是添加如下对成员关系的解释:

- 若 $\phi = (t \in S)$, $t\colon B$, 则 $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ 是如下拉回,

$$\begin{tikzcd} {[\![\vec{x}.\phi]\!]} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \in \arrow[d, hook] \\ MA \arrow[r, "{([\![\vec{x}.t]\!],[\![\vec{x}.S]\!])}"'] & MB \times P(MB). \end{tikzcd}$$

B.4 类型论

A logic is always a logic over a type theory.

Bart Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*

类型论是一种做数学的视角; 不同于一阶逻辑中的 "类型", 类型论中的一切对象, 包括函数, 命题, 甚至证明, 都有一个确定的类型. 仅仅通过检查一个对象的类型, 就能验证推理的正确性. 关于类型论的更详细介绍见 [12]. 本节的目的是介绍类型论与范畴论的联系. 由于 "类型论" 有许多变种和风味, 很难给它下一个精确而完整的定义. 我们从例子开始.

例 B.4.1 (简单类型论)

一种简单类型论 (simple type theory, STT, 又称 *Church* 类型论) 包含如下的陈述:

- $n\colon \mathbb{N}$ ("n 是类型 $\mathbb{N}$ 的项");
- $\mathsf{succ}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ("后继 succ 是函数类型 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的项");
- $n\colon \mathbb{N}, m\colon \mathbb{N} \vdash (n+m)\colon \mathbb{N}$ ("设有类型 $\mathbb{N}$ 的项 n, m, 则可以构造类型 $\mathbb{N}$ 的项 $n+m$"), 这里的符号 $\vdash$ 与一阶逻辑中的符号 $\vdash$ 含义不同, 它的左边 $n\colon \mathbb{N}, m\colon \mathbb{N}$ 是一列变量的声明, 称为语境;

[未完成: 简单类型论与高阶逻辑的关系]

简单类型论中没有一个类型依赖于某个变量, 而这是依值类型论的特点.

例 B.4.2 (依值类型论)

- $n\colon \mathbb{N} \vdash n\mathsf{Vect}\colon \mathsf{Type}$ ("n 维向量空间" 是依赖于自然数 n 的一族类型).
-

这种风味的类型论叫*依值类型论* (dependent type theory, DTT). 它的核心思想是 "类型是值", 也即有类型的类型 Type, 而依值类型不过是一个类型到 Type 的函数.

定义 B.4.3 (类型论, 粗略定义)

一般地, 一种类型论由如下要件组成:

- 类型的*形成法则* (formulation rules), 即 (从已有类型) 构造新类型的方法;
- 项的*引入法则* (introduction rules), 即构造一个类型的项的方法;
- 项的*消去法则* (elimination rules), 即使用一个类型的项的方法;
- *计算法则* (computation rules), 以等式表示将消去法则作用于引入法则上的结果.

例 B.4.4 (Martin-Löf 类型论)

空类型

- 形成法则 $0\colon \mathsf{Type}$

例 B.4.5 (群的理论)

命题是类型: Curry–Howard 同构

Curry–Howard 同构是*形式逻辑与计算*之间的联系. 首先, 它指出*命题是一种类型*. 将命题 A 视为类型, 其元素是 A 成立的*证据*; 由此不难理解如下的对应. 例如, "A 且 B" 成立的一个证据即是 A 成立的一个证据加上 B 成立的一个证据.

类型	命题
0	假
1	真
$A \times B$	A 且 B
$A + B$	A 或 B
B^A (又记为 $A \to B$)	A 蕴涵 B
$\prod_{x:A} P(x)$	$\forall x : A\, P(x)$
$\sum_{x:A} P(x)$	$\exists x : A\, P(x)$

进一步, *证明是一种计算*. 例如证明 $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ 对应于取值映射 $\mathrm{ev}\colon A \times B^A \to B$. 更复杂的证明对应更复杂的计算. 要检查证明的正确性, 只需检查每一步得到的对象拥有正确的类型.

B.5 模态逻辑

在形式逻辑中, *模态* (modality) 或*模态算子* (modal operator) 是一种将命题变为命题的算子, 通常用 $\Box$, $\Diamond$, $\bigcirc$ 等符号表示. 直觉上, 一个模态算子 $\Box$ 的含义是

$$\Box p = \text{“}p \text{ 以某种方式成立”}.$$

模态的作用正如自然语言中的*情态动词* (modal verb), 如 “可能” (can), “必须” (must), “将要” (would).

例 B.5.1 (可能性与必然性)

设 $\Box$ 表示 “必然性”, $\Diamond$ 表示 “可能性”. 如下是两者的一些性质:

- $\Box p \Rightarrow p$ (必然成立蕴涵实际上成立), $p \Rightarrow \Diamond p$ (实际上成立蕴涵可能成立);
- $\Box(p \wedge q) = \Box p \wedge \Box q$, $\Diamond(p \vee q) = \Diamond p \vee \Diamond q$;
- $\Box\Box p = \Box p$, $\Diamond\Diamond p = \Diamond p$;
- ...

可能性与必然性模态的一种实现方式是考虑 “所有可能世界的集合”, 或 “所有可能观测结果的集合”. 一个命题*可能*成立就是说*存在*一个可能世界使得该命题成立; 一个命题*必然*成立就是说在*任意*可能世界中该命题都成立. 考虑一个意象 $\mathcal{C}$ 中对象 X 产生的三元伴随 (命题 1.1.40, 注 1.3.22)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}/X \arrow[r, shift left=4, "\Sigma_X"] \arrow[r, shift right=4, "\Pi_X"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "X^*"' description] \end{tikzcd},$$

想象 X 为“所有可能世界的集合”, 而 $\mathcal{C}/X$ 的对象是在不同可能世界中变化的集合. 令

$$\Diamond = X^*\Sigma_X, \quad \Box = X^*\Pi_X.$$

在此种实现下, 可能性 $\Diamond$ (存在) 是必然性 $\Box$ (任意) 的左伴随.

参考文献

[1] Jiří Adámek and Jiří Rosický. *Locally Presentable and Accessible Categories*. Cambridge University Press, 1994. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511600579.

[2] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*. Vol. 269, 270, 305. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971.

[3] Andrej Bauer. "Five stages of accepting constructive mathematics". In: *Bull. Amer. Math. Soc.* (2017). DOI: http://dx.doi.org/10.1090/bull/1556. URL: https://www.youtube.com/watch?v=21qPOReu4FI.

[4] Ingo Blechschmidt. *Using the internal language of toposes in algebraic geometry*. 2021. arXiv: 2111.03685 [math.AG].

[5] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2*. Cambridge Univrsity Press, 1994.

[6] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3*. Cambridge Univrsity Press, 1994.

[7] Carsten Butz and Ieke Moerdijk. "Representing topoi by topological groupoids". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 130.3 (1998), pp. 223–235. ISSN: 0022-4049. DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-4049(97)00107-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404997001072.

[8] Olivia Caramello. *Theories, Sites, Toposes*. Oxford University Press, 2018.

[9] Felix Cherubini, Thierry Coquand, and Matthias Hutzler. *A Foundation for Synthetic Algebraic Geometry*. 2023. arXiv: 2307.00073 [math.AG]. URL: https://arxiv.org/abs/2307.00073.

[10] Thierry Coquand and Bas Spitters. "Constructive Gelfand duality for C*-algebras". In: (2008). URL: https://arxiv.org/abs/0808.1518.

[11] Pierre Deligne et al., eds. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*. American Mathematical Society, 1999. URL: http://www.math.ias.edu/qft.

[12] Trebor Huang. 类型论简史. https://github.com/Trebor-Huang/history. 2023.

[13] Bart Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*. Elsevier, 1999.

[14] Peter T. Johnstone. “On a Topological Topos”. In: *Proc. London Math. Soc.* (1979). DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.2.237.

[15] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant*. Oxford University Press, 2002.

[16] André Joyal. *A crash course in topos theory : the big picture*. IHES. 2015. URL: https://www.youtube.com/watch?v=Ro8KoFFdtS4.

[17] André Joyal and Myles Tierney. “An extension of the Galois theory of Grothendieck”. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 51.309 (1984).

[18] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer New York, 1994.

[19] René Lavendhomme. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*. Springer New York, NY, 1996.

[20] William Lawvere. “Functorial Semantics of Algebraic Theories”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* (1963).

[21] Zhen Lin. *What is a Lawvere–Tierney topology?* Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/177894.

[22] Jacob Lurie. *Categorical Logic (278x)*. 2018. URL: https://www.math.ias.edu/~lurie/278x.html.

[23] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.

[24] Ieke Moerdijk and Gonzalo E. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer New York, NY, 1990.

[25] nLab authors. *sheafification*. https://ncatlab.org/nlab/show/sheafification. Revision 35. Feb. 2024.

[26] Frédéric Paugam. *Towards the Mathematics of Quantum Field Theory*. Springer Cham, 2014.

[27] Urs Schreiber. *Higher Topos Theory in Physics*. 2023. URL: https://ncatlab.org/schreiber/show/Higher+Topos+Theory+in+Physics.

[28] Alex Simpson. “Measure, randomness and sublocales”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 163.11 (2012). Kurt Goedel Research Prize Fellowships 2010, pp. 1642–1659. ISSN: 0168-0072. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apal.2011.12.014. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007211001874.

[29] 李文威. *代数学方法: 卷二*. 高等教育出版社 (尚未出版), 2023. URL: https://www.wwli.asia/downloads/books/Al-jabr-2.pdf.