盲人摸象

猫猫理论讲义

王进一
jin12003@163.com
QQ 2917905525

2023 年夏至今

此版本编译时间: 2023 年 11 月 13 日

这是一本正在施工的讲义. 目前我迫切需要读者的意见!

在非正式版本中, 我故意将 topos 译为 “猫猫”.

目录

第 0 章 前言

每一个意象都是一个数学宇宙. 集合范畴 Set 是最简单和最重要的意象, 对应着 “通常数学” 的宇宙. 尽管一般意象可能有远比集合范畴丰富的结构, 其范畴论性质却与 Set 几乎相同.

拓扑空间 X 上的层构成一个意象 $\mathrm{Sh}(X)$. 由此, 一般的意象可视为 “广义空间” 上的层范畴, 这种看法淡化范畴中的对象, 而将范畴当作一个整体. 意象还可视为一类直觉主义逻辑的语义. 意象理论的经典文献 *Sketches of an Elephant* [6] 的开头列举了意象更多的解读方式, 正如盲人摸象一样.

本讲义参考了许多文献以及 nLab 上的无数条目. 讲义内容的编排原则大致是使初学者最易接受, 并且提供启发性的观点, 从而使人能更快入门去看更多的资料. 如果本讲义成功写下去的话, 或许能够改善这一领域缺少中文教材的现状.

[**未完成: 重写前言**]

[**未完成: 解释本书不处理集合论问题 [15]**]

Je vous souhaite le meilleur succès. Ce serait magnifique que vous puissiez étudier la théorie des topos de Grothendieck et travailler dans ce domaine. Travaillez beaucoup, soyez patient, ayez bon courage et vos efforts seront récompensés.

Laurent Lafforgue[1]

Once you see at least one example and you do it yourself and you experience the kind of enlightenment it brings, you will be convinced forever.

Olivia Caramello[2]

[1]这是 Lafforgue 教授在一次讲座之后写给作者的话. “祝愿你获得最大的成功. 你能够学习 Grothendieck 意象理论并在这个领域工作, 是一件美妙的事情. 努力学习, 保持耐心, 勇往直前, 你的努力将会得到回报.” Lafforgue 教授是 Caramello 教授多年的合作者.

[2]这是 Caramello 教授在与作者的采访中关于 topos 理论的评论. Caramello 教授是意象理论和逻辑学专家.

第 1 章　猫猫的范畴论性质

> The theory of abelian categories served as the "right" generalization for the category of abelian groups. So topoi serve for—no less—the category of sets.
>
> Peter Freyd, *Aspects of Topoi*

范畴是一个广泛应用的概念, 然而它的结构比较单薄, 在一般的范畴中能做的事情十分有限. 为了让范畴更有用, 我们就要要求合适的性质. Lawvere 在范畴论的层面研究了这样一个问题: 集合范畴 Set 具有什么样的性质, 使得它能作为数学的基础. 他将这些性质提炼成为猫猫 (topos) 的概念.

本章的目的是展现集合范畴中的许多构造实际上具有范畴论上的一般性, 也为形式上统一这些构造的 "猫猫的内语言" 埋下伏笔.

1.1　范畴论基本概念

极限与余极限

范畴中常见的极限如下.[1]

- 乘积 (product) 是离散图 (若干个无关的对象) 的极限;
- 等化子 (equalizer) 是形如 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 的图的极限;

[1] 我们假设读者对这些概念有一定的了解, 因此这里仅作一列举.

- 拉回 (pullback) 是形如 $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ 的图的极限;
- 终对象是空图的极限. 终对象也可视为 0 个对象的积, 因此我们将终对象记作 1. 终对象到另一对象 c 的态射称为 c 的*整体元素* (global element)[2].

我们关注的一类极限是*有限图* (有限个对象和有限个态射组成的图) 的极限, 称为*有限极限*. (空图的极限也是一种有限极限.)

范畴中常见的余极限如下.

- 二元和是形如 $\bullet \quad \bullet$ 的图的余极限;
- 余等化子 (coequalizer) 是形如 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 的图的余极限;
- 推出 (pushout) 是形如 $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$ 的图的余极限;
- 始对象是空图的余极限. 始对象也可视为 0 个对象的和, 因此我们将始对象记作 0.

使用上面的某些 (余) 极限就可以表达出所有的有限 (余) 极限.

命题 1.1.1

对于范畴 C, 如下条件等价:	对于范畴 C, 如下条件等价:
(1) 存在有限极限[3];	(1) 存在有限余极限;
(2) 存在有限积与等化子;	(2) 存在有限余积与余等化子;
(3) 存在终对象与拉回.	(3) 存在始对象与推出.

证明. 由对偶性, 我们只需证明左边的命题. 由定义, (1) 蕴含 (2) 和 (3).

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 设 $F\colon I \to \mathsf{C}, i \mapsto F_i$ 是任意有限图, 考虑有限积

$$P = \prod_i F_i, \quad Q = \prod_{i \to j} F_j$$

[2]这一称呼来自层的整体截面.

[3]"存在有限极限" 是 "存在所有的有限极限" 的简便说法.

(其中下标 $i \to j$ 取遍指标范畴 I 的所有态射) 以及两个态射 $P \to Q$, 一个是 $(x_i)_i \mapsto (F_{i\to j}(x_i))_{i\to j}$, 另一个是 $(x_i)_i \mapsto (x_j)_{i\to j}$. 两个态射的等化子即是极限 $\lim_i F_i$. 注意态射 P, Q 的定义仿佛使用了 "集合" 的语言, 这可以视为一种形式的记号; 无论如何, 它很容易翻译为范畴语言.

(3) ⇒ (2) 的证明. 到终对象的拉回给出了有限积, 而对于两个态射 $f, g \colon X \to Y$, 如下拉回给出了等化子:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{eq}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "(f,g)"'] & Y \times Y, \end{tikzcd}$$

其中 $\Delta = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Y) \colon Y \to Y \times Y$ 是对角线. □

指数对象与积闭范畴

集合范畴中, 两个集合间的态射仍构成一个集合, 称为映射集合. 在某些范畴 C 中, 两个对象之间有一个 C 的对象充当了 "映射集合" 的角色, 称为指数对象 (exponential object).

定义 1.1.2 (指数对象, 积闭范畴)

设范畴 C 具有有限积. 对固定的对象 X, 若存在函子 $(-)^X \colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 构成 $(-) \times X$ 的右伴随[4], 即有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, Y^X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z \times X, Y), \tag{1.1}$$

则称 X 可作指数 (exponentiable), 称 Y^X 为指数对象 (exponential object), 或称内蕴态射对象 (internal hom-objects).
若 C 的所有对象均可作指数, 则称 C 为积闭范畴 (cartesian closed category), 其中 "闭" 即指数对象的存在性.

指数对象在数学中随处可见.

[4]指数对象可对一般的幺半范畴 (monoidal category) 定义, 这里我们只考虑所谓积幺半范畴 (cartesian monoidal category), 即以乘积定义的幺半范畴.

例 1.1.3 (紧开拓扑)

在拓扑空间范畴 Top 中, 一般的对象不一定可作指数, 但局部紧 Hausdorff 空间都是可作指数的. 若 X 是局部紧空间, Y 是任意拓扑空间, 指数对象 Y^X 上的拓扑称为*紧开拓扑* (compact-open topology), 这个名字是因为它可由如下开集生成: 对紧集 $K \subset X$ 与开集 $O \subset Y$, 取 X 到 Y 所有满足 $f(K) \subset O$ 的映射构成的集合.

拓扑学中, 人们常说 "我们在一个方便的拓扑空间范畴中工作"[5], 即要求所考虑的范畴包含我们感兴趣的空间, 且具有积闭等性质. 一个比较方便的范畴是*紧生成弱 Hausdorff 空间范畴* CGWH. Johnstone [5] 构造了一个方便的拓扑空间范畴, 且它是猫猫.

例 1.1.4 (函子范畴)

两个范畴 C, D 之间的函子构成一个范畴 $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$, 这是范畴的范畴 Cat 中的指数对象.

命题 1.1.5

对于积闭范畴, 指数对象实际上构成一个*双函子* (也即乘积范畴出发的函子) $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$, $(X, Y) \mapsto Y^X$.

在集合范畴中, 给定一个映射 $f \colon X \to Y$ 与一个元素 $x \in X$, 我们可对 f 在 x 处取值得到 Y 的元素 $f(x)$; 类似地, 在一个积闭范畴中我们有 $Y^X \times X$ 到 Y 的一个 "取值" 映射.

定义 1.1.6 (取值映射)

在 (1.1) 中取 $Z = Y^X$, 那么 $\mathrm{id}_{Y^X} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y^X, Y^X)$ 在另一边对应的态射称作*取值映射* (evaluation map) $\mathrm{ev} \colon Y^X \times X \to Y$. 换言之, 取值映射 $\mathrm{ev} \colon Y^X \times X \to Y$ 是伴随 $(-) \times X \dashv (-)^X$ 的余单位.

指数对象有与数的乘方类似的规律.

[5] https://ncatlab.org/nlab/show/convenient+category+of+topological+spaces

命题 1.1.7 (指数律)

在积闭范畴中, 对任意对象 X, Y, Z 有

$$(Z^Y)^X \simeq Z^{Y\times X}.$$

证明. 由指数对象的性质, 有自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(W,(Z^Y)^X) &\simeq \mathrm{Hom}(W\times X, Z^Y)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(W\times X\times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}(W, Z^{Y\times X}).\end{aligned}$$

由米田引理, 结论得证. □

命题 1.1.8

在有二元和的积闭范畴中, 对任意对象 X, Y, Z 有

$$Z^{X+Y} \simeq Z^X \times Z^Y.$$

证明. 略. 与命题 1.1.7 的证明类似, 使用米田引理. 其中要用到积闭范畴中的 "分配律"

$$W\times(X+Y) \simeq W\times X + W\times Y,$$

这是因为 $(-)\times W$ 作为 $(-)^W$ 的左伴随保持余极限 (命题 A.1.1). □

命题 1.1.9

在积闭范畴中,

$$(Z\times Y)^X \simeq Z^X \times Y^X.$$

证明. 这是因为 $(-)^X$ 作为 $(-)\times X$ 的右伴随保持极限 (命题 A.1.1). □

子对象分类子

对于集合 X 的子集 $U\subset X$, 定义其特征函数 (characteristic function) $\chi_U\colon X\to\{0,1\}$,

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & x\in U,\\ 0, & x\notin U.\end{cases}$$

(我们可将特征函数 $\chi_U(x)$ 视为 "含一个变量 x 的命题", 当且仅当 $x \in U$ 时命题为真.) 如此, X 的子集一一对应于 X 到 $\{0,1\}$ 的映射. 这就是说, 集合 $\{0,1\}$ "分类" (classify) 了集合的子集.

定义 1.1.10 (子对象)

在一般的范畴中, 我们称指向 X 的单态射 $U \to X$ 的同构类为 X 的子对象 (subobject), 其中单态射的同构是指形如
$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\simeq"', shift right] \arrow[dr, hook] & \\ \widetilde{U} \arrow[u, shift right] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$
的交换图.

范畴 C 中对象 X 的子对象构成一偏序集 $\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(X)$, 其序关系为 "包含" 关系. 若子对象 $U \hookrightarrow X$ 作为嵌入映射可分解为 $U \hookrightarrow V \hookrightarrow X$, 则称 U 包含于 V.

在范畴 C 具有拉回时, 子对象集合有函子性.

定义 1.1.11 (子对象函子)

假设范畴 C 具有拉回. 定义子对象函子

$$\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}} \colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set},$$

将对象 X 对应到其子对象的集合, 态射对应到子对象的拉回.

上述定义的合法性来自如下命题.

命题 1.1.12

拉回保持子对象; 即对任意态射 $f \colon X \to Y$ 以及子对象 $i \colon V \to Y$, 只要存在拉回 $U = X \times_Y V$, 就有 $j = f^*i \colon U \to X$ 是 X 的子对象.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook, "j"'] & V \arrow[d, hook, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

证明. 设 $\alpha, \beta \colon Z \to U$ 满足 $j\alpha = j\beta$. 那么 $fj\alpha = fj\beta$; 由交换图, $ip\alpha = ip\beta$. 由 i 为单态射, 知 $p\alpha = p\beta$. 由拉回的性质, 知 $\alpha = \beta$. 这说明 j 为单态射. □

定义 1.1.13 (子对象分类子)

设范畴 C 存在拉回. 若子对象函子 $\mathrm{Sub}\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可表, 即存在对象 Ω 使得有自然同构

$$\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, \Omega),$$

则称 Ω 为 C 的子对象分类子 (subobject classifier).

子对象分类子还有如下的等价定义.

定义 1.1.14 (子对象分类子, 等价定义)

设范畴 C 存在拉回以及终对象 1. 若存在满足如下条件的对象 Ω 以及单射 $\top\colon 1 \to \Omega$, 则称其为 C 的子对象分类子 (subobject classifier): 对任意单射 (子对象) $U \to X$ 存在唯一的特征函数 (characteristic map) $\chi_U\colon X \to \Omega$ 使得下图为拉回.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, hook, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

我们也称 $\top\colon 1 \to \Omega$ 为万有子对象 (universal subobject).

有了子对象分类子, 子对象等同于到 Ω 的态射, 从而子对象的拉回不过是到 Ω 的态射的复合.

$$\begin{tikzcd} f^*V \arrow[r] \arrow[d, hook] & V \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, hook, "\top"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

注 1.1.15

"万有子对象" 中的 "万有" 与拓扑学中 "万有 G-主丛" 中 "万有" 的含义相同. 上述定义中 "1 是终对象" 的要求可不用提, 因为它蕴含于后面的泛性质中: 对任何对象 X 考虑子对象 $\mathrm{id}\colon X \to X$, 在拉回图 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{1} \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$ 中, 由 χ 的唯一性以及 $\top$ 是单射可得到 α 的唯一性, 这说明 $\widetilde{1}$ 就是终对象 1.

符号 $\top$ (LaTeX 代码: `\top`) 读作 "真", 后面也将用到另一个元素 $\bot\colon 1 \to \Omega$ (`\bot`), 读作 "假". 一般地, 态射 $1 \to \Omega$ 称为真值 (truth value).

现在证明子对象分类器两种定义的等价性. 假设第一种定义 (1.1.13) 中的对象 Ω 存在, 我们需要给出第二种定义 (1.1.14) 所要求的单射 $\top\colon 1 \to \Omega$.

考虑 Ω 到自身的恒等映射 $\mathrm{id}\colon \Omega \to \Omega$, 它在同构 $\mathrm{Sub}(\Omega) \simeq \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega)$ 下对应一个子对象 $\widetilde{\top}\colon \widetilde{1} \to \Omega$.

对任意子对象 $U \to X$, 由交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{1} & \in & \mathrm{Sub}(\Omega) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, "\text{沿 } \chi_U \text{ 拉回}"'] & \mathrm{Hom}(\Omega,\Omega) \arrow[d, "\text{复合 } \chi_U"] & \ni & \mathrm{id}_\Omega \\
U & \in & \mathrm{Sub}(X) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(X,\Omega) & \ni & \chi_U
\end{tikzcd}$$

我们得到 $\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, hook] & \widetilde{1} \arrow[d, hook, "\widetilde{\top}"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & \Omega \end{tikzcd}$ 是一个拉回. 这说明 $\widetilde{\top}$ 就是 $\top$.

下面介绍一些子对象的例子.

例 1.1.16 (自身)

每个对象 X 都是自身的子对象; 严格地说, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 是一个子对象. 它的特征函数是 $\top_X\colon X \to 1 \xrightarrow{\top} \Omega$. 读者可验证下图确实是一个拉回:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "\top_X"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

例 1.1.17 (整体元素)

任何整体元素 $1 \to X$ 是子对象.

例 1.1.18 (对角线)

假设二元积存在, 那么对任意对象 X, 对角线映射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是一个子

对象 (因为它复合任意一个投影映射得到 id_X).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \times X \arrow[r, "\chi_\Delta"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

我们将它的特征函数 χ_Δ 记为 "Kronecker δ 函数" $\delta_X\colon X \times X \to \Omega$, 表示 X 上的相等关系.

例 1.1.19 (单元集)

"Kronecker δ 函数" $\delta_X\colon X \times X \to \Omega$ 对应的态射 $\{-\}_X\colon X \to \Omega^X$ 称为单元集映射 (singleton map), 在集合范畴中它将 X 的元素变为 X 的单元子集. 由下面的命题, $\{-\}_X$ 为单射, 从而它给出了 PX 的一个子对象, 即 "X 的单元子集的集合". 其特征函数

$$\sigma_X := \chi_{\{-\}_X}\colon PX \to \Omega$$

在直观上表示 X 的一个子集是否是单元集.

命题 1.1.20 (单元集映射是单射)

对任意对象 X, 单元集映射 $\{-\}_X\colon X \to \Omega^X$ 是单射.

证明. 对任意两个态射 $x, x'\colon U \to X$, 假设 $\{-\}_X \circ x = \{-\}_X \circ x'\colon U \to \Omega^X$, 那么由 δ_X 的定义有

$$\delta_X(x \times 1) = \delta_X(x' \times 1)\colon U \times X \to \Omega.$$

考虑下图,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "x"] \arrow[d, "{(1,x)}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & 1 \arrow[d] \\ U \times X \arrow[r, "x \times 1"'] & X \times X \arrow[r, "\delta_x"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

两个小方形均为拉回, 从而长方形为拉回. 因此左边的竖直箭头 $(1,x)\colon U \to U \times X$ 是一个子对象 (函数 x 的 "图像"), 其特征函数为 $\delta_X(x \times 1)$. 对于 x' 有同样的拉回图, 故 $(1,x)$ 与 $(1,x')$ 是相同的子对象. 由子对象相同的定义, 存在自同构 $h\colon U \to U$ 使得 $(1,x) \circ h = (1,x')$, 即 $h = 1, xh = x'$, 这说明 $x = x'$. $\square$

例 1.1.21 (等化子)

假设二元积存在, 那么等化子可表示为一个子对象: 态射 $f, g\colon X \to Y$ 的等化子是态射

$$X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega$$

对应的子对象. 对比命题 1.1.1 (3) ⇒ (2) 的证明.

例 1.1.22 (成员关系)

取值映射 (见定义 1.1.6) $\Omega^X \times X \to \Omega$ 对应的子对象是成员关系 (membership relation) $\in_X \hookrightarrow \Omega^X \times X = P(X) \times X$.

注 1.1.23 (子对象, 谓词与广义元素)

集合的函数 $X \to \{\top, \bot\}$ 可视为定义在 X (的元素) 上的一个谓词, 也即输入 X 的元素 x, 输出 x 是否满足某个命题. X 自身作为子对象, 对应谓词 $\top$ (恒真); 对角线 $\Delta\colon X \to X \times X$ 对应谓词 "$x = y$"; 等化子 $\mathrm{eq}(f, g) \to X$ 对应谓词 "$f(x) = g(x)$".
态射 $A \to X$ 可视为 X 的广义元素. 设 $X \to \Omega$ 是谓词, 那么复合 $A \to X \to \Omega$ 可视为 Ω 的广义元素, 表示 "广义元素 $A \to X$ 满足谓词 $X \to \Omega$".

幂对象

集合 X 的幂集 (power set) $P(X)$ 是 X 所有子集的集合. 由于 X 的子集一一对应于 X 到 $\{\bot, \top\}$ 的映射, 我们有自然同构 $P(X) \simeq \{\bot, \top\}^X$.

定义 1.1.24 (幂对象函子)

设范畴 C 中存在子对象分类子和指数对象, 定义幂对象 (power object)

$$P(X) := \Omega^X.$$

幂对象给出了函子 $P\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$.

在上述定义中取 $X = 1$, 我们得到子对象分类子等于终对象的幂对象: $\Omega = P(1)$.

此时有同构

$$\mathrm{Hom}(1, P(X)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \Omega) \simeq \mathrm{Sub}(X),$$

也即 $P(X)$ 的整体元素一一对应于 X 的子对象.

幂对象还有一种独立于子对象分类子的定义. 注意到 (形式上) 有

$$\{X \times Y \text{ 的子对象}\} \simeq \mathrm{Hom}(X \times Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \Omega^X) \simeq \mathrm{Hom}(Y, PX),$$

这启发了如下定义.

定义 1.1.25 (幂对象, 另一种定义)

设范畴 C 具有有限极限. 对象 X 的幂对象是一个对象 $P(X)$ 以及一个单射 $\in \hookrightarrow X \times P(X)$, 满足对任意对象 Y, Z 与单态射 $Z \to X \times Y$, 存在唯一的 $\chi_Z \colon Y \to P(X)$ 使得下图为拉回.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & \in \arrow[d, hook] \\
X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \chi_Z"'] & X \times P(X)
\end{tikzcd}$$

另一个有趣的事实是, 由幂对象和子对象分类子, 我们可构造所有指数对象; 其思路是将函数表示为图像. 如下构造取自 [8] IV.2 节.

集合映射 $f \colon X \to Y$ 可视为 $X \times Y$ 的子集 $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, 称为映射的图像 (graph). $X \times Y$ 的子集 Γ 是某个函数 $X \to Y$ 的图像的充要条件是, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 y 使得 $(x, y) \in \Gamma$. 在猫猫中我们完全可以模仿这个构造.

考虑例 1.1.19 定义的函数 $\sigma_Y \colon PY \to \Omega$, 表示 “存在唯一的 y”.

由成员关系 (例 1.1.22) $\in_{X \times Y} \colon X \times Y \times P(X \times Y) \to \Omega$ 可构造映射 v: $u \colon P(X \times Y) \to PX$

$$\begin{tikzcd}
Y^X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top_X"] \\
P(X \times Y) \arrow[r, "u"'] & PX
\end{tikzcd}$$

[未完成：构造]

俯范畴与局部积闭性

定义 1.1.26 (俯范畴)

范畴 C 在对象 X 上的俯范畴 (over category, 又称切片范畴, slice category) C/X 的对象是 C 中指向 X 的态射, 两个对象 $Y \to X$, $Z \to X$ 之间的态射是如下的交换图.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

俯范畴中极限, 子对象等结构与原来的范畴密切相关.

命题 1.1.27 (俯范畴中的有限极限)

设 C 中存在有限极限. 设 $Y \to X, Z \to X$ 是俯范畴 C/X 中两个对象. 那么两个态射 $f, g \colon Y \to Z$ 的等化子就是 $f, g \colon Y \to Z$ 在 C 中的等化子配上到 X 明显的态射; 两个对象 $Y \to X, Z \to X$ 的乘积是 C 中的拉回 $Y \times_X Z$.
对任意范畴 C 的对象 X, 俯范畴 C/X 都有终对象 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$.

命题 1.1.28 (俯范畴中的子对象)

对任何范畴 C, 俯范畴 C/X 中 $Y \to X$ 的子对象

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

等同于 C 中 Y 的子对象 $W \hookrightarrow Y$. 当 C 有子对象分类子 Ω 且存在乘积时,

$$\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}/X}(Y \to X) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}/X}(Y, \Omega \times X \to X),$$

即 C/X 有子对象分类子 $\Omega \times X \to X$.

俯范畴的性质中, 非常重要的是各俯范畴以及原来的范畴 C 之间的关系, 也即换基 (change of base).

很明显, 俯范畴 C/X 到原来的范畴 C 有一个 "遗忘"[6] 函子: 对于态射 $Y \to X$, 只保留对象 Y 而忘掉那个态射. 而 C 等价于俯范畴 $\mathsf{C}/1$ (假设 C 有终对象 1), 故上述函子的相对版本如下.

定义 1.1.29 (Σ-函子)

设 C 是范畴. 对态射 $f\colon X \to Y$, 定义函子 $\Sigma_f\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}/Y$, 将 C/X 的对象 $Z \to X$ 对应到复合 $Z \to X \xrightarrow{f} Y$.
当 $Y = 1$ 是 C 的终对象时, $\mathsf{C}/1 \simeq \mathsf{C}$, 记上述函子为 $\Sigma_X\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}$.

稍加观察即可得到如下命题.

命题 1.1.30

设范畴 C 存在拉回, 那么对态射 $f\colon X \to Y$, 有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}/X \arrow[r, shift left, "\Sigma_f"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{C}/Y \arrow[l, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}.$$

证明. 由拉回的泛性质, 如下两个交换图的信息是相同的:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr] \arrow[dr] & & f^*Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

这正说明 Σ_f 是 f^* 的左伴随. □

注 1.1.31 (记号 Σ_f 的来由)

集合范畴中, 一个指向 X 的态射可视为 X 上的一个集合族, 也即 X 的每一点上有一个集合. 具体地, 我们有范畴等价

$$\mathsf{Set}/X \simeq \mathsf{Set}^X.$$

其中右边的 X 视为离散范畴. (Set 是集合丛的 "分类空间".)
对集合映射 $f\colon X \to Y$, 拉回函子 $f^*\colon \mathsf{Set}/Y \to \mathsf{Set}/X$ 在另一边表现为 "重

[6] 但严格来说这不是遗忘函子, 它一般没有对应的自由函子 (自由是遗忘的左伴随), 因为它一般不保持极限, 见命题 A.1.1.

新标号" 函子 $f^*\colon \mathsf{Set}^Y \to \mathsf{Set}^X$,

$$\{A_y \mid y \in Y\} \mapsto \{A_{f(x)} \mid x \in X\},$$

其左伴随 $\Sigma_f\colon \mathsf{Set}^X \to \mathsf{Set}^Y$ 可写为

$$\{A_x \mid x \in X\} \mapsto \Big\{ \sum_{f(x)=y} A_x \Big| y \in Y \Big\},$$

即对 $f\colon X \to Y$ 的每个纤维上的集合求和. 特别地, $\Sigma_X\colon \mathsf{Set}^X \to \mathsf{Set}$ 可写为 $\{A_x \mid x \in X\} \mapsto \sum_{x\in X} A_x$, 即对 X 上一族集合求和. 更多细节可参考 [8] I.9 节.

例 1.1.32

在命题 1.1.30 中令 $Y = 1$, 以 X 表示唯一的态射 $X \to 1$, 得到伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}/X \arrow[r, shift left, "\Sigma_X"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{C}. \arrow[l, shift left, "X^*"] \end{tikzcd}$$

到 1 的态射的拉回为二元乘积, 故函子 $X^*\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}/X$ 将对象 Z 对应到投影 $\mathrm{pr}_2\colon Z \times X \to X$ (直观: X 的每个点上都有一个 Z). 那么这对伴随的余单位为 $(-) \times X$.

前面讨论了 f^* 的左伴随. 令人惊讶的是, f^* 还有一个潜在的右伴随. 首先看绝对 (即 $Y = 1$) 的情形; 我们发现它和指数对象有关.

命题-定义 1.1.33 (Π-函子, 绝对情形)

设范畴 C 存在有限极限. 那么 $(-) \times X\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 有右伴随 $(-)^X$ 当且仅当 $X^*\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}/X$ 有右伴随 $\Pi_X\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}$.

证明. 假设 $X^*\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}/X$ 有右伴随 $\Pi_X\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}$. 定义 $(-)^X = \Pi_X \circ X^*$, 那么有

自然同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z^X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, \Pi_X \circ X^* Z) && (\text{定义}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}/X}(X^*Y, X^*Z) && (\Pi_X \text{ 是 } X^* \text{ 的右伴随}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\Sigma_X \circ X^*Y, Z) && (\Sigma_X \text{ 是 } X^* \text{ 的左伴随}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y \times X, Z).
\end{aligned}$$

另一方面, 假设 $(-) \times X \colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 有右伴随 $(-)^X$. 对于 $f \colon Z \to X$, 定义 $\Pi_X(f)$ 为如下的拉回,

$$\begin{tikzcd}
\Pi_X(f) \arrow[r] \arrow[d] & Z^X \arrow[d, "f^X"] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] & X^X
\end{tikzcd}$$

其中 $\mathrm{id}_X \colon 1 \to X^X$ 是 $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ 在指数伴随下对应的 X^X 的元素, 并且由拉回的性质容易得到构造的函子性. 这个拉回的直观是 “$f \colon Z \to X$ 的截面的集合” (因为 f 的截面就是 X 到 Z 的态射, 使得它复合 f 后等于 id_X).

对 C 的对象 W, 有自然同构

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(W, \Pi_X(f)) \\
\simeq&\{h \colon W \to Z^X \mid f^X \circ h = \mathrm{id}_X \circ W\} \\
\simeq&\{h \colon W \times X \to Z \mid f \circ h = \mathrm{pr}_2 \colon W \times X \to X\} \\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}/X}(X^*W, f).
\end{aligned}$$

这证明了 Π_X 是 X^* 的伴随. □

注 1.1.34

正如 $\Sigma_X \colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}$ 可理解为对 X 上一族对象求和, $\Pi_X \colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}$ 可理解为对 X 上一族对象求积. 而 $X^* \colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}/X$ 是将对象 Y “复制 X 那么多份”, 所以 $\Pi_X \circ X^*(Y)$ 就是将 X 那么多个 Y 相乘, 也就是 Y^X.

相对的情形引出了局部积闭范畴的概念.

定义 1.1.35 (局部积闭范畴)

称范畴 C 为局部积闭范畴 (locally cartesian closed category, LCCC) 是指 C 在任何对象 X 上的俯范畴 C/X 为积闭范畴.

注 1.1.36

通常人们还会假定局部积闭范畴 C 有终对象 1, 从而 C 是积闭范畴, 因为 $\mathsf{C}/1 \simeq \mathsf{C}$.
积闭范畴的定义要求有限积, 故局部积闭范畴中存在拉回, 从而存在有限极限.

命题-定义 1.1.37 (Π-函子)

设范畴 C 有一切有限极限. 那么 C 是局部积闭范畴当且仅当对任何态射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \mathsf{C}/Y \to \mathsf{C}/X$ 有右伴随 Π_f.

证明. 注意到

$$(\mathsf{C}/Y)/f \simeq \mathsf{C}/X,$$

这个命题化为绝对情形 (命题 1.1.33). □

总结起来,

命题 1.1.38 (俯范畴之间的三元伴随)

对于存在有限极限的局部积闭范畴, 对每个态射 $f\colon X \to Y$ 有三元伴随

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}/X \arrow[r, shift left=3ex, "\Sigma_f"] \arrow[r, shift right=3ex, "\Pi_f"'] & \mathsf{C}/Y. \arrow[l, "f^*"' description]
\end{tikzcd}$$

由于 f^* 同时有左右伴随, 我们得到 f^* 同时保持极限和余极限. 拉回也保持子对象分类子, 即 $\Omega \times Y \to Y$ 的拉回是 $\Omega \times X \to X$ (命题 1.1.28). 下面我们证明拉回保持指数对象.

命题 1.1.39

对于存在有限极限的局部积闭范畴, 拉回 $f^*\colon \mathsf{C}/Y \to \mathsf{C}/X$ 保持指数对象; 即对 C/Y 的对象 $g\colon Z \to Y, h\colon W \to Y$,

$$f^*\big((Z \xrightarrow{g} Y)^{(W \xrightarrow{h} Y)}\big) \simeq \big(f^*(Z \to Y)\big)^{f^*(W \to Y)}.$$

证明. 记 f^*g 为 g', f^*W 为 W'. 要证明的是下图的里层方块交换.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}/Y \arrow[r, shift right, "(-)^h"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathsf{C}/Y \arrow[l, shift right, "(-)\times_Y W"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] \arrow[d, phantom, "\vdash"] \\
\mathsf{C}/X \arrow[u, shift right, "\Sigma_f"'] \arrow[r, shift left, "(-)^{h'}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathsf{C}/X \arrow[u, shift left, "\Sigma_f"] \arrow[l, shift left, "(-)\times_X W'"]
\end{tikzcd}$$

由伴随的复合以及伴随的 (同构意义下的) 唯一性, 只需证明外层方块交换. 展开定义, 这就是说对任意 $U \to X$, 下图的大长方形为拉回.

$$\begin{tikzcd}
U \times_X W' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & W \arrow[d, "h"] \\
U \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\square$

1.2 猫猫

猫猫可由极少的几条性质来定义, 但需注意过短的定义可能会掩盖它的全貌.

定义 1.2.1 (猫猫)

猫猫是存在有限极限和子对象分类子的积闭范畴.

如上简洁的定义可以导出两个惊人的事实.

命题 1.2.2

猫猫中存在有限余极限.

命题 1.2.3 (“猫猫理论基本定理”)

对猫猫 C 的任何对象 X, 俯范畴 C/X 是猫猫.

这两个命题的证明都比较复杂, 感兴趣的读者可阅读 [8] IV.5, IV.7 节. 下面我们将承认这两个命题, 或将其加入猫猫的定义, 这对后面的理论无伤大雅.

例 1.2.4 (集合范畴)

集合范畴 Set 是最基础的猫猫.

例 1.2.5 ($\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$)

范畴 $\mathsf{C} = \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \simeq \mathsf{Set}^{\{1,2\}}$ 是一个猫猫, 其对象为一对集合 (X_1, X_2), 态射为一对映射 $\big(f_1 \colon X_1 \to Y_1, f_2 \colon X_2 \to Y_2\big)$, 终对象为 $(1,1)$. 对象 (X_1, X_2) 的子对象是一对子集 $(U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2)$, 对应一对特征函数 $\big(\chi_1 \colon X_1 \to \{\bot, \top\}, \chi_2 \colon X_2 \to \{\bot, \top\}\big)$. 我们看到, 这个范畴的子对象分类子为

$$(\top \colon 1 \to \{\bot, \top\}, \top \colon 1 \to \{\bot, \top\}).$$

例 1.2.6 (变集范畴 $\mathsf{Fun}(2, \mathsf{Set})$)

考虑 “箭头范畴” $2 = \{\bullet \longrightarrow \bullet\}$ 到 Set 的函子范畴 $\mathsf{Fun}(2, \mathsf{Set})$, 其对象为集合映射 $X_0 \to X_1$, 称之为变集 (varying set), 态射为左下图, 终对象为 $1 \to 1$, 子对象分类子为右下图.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr] \arrow[d, "\top"'] & & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \{\bot, \star, \top\} \arrow[rr] & & \{\bot, \top\} \ (\star \mapsto \top) \end{tikzcd}$$

变集 $f \colon X_0 \to X_1$ 的子对象 $U_0 \to U_1$ 的特征函数 χ 为

$$\chi(x \in X_0) = \begin{cases} \bot & x \notin U_0, f(x) \notin U_1 \\ \star & x \notin U_0, f(x) \in U_1 \\ \top & x \in U_0, f(x) \in U_1 \end{cases}, \quad \chi(x \in X_1) = \begin{cases} \bot & x \notin U_1 \\ \top & x \in U_1 \end{cases}.$$

这个猫猫中有三个真值 $\bot, \star, \top \colon 1 \to \Omega$; 符号 $\star$ 可理解为 “将要成真”: $\chi(x) =$

$\star$ 表示 x 不属于这个子集, 但将要属于这个子集 (即 $f(x)$ 属于这个子集).

例 1.2.7 (有限集范畴)

有限集范畴 Fin 是一个猫猫; 这表示猫猫中不天然具有“无限”的概念.

在第 3 章, 我们将介绍一类重要的 (也是最早被研究的) 猫猫, 即 Grothendieck 猫猫.

1.3 更多范畴论结构

单射与满射

下面是一个常用的引理, 它表明在任何范畴中我们都可以用拉回与推出刻画单射与满射.

命题 1.3.1 (单射与满射的等价刻画)

在任何范畴中, 态射 $f\colon X \to Y$ 是单射当且仅当左下图是拉回, f 是满射当且仅当右下图是推出.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, very near end, "\ulcorner"] & Y \end{tikzcd}$$

由此及“伴随保持极限” (命题 A.1.1), 我们就得到

命题 1.3.2

左伴随保持满射, 右伴随保持单射.

正则单射与满射, 等价关系

集合的单射与满射的概念在一般的范畴中不止有一种推广.

定义 1.3.3 (正则单射与满射)

定义范畴中可作等化子的态射为正则单射 (regular monomorphism), 可作余等化子的态射为正则满射 (regular epimorphism).

例 1.3.4

拓扑空间范畴 Top 中的正则单射是嵌入, 也即子空间拓扑. Top 中一般的单射未必是正则单射, 例如一个集合上离散拓扑到平凡拓扑的映射.

例 1.3.5

环范畴 Ring 中的正则满射正是那些底层集合上是满射的环同态. Ring 中一般的满射未必是正则满射, 例如 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

定义 1.3.6 (核偶与余核偶)

设范畴 C 存在所需的拉回或推出. 定义

- 态射 $f\colon X \to Y$ 的核偶 (kernel pair) 为左下方拉回图中的态射偶 (p_1, p_2), 也即被 f 余等化的万有态射偶 $\bullet \rightrightarrows X$;
- 态射 $f\colon X \to Y$ 的余核偶 (cokernel pair) (g, h) 为右下方推出图中的态射偶 (i_1, i_2), 也即被 f 等化的万有态射偶 $Y \rightrightarrows \bullet$.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_1} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ Y & \xrightarrow[i_1]{} & Y \sqcup_X Y \end{array}$$

对于集合, 态射 $f\colon X \to Y$ 的核偶为 $X \times X$ 的子集

$$X \times_Y X = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

$X \times X$ 的子集可视为集合 X 上的一个 (二元) 关系.

定义 1.3.7 (等价关系)

在一般的范畴中, 称 $X \times X$ 的一个子对象 R 为 X 上的一个关系. 等价关系是满足如下条件的关系.

- (自反性) $\Delta \leq R$, 其中 Δ 是对角线 (例 1.1.18);
- (对称性) $R = \sigma R$, 其中 σ 为交换两个分量;
- (传递性) 作为 $X \times X \times X$ 的子对象有 $p_{12}^* R \wedge p_{23}^* R \leq p_{13}^* R$, 其中 p_{ij} 是到第 i, j 分量的投影.

态射 $f\colon X \to Y$ 的核偶是 X 上的等价关系, 称之为 f 诱导的等价关系.

注意到当 $f\colon X \to Y$ 为集合的满射时, 核偶 $X \times_Y X \rightrightarrows X$ 的余等化子恰为 $f\colon X \to Y$.

定义 1.3.8 (有效单射与满射)

在具有拉回与推出的范畴中, 若一个态射是其余核偶的等化子, 则称之为有效单射 (effective monomorphism); 若一个态射是其核偶的余等化子, 则称之为有效满射 (effective epimorphism).

在具有拉回与推出的范畴中, 正则单射 (满射) 的概念与有效单射 (满射) 的概念等价.

命题 1.3.9

设某范畴中 $f\colon X \to Y$ 有核偶, 那么 f 是正则满射当且仅当 f 是有效满射. 对偶地, 设 f 有余核偶, 那么 f 是正则单射当且仅当 f 是有效单射.

证明. 由定义, 若 f 是有效满射, 则 f 是正则满射. 反之, 设 f 是两个态射 $g, h\colon Z \to$

X 的余等化子. 那么有如下交换图.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "{(g,h)}"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

此时若态射 $X \to W$ 余等化 p_1, p_2, 那么它也余等化 g, h, 从而 (由 f 的性质) 穿过 Y. 这说明了 f 是其核偶的余等化子. □

[**未完成：Giraud 公理, 不交和**]

命题 1.3.10

在猫猫中拉回保持满射; 即对任意态射 $f\colon X \to Y$ 以及满射 $e\colon Z \to Y$, 就有 $f^*e\colon X \times_Y Z \to X$ 是满射.

证明. 由命题 1.1.37, 猫猫中的拉回有右伴随, 从而拉回保持余极限. 由满射的余极限刻画 (命题 1.3.1), 知拉回保持满射. □

[**未完成：顺序?**]

像

定义 1.3.11 (像)

对于范畴 C 中的态射 $f\colon X \to Y$, 若存在 f 穿过的最小子对象 $\operatorname{im} f \hookrightarrow Y$, 则称其为 f 的像 (image).

注 1.3.12 (像的函子定义)

对固定的对象 X, 到 X 态射的像是一个函子 $\mathsf{C}/X \to \mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(X)$, 它是 "嵌入" 函子 $\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(X) \to \mathsf{C}/X$ 的左伴随; 这个伴随表达的含义正是 $\operatorname{im} f$ 是 f 穿过的最小子对象.

命题 1.3.13 (像与存在)

假设范畴 C 存在拉回, 那么如下条件等价:

(1) C 的所有态射都有像.

(2) 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 有左伴随 $\exists_f$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明. 假设所有函子 im 存在. 定义 $\exists_f$ 为如下的复合,

$$\exists_f\colon \mathrm{Sub}(X) \longrightarrow \mathsf{C}/X \xrightarrow{\Sigma_f} \mathsf{C}/Y \xrightarrow{\mathrm{im}} \mathrm{Sub}(Y).$$

(函子 Σ_f 的定义见 1.1.29.) 对于 X 的子对象 $\iota\colon U \hookrightarrow X$, 由定义 1.3.11, $\exists_f U \hookrightarrow Y$ 是 $f \circ \iota\colon U \to Y$ 穿过的最小子对象. 由拉回的泛性质, $f \circ \iota\colon U \to Y$ 穿过子对象 $V \hookrightarrow Y$ 对应于下图中唯一的态射 $U \to f^*(V)$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, bend left] \arrow[rd, dashed, "\exists!"] \arrow[rdd, bend right, "\iota"'] & & \\
& f^*(V) \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 对任意态射 $f\colon X \to Y$, 将函子 $\exists_f\colon \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(Y)$ 作用于 id_X 就得到 f 的像. □

注 1.3.14 (集合范畴的情形)

在集合范畴中, $\exists_f(U)$ 可写为 $f(U)$, 也即 $\mathrm{im}(f|_U\colon U \to Y)$. 所谓 $\exists_f$ 为 f^* 的左伴随, 即对任意 $U \subset X$ 与 $V \subset Y$,

$$f(U) \subset V \iff U \subset f^*(V).$$

注 1.3.15 (为什么拉回的左伴随叫做 "存在")

考虑集合范畴中的一个特例. 取 $X = Y \times Z$, $f\colon Y \times Z \to Y$ 为投影. 将 $Y \times Z$ 的子集视为关于 y, z 的谓词 $P(y,z)$, 那么 "存在" 函子 $\exists_f$ 将这个谓词变为关于 y 的谓词 $\exists z\, P(y,z)$ (其中只有 y 一个自由变量), 对应 Y 的子集

$\{y \mid \exists z P(y, z)\}$.

满–单分解

[未完成：与上一节的关系?]

集合的映射可分解为一个满射后接一个单射，这称为映射的满–单分解 (epi–mono factorization).

命题 1.3.16 (满–单分解)

在猫猫中，任意态射 $f\colon X \to Y$ 可分解为

$$X \xrightarrow{e} \operatorname{im}(f) \xrightarrow{m} Y,$$

且 e 是满射.

证明. 作 f 与 f 的推出,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

再作 g 与 h 的等化子 $m\colon W \to Y$. 由于 $g \circ f = h \circ f$, 等化子的泛性质给出唯一的态射 $e\colon X \to W$. □

子终对象

在数学上，说一类对象唯一，并不是说恰好有一个这类对象，而是至多有一个这类对象；等价的说法是，若有两个这类对象，那么两者相等 (此时这类对象完全有可能不存在).

定义 1.3.17 (子终对象)

对范畴 C 与对象 X, 若 C 的任何对象到 X 有至多一个态射，称 X 为子终对象 (subterminal object).

命题 1.3.18 (子终对象的等价定义)

- 当 C 存在二元积时, X 是子终对象等价于对角线映射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 为同构;
- 当 C 存在终对象 1 时, X 是子终对象当且仅当唯一的映射 $X \to 1$ 是单射. (这解释了子终对象的名称.)

证明.

- 假设 C 存在二元积. 注意到 $\mathrm{pr}_i \circ \Delta = \mathrm{id}_X\,(i = 1, 2)$. 若 X 为子终对象, 则 $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2\colon X \times X \to X$, 故 $\Delta \circ \mathrm{pr}_1 = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1) = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) = \mathrm{id}_{X \times X}$. 这证明了 Δ 为同构. 另一方面, 设 Δ 为同构, 则 $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) = \mathrm{id}_{X\times X} = \Delta \circ \Delta^{-1} = (\Delta^{-1}, \Delta^{-1})$, 从而 $\mathrm{pr}_1 = \Delta^{-1} = \mathrm{pr}_2$, 从而对任意 $f, g\colon Y \to X$, $f = \mathrm{pr}_1 \circ (f, g) = \mathrm{pr}_2 \circ (f, g) = g$, 即 X 为子终对象.
- 假设 C 中存在终对象 1. 若 X 为子终对象, 则对任意 $f, g\colon Y \to X$, $f = g$, 这表明 $X \to 1$ 为单射. 另一方面, 设 $X \to 1$ 是单射, 则对任意 $f, g\colon Y \to X$, $X \circ f = X \circ g\colon Y \to 1$, 故 $f = g$.

□

在猫猫中, 子终对象一一对应于态射 $1 \to \Omega$, 也即真值.

例 1.3.19

Set × Set 的终对象为 $(1, 1)$, 有 4 个子终对象 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, 即 4 个真值 $(\bot, \bot), (\bot, \top), (\top, \bot), (\top, \top)$.
例 1.2.6 介绍的猫猫 Fun(2, Set) 的终对象为 $1 \to 1$, 有 3 个子终对象 $0 \to 0$, $0 \to 1$, $1 \to 1$, 即 3 个真值 $\bot, \star, \top$; 我们提到过 $\star$ 可理解为 "将要成真".

例 1.3.20 (俯范畴的子终对象)

俯范畴 C/X 的终对象是 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 因此 C/$X$ 的子终对象是 X 的子对象 (见命题 1.1.28).

我们给出一个有趣的性质.

命题-定义 1.3.21 (猫猫的分解)

设 $(U_i)_{i\in I}$ 为猫猫 C 的子终对象, 则如下条件等价:

- 典范的映射 $\coprod_i U_i \to 1$ 为同构;
- 函子 $\mathsf{C} \to \prod_i \mathsf{C}/U_i$, $X \mapsto (X \times U_i)_{i\in I}$ 为等价.

此时, 我们称 (U_i) 为猫猫 C 的一个分解.

注 1.3.22

熟悉代数的读者可以看出, 子终对象类似于环论中的中心幂等元. 后面 (定义 3.4.9) 我们将看到子终对象与空间的 "开子空间" 概念有关.

子对象的格与 Heyting 代数

集合的子集可以取交和并, 这使得一个集合的所有子集构成一个格; 在猫猫中, 类似的操作可表达为子对象分类子 Ω 上的操作.

命题-定义 1.3.23 (子对象的交)

在具有拉回的范畴中, 定义子对象 $U \to X$, $V \to X$ 的交是子对象 $U \times_X V \to X$.

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

由拉回的定义, 它是同时包含于 X 和 Y 的最大子对象, 也即两个子对象的交.

命题-定义 1.3.24 (子对象的并)

在猫猫中, 定义子对象 $U \to X$, $V \to X$ 的并为两者唯一确定的态射 $U + V \to X$ 的像 (定义 1.3.11).
由像的定义, 它是同时包含 X 和 Y 的最小子对象, 也即两个子对象的并.

由此, 猫猫中一个对象的子对象集合 $\mathrm{Sub}(X)$ 构成一个格.

命题 1.3.25

在猫猫中, 沿态射 $f\colon X \to Y$ 的拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 是格的同态.

证明. 这是因为 f^* 保持极限和余极限. □

定义 1.3.26 (Heyting 代数)

若一个偏序集作为范畴具有有限积和余积, 且为积闭范畴, 则称之为 *Heyting* 代数. 换言之, Heyting 代数 H 中有有限交与有限并 (包括最大元 $\top$ 和最小元 $\bot$), 且有一种运算 $\Rightarrow\colon H \times H \to H$, 满足

$$z \le (x \Rightarrow y) \quad \text{当且仅当} \quad (z \wedge x) \le y.$$

这里 $x \Rightarrow y$ 就是指数对象 y^x 换了一个记号, 而上述等价正是定义 1.1.2 中的自然同构. 此外, 定义 Heyting 代数 H 上的 "非" 运算 $\neg\colon H \to H$,

$$\neg x = (x \Rightarrow \bot).$$

注 1.3.27

$x \Rightarrow y$ 是使得 $(z \wedge x) \le y$ 的 z 的最大值, "由命题 x 想要推出 y 还需要的最弱命题" (当 $z \le w$ 时, 我们认为 z 强于 w).

例 1.3.28 (拓扑空间的开集代数)

拓扑空间 X 的开集构成的偏序集 $\mathrm{Open}(X)$ 是 Heyting 代数; 其中 $\wedge$ 与 $\vee$ 是开集的交与并, $\top = X$, $\bot = \varnothing$, 运算 $\Rightarrow$ 为

$$(U \Rightarrow V) = \bigcup \{O \in \mathrm{Open}(X) \mid O \cap U \subset V\},$$

可验证 $\neg U$ 是 U 的补集的内部. 这个代数是后面介绍的位象.

命题 1.3.29

在 Heyting 代数中,

(1) $\big(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)\big) = (x \wedge y) \Rightarrow z$;

(2) $((x \vee y) \Rightarrow z) = \big((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\big)$;

(3) $\big(x \Rightarrow (y \wedge z)\big) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

证明. 这是指数对象的性质 (命题 1.1.7, 1.1.8, 1.1.9). □

注 1.3.30

我们暗示 (明示) 了 Heyting 代数的元素可视为某种命题. 事实上, 它可以作为直觉主义命题演算 (intuitionistic propositional calculus) 的模型.

在例 1.3.28 中, $U \vee \neg U$ 和 $(\neg\neg U) \Rightarrow U$ 都不一定等于 $\top$. 这体现了直觉主义逻辑中没有排中律或双重否定律.

命题 1.3.31

在猫猫中, 子对象的格 $\mathrm{Sub}(X)$ 是 Heyting 代数. 进一步, 沿态射 $f\colon X \to Y$ 的拉回 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 是 Heyting 代数的同态.

证明. 由于 $\mathrm{Sub}_{\mathsf{C}}(X) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathsf{C}/X}(1)$ (例 1.3.20), 我们只需对 $X = 1$ 的情形证明结论.

对于子终对象 U, V, 对任意对象 X, $\mathrm{Hom}(X, V^U) \simeq \mathrm{Hom}(X \times U, V)$ 至多有一个元素, 故 V^U 也是子终对象. 这说明 $\mathrm{Sub}(1)$ (作为范畴) 有指数对象, 从而是 Heyting 代数.

由命题 1.1.39, 拉回保持俯范畴中的指数对象, 从而保持子对象 Heyting 代数中的 "$\Rightarrow$" 运算. 结合命题 1.3.25, 知 f^* 为 Heyting 代数同态. □

由上述命题以及子对象分类子的性质, 我们知道 $\mathrm{Sub}(X) \simeq \mathrm{Hom}(X, \Omega)$ 上有自然的 Heyting 代数结构; 自然性意味着我们可以开动米田机器, 得到

$$\boxed{\Omega\ \text{是猫猫中的内蕴 Heyting 代数.}}$$

例如 $\mathrm{Hom}(X, \Omega)$ 上的 "$\vee$" 运算 $\vee\colon \mathrm{Hom}(X, \Omega) \times \mathrm{Hom}(X, \Omega) \to \mathrm{Hom}(X, \Omega)$ (作为自然变换) 等同于 $\vee\colon \mathrm{Hom}(X, \Omega \times \Omega) \to \mathrm{Hom}(X, \Omega)$, 等同于一个态射 $\vee\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$.

[未完成：内蕴版本]

自然数对象

定义 1.3.32 (自然数对象)

猫猫 C 中的自然数对象 (natural numbers object) 是一个对象 N, 以及态射 $0\colon 1 \to N$ (零), $s\colon N \to N$ (后继), 满足如下的泛性质: 对任意对象 X, 任意态射 $\widetilde{0}\colon 1 \to X, \widetilde{s}\colon X \to X$, 存在唯一的态射 $f\colon N \to X$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "f"] & N \arrow[d, dashed, "f"] \\ 1 \arrow[r, "\widetilde{0}"'] & X \arrow[r, "\widetilde{s}"'] & X \end{tikzcd}$$

命题 1.3.33

在一个猫猫中, $0\colon 1 \to N$ 与 $s\colon N \to N$ 构成自然数对象的充要条件是 $(0, s)\colon 1 + N \to N$ 为同构且 $1, s$ 的余等化子为 $\mathbb{N} \to 1$.

注 1.3.34

自然数对象是函子 $X \mapsto 1 + X$ 的始代数 [7](函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 的代数是一个对象 X 配备一个态射 $FX \to X$). 结论 1.3.33 的一部分可由 Lambek 定理得出, 这个定理说对于函子 F 的始代数, $FX \to X$ 必然是同构.

注 1.3.35

自然数对象的存在性可视为猫猫中的 Peano 公理.

例 1.3.36 (自然数对象不一定存在)

有限集范畴 Fin 中不存在自然数对象.

[7] https://ncatlab.org/nlab/show/initial+algebra+of+an+endofunctor

Boole 猫猫与选择公理

猫猫是类似于集合范畴的范畴, 而 Boole 猫猫比一般的猫猫 “更像” 集合范畴.[8]

定义 1.3.37 (Boole 猫猫)

对于猫猫 C, 若子对象分类子 Ω 是 C 的内蕴 Boole 代数, 则称之为 *Boole 猫猫* (Boolean topos).

例 1.3.38

$\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ 是 Boole 猫猫.

命题 1.3.39

对于猫猫 C, 如下条件等价.

- C 是 Boole 猫猫;
- 非运算 $\neg\colon \Omega \to \Omega$ 满足 $\neg\neg = \mathrm{id}$;
- 对任意对象 X, $\mathrm{Sub}(X)$ 为 Boole 代数;
- (“排中律”) 对任意子对象 $U \to X$, 有 $U \vee \neg U = X$;
- $\top, \bot\colon 1 \to \Omega$ 共同决定了一个同构 $1 + 1 \to \Omega$.

注 1.3.40 (Boole 与二值性无关)

注意 Boole 猫猫中尽管有 “排中律” 以及 $1 + 1 \simeq \Omega$, 却不一定只有两个真值. $\mathsf{Set} \times \mathsf{Set}$ 就是一例. 反过来, 只有两个真值的猫猫也不一定是 Boole 猫猫.

[8] 我尊敬的一位同学 Trebor 提醒大家注意 Boole 不是 Bool.

第 2 章　位象: 无点拓扑学

常常拓扑空间的重点不在于点, 而在于开集, 以及开集之间的关系. 将开集的性质提炼出来, 使其不再依赖于点, 就成为*位象* (locales) 的概念. 它是介于拓扑空间和景之间的一个推广.[1] 位象理论又称为*无点拓扑学* (pointless topology[2])

André Joyal [7] 建议在猫猫理论之前先学习位象理论.

在高阶的观点中, 位象又可称作 0-猫猫.

2.1　基本概念

定义 2.1.1 (位格)

位格 (frame, 又称 local lattice)[3]是满足如下条件的偏序集:

- 存在有限交 $\wedge$ 与任意并 $\bigvee$, 其中一族元素的*交* (meet) 是指同时小于等于这些元素的最大元, *并* (join) 是指同时大于等于这些元素的最小元;
- 有结合律
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i),$$
其中 I 是任意集合.

位格的态射是偏序集之间保持有限交与任意并的态射. 位格的范畴记为 Frm.

[1] 说位象是拓扑空间的 "推广" 不甚准确, 因为一般拓扑空间到位象的对应不是全忠实的 (有的空间开集太少). 但是 "好" 的空间范畴如 Hausdorff 空间范畴确实嵌入位象的范畴.

[2] 双关笑话: 无点拓扑学不是 pointless (无用的).

[3] Frame 一词似乎没有通行的中文翻译. 这里试译为位格, 因为它是一种与拓扑相关的格 (lattice).

注 2.1.2

由于任意交可由任意并表示,

$$\bigwedge A = \bigvee \{b : b \le a \ \forall a \in A\},$$

可以证明位格中任意交也存在, 即位格是完备格 (complete lattice). 但由定义, 位格的态射不一定保持任意交.

定义 2.1.3 (位象)

位象 (locale) 是位格的形式对偶, 即我们定义位象的范畴 Loc 是位格范畴 Frm 的对偶范畴.
对于位象 X, 我们记对应的位格为 $\mathcal{O}(X)$, 称其中的元素为 X 的开子集或开子空间; 对于位象的态射 $f: X \to Y$, 记对应的位格的态射为 $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

注 2.1.4

位格与位象的对偶类似于环与仿射概形的对偶, 是代数–几何对偶的一例.

例 2.1.5 (拓扑空间作为位象)

拓扑空间 X 的开集范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 构成一个位格. 对于连续映射 $f: X \to Y$, 我们有反向的位格态射 $f^*: \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$, 将 Y 的开集 U 映射到 X 的开集 $f^{-1}(U)$, 保持有限交与任意并. 这构成了函子 $\mathrm{Open}: \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$; 由定义 $\mathsf{Loc} = \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$, 我们得到函子

$$\mathrm{Open}: \mathsf{Top} \to \mathsf{Loc}.$$

例 2.1.6 (环的谱作为位象)

在代数几何中, (交换) 环的谱 $\mathrm{Spec}\, A$ 是由 A 的素理想的集合赋予 Zariski 拓扑定义的. 然而, 我们也可以直接刻画谱的 “基础开集” U_f 生成的位格, 从而

不需要使用环的素理想[4]:

$$\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) := \langle U_f \colon f \in A \mid U_0 = \bot, U_1 = \top, U_{f+g} \leq U_f \vee U_g, U_{fg} = U_f \wedge U_g \rangle.$$

(位格就像群, 环等代数结构一样, 可使用生成元和关系刻画, 并且可由给定生成元的 “自由代数” 的商得到.)
将 U_f 想象为一个空间上函数 f “非零” 的地方, $f+g$ 非零的地方包含于 f 与 g 各自非零的地方的并, 而 fg 非零的地方恰为两者的交. 可以证明如此定义的位象 $\operatorname{Spec} A$ 正是传统上定义的拓扑空间 $\operatorname{Spec} A$.

例 2.1.7 (点作为位象)

单点空间 pt 对应的位象记作 $1 = \operatorname{Open}(\mathrm{pt})$. 它对应的位格是两个元素的偏序集 $\mathcal{O}(1) = \{\bot, \top\}$. 位象 1 也称为*终位象* (terminal locale).

定义 2.1.8 (位象的点)

定义位象 X 的点为位象的态射 $p\colon 1 \to X$. 记位象 X 的点的集合为 $\mathrm{Pt}(X)$.

在位格的层面, 位象 X 的一个点 $p\colon 1 \to X$ 是保持有限交与任意并的态射 $p^*\colon \mathcal{O}(X) \to \{\bot, \top\}$. 考虑 $\top$ 的原像, 我们得到 $\mathcal{O}(X)$ 的一个*完全素滤子* (completely prime filter). (偏序集中的滤子是关于交封闭的向上封闭子集, 称 F 为完全素滤子是指当 $\bigvee_i U_i \in F$ 时, 至少有一个 U_i 属于 F.)

注 2.1.9

滤子是理想的 “对偶”. 我们有如下类比: 态射 $\mathcal{O}(X) \to \{\bot, \top\}$ 中 $\top$ 的原像是完全素滤子, 类似于环同态 $A \to k$ 的核是素理想 (k 为整环). 位象 X 的点对应 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子, 类似于谱 $\operatorname{Spec} A$ 的点对应环 A 的素理想.

[4] Jacob Lurie 在 *Derived Algebraic Geometry V: Structured Spaces* 第 37 页写道, “It is in some sense coincidental that $\operatorname{Spec} A$ is described by a topological space. What arises more canonically is the lattice of open subsets of $\operatorname{Spec} A$, which is generated by basic open sets of the form U_f. This lattice naturally forms a *locale* ...”
值得一提的是, 构造主义数学青睐这种位象的观点, 因为环的素理想的存在性依赖选择公理. 关于构造主义数学与位象, 我们推荐读者观看 Andrej Bauer 的讲座. `https://www.youtube.com/watch?v=21qPOReu4FI`

对每个元素 $U \in \mathcal{O}(X)$, 规定 $\mathrm{Pt}(X)$ 的子集 $\{p \in \mathrm{Pt}(X) \colon p^*(U) = \top\}$ 为开集, 我们得到了 $\mathrm{Pt}(X)$ 上的一个拓扑. 于是有函子

$$\mathrm{Pt} \colon \mathsf{Loc} \to \mathsf{Top}.$$

命题 2.1.10

拓扑空间与位象之间有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Open}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Loc}. \arrow[l, shift left, "\mathrm{Pt}"] \end{tikzcd}$$

上述伴随远远不是范畴等价; 首先, 从拓扑空间对应的位象中不一定能重构出原来的拓扑空间, 例如所有平凡拓扑对应的位象都是终位象 1.

然而, 对于分离性较好的空间, 其对应的位象确实能重构出这个空间:

定义 2.1.11 (清晰空间)

设 X 为拓扑空间. 若命题 2.1.10 中伴随的单位 $X \to \mathrm{Pt}\,\mathrm{Open}(X)$ 是同胚, 则称 X 为*清晰空间* (sober space[5]). 换言之, 清晰空间的范畴是上述伴随给出的等价的满子范畴 (命题 A.1.3).

命题 2.1.12

Hausdorff (T_2) 空间都是清晰空间, 清晰空间都是 T_0 空间; 而清晰与 T_1 互不蕴涵, 例如 Sierpiński 空间清晰而不 T_1, 无限集上的余有限拓扑 T_1 而不清晰.

另一方面, 从一个位象的所有点的信息也无法重构出这个位象: 下面的例子表明一个位象甚至可能没有点!

例 2.1.13 (没有点的位象的例子: 完备无原子 Boole 代数)

*Boole 代数*是有二元交, 二元并以及补运算 (满足适当条件) 的偏序集; *完备 Boole 代数*是指存在任意交和任意并的 Boole 代数. 由定义, 完备 Boole 代数是位格. 称偏序集中的一个元素为*原子*, 是指除 $\bot$ 以外没有比它更小的元素.

[5] Sober 的原义是清醒, 未喝醉. 直观上一个 sober 空间中的点没有过于 “糊在一起”, 清晰可辨.

对任何完备 Boole 代数 B, 设 P 是 B 的完全素滤子, 则 $\bigwedge P$ 是 B 的原子. 这是因为, 假设 $x < \bigwedge P$, 则 $x \notin P$, 从而由 $\top = x \vee \neg x \in P$, 得 $\neg x \in P$. 这说明 $x < \neg x$, 故 $x = \bot$. 因此, 完备无原子 Boole 代数对应没有点的位象. 下面是两个完备无原子 Boole 代数的例子.

- 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为 σ-有限测度空间, $N \subset \mathcal{A}$ 为零测集的理想, 那么商代数 $\mathcal{A}/N$ 是完备 Boole 代数; 并且当 μ 无原子 (没有正测度的点) 时, $\mathcal{A}/N$ 无原子.
- 设 X 为拓扑空间. 对于开集 $U \subset X$, 定义 $\neg U$ 是 U 的补集的内部. 考虑偏序集
$$\mathrm{RO}(X) = \big\{U \in \mathrm{Open}(X) \mid U = \neg\neg U\big\},$$
称为 X 的*正则开集代数* (regular open algebra). 可以证明 $\mathrm{RO}(X)$ 也是一个完备 Boole 代数[6]. 例如其中的任意并由下式给出:
$$\bigvee_{i \in I} U_i = \neg\neg\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big).$$
若取空间 X 为欧氏空间, 则 $\mathrm{RO}(X)$ 没有原子 (任何正则开集内都有一个更小的正则开集).

子位象

正如许多 “空间” 的概念 (拓扑空间, 向量空间, 概形...) 一样, 位象有一种自然的 “子空间” 的概念; 当然, 子位象不是通过点集, 而是通过开集的代数定义的.

定义 2.1.14 (子位象)

设 X 为位象. 定义 X 的*子位象* (sublocale) Y 如下: $\mathcal{O}(Y)$ 为 $\mathcal{O}(X)$ 在一个保持交与任意并运算的等价关系 (即 $\mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X)$ 的子位格) $\equiv_Y$ 下的商. 直观上, 这个等价关系是说两者与子空间的 “交” 相同.
对于两个子位象 Y, Z, 若 $U \equiv_Z V \Rightarrow U \equiv_Y V$, 则称 Y *包含于* Z.

[6] https://planetmath.org/regularopenalgebra

子位象是位格范畴 Frm 中的正则满射, 即位象范畴 Loc 中的正则单射 (定义 1.3.3).

对于位象 X, $\mathcal{O}(X)$ 的元素可视为其开子空间.

定义 2.1.15 (开子位象)

设 X 为位象, $W \in \mathcal{O}(X)$. 定义 X 的开子位象 W:

$$U \equiv_W V \quad \text{当且仅当} \quad U \cap W = V \cap W.$$

测度与随机性

本小节介绍 Alex Simpson 的文章 [14] 引入的随机序列的位象. 它是 0 和 1 组成的所有可数序列的空间的 "子空间", 但没有任何一个序列属于这个子空间, 因为 "一个确定的序列永远不是随机序列".

首先引入位象上的测度; 这是测度空间的一个推广. 设 X 为位象, 其上的测度是满足如下条件的函数 $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to [0, +\infty]$:

定义 2.1.16 (位象上的测度)

- $\mu(\perp) = 0$,
- $x \le y \Rightarrow \mu(x) \le \mu(y)$,
- $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$,
- 对任意 (可数) 递增序列 $x_1 \le x_2 \le \cdots$, $\mu(\bigvee_i x_i) = \sup_i \mu(x_i)$.

若 $\mu(\top) = 1$, 称 μ 为概率测度.

命题-定义 2.1.17 (随机元素的子位象)

设位象 X 上有测度 μ. 定义 X 的 μ-随机元素的子位象 $\mathrm{Ran}_\mu(X)$ 如下:

$$U \equiv_{\mathrm{Ran}_\mu(X)} V \quad \text{当且仅当} \quad \mu(U \cap V) = \mu(U \cup V).$$

可以验证 $\equiv_{\mathrm{Ran}_\mu(X)}$ 确实是一个等价关系; 直观上, 这个等价关系是相差一个 μ-零测集.

命题 2.1.18

设 X 为清晰空间, 带有测度 μ, 则 $\mathrm{Ran}_\mu(X)$ 的点一一对应于 X 的原子.

[未完成: 解释原子的含义]
[未完成:]

2.2 位象与逻辑

[A locale is a] propositional geometric theory pretending to be a space.

Steven Vickers

建议在阅读本节之前阅读附录 B.1 节, 尤其关注几何逻辑的内容.

我们将建立如下对应.

- 位象 = 命题逻辑理论
- 开集 = 命题
- 点 = 模型

经典命题逻辑与 Lindenbaum 代数

Lindenbaum 代数是用代数方法研究逻辑的工具, 代数–几何对偶. 粗略地说, 它是一个理论中的 "命题的代数"; 在经典逻辑的情形, 它就是 *Boole* 代数, 而对应的 "空间" 是 *Stone* 空间, 两者的对偶由 *Stone* 表示定理描述.

设 Σ 是由若干命题符号 $p, q, r, \cdots$ 组成的符号表[7]. 定义 Sen_Σ 为 Σ 上由 $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \top, \bot$ 组成的公式[8]的集合, 包括 $(p \wedge q) \Rightarrow r$, $p \vee \neg p$, $p \Rightarrow \bot$ 等等.

[7] 在定义 B.1.5 的框架中, 我们可以说 Σ 包括 0 个类型, 0 个函数符号 (固然, 因为 Σ 中没有类型), 以及若干个 0 元关系符号 $p, q, r, \cdots$.

[8] 这里的公式也可以放在定义 B.1.12 的框架中. 注意, 在这个框架中没有等式 $p = q$, 因为 p, q 不是某个类型的项 (Σ 中没有类型), 而是 0 元关系符号.

定义 2.2.1

在经典逻辑中, 对于符号表 Σ 上的命题理论 $\mathbb{T}$ (即一些公理的集合), 定义 $\mathbb{T}$ 的 *Lindenbaum* 代数 $\mathrm{LA}_{\mathbb{T}}$ 为 Σ 上公式的 $\mathbb{T}$-可证等价类构成的 Boole 代数:

$$\mathrm{LA}_{\mathbb{T}} := \mathsf{Sen}_{\Sigma}/{\equiv_{\mathbb{T}}}, \quad \text{其中 } \phi \equiv_{\mathbb{T}} \psi \text{ 当且仅当 } \mathbb{T} \text{ 可证 } \phi \Leftrightarrow \psi.$$

定义 2.2.2 (命题理论之间的态射)

对于两个命题理论 $(\Sigma, \mathbb{T}), (\Sigma', \mathbb{T}')$, 定义态射 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ 为映射 $f\colon \Sigma \to \mathsf{Sen}_{\Sigma'}$, 它自然诱导映射 $\mathsf{Sen}_{\Sigma} \to \mathsf{Sen}_{\Sigma'}$, 使得 f 保持公理, 即 $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}'$. 等价地, f 为 Boole 代数同态 $\mathrm{LA}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{LA}_{\mathbb{T}'}$.

注 2.2.3

命题理论的态射可类比于环同态: 对于两个环 $R = \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/I$ 与 $R' = \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_m]/J$, 环同态 $f\colon R \to R'$ 为映射 $\{x_1, \cdots, x_n\} \to R'$ (它自然诱导映射 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_m]$), 使得 $f(I) \subset J$.

定义 2.2.4 (命题理论的模型)

一个命题理论 $(\Sigma, \mathbb{T})$ 的经典模型 (classical model, 又称解释, interpretation) 是一个函数 $f\colon \Sigma \to \{\top, \bot\}$, 它自然诱导一个映射 $\bar{f}\colon \mathsf{Sen}_{\Sigma} \to \{\top, \bot\}$, 使得 $\bar{f}(\mathbb{T}) \subset \{\top\}$. 记 $\mathbb{T}$ 的经典模型的集合为 $\mathrm{Mod}(T)$.
一般地, 对任意 Boole 代数 A, $(\Sigma, \mathbb{T})$ 的 A-模型是一个映射 $f\colon \Sigma \to A$, 它自然诱导一个映射 $\bar{f}\colon \mathsf{Sen}_{\Sigma} \to A$, 使得 $\bar{f}(\mathbb{T}) \subset \{\top\}$. 记 $\mathbb{T}$ 的 A-模型的集合为 $\mathrm{Mod}_A(\mathbb{T})$.

命题 2.2.5

命题理论 $(\Sigma, \mathbb{T})$ 的 A-模型一一对应于 Boole 代数同态 $\mathrm{LA}_{\mathbb{T}} \to A$.

证明. 设 $f\colon \Sigma \to A$ 为 $\mathbb{T}$ 的 A-模型. 我们需要证明 $\bar{f}\colon \mathsf{Sen}_{\Sigma} \to A$ 将 $\mathbb{T}$-等价的公式对应到相同的元素. 若 $\phi \equiv_{\mathbb{T}} \psi$, 设 $\mathbb{T}$ 对 $\phi \Leftrightarrow \psi$ 的证明用到了公理 $t_1, \cdots, t_n$, 那么由

经典逻辑的性质可知

$$\big(\bar{f}(t_1) \wedge \cdots \wedge \bar{f}(t_n)\big) \leq \big(\bar{f}(\phi) \Leftrightarrow \bar{f}(\psi)\big),$$

但由 f 是 $\mathbb{T}$ 的 A-模型, $\bar{f}(t_1) = \cdots = \bar{f}(t_n) = \top \in A$, 这说明 $\bar{f}(\phi) = \bar{f}(\psi)$. □

注 2.2.6

上述命题可类比于环同态的如下性质: 对于多项式 $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ 以及任何环 A, 集合

$$\big\{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n \mid f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0\,(i = 1, 2, \cdots, m)\big\}$$

一一对应于环同态 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m) \to A$.

注 2.2.7

由上述命题, $\mathbb{T}$ 的经典模型一一对应于 Boole 代数同态 $\mathrm{LA}_{\mathbb{T}} \to \{\top, \bot\}$, 即 $\mathrm{LA}_{\mathbb{T}}$ 的超滤. 回忆位象 X 的点是位格同态 $\mathcal{O}(X) \to \{\top, \bot\}$, 即 $\mathcal{O}(X)$ 的完全素滤子. 两种情形的区别在于逻辑规则: Boole 代数中没有任意并, 而有排中律; 位格中有任意并, 没有排中律.

命题 2.2.8

命题理论的态射 $f\colon (\Sigma, \mathbb{T}) \to (\Sigma', \mathbb{T}')$ 诱导模型的映射 $\mathrm{Mod}_A(\mathbb{T}') \to \mathrm{Mod}_A(\mathbb{T})$.

注意方向的反转 (这是代数–几何对偶的一部分).

定义 2.2.9 (Stone 空间)

称紧的完全不连通 (仅有的连通分支为单点集) Hausdorff 空间为 *Stone* 空间. 等价的定义是紧且完全分离 (任何两个点都能通过把空间分成两个连通分支而分开) 的空间.

命题-定义 2.2.10

对 Boole 代数 B, 在集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B, \{\top, \bot\})$ 上附加一个拓扑, 以 $\{b \in B \mid f(b) = \top\}$ 为开集基; 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B, \{\top, \bot\})$ 是 Stone 空间.

证明. 首先证明 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B, \{\top, \bot\})$ 是紧空间. 事实上, 它是积空间 $\{\top, \bot\}^B$ 的闭子集. 由 Tychonoff 定理, 紧空间的任意乘积是紧空间, 故 $\{\top, \bot\}^B$ 是紧空间, 从而 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(B, \{\top, \bot\})$ 是紧空间. [未完成:] □

命题 2.2.11 (Stone 对偶)

Boole 代数与 Stone 空间之间存在范畴等价

$$\mathsf{BooleAlg} \underset{\mathrm{Hom}_{\mathsf{BooleAlg}}(-,\{\top,\bot\})}{\overset{\mathrm{Hom}_{\mathsf{StoneSp}}(-,\{\top,\bot\})}{\rightleftarrows}} \mathsf{StoneSp}.$$

证明. □

[未完成:]

第 3 章　Grothendieck 猫猫与空间的概念

Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les “espaces” et “variétés” en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d’espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels “espaces”, déjà familiers à tous.

[C]e qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses “points” ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu’ils forment.

Grothendieck, Récoltes et Semailles[1]

---

[1]这两段评注出自 Grothendieck 的自传 “收获与播种”.

Leray 引入的层的观点和语言使我们以新的视角看待各种 “空间” 和 “流形”. 然而, 它们并未触及空间的概念本身, 只是用新的眼光更加精细地理解那些传统的, 人们早已熟知的空间.

拓扑空间中真正重要的不是它的 “点” 或点集的子集, 以及点之间的邻近关系等等, 而是这个空间上的层, 以及它们构成的范畴.

猫猫的概念最早由 Grothendieck 提出. 他将其命名为 topos[2], 意在表达这个概念是能够承载拓扑与几何直观的最广泛的概念.

拓扑空间 X 上的层构成一个猫猫 $\mathrm{Sh}(X)$, 称为*层猫猫* (sheaf topos). 这个猫猫很大程度上反映了空间 X 的信息. Grothendieck 将层的概念由拓扑空间推广到了最一般的语境, 由此得到一种极为广泛的空间概念; 他将其命名为*景* (site). 景上的层构成的范畴即是所谓 *Grothendieck 猫猫*.

Grothendieck 的想法是, 一个猫猫不一定来自普通的拓扑空间, 但由于它与 (拓扑空间上的) 层范畴极为相似的性质, 我们可以设想它是一个假想的空间上的层范畴, 即其中的对象是这个假想的空间之上的层. 这个想法也可视为代数–几何对偶的一例: 正如 Gelfand 考虑 Hausdorff 空间上的复值连续函数, Grothendieck 考虑空间上的 "集合值连续函数".

我们从层的一般概念讲起.

3.1 预层

定义 3.1.1 (小范畴上的预层)

设 C 是小范畴. 定义 C 上的*预层* (presheaf) 是 C^{op} 到 Set 的函子. 记 C 上的预层范畴为 $\widehat{\mathsf{C}} := \mathsf{Fun}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.

预层 $F\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为一个假想的空间, 可用 C 的对象来探测 (probe). 我们对这个 "空间" 仅有的了解, 是 C 的对象 c 到 F 的假想态射 "$c \to F$" 的集合 $F(c)$, 以及态射 $d \to c$ 与假想态射 "$c \to F$" 的复合 $d \to c \to F$, 这给出集合的映射 $F(c) \to F(d)$.

由 C 的对象 c, 可得 C 上的预层 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, c)$. 这事实上是 C 到 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的嵌入.

定义 3.1.2 (米田嵌入)

小范畴 C 的*米田嵌入*是指函子 $よ\colon \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}$, $c \mapsto よ(c) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, c)$. 米田嵌入的像 $よ(c)$ 称为*可表函子* (representable functor).

[2]希腊文, "位置"

注 3.1.3

米田嵌入也可定义为函子 $\mathrm{Hom}\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{C}\to\mathsf{Set}$ 对应的函子 $\mathsf{C}\to\mathsf{Fun}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{Set})$. 这是因为 $\widehat{\mathsf{C}}$ 是 "范畴的范畴" 中的指数对象.

对于预层 $F\in\widehat{\mathsf{C}}$, 前面提到的 c 到 F 的 "假想态射" 可赋予真实的含义, 它就是 よ(c) 到 F 的态射 (自然变换). 这样一个自然变换由 $\mathrm{id}_c\in$ よ$(c)(c)$ 的像 ($F(c)$ 的元素) 唯一决定, 因此有如下的结论.

命题 3.1.4 (米田引理)

对任意 $X\in\widehat{\mathsf{C}}$, 有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\text{よ}(c),F)\simeq F(c).$$

注 3.1.5

米田引理在逻辑上是平凡的; 它带给我们的观点, 即 C 的对象 c 可等同于函子 よ(c), 比命题本身更重要. 后面我们将大量使用这种观点.

关于米田引理的更多应用, 以及预层范畴的更多性质, 见附录 A.2 节.

常见的预层范畴

例 3.1.6 (集合)

记 $\mathsf{1}$ 为仅有一个对象和一个态射的范畴. $\mathsf{1}$ 上的预层范畴 $\widehat{\mathsf{1}}=\mathsf{Set}^{\mathsf{1}^{\mathrm{op}}}$ 等同于集合范畴 Set. 它也可视为单点空间上的层范畴; 它在猫猫中扮演的角色等同于一个点在拓扑空间中扮演的角色.

例 3.1.7 (单纯集)

令范畴 Δ 为有限全序集 $[0],[1],[2],\cdots$ 与保序映射构成的范畴, 其中 $[n]=\{0,1,\cdots,n\}$, 称映射 $f\colon[n]\to[m]$ 为保序映射是指当 $i\leq j$ 时 $f(i)\leq f(j)$. 我们将 $[n]$ 想象为 n 维单纯形. 称范畴 Δ 为*单纯范畴* (simplicial category). Δ 上的预层称为*单纯集* (simplicial set), 也就是可用单纯形来探测的空间. 记

单纯集范畴为 $\mathsf{sSet} = \widehat{\Delta} = \mathsf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.
对于单纯集 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $X([n])$ 表示 X 中 n 维单形的集合, 其中含有退化的单形. 记米田嵌入 よ$([n])$ 为 Δ^n, 米田引理告诉我们

$$X([n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\Delta^n, X),$$

因此如上关于 $X([n])$ 的解释是准确的.

例 3.1.8 (有向图)

有向图可用类似于单纯集 (例 3.1.7) 的方式定义. 考虑范畴

$$\mathsf{C} = \left\{ [0] \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} [1] \right\},$$

其中 $s, t\colon [0] \to [1]$ 分别将 $0 \in [0]$ 映射到 $0 \in [1]$ 和 $1 \in [1]$. 那么 C 上的预层 $X\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为有向图: $X([0])$ 是有向图的顶点集, $X([1])$ 是有向图的边集; 映射 $X(s), X(t)\colon X([1]) \to X([0])$ 将有向图的边对应到其起点与终点.

例 3.1.9 (G-集)

设 G 是群. 定义范畴 $\mathsf{B}G$ 为仅有一个对象的范畴, 这个对象到自身的态射集为 G.
$\mathsf{B}G$ 上的预层是函子 $(\mathsf{B}G)^{\mathrm{op}} \simeq \mathsf{B}(G^{\mathrm{op}}) \to \mathsf{Set}$, 等同于具有 G^{op}-左作用即 G-右作用的集合, 也称为 G-集或 G 的表示. 记 G-集的范畴为 $G\mathsf{Set}$.

范畴上预层的概念来自拓扑空间上的预层. 设 X 为拓扑空间, 记 $\mathrm{Open}(X)$ 为 X 的开集在包含关系下构成的范畴.

定义 3.1.10 (拓扑空间上的预层)

拓扑空间 X 上的*预层*是 $\mathrm{Open}(X)$ 上的预层, 也即函子 $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 记 X 上的预层范畴为 $\mathrm{Presh}(X)$.

注 3.1.11

需要注意的一点是, 拓扑空间 X 到范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 的对应是反变的, 也即对连续映射 $f\colon X \to Y$, 我们有反方向的函子 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$, 将开子集 $U \subset Y$ 对应到 $f^{-1}(U) \subset X$.

下面我们说明小范畴 C 上的预层范畴 $\widehat{\mathsf{C}}$ 是一个猫猫.

命题 3.1.12 (预层范畴完备且余完备)

$\widehat{\mathsf{C}}$ 是完备 (complete) 且余完备 (cocomplete) 的, 也即具有一切 (小) 极限与余极限.

证明. 预层的极限可 "逐点" 计算: 设 $F\colon I \to \widehat{\mathsf{C}}, i \mapsto F_i$ 是任意图表, 那么其极限为

$$\big(\lim_I F_i\big)(c) = \lim_I F_i(c),$$

余极限类似. □

特别地, 预层范畴 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的终对象 (空图的极限) 是将所有对象 c 对应到 Set 的终对象 1 的预层, 而始对象 (空图的余极限) 将所有对象对应到 Set 的始对象 $\varnothing$. 预层的积与和即是逐点的积与和.

命题 3.1.13

$\widehat{\mathsf{C}}$ 是积闭范畴.

证明. 对 $X, Y \in \widehat{\mathsf{C}}$, 我们不能以 $Y^X(c) = Y(c)^{X(c)}$ 来定义指数对象 Y^X, 因为这个构造没有函子性. 一种可行的思路如下. 假设指数对象 Y^X 存在, 即有 (关于 Z 的) 自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(Z, Y^X) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(Z \times X, Y).$$

代入 $Z = よ(c)$, 由米田引理便得到 (关于 c 的) 自然同构

$$Y^X(c) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(よ(c) \times X, Y),$$

这已经确定了函子 Y^X. 下面验证这个函子确实满足指数对象的条件.

首先给出取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$, 也即自然的映射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(よ(c) \times X, Y) \times X(c) \to Y(c).$$

对 $\theta \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(よ(c) \times X, Y)$, 考虑 $\theta_c \colon よ(c)(c) \times X(c) \to Y(c)$, 代入 id_c 便得到映射 $X(c) \to Y(c)$.

□

筛与预层范畴中的子对象

本节的目标是如下命题.

命题 3.1.14

$\widehat{\mathsf{C}}$ 具有子对象分类子.

首先我们描述 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中的子对象.

命题-定义 3.1.15 (子函子)

$\widehat{\mathsf{C}}$ 中的态射 $Y \to X$ 是单射, 当且仅当对每个对象 c, 映射 $Y(c) \to X(c)$ 都是子集, 且对每个态射 $c \to d$, 映射 $Y(d) \to Y(c)$ 都是 $X(d) \to X(c)$ 的限制; 此时也称 $Y \to X$ 为*子函子* (subfunctor).

证明. 由单射的拉回刻画 (命题 1.3.1) 以及 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中极限的逐点计算 (命题 3.1.12) 即证. □

筛的概念可帮助描述预层范畴的子对象分类子.

定义 3.1.16 (筛)

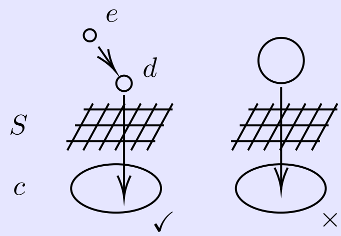
范畴 C 的对象 c 上的一个*筛* (英 sieve, 法 crible) 是指 C 中一族指向 c 的箭头 $S = \{f \colon d \to c\}$, 构成 C 的*右理想*; 也即对任意 $f \in S$ 与 C 中任意箭头 g, 只要 fg 可定义, 就有 $fg \in S$.

对于两个筛 R, S, 若 $R \subset S$, 则称 R 比 S 更细, 或 R 是 S 的一个*细化* (refinement).

设 R 是一族指向 c 的箭头. 定义 R *生成*的筛为 $\{e \to d \to c \mid (d \to c) \in R\}$, 也即包含 R 中所有箭头的最细的筛.

注 3.1.17 (筛的直观)

筛是一种能把大的东西挡住, 让小的东西通过的工具. 想象 S 的元素为可以 "通过" S 的箭头. 若 $d \xrightarrow{f} c$ 可以 "通过" S, 那么 $e \xrightarrow{g} d \xrightarrow{f} c$ 比 $d \xrightarrow{f} c$ "小", 从而它也可以 "通过" S.



一个筛越细, 能 "通过" 它的东西就越少, 这解释了细化的含义.

例 3.1.18 (覆盖产生筛)

设 X 为拓扑空间, $\{U_i\}$ 是其中开集 V 的一个开覆盖. 那么

$$\{W \subset V \mid \exists i, W \subset U_i\}$$

构成 $\mathrm{Open}(X)$ 中 V 上的一个筛. 直观上每个 U_i 是筛上的一个 "洞", 比它小的对象能 "通过" 这个筛.

命题 3.1.19 (筛与子函子)

范畴 C 的对象 c 上的筛自然地一一对应于 よ(c) 的子函子.

证明. 设 S 是 c 上的筛, 那么

$$X(d) = \{f : d \to c \mid f \in S\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(d, c) = \text{よ}(c)(d)$$

构成 よ(c) 的子函子. 设 $X \to$ よ(c) 为子函子, 那么

$$S = \{f : d \to c \mid f \in X(d)\}$$

是 c 上的筛. 很明显, 这两个对应是互逆的. □

注 3.1.20

若将 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的对象称作 C 的 "广义对象", 那么 よ(c) 的子函子可称作 c 的 "广义子对象".
C 的 "广义对象" X 的子对象, 根据命题 3.1.15 的描述, 也可视为 X 上的 "筛".

例 3.1.21 (覆盖产生的筛对应的子函子)

继续例 3.1.18, 设 S 为覆盖 $\{U_i\}$ 生成的筛对应的 よ(V) 的子函子, 那么下图是余等化子.

$$\textstyle\coprod_{i,j} よ(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \coprod_i よ(U_i) \longrightarrow S \tag{3.1}$$

这是因为, 由 S 的定义, 对 $W \in \mathrm{Open}(X)$, 若存在 i, $W \subset U_i$ 则 $S(W)$ 是单元集; 否则 $S(W)$ 是空集. 由此可知下图是集合范畴中的余等化子.

$$\textstyle\coprod_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(W, U_i \cap U_j) \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(X)}(W, U_i) \to S(W)$$

而预层的余极限是 "逐点" 的, 于是得 (3.1).
对 X 上的任意预层 F, 以 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(-, F)$ 作用于 (3.1), 可知下图是集合范畴中的等化子.

$$\textstyle\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, G) \longrightarrow \prod_i G(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} G(U_i \cap U_j) \tag{3.2}$$

因此态射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, F)$ 表达了预层 F 关于覆盖 $\{U_i\}$ 的下降资料 (descent data), 由覆盖 $\{U_i\}$ "下降" 到 V. 若 F 为层, 就应该有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(S, F) \simeq F(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Presh}(X)}(よ(V), F).$$

例 3.1.22 (极大筛)

所有指向 c 的箭头的集合称为极大筛, 也即最粗的筛. 它对应 よ(c) 的子对象 よ(c) 自身 (よ(c) 到自身的恒等态射). 注意, c 上的一个筛是极大筛当且仅当它包含 id_c.

现在我们给出命题 3.1.14 的证明.

证明. 假设 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中存在子对象分类子 Ω, 那么由米田引理, 有自然同构

$$\Omega(c) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(よ(c), \Omega) \simeq \mathrm{Sub}_{\widehat{\mathsf{C}}}(よ(c)),$$

即

$$\Omega(c) = \{c \text{ 上的筛}\},$$

这便确定了函子 Ω. 下面验证这个函子确实满足 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中子对象分类子的条件.

定义态射 $\top\colon 1 \to \Omega$, 对每个对象 c 选出 $\Omega(c) = \mathrm{Sub}_{\widehat{\mathsf{C}}}(よ(c))$ 中的子对象 $よ(c)$ 自身, 也即 c 上的极大筛.

下面验证子对象分类子的条件. 设 $Y \to X$ 是 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中的子对象. 定义态射 $\chi\colon X \to \Omega$, 将 $x \in X(c)$ 对应到 c 上的筛

$$\chi(x) = \big\{f\colon d \to c \mid X(f)(x) \in Y(d)\big\}.$$

注意 $\chi(x)$ 是极大筛当且仅当 $\mathrm{id}_c \in \chi(x)$, 也即 $x \in Y(c)$, 所以子对象 $Y \to X$ 是如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\square$

综合上述论证, 我们得到

命题 3.1.23

$\widehat{\mathsf{C}}$ 是一个猫猫.

例 3.1.24 (G-集)

例 3.1.9 介绍了 G-集范畴, 即 $\mathsf{B}G$ 上的预层范畴. 由于 $\mathsf{B}G$ 只有一个对象且态射均为自同构, 其上仅有两个筛, 空集与极大筛.

因此, G-集范畴的子对象分类子 Ω 是二元集合 $\{\top, \perp\}$, 其上带有 G 的平凡作用. 事实上, 一个 G-集 X 的子对象 Y 是其中 G-作用下封闭的子集. 其对应的特征函数 $X \to \{\top, \perp\}$ 就是子集 Y 的特征函数.

3.2 层与景

拓扑空间上的*层*是满足“粘合”条件的预层; 一个开集上的截面[3]可由这个开集的任何一个覆盖上一族相容的截面唯一决定.

定义 3.2.1 (拓扑空间上的层)

拓扑空间 X 上的*层* (sheaf) 是满足如下条件的预层 F: 对任意开集 $U \subset X$, 任意覆盖 $U = \bigcup_i U_i$, 以及任意一组相容的元素 $(s_i \in F(U_i))_{i\in I}$, 存在唯一的 $s \in F(U)$ 满足 $s|_{U_i} = s_i \,\forall i \in I$. 其中相容是指

$$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} \ (\forall i, j \in I), \tag{3.3}$$

Grothendieck 意识到, 层的概念所需的关键信息是一个对象 U 何时被一族进入 U 的态射 (甚至不一定是 U 的子对象) 所*覆盖*.

从覆盖到 Grothendieck 拓扑

本小节有许多的定义, 在读者看来这些定义可能有些冗余. 这或许是历史的遗留, 但每个定义有各自的长处.

定义 3.2.2 (覆盖结构)

设范畴 C 具有拉回. C 上的一个*覆盖结构* (coverage) T 是如下结构: 对每个对象 c 指定一个集合 $T(c)$, 其元素为态射族 $\{f_i : c_i \to c\}_{i\in I}$, 称为 c 的 *T-覆盖族* (covering family), 满足

- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i : c_i \to c\}_{i\in I} \in T(c)$, $g : d \to c$, 则 $\{g^*(f_i) : d_i \to d\}_{i\in I} \in T(d)$.

对于两个覆盖结构 T, T', 若 T-覆盖族都是 T'-覆盖族, 则称 T' *较细* (fine).

对于拓扑空间的开集范畴, 拉回下的稳定性相当于若一族开集覆盖了 U, 那么它们也覆盖了 U 的任何子集.

[3] 预层 F 在 U 上的*截面* (section) 就是指 $F(U)$ 的元素. 这个术语来自于几何.

注 3.2.3

当 C 不存在拉回时, “拉回下的稳定性” 可改为: 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in T(c)$, $g\colon d \to c$, 则存在 $\{h_j\colon d_j \to d\}_{j\in J} \in T(d)$, 使得每个 gh_j 都穿过某个 f_i.

定义 3.2.4 (关于态射族的层条件)

设 F 是范畴 C 上的预层. 设 $M = \{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$ 是 C 中的一族态射. 称 F 满足关于 M 的*层条件*, 是指对任意一组相容的元素 $(s_i \in F(c_i))_{i\in I}$, 存在唯一的 $s \in F(c)$ 满足 $F(f_i)(s) = s_i \forall i \in I$. 其中, 一组元素 $(s_i \in F(c_i))_{i\in I}$ 相容是指对任意态射 $f\colon d \to c_i$, $g\colon d \to c_j$, 有 $F(f)(s_i) = F(g)(s_j) \in F(d)$.
在 C 具有拉回的条件下, 层条件可简洁地表述为如下等化子,

$$F(c) \longrightarrow \prod_i F(c_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(c_i \times_c c_j).$$

设 $S \to よ(c)$ 是 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$ 生成的筛对应的子函子 (命题 3.1.19), 那么一组相容的元素等同于自然变换 $S \to F$, 从而层条件等价于自然变换 $S \to F$ 唯一地穿过 $よ(c)$, 也即如下映射是同构.

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(よ(c), F) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(S, F)$$

对比例 3.1.21 中的式 (3.2).

定义 3.2.5 (关于覆盖的层条件)

设 F 是范畴 C 上的预层. 设 T 是范畴 C 上的覆盖结构. 称 F 满足关于 T 的*层条件*就是指 F 满足关于其中每个态射族的层条件.

注 3.2.6

由定义, 覆盖结构越细, 对应的层条件就越强, 层就越少.

定义 3.2.7 (层范畴)

设 T 是范畴 C 上的覆盖结构. 定义*层范畴* $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, T)$ 为 $\widehat{\mathsf{C}}$ 中满足关于 T 的层条件的预层构成的满子范畴.

“覆盖结构” 是从 *Grothendieck 拓扑*的概念中分离出的一个比较重要的条件. Grothendieck 拓扑的完整概念如下.

定义 3.2.8 (Grothendieck 拓扑)

范畴 C 上的 *Grothendieck 拓扑* (或 Grothendieck 覆盖结构) 是如下结构: 对每个对象 c 指定一个集合 $T(c)$, 其元素为 c 上的筛, 称为*覆盖筛* (covering sieve), 满足

- (极大筛) 任何对象 c 上的极大筛 (定义 3.1.22) 属于 $T(c)$;
- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in T(c)$, $g\colon d \to c$, 则 $\{g^*(f_i)\colon d_i \to d\}_{i\in I} \in T(d)$.
- (传递性) 若 $R \in T(c)$, S 是 c 上的另一个筛, 使得对任意 $(f\colon d \to c) \in R$, 都有 $f^*S \in T(d)$, 那么 $S \in T(c)$.

对于拓扑空间的开集范畴, “极大筛是覆盖” 相当于任何开集 U 都覆盖了自己; 传递性相当于若一族开集覆盖了 U 的每个局部, 那么它们也覆盖了 U.

注 3.2.9

Grothendieck 拓扑的定义中, 要求覆盖族是筛且满足 “极大筛” 和 “传递性”, 这些都是饱和性条件 (saturation condition), 我们随时可以关于这些条件 “取闭包”; 而有没有这些条件对层条件不产生任何影响:

- (筛) 一族态射 $M = \{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$ 的层条件等价于其生成的筛的层条件;
- (极大筛) 极大筛的层条件是平凡的 (一族态射只要包含了 id_c, 其层条件就是平凡的);
- (传递性) 若预层 F 满足 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$ 的层条件, 且对每个 i 都有一族态射 $\{h_{ij}\colon c_{ij} \to c_i\}_{j\in I_i}$ 使得 F 满足其层条件, 那么 F 也满足复合态射族 $\{f_i \circ h_{ij}\colon c_{ij} \to c\}_{i\in I, j\in I_i}$ 的层条件. (见 Elephant [6] C2.1 节引理 7.)

只有 “拉回下的稳定性” 是核心的, 这就是为什么我们分离出覆盖结构的概念.

命题-定义 3.2.10 (覆盖生成的 Grothendieck 拓扑)

设范畴 C 上有覆盖结构 T. 那么存在唯一的 Grothendieck 拓扑 J 给出与 T 相同的层条件, 称为 T 生成的 Grothendieck 拓扑. 具体地,

$$J(c) = \{c \text{ 上的筛 } S \mid \cdots\}.$$

[未完成:]

下面这个概念也被某些文献用作 Grothendieck 拓扑的定义.

定义 3.2.11 (Grothendieck 拓扑基)

设范畴 C 有拉回. 其上的一组 *Grothendieck 拓扑基* (basis for a Grothendieck topology, 又称 Grothendieck 预拓扑, pretopology) K 是如下结构: 对每个对象 c 指定一个集合 $K(c)$, 其元素为态射族 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I}$, 满足

- (恒等) $\{\mathrm{id}_c\} \in K(c)$;
- (拉回下的稳定性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in K(c)$, $g\colon d \to c$, 则 $\{g^* f_i\}_{i\in I} \in K(d)$;
- (传递性) 若 $\{f_i\colon c_i \to c\}_{i\in I} \in K(c)$, 且对每个 $i \in I$, 有 $\{g_{ij}\colon d_{ij} \to c_i\}_{j\in I_i} \in K(c_i)$, 则 $\{f_i \circ g_{ij}\colon d_{ij} \to c\}_{i\in I, j\in I_i} \in K(c)$.

定义 3.2.12 (基生成的 Grothendieck 拓扑)

Grothendieck 覆盖基 K 生成的 Grothendieck 拓扑 J 如下:

$$J(c) = \{c \text{ 上的筛 } S \mid \exists R \in K(c), R \subset S\}.$$

注 3.2.13

引入覆盖结构以及 Grothendieck 拓扑基等概念的目的大约是

- 方便给出 Grothendieck 拓扑 (不需要给出所有的筛);
- 方便验证层条件 (不需要对所有的筛验证).

而 Grothendieck 拓扑的优势在于

- 唯一性 (命题 3.2.10);
- 与后文介绍的 Lawvere–Tierney 拓扑 (定义 3.2.24) 的关系.

定义 3.2.14 (景)

带有 Grothendieck 拓扑的 (小) 范畴称为景.

注意. 为了表达的方便, 我们也将用覆盖结构或 Grothendieck 拓扑基来代指其生成的 Grothendieck 拓扑.

如下定义出自 SGA 4 II.2 节 [1].

定义 3.2.15 (典范 Grothendieck 拓扑)

对于范畴 C 上的 Grothendieck 拓扑 J, 若以下两个等价条件之一成立, 则称之为*次典范* (subcanonical) Grothendieck 拓扑:

- 每个 J-覆盖筛 $S = \{f_i \colon c_i \to c\}$ 都构成余极限余锥 (colimit cocone), 使得 c 成为 c_i 的余极限; 这样的筛称为*有效满* (effective-epimorphic) 的;
- 每个可表函子 よ(c) 都是层.

这意味着我们可将 C 通过米田嵌入视为 $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J)$ 的满子范畴. 定义*典范 Grothendieck 拓扑*是最细的次典范 Grothendieck 拓扑.

常见的景

例 3.2.16

每个范畴 C 都构成一个平凡的景, 其上的覆盖结构是空的, 也即没有覆盖. 由定义, 这个景上的层是 C 上的预层.

例 3.2.17 (拓扑空间)

拓扑空间 X 的开集范畴 $\mathrm{Open}(X)$ 构成一个景, 其上的覆盖结构是*开覆盖*. 每个可表函子 よ(U) 都是层, 即这个覆盖结构定义的 Grothendieck 拓扑是次典范的.

例 3.2.18 (拓扑空间范畴)

"拓扑空间范畴" 上有一个由*开覆盖*确定的覆盖结构. 严格地说, 设 T 是一个小的拓扑空间范畴[4], 对于 $X \in \mathsf{T}$ 令集合 $K(X)$ 由 X 的所有开覆盖 $\{f_i\colon U_i \to X\}_{i\in I}$ 组成.

例 3.2.19 (位象)

对于位象 A, 将其视为范畴, 我们定义 A 上的覆盖结构: 当一族态射 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 满足 $U = \bigvee_{i\in I} U_i$ 时, 称其为覆盖族. 由此, 每个位象都是一个景.

例 3.2.20 (欧氏空间)

考虑范畴 C, 其中的对象为 $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \cdots$, 态射为光滑映射. 称 $\mathbb{R}^n$ 的开覆盖 $\bigcup_i U_i$ 为*好覆盖* (good cover) 是指 U_i 以及任意有限个 U_i 的交都同胚于 $\mathbb{R}^n$. 这给出了范畴 C 上的一个覆盖结构, 称之为欧氏空间景. 欧氏空间景上的层称作*光滑空间* (smooth space). 光滑空间是流形的推广, 是*广义微分几何* (diffeology) 的研究对象.

例 3.2.21 (Zariski 景)

考虑*有限表现* (finitely presented) 环 (形如 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ 的环) 的范畴 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}$. 这是一个小范畴[5]. 我们考虑其对偶范畴 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$, 也即仿射概形的范畴. 对于环 A, 我们记 $\operatorname{Spec} A \in \mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 为 A 在对偶范畴中的化身.
回忆, Zariski 拓扑的标准开集 (但不一定是全部的开集) 形如 $\operatorname{Spec} A[f^{-1}] \to \operatorname{Spec} A$, 也即局部化的环同态 $A \to A[f^{-1}]$. 若 n 个元素 $f_1, \cdots, f_n \in A$ 生成了

[4] 拓扑空间范畴 Top 不是小范畴, 因为每个集合都能配上离散拓扑成为一个拓扑空间. 但是我们可以考虑其中小的子范畴, 如可分 Hausdorff 空间范畴 (回忆, 可分空间是指有可数稠密子集的空间).

单位理想 (1) ($f_1, \cdots, f_n$ 构成了 Spec A 上的 "单位分解"), 则 Spec $A[f^{-1}] \to$ Spec A 构成开覆盖. 这定义了 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上的一个覆盖结构, 这便是 *Zariski* 景. Zariski 景是综合代数几何 (synthetic algebraic geometry) 的基础.
Zariski 景上的结构层 (structure sheaf) 是遗忘函子 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}} \to \mathsf{Set}$. [未完成: 这个层的意义] 这个层与综合微分几何中的 "直线" 有关 (定义 4.5.17).

例 3.2.22 (平展景)

(本例需要一些背景知识.) 平展景是 "拓扑空间上开集范畴" 在代数几何中的类比. 设 X 为概形, 考虑概形范畴的俯范畴 $\mathsf{Sch}_{/X}$ 中由平展映射 $U \to X$ 构成的满子范畴 $\mathsf{Sch}_{/X,\text{ét}}$. 这称作 X 上的 (小) 平展景 (small étale site).

Lawvere–Tierney 拓扑

回忆 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的子对象分类子 Ω 是 $\Omega(c) = \{c \text{ 上的筛}\}$. 因此一个由筛组成的覆盖结构也可由 Ω 的一个子函子表示 (注意函子性是由拉回稳定性提供的).

命题 3.2.23

设 C 为范畴, 函数 J 给每个对象 c 赋予一族筛 $J(c)$, 那么 J 满足传递性 (定义 3.2.8) 当且仅当 J 是 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的子对象分类器 Ω 的子函子.

而由子对象分类子的定义, 子函子 J 进一步对应一个态射 $j\colon \Omega \to \Omega$. 具体地, 对 C 的对象 c,

$$j_c\colon \Omega(c) \to \Omega(c), S \mapsto \{f\colon d \to c \mid f^*S \in J(d)\}.$$

这个态射可以承载 Grothendieck 拓扑的所有信息.

[未完成:]

[5] 严格地说, 它是本质小 (essentially small) 范畴, 也即它的对象模掉同构之后构成一个集合.

定义 3.2.24 (Lawvere–Tierney 拓扑)

猫猫上的 *Lawvere–Tierney* 拓扑是一个态射 $j\colon \Omega \to \Omega$, 满足如下条件:

- $j \circ \top = \top$;
- $j \circ j = j$;
- j 保持 $\wedge$, 即 $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$. (等价的条件是 j 保持 Ω 上内蕴的序关系.)

注 3.2.25

Lawvere 指出 Lawvere–Tierney 拓扑 j 应视为一种模态. 逻辑学中, 模态是将命题变为命题的算子 (在猫猫中即态射 $\Omega \to \Omega$), 表达某命题以某种特定方式成立. 在这里, 模态 j 表达的是某命题*在局部上*成立 (即该命题在某个覆盖的每一部分上成立; 例如, 流形是*局部上*同胚于欧氏空间的空间). 条件 $j \circ j = j$ 表示 “p 在局部上在局部上成立” 等同于 “p 在局部上成立”. 条件 $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$ 表示 “$p \wedge q$ 在局部上成立” 等同于 “p, q 都在局部上成立”. 参见 MSE 回答 [10].

由米田引理, 态射 $\Omega \to \Omega$ 等同于自然变换 $\mathrm{Sub} \to \mathrm{Sub}$, 因此

命题 3.2.26 (“闭包”)

Lawvere–Tierney 拓扑 j 等同于每个对象 X 的子对象格 $\mathrm{Sub}(X)$ 上的一个运算[6] $A \mapsto \overline{A}$, 其定义为 $\chi_{\overline{A}} = j \circ \chi_A$ (如下图), 且满足如下条件:

- (函子性) 对态射 $f\colon Y \to X$, 有 $\overline{f^* A} = f^* \overline{A}$;
- $A \subset \overline{A}$;
- (幂等) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
- (保序) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ (或 $A \le B \Rightarrow \overline{A} \le \overline{B}$).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, hook] & & 1 \arrow[dr] \arrow[dd, "\top"] & \\
& \overline{A} \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & 1 \arrow[dd, "\top"] \\
X \arrow[rr, "\chi_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \Omega \arrow[dr, "j"] & \\
& X \arrow[rr, "\chi_{\overline{A}}"] & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

因此 Lawvere–Tierney 拓扑也称作*万有闭包运算* (universal closure operation).

定义 3.2.27 (稠密子对象)

对于子对象 $A \hookrightarrow X$, 若 $\overline{A} = X$, 则称之为*稠密子对象*.

定义 3.2.28 (关于 Lawvere–Tierney 拓扑的层)

设 j 是猫猫 C 上的 Lawvere–Tierney 拓扑, F 是 C 的对象. 若所有稠密子对象 $A \hookrightarrow X$ 都诱导同构

$$\mathrm{Hom}(X, F) \to \mathrm{Hom}(A, F),$$

则称 F 为 *j-层*. 一言以蔽之, 层是关于所有稠密单射的*局部对象* (local object).

j-层是层条件 (3.2.4) 的推广.

局部化

[未完成: 顺序?]
还有第三种给出 “范畴上的拓扑” 的方式, 称为局部化.

定义 3.2.29 (自反局部化)

对于自反子范畴 (A.4.10)

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D} \arrow[r, hook, shift right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{C}, \arrow[l, shift right, "a"'] \end{tikzcd}$$

若左伴随 a 保持有限极限, 则称之为*自反局部化* (reflective localization), 简称*局部化*.

注 3.2.30 (局部化的概念)

一般的局部化 $\mathsf{C} \to \mathsf{C}[W^{-1}]$ 是指使一族态射 W 变得可逆的万有过程; 此处的局部化是其特例 (令 W 为所有被 a 变为同构的态射).
回忆筛是预层范畴中的单射 (3.1.19). 指定一些筛是*覆盖筛*, 可以看作指定一些单射实际上是 “满射”. “局部化” 的过程正是强行使这些单射变成满射.

[6]不幸的是, 这个闭包的概念与拓扑学上的闭包不是一回事.

[未完成: 层化, SGL V.3 定理 1]

层范畴中的子对象

回忆预层范畴 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的子对象分类子为 $\Omega(c) = \{c \text{ 上的筛}\}$, 因为 $\text{よ}(c)$ 的子对象等同于 c 上的筛. 固定范畴 C 上的 Grothendieck 拓扑 J, 本小节研究 $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J)$ 的子对象 (分类子).

层范畴中的子对象放在预层范畴中仍是子对象. 这不是显然的, 我们采用如下的思路来证明这个事实. 由单射的拉回刻画 (命题 1.3.1), 我们只需证明*层的拉回也是预层的拉回*.

命题 3.2.31

在预层的拉回图 $\begin{matrix} W & \to & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{matrix}$ 中, 若 X, Y, Z 为层, 则 W 为层.

证明. 设 $S \in J(c)$ 是任意覆盖筛, 视为 $\text{よ}(c)$ 的子函子. 分别以 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(\text{よ}(c), -)$, $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(S, -)$ 作用于上述拉回图 (注意这类函子保持极限), 得到立方体

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\text{よ}(c), W) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}(\text{よ}(c), Z) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Hom}(\text{よ}(c), X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}(\text{よ}(c), Y) \arrow[dd] \\
\mathrm{Hom}(S, W) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(S, Z) \arrow[dr] & \\
& \mathrm{Hom}(S, X) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}(S, Y),
\end{tikzcd}$$

其上下两面均为拉回图. 由层条件的等价表述 (定义 3.2.4), 立方体的竖直方向箭头有三个为同构, 从而第四个也为同构, 这证明了 W 是层. □

上述论证中的拉回图可替换为任何极限. 因此有

命题 3.2.32

层范畴 $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J)$ 存在任意极限, 且极限等同于作为预层的极限.

回到正题, 我们证明了

命题 3.2.33

层范畴中的子对象即是预层范畴中的子对象.

假设 $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J)$ 有子对象分类子 Ω_J, 那么 $\Omega_J(c)$ 等同于よ(c)

命题 3.2.34

设 F 是 (C, J) 上的层.

[未完成: **J-closed**]

层范畴中的指数对象

3.3 层与平展空间

在本节中我们暂时将考虑的范围限制在拓扑空间.

固定拓扑空间 X. 称俯范畴 (定义 1.1.26) Top/X 的对象, 即映射 $p\colon Y \to X$, 为 X 上的空间或 X 上的丛[7].

定义 3.3.1 (丛的截面)

对于 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 定义其在开集 $U \subset X$ 上的*截面*的集合为

$$\Gamma_p(U) = \big\{ s\colon U \to Y \mid ps = i\colon U \to X \big\}.$$

对于子开集 $V \subset U$, 有限制映射 $\mathrm{res}\colon \Gamma_p(U) \to \Gamma_p(V)$, 这使得 Γ_p 成为 X 上的预层.

命题-定义 3.3.2 (截面层)

对于 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 上面定义的 Γ_p 构成 X 上的一个层, 称为丛 p 的*截面层*.

截面层给出了函子

$$\Gamma\colon \mathsf{Top}/X \to \mathrm{Presh}(X).$$

[7]这里的丛不一定是所谓纤维丛.

我们将证明每个层都是某个丛的截面层, 其中要用到芽 (germ). 芽的概念来自函数芽: 两个函数在一点处有相同的芽, 是指它们在这点的某个邻域上取值相等. 这个概念可自然地定义在一般的预层上.

定义 3.3.3 (芽, 茎)

设 F 是拓扑空间 X 上的预层. 考虑在一点 $x \in X$ 附近的局部截面 (也即 x 的邻域上的截面) 的如下等价关系 $\sim$: 对于 $s \in F(U), t \in F(V)$, 若 $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$, 则 $s \sim t$. 称这个关系下的一个等价类为 F 在 x 处的一个芽, 记截面 s 所属的等价类为 s_x.
称 F 在 x 处芽的集合为茎 (stalk) F_x. 使用范畴语言, 茎是如下的余极限:

$$F_x = \operatorname{colim}_{x\in U} F(U).$$

由预层出发可构造一个丛, 即所谓平展空间.

定义 3.3.4 (平展映射)

对于拓扑空间的映射 $f\colon Y \to X$, 若对任意 $y \in Y$ 都存在 y 的邻域 V 与 $f(y)$ 的邻域 U 使得 $f|_V\colon V \to U$ 为同胚, 则称 f 为平展 (étale) 映射, 又称局部同胚. 到空间 X 的平展态射构成的 Top/X 的满子范畴记为 $\mathsf{Et}(X)$.

命题-定义 3.3.5 (平展空间)

设 F 是拓扑空间 X 上的预层. 定义预层 F 的平展空间 (espace étalé) $p\colon \Lambda_F \to X$ 如下.
空间 Λ_F 作为集合是无交并

$$\Lambda_F = \coprod_{x\in X} F_x,$$

映射 $p\colon \Lambda_F \to X$ 为投影, 将 F_x 的元素映射到 x.
对任意截面 $s \in F(U)$, 定义函数 $\dot{s}\colon U \to \Lambda_F$, $x \mapsto s_x$; 即 $\dot{s}$ 是取 s 每个点处的截面芽得到的函数. 定义 Λ_F 上的拓扑为所有形如 $\dot{s}(U)$ 的集合生成的拓扑.
那么平展空间是平展态射, 且定义了函子

$$\Lambda\colon \operatorname{Presh}(X) \to \mathsf{Top}/X.$$

平展空间的一个重要性质是

命题 3.3.6 (平展空间–截面伴随)

对于拓扑空间 X, $\mathrm{Presh}(X)$ 与 Top/X 之间存在伴随

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Presh}(X) \arrow[r, shift left, "\Lambda"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top}/X. \arrow[l, shift left, "\Gamma"] \end{tikzcd}$$

证明. 我们构造单位与余单位

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathrm{Presh}(X)} \to \Gamma\Lambda, \quad \epsilon\colon \Lambda\Gamma \to \mathrm{id}_{\mathsf{Top}/X}.$$

单位 对于 X 上的预层 F, 在 Λ_F 的定义中已经给出一个映射

$$\eta_F(U)\colon F(U) \to \Gamma\Lambda_F(U), \quad s \mapsto \dot{s}.$$

这构成一个预层态射 $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda_F$.

余单位 对 X 上的空间 $p\colon Y \to X$, 回忆 $\Lambda\Gamma_p$ 的一个元素可表示为一个芽 s_x, 其中 $s \in \Gamma_p(U)$, U 为 x 的邻域. 我们别无他选, 只能定义映射

$$\epsilon_p\colon \Lambda\Gamma_p \to Y, \quad s_x \mapsto s(x).$$

这构成了平展空间的态射.

下面考虑两个复合

$$\Gamma \xrightarrow{\eta\Gamma} \Gamma\Lambda\Gamma \xrightarrow{\Gamma\epsilon} \Gamma, \quad \Lambda \xrightarrow{\Lambda\eta} \Lambda\Gamma\Lambda \xrightarrow{\epsilon\Lambda} \Lambda.$$

第一个复合 对任意平展映射 $p\colon Y \to X$ 与截面 $s \in \Gamma_p(U)$, 由 η 的定义有 $(\eta\Gamma)_p(U)(s) = \dot{s} \in \Gamma\Lambda\Gamma_p(U)$, 而由 ϵ 的定义, $(\Gamma\epsilon)_p(U)(\dot{s}) = s$. 因此第一个复合是恒等.

第二个复合 对 X 上的任一预层 F 与芽 $s_x \in \Lambda_F$, $(\Lambda\eta)_F(s_x) = (\dot{s})_x \in \Lambda\Gamma\Lambda_F$, 而 $(\epsilon\Lambda)_F((\dot{s})_x) = (\dot{s})(x) = s_x$. 因此第二个复合是恒等.

综上, 我们完成了这一对伴随的证明. □

命题 3.3.7

命题 3.3.6 中的伴随限制为满子范畴的等价

$$\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathsf{Et}(X).$$

证明. 注意到,

- X 上的预层 F 是层当且仅当 $\eta_F \colon F \to \Gamma\Lambda_F$ 是同构.
- X 上的空间 $p \colon Y \to X$ 是平展空间当且仅当 $\epsilon_p \colon \Lambda\Gamma_p \to Y$ 是同构.

于是, 这个命题化为纯粹范畴论的问题. 见命题 A.1.3. □

3.4 层猫猫

命题 3.4.1

设 (C, T) 是景, 那么 $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, T)$ 为猫猫.

首先, $\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, T)$ 中的 (小) 极限就是预层的极限, 即逐点极限; 换言之, 满足层条件的预层关于极限封闭.

回忆 C 上预层范畴的子对象分类子 Ω 为 $\Omega(c) = \{c \text{ 上的筛}\}$.

定义 3.4.2 (封闭筛)

对于 c 上的筛 S, 若以下条件成立则称其 T-封闭: 对任意态射 $f \colon d \to c$, 若存在 T-覆盖族 $\{g_i \colon d_i \to d \mid i \in I\}$ 使得每个 fg_i 都属于 S, 则 f 属于 S.

[未完成: 证明]

定义 3.4.3 (Grothendieck 猫猫)

对于范畴 E, 若存在景 (C, T) 使得 $\mathsf{E} \simeq \mathrm{Sh}(\mathsf{C}, T)$, 则称之为 *Grothendieck* 猫猫.

注 3.4.4

对于 Grothendieck 猫猫 E, 定义 3.4.3 中的范畴 C 远远不是唯一确定的. 如下的比较原理就是一例.

命题 3.4.5 (比较原理)

设 (C, J) 为景, D 为 C 的 J-稠密子范畴, 则

$$\mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J) \simeq \mathrm{Sh}(\mathsf{D}, J|_{\mathsf{D}}).$$

[未完成：在哪里讲稠密子范畴?]

例 3.4.6 (拓扑空间上的层猫猫)

对于拓扑空间 X, $\mathrm{Sh}(X)$ 是猫猫, 其子对象分类子 Ω 为

$$\Omega(U) = \{U \text{ 的开子集}\}.$$

注 3.4.7 (“小” 猫猫与 “大” 猫猫)

粗略地说, 层以及层猫猫有两种不同的风味. 一种是一个空间上的层 (如例 3.2.17), 一种是一类空间的范畴上的层 (如例 3.2.20). Grothendieck 称前者的猫猫为小猫猫 (petit topos), 后者的猫猫为大猫猫 (gros topos).

猫猫可以视为 “空间” 概念的推广, 一个重要原因就是由层猫猫可以重构出这个 “空间”.

考虑一个位象 X. 回忆 $\mathrm{Sh}(X)$ 的终对象 1 是在所有开子集上取值为 1 的层, 故 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象 (定义 1.3.17) 是取值为 0 或 1 的层. 由层条件, 当一个子终层 ($\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象) 在若干开子集 $U_i \in \mathcal{O}(X)$ 上取值为 1 时, 它在 $\bigvee_i U_i$ 上取值也为 1; 因此存在这个层取值为 1 的最大开子集. 这证明了如下的 “重构” 定理:

命题 3.4.8 (由层猫猫重构位象)

位象 X 上的层猫猫 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象一一对应于 X 的开子集. 换言之, X

作为位格 同构于 $\mathrm{Sh}(X)$ 的子终对象的格:

$$X \simeq \mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1).$$

因此, SGA 4 [1] 作了如下定义.

定义 3.4.9 (猫猫的开子空间)

一个猫猫中的子终对象称为其*开子空间* (法 ouvert).

层化

设 C 为小范畴, T 为 Grothendieck 拓扑.

命题 3.4.10 (层化)

层范畴到预层范畴的嵌入 $i\colon \mathrm{Sh}(\mathsf{C},T) \to \widehat{\mathsf{C}}$ 有左伴随 $a\colon \widehat{\mathsf{C}} \to \mathrm{Sh}(\mathsf{C},T)$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(\mathsf{C},T) \arrow[r, hook, shift left, "i"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \widehat{\mathsf{C}} \arrow[l, shift left, "a"] \end{tikzcd},$$

称为*层化* (sheafification), 即层范畴是预层范畴的自反子范畴 (reflective subcategory); 且层化保持有限极限.

证明. 我们直接构造层化.

设 F 是 C 上的预层. 对于对象 c 的覆盖 $S \in T(c)$, 记 $\mathrm{Match}(S,F)$ 为 S 上相容族的集合 (定义 3.2.4), 定义一个预层 F^+,

$$F^+(c) := \mathrm{colim}_{S\in T(c)} \mathrm{Match}(S,F),$$

□

景与层猫猫的态射: 直像与逆像

我们暂时回到拓扑空间, 讨论连续映射诱导的层猫猫之间的函子, 然后以此为动机引入景的态射.

定义 3.4.11 (直像)

拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 诱导开集范畴之间的函子 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$, 从而有预层范畴之间的函子

$$f_*\colon \mathrm{Presh}(X) \to \mathrm{Presh}(Y).$$

称之为直像 (direct image). 具体地, 对于 X 上的预层 F, 直像 f_*F 是 Y 上的预层, 满足 $f^*F(U) = F(f^{-1}(U))$.

直接验证定义可得如下命题.

命题 3.4.12 (层的直像是层)

设 $f\colon X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射, F 是 X 上的层, 那么直像 f_*F 是 Y 上的层; 也即直像函子限制为层范畴之间的函子

$$f_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y).$$

命题 3.4.13 (拉回保持平展空间)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 与平展空间 $p\colon E \to Y$, 拉回 $f^*E \to X$ 是平展空间.

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

证明. 对 f^*E 的任意点 (x,e), 取 $e \in E$ 的邻域 U 与 $f(x) = p(e) \in Y$ 的邻域 V 使得 $p|_U\colon U \to V$ 为同胚. 考虑 “拉回立方体”

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
f^*U \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & U \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& f^*E \arrow[rr] \arrow[dd] & & E \arrow[dd, "p"] \\
f^*V \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr, "f"'] & & Y,
\end{tikzcd}$$

其上下左右前后 6 个面均为拉回方块. 这给出了 $(x,e) \in f^*E$ 的邻域 f^*U 和 x 的邻

域 f^*V 使得 $f^*U \to f^*V$ 为同胚 (同胚的拉回还是同胚). □

[未完成: 逆像的 Kan 扩张定义 - 写附录]

定义 3.4.14 (层的逆像)

对于拓扑空间的连续映射 $f\colon X \to Y$, 如下定义逆像函子 $f^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(X) & \mathrm{Sh}(Y) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\Lambda"] \\ \mathsf{Et}(X) \arrow[u, "\Gamma"] & \mathsf{Et}(Y) \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

命题 3.4.15 (逆像–直像伴随)

拓扑空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$ 产生了层范畴之间的一对伴随函子

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(X) \arrow[r, shift right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Sh}(Y), \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

证明. 设 F, G 分别为 X, Y 上的层. [未完成: 证明 (或许使用 Kan 扩张的性质?)] □

证明. 这个证明取自叠计划 [15] 6.21 节 (008C).

设 F, G 分别为 X, Y 上的层. 我们证明如下四种资料相互等价:

(1) 态射 $G \to f_*F$;

(2) 态射 $f^*G \to F$;

(3) 映射族 $\big(\xi_V\colon G(V) \to F(f^{-1}(V))\big)_{V\subset Y}$, 与限制映射相容;

(4) 映射族 $\big(\xi_{U,V}\colon G(V) \to F(U)\big)_{U\subset X, V\subset Y, f(U)\subset V}$, 与限制映射相容.

态射 $G \to f_*F$ 按定义就是与限制映射相容的映射族 $\big(\xi_V\colon G(V) \to F(f^{-1}(V))\big)_{V\subset Y}$. □

例 3.4.16 (到点的映射, 常值层–整体截面伴随)

拓扑空间 X 到单点空间 pt 有唯一的映射 p. 其直像

$$p_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) = \mathsf{Set}$$

将 X 上的层 F 对应到其*整体截面* (global sections) 的集合 $F(X)$. 逆像

$$p^*\colon \mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$$

将集合 A 对应到所谓*常值层* $\underline{A}$. 常值层的茎 $\underline{A}_x$ 同构于 A.

例 3.4.17 (点的嵌入, 茎–摩天大楼伴随)

取定一点 $x \in X$, 其嵌入映射 $i\colon \mathrm{pt} \to X$ 的直像

$$i_*\colon \mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Sh}(X)$$

将集合 A 对应到 x 处的*摩天大楼层* (skyscraper sheaf) $i_*(A)$, 具体地,

$$i_*(A)(U) = \begin{cases} A & x \in U \\ 1 & x \notin U. \end{cases}$$

另一方面, 逆像

$$i^*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{Set}$$

将层 F 对应到其 x 处的茎 F_x.

景的态射

定义 3.4.18 (景的态射)

设 $(\mathsf{C}, J), (\mathsf{D}, K)$ 为景, 且存在有限极限. 此时定义*景的态射* $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 为满足如下条件的函子:

- F 保持有限极限;
- F *保持覆盖*, 也即对 C 中任意对象 c 的 J-覆盖 R, $\{F(f) \mid f \in R\}$ 生成

了 $F(c)$ 上的一个 K-覆盖筛.

例 3.4.19

位象的态射即是其作为景 (例 3.2.19) 的态射.

命题 3.4.20

设 $F\colon (\mathsf{C}, J) \to (\mathsf{D}, K)$ 是定义 3.4.18 中的景的态射, 那么其诱导的函子 $F^*\colon \widehat{\mathsf{D}} \to \widehat{\mathsf{C}}$ 限制为函子 $\mathrm{Sh}(\mathsf{D}, K) \to \mathrm{Sh}(\mathsf{C}, J)$.

层与平展空间: 猫猫版本

[**未完成: Caramello & Zanfa 第 6 章**]

3.5 几何态射

几何态射是猫猫之间的态射, 这个概念基于拓扑空间的连续映射诱导的猫猫之间的伴随 3.4.15.

定义 3.5.1 (几何态射)

设 C, D 为猫猫. 定义 C 到 D 的几何态射 (geometric morphism) f 为一对伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, bend right, "f_*"'] & \mathsf{D}, \arrow[l, bend right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

且满足 f^* 保持有限极限. 称 f_* 为态射 f 的直像部分, f^* 为 *逆像部分*.

注 3.5.2

上面的定义中, 我们将这对伴随称为 C 到 D 的态射, 使得拓扑空间到层猫猫的对应是协变的.
左伴随 f^* 保持任意余极限, 这与拓扑空间以及位象的态射的性质相似.

回忆任何拓扑空间到一个点有唯一的映射, 其直像函子为整体截面函子 (例 3.4.16).

类似地, 任何 (Grothendieck) 猫猫到一点上的层猫猫 $\mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt})$ 有整体截面给出的唯一的几何态射.

命题-定义 3.5.3 (整体截面几何态射)

Grothendieck 猫猫 C 到 Set 有 (自然同构意义下) 唯一的几何态射

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift right, "\Gamma"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Set}, \arrow[l, shift right, "L"'] \end{tikzcd}$$

称为整体截面几何态射 (global sections geometric morphism).

证明. 由于左伴随 L 保持余极限 (命题 A.1.1), 且由定义保持有限极限 (特别地, 保持终对象 1), 故对任意集合 S 有

$$L(S) \simeq L\Big(\coprod_{s\in S} 1\Big) \simeq \coprod_{s\in S} L(1) \simeq \coprod_{s\in S} 1,$$

即 L (在自然同构意义下) 唯一确定. 那么其右伴随也 (本质上) 唯一确定. 具体地, Γ 是由 $1 \in \mathsf{C}$ 表示的函子

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(1, -),$$

这是因为

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(L(S), X) &\simeq \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(1, X) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(1, X)). \end{aligned}$$

□

群作用与张量–同态伴随

几何态射有一类重要且有推广价值的例子: 带有群作用的集合范畴之间的几何态射.

设 G 是群. 回忆在例 3.1.9 中我们定义 $G\mathsf{Set}$ 为单对象范畴 $\mathsf{B}G$ 上的预层范畴, 也即具有 G-*右*作用的集合的范畴.

如下是一个常见的构造, 它与模的张量积有相似的性质.

定义 3.5.4 (张量积)

设集合 X 具有 G-右作用, Z 具有 G-左作用. 定义 X 与 Z 在 G 上的张量积 $X \otimes_G Z$ 如下:

$$X \otimes_G Z := X \times Z \Big/ \begin{matrix} \big((x \cdot g, z) \sim (x, g \cdot z)\big) \\ (x \in X, g \in G, z \in Z) \end{matrix}.$$

以范畴语言, $X \otimes_G Z$ 可表示为如下余等化子:

$$X \times G \times Z \rightrightarrows X \times Z \dashrightarrow X \otimes_G Z, \tag{3.4}$$

其中左边两个映射分别是 G 右作用于 X 和左作用于 Z.

以范畴语言叙述的目的是表明上述定义可以一字不改地应用于任何猫猫.

在上述定义中若 X, Z 没有其它结构, 那么 $X \otimes_G Z$ 只是一个集合; 若 Z 还有另一个群 H 的右作用, 且与 G-左作用交换 (类似于两个环上的双模), 那么 $X \otimes_G Z$ 继承这个 H-右作用: 将 $(-) \times H$ 作用于图 (3.4), 使用 $(-) \times H$ 保持余极限的性质. 我们可将这个事实表述如下.

命题-定义 3.5.5 (张量积)

设 $X \colon \mathsf{B}G^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z \colon \mathsf{B}G \times \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 则可定义 $X \otimes_G Z \colon \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 具体地, H 在其上的右作用为 $(x, z) \cdot h := (x, z \cdot h)$. 这定义了函子

$$- \otimes_G Z \colon G\mathsf{Set} \to H\mathsf{Set}.$$

与张量积密切相关的是同态集.

定义 3.5.6 (同态集)

设 Z, Y 均有 H-右作用. 定义同态集 $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_H(Z, Y) := \mathrm{Hom}_{H\mathsf{Set}}(Z, Y) = \left\{ f \colon Z \to Y \;\middle|\; \begin{matrix} f(z \cdot h) = f(z) \cdot h \\ (z \in Z, h \in H) \end{matrix} \right\}.$$

以范畴语言, $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 可表示为如下等化子:

$$\mathrm{Hom}_H(Z, Y) \dashrightarrow Y^Z \rightrightarrows Y^{Z \times H}, \tag{3.5}$$

其中右边两个映射分别对应 $Y^Z \times Z \times H$ 到 Y 的两个映射: 一个是 H 右作用于 Z 再使用取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^Z \times Z \to Y$ (定义 1.1.6); 另一个是先取值, H 再右作用于 Y.

在上述定义中若 Z, Y 没有其它结构, 那么 $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 只是一个集合; 若 Z 还有另一个群 G 的左作用, 且与 H-右作用交换, 那么 $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)$ 将获得一个 G-右作用: 将 $(-) \times G$ 作用于图 3.5, 使用 $(-) \times G$ 保持等化子的性质 ("极限与极限交换"). 我们可将这个事实表述如下.

命题-定义 3.5.7 (同态 "集")

设 $Z\colon \mathsf{B}G \times \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Y\colon \mathsf{B}H^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 则可定义 $\mathrm{Hom}_H(Z, Y)\colon \mathsf{B}G^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 具体地, G 在其上的右作用为 $(f \cdot g)(z) := f(g \cdot z)$. 这定义了函子

$$\mathrm{Hom}_H(Z, -)\colon H\mathsf{Set} \to G\mathsf{Set}.$$

不出意外地, 上面定义的两个函子是一对伴随.

命题 3.5.8 (张量–同态伴随)

设 X 上有 G-右作用, Y 上有 H-右作用, Z 上有互相交换的 G-左作用与 H-右作用, 那么有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{H\mathsf{Set}}(X \otimes_G Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{G\mathsf{Set}}(X, \mathrm{Hom}_H(Z, Y)),$$

也即有伴随

$$G\mathsf{Set} \underset{\mathrm{Hom}_H(Z,-)}{\overset{(-)\otimes_G Z}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} H\mathsf{Set}.$$

设 $\phi\colon G \to H$ 是群同态, 这个同态给 H 赋予了两个方向的 G-作用. 我们记 ${}_\phi H$ 为 H 带有 G-左作用与 H-右作用, 记 H_ϕ 为 H 带有 H-左作用与 G-右作用.

命题 3.5.9

群同态 $\phi\colon G \to H$ 诱导了三元伴随

$$\begin{tikzcd} G\mathsf{Set} \arrow[r, shift left=4, "\phi_!"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "\phi_*"'] & H\mathsf{Set} \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd},$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_! &= (-) \otimes_G {}_\phi H, \\ \phi^* &= \mathrm{Hom}_H({}_\phi H, -) \simeq (-) \otimes_H H_\phi, \\ \phi_* &= \mathrm{Hom}_G(H_\phi, -). \end{aligned}$$

由此, ϕ^* 作为 $\phi_!$ 的右伴随保持极限, 从而伴随 $\phi^* \dashv \phi_*$ 满足几何态射的条件.

命题 3.5.10

群同态 $\phi\colon G \to H$ 诱导了 $G\mathsf{Set}$ 到 $H\mathsf{Set}$ 的几何态射 (ϕ^*, ϕ_*).

例 3.5.11

群同态 $1 \to H$ 诱导的三元伴随为

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left=4, "(-)\times H"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "(-)^H"'] & H\mathsf{Set} \arrow[l, "\text{遗忘}"'] \end{tikzcd}.$$

例 3.5.12

群同态 $G \to 1$ 诱导的三元伴随为

$$\begin{tikzcd} G\mathsf{Set} \arrow[r, shift left=4, "\text{余不动点}"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "\text{不动点}"'] & \mathsf{Set} \arrow[l, "\text{平凡}"'] \end{tikzcd},$$

其中 “余不动点” (coinvariant) 将 G-集合对应到其 G-作用的轨道的集合.

范畴是群的推广; 对于范畴 C, 函子 $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 可视为 “带有 C-右作用的集合”,

而函子 $\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ 则是 "带有 C-左作用的集合". 我们断言命题 3.5.9 可一字不动地推广为如下结论.

命题 3.5.13

函子 $\phi\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 诱导了三元伴随

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathsf{C}} \arrow[r, shift left=4, "\phi_!"] \arrow[r, shift left=2, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=2, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=4, "\phi_*"'] & \widehat{\mathsf{D}}, \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_! &= (-) \otimes_{\mathsf{C}} {}_{\phi}\mathsf{D}, \\ \phi^* &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}({}_{\phi}\mathsf{D}, -) && \simeq (-) \otimes_{\mathsf{D}} \mathsf{D}_{\phi}, \\ \phi_* & && = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(\mathsf{D}_{\phi}, -). \end{aligned}$$

当然, 需要给出此处推广的 "张量积" 与 "Hom" 的定义. 它们几乎照搬群作用的张量积的定义 (3.5.4, 3.5.5) 与 Hom 的定义 (3.5.6, 3.5.7).

定义 3.5.14 (张量积)

设 $X\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$. 定义 X 与 Z 在 C 上的张量积如下:

$$X \otimes_{\mathsf{C}} Z := \coprod_{c \in \mathsf{C}} X(c) \times Z(c) \bigg/ \begin{matrix} \big((x \cdot g, z) \sim (x, g \cdot z)\big) \\ (x \in X(c), g\colon c' \to c, z \in Z(c')) \end{matrix}$$

一般地, 设 $X\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathsf{C} \times \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. 定义 $X \otimes_{\mathsf{C}} Z\colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 如下:

$$(X \otimes_{\mathsf{C}} Z)(d) := X \otimes_{\mathsf{C}} (Z(-, d)),$$

态射 $h\colon d' \to d$ 的作用为 $(x, z) \cdot h := (x, z \cdot h)$. 这定义了函子

$$- \otimes_{\mathsf{C}} Z\colon \widehat{\mathsf{C}} \to \widehat{\mathsf{D}}.$$

定义 3.5.15 (同态 "集")

设 $Z\colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Y\colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 定义 Z 到 Y 的同态集如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z,Y) &:= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{D}}}(Z,Y) \\ &= \left\{ (f(d)\colon Z(d) \to Y(d)) \,\middle|\, \begin{matrix} f(z\cdot g) = f(z)\cdot g \\ (z \in Z(d), g\colon d' \to d) \end{matrix} \right\}.\end{aligned}$$

(当然, 这就是 Z 到 Y 的预层同态的集合.)

一般地, 设 $Z\colon \mathsf{C} \times \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Y\colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z,Y)\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z,Y)(c) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z(c,-),Y),$$

态射 $h\colon c' \to c$ 的作用为 $(f\cdot h)(z) := f(h\cdot z)$. 这定义了函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z,-)\colon \widehat{\mathsf{D}} \to \widehat{\mathsf{C}}.$$

命题 3.5.16 (张量–同态伴随)

设 $X\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Z\colon \mathsf{C} \times \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $Y\colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 那么有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{D}}}(X \otimes_{\mathsf{C}} Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Z,Y)).$$

当然, 上述命题中的 Set 也可改为一般的猫猫.

[**未完成: 几何态射 SGL VII.2**]

猫猫的点

位象 X 的点是终位象 1 到 X 的映射 (定义 2.1.8); 类似地可定义猫猫的点.

定义 3.5.17 (猫猫的点)

猫猫 C 的一个点是 Set 到 C 的一个几何态射.

例 3.5.18

拓扑空间 X 的一个点 x 给出猫猫 $\mathrm{Sh}(X)$ 的一个点 (例 3.4.17).

命题 3.5.19

设 X 是清晰空间或位象 (参见命题 2.1.10), 则层猫猫 $\mathrm{Sh}(X)$ 的点一一对应于 X 的点.

例 3.5.20

对于范畴 C 的对象 c, 考虑终范畴 1 到 C 的函子 $\phi\colon * \mapsto c$; 由命题 3.5.13, 这给出了预层猫猫 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的一个点.

例 3.5.21 (“无穷远点”)

设 N 为自然数的范畴 $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$. 猫猫 $\mathsf{Set}^{\mathsf{N}}$ 除了有每个自然数对应的一个点 (例 3.5.20) 之外, 还有一个 “无穷远点”:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift right, "\text{常值}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Set}^{\mathsf{N}}, \arrow[l, shift right, "\operatorname{colim}"'] \end{tikzcd}$$

其直像部分将集合 S 对应到常值函子 $\underline{S}$, 逆像部分将函子 $F\colon \mathsf{N} \to \mathsf{Set}$ 对应到余极限 $\operatorname{colim} F$.

3.6 猫猫的几何性质

猫猫及其态射的一些性质得名于拓扑空间及其态射的性质.

连通性

命题 3.6.1

对于拓扑空间 X, 如下条件等价:

(i) X 连通;

(ii) $1 \in \mathrm{Sh}(X)$ 不能写成非平凡的无交并;

(iii) 常值层函子 $\mathsf{Set} \to \mathrm{Sh}(X)$ 全忠实;

(iv) 整体截面函子 $\mathrm{Sh}(X) \to \mathsf{Set}$ 保持余积.

证明. [未完成:] □

定义 3.6.2 (猫猫的连通性)

一个 Grothendieck 猫猫 C 称为连通的, 是指其到 $\mathsf{Set} = \mathrm{Sh}(\mathrm{pt})$ 的几何态射 (定义 3.5.3) 的逆像部分为全忠实函子.

嵌入与满射

如下两个命题取自 [6] A4.3 节.

命题 3.6.3 (嵌入的范畴刻画)

设 $f\colon X \to Y$ 是 T_1 拓扑空间[8]之间的连续映射, 那么 f 是嵌入当且仅当直像函子 $f_*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ 是忠实函子; 这进一步等价于 f_* 是全忠实函子.

证明. 首先, 注意到 $f\colon X \to Y$ 是嵌入当且仅当 $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$ 是满射. □

[未完成: 证明]

命题 3.6.4 (满射的范畴刻画)

设 $f\colon X \to Y$ 是 T_1 拓扑空间之间的连续映射, 那么 f 是满射当且仅当逆像函子 $f^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是忠实函子.

[8] T_1 条件是说对任何两个点 x, y, 存在开集 U 包含 x 而不包含 y. 等价的条件是每个点都是闭点.

证明.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}(Y) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Sh}(X) \\ \mathrm{Open}(Y) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^{-1}"'] & \mathrm{Open}(X) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

□

定义 3.6.5 (猫猫的嵌入)

对于 Grothendieck 猫猫的几何态射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 若 f_* 全忠实, 则称之为嵌入.

定义 3.6.6 (猫猫的满射)

对于 Grothendieck 猫猫的几何态射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 若 f^* 忠实, 则称之为满射.

例 3.6.7

对于猫猫 C 中的态射 $f\colon X \to Y$, 俯范畴之间的几何态射 $f\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}/Y$ (命题 1.1.38) 是嵌入 (也即 Π_f 全忠实) 当且仅当 $f\colon X \to Y$ 是单射; $f\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}/Y$ 是满射 (也即 f^* 忠实) 当且仅当 $f\colon X \to Y$ 是满射.

本质几何态射与局部连通猫猫

定义 3.6.8 (本质几何态射)

对于 Grothendieck 猫猫的几何态射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 若 f^* 有左伴随 $f_!$ (也即有三元伴随 $f_! \dashv f^* \dashv f_*$), 则称之为本质几何态射 (essential geometric morphism).

例 3.6.9 (俯范畴之间的几何态射)

对于猫猫 C, 其中的态射 $f\colon X \to Y$ 诱导的几何态射 $f\colon \mathsf{C}/X \to \mathsf{C}/Y$ 是本质几何态射 (命题 1.1.38).

例 3.6.10 (G-集范畴之间的几何态射)

群同态 $\phi\colon G \to H$ 诱导的几何态射 $\phi\colon G\mathsf{Set} \to H\mathsf{Set}$ 是本质的 (命题 3.5.9).

定义 3.6.11 (局部连通猫猫)

对于 Grothendieck 猫猫 C, 若整体截面几何态射 $\mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ 是本质的, 则称之为局部连通猫猫.

第 4 章 猫猫的内语言：从语法到语义

> A mathematical statement is just a story you tell about some devices. Some of those stories are clever, some are stupid; some of those stories are true, some others are false. Doing mathematics is telling clever stories which are true.[1]
>
> Francis Borceux, [2]

我们曾提到意象中有一种*内语言* (internal language) 可用来进行推理, 本章介绍这种语言, 以及它在各个数学分支中的应用. 建议不熟悉数理逻辑的读者在本章之前先阅读附录 B.

4.1 Mitchell–Bénabou 语言

固定一个意象 C. 本节描述一种重要的语言, 称作 *Mitchell–Bénabou 语言*; 它是意象的内语言的一种表述, 其特点是利用子对象分类器 Ω, 将公式一视同仁地解释为 Ω 类型的项. 使用这种语言, 可将意象中的对象真正地当作集合一样处理.

[1] 一句数学陈述不过是你对某些东西讲的一个故事. 这些故事有的妙, 有的蠢, 有的真, 有的假. 做数学就是要讲出又妙又真的故事.

定义 4.1.1 (类型)

类型是 C 的对象.

定义 4.1.2 (项, 公式)

- 类型 X 的项被解释为指向 X 的态射, 而公式被解释为 Ω 类型的项; 项 (公式) 的定义域代表此项 (公式) 中自由变量的类型. 例如, 当类型 X 的一个项含有自由变量 $y\colon Y, z\colon Z$ 时, 该项解释为一个态射 $Y \times Z \to X$.
- 类型 X 的一个变量 (可视为含一个自由变量的项) 解释为恒等态射 $\mathrm{id}\colon X \to X$;
- 类型 X 的一个常量 (可视为不含自由变量的项, 或零元函数) 则是一个态射 $1 \to X$, 也即对象 X 的一个整体元素.

注 4.1.3 (一般元素)

设 x 是类型 X 的一个变量. 假若我们证明了含变量 x 的公式 $\phi(x)$, 那么对 X 的任意具体的项 x_0, 就有 $\phi(x_0)$ 成立. 在 Mitchell–Bénabou 语言中, $x \in X$ 被解释为 $\mathrm{id}\colon X \to X$, 它可视为对象 X 的一般元素 (generic element) (这里元素的含义是广义元素, 即态射 $? \to X$), 因为对任意态射 $f\colon X \to Y$, 只要给定了 f 在广义元素 $\mathrm{id}\colon X \to X$ 上的值 $f \circ \mathrm{id}$, 就确定了 f 在任何广义元素 $x_0\colon U \to X$ 上的值 $f \circ x_0$. 这是平凡的.

定义 4.1.4 (等式)

对于类型 X 的两个项 $\sigma\colon U \to X$, $\tau\colon V \to X$, 等式 $\sigma = \tau$ 被解释为 Ω 的项

$$U \times V \xrightarrow{(\sigma,\tau)} X \times X \xrightarrow{\chi_\Delta} \Omega.$$

回忆 χ_Δ 是对角线 $\Delta\colon X \to X \times X$ 的特征函数 (例 1.1.18), 它表达的正是 X 上的相等关系.

定义 4.1.5 (函数符号, 关系符号)

函数符号 $f\colon A_1\cdots A_n\to B$ 被解释为 C 中的态射 (注意到意象中存在乘积)

$$f\colon A_1\times\cdots\times A_n\to B,$$

而关系符号 $R\hookrightarrow A_1\cdots A_n$ 被解释为其中指向 Ω 的态射

$$R\colon A_1\times\cdots\times A_n\to\Omega,$$

也即 $A_1\times\cdots\times A_n$ 的子对象, 其直观为 "满足关系 R 的元素构成的子集".
我们看到, 函数符号与项被解释成了同一种东西. 这是有道理的, 因为项在这里就是其自由变量的函数.
对于函数符号 $f\colon X\to Y$ 与类型 X 的项 $\sigma\colon U\to X$, $f(\sigma)$ 解释为复合 $f\circ\sigma\colon U\to Y$.

特别地, 使用取值映射 $\mathrm{ev}\colon Y^X\times X\to Y$ (定义 1.1.6), 可将 Y^X 类型的项 (内语言中的 "函数") $\theta\colon V\to Y^X$ 作用于 X 类型的项 $\sigma\colon U\to X$, 得到 Y 类型的项

$$\theta(\sigma)\colon\quad V\times U\xrightarrow{(\theta,\sigma)}Y^X\times X\xrightarrow{\mathrm{ev}}Y.$$

例如, 考虑成员关系 (例 1.1.22) $\in_X\colon\Omega^X\times X\to\Omega$, 可对 $PX=\Omega^X$ 类型的项 (内语言中的 "子集") $\eta\colon V\to\Omega^X$ 与 X 类型的项 $\sigma\colon U\to X$ 定义 Ω 类型的项

$$(\sigma\in\eta)\colon\quad V\times U\xrightarrow{(\eta,\sigma)}\Omega^X\times X\xrightarrow{\in_X}\Omega.$$

[未完成: 量词的解释]

[未完成: 逻辑运算]

猫猫中的逻辑运算

在一个猫猫中, Ω 是代表真值的类型, 从而逻辑运算可表示为与 Ω 相关的态射. 前面提到的 "真" $\top\colon 1\to\Omega$ 属于此列.

假，非

定义 4.1.6 (假)

假 (false) $\bot\colon 1 \to \Omega$ 是子对象 $0 \to 1$ 的特征函数，即下图是子对象的拉回.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ 1 \arrow[r, "\bot"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

定义 4.1.7 (非)

非 (not) $\neg\colon \Omega \to \Omega$ 是假 $\bot\colon 1 \to \Omega$ 的特征函数，即下图是子对象的拉回.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "\bot"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ \Omega \arrow[r, "\neg"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

且

定义 4.1.8 (且)

4.2 模态与层化

定义 4.2.1 ()

[未完成：层化]

4.3 非标准分析，滤商与超滤范畴

非标准分析起源于对无穷小与极限等概念的重新审视. 不同于 Cauchy–Weierstrass 的 ε-δ 方法，它将无穷小量视为扩充实数集中实实在在的对象. 一种称作传达原理的

工具提供了经典分析与非标准分析之间的桥梁.

基本概念

定义 4.3.1 (超滤)

Boole 代数 B 上的超滤是 Boole 代数同态 $B \to \{\bot, \top\}$ 下 $\top$ 的原像. 超滤 $\mathcal{F}$ 也可由如下等价的条件之一定义:

- $\mathcal{F}$ 是极大的真滤子;
- $\mathcal{F}$ 是真滤子, 且对任意 $a \in B$, 要么 $a \in \mathcal{F}$, 要么 $\neg a \in \mathcal{F}$.

集合 S 上的超滤是指 Boole 代数 2^S 上的超滤.

注 4.3.2

一个集合上超滤构成的空间是其子集 Boole 代数的 Stone 空间, 这是代数–几何对偶的一例. 参见定义 2.1.8 及其后的注.

滤商

超滤范畴

4.4 可计算性理论与有效意象

有效意象 (effective topos) Eff 是用于研究可计算性理论的范畴, 或用一种诗意的表达, 是 “可计算数学的世界” (相对于 Set 是 “通常数学的世界”).

4.5 综合微分几何与光滑无穷小分析

综合微分几何的理论

我们首先在本小节叙述一种偏向语法的 (或公理化的) 理论, 而暂时不关心这个理论是否存在一个模型. 我们将看到这种理论比通常的微分几何更加符合直观.

公理 4.5.1 (空间)

综合微分几何所谓的空间 (或称集合) 是一个固定的猫猫 E 中的对象; 光滑映射 (或称映射) 是 E 中的态射.

公理 4.5.2 (直线)

综合微分几何所谓的直线是 E 中一个固定的环 R.

注 4.5.3

字母 R 提示了这个对象与通常微分几何的对象 $\mathbb{R}$ 在直观上的相似性, 但它与 $\mathbb{R}$ 有不同的性质, 如 “幂零无穷小量” 的存在性. 因此, 我们不能要求 R 是域.

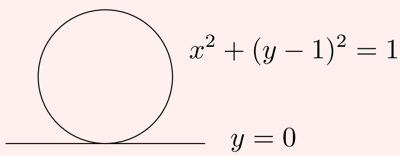
定义 4.5.4 (直线上原点的一阶无穷小邻域)

定义 R 上 “原点的一阶无穷小邻域”

$$D = \{x \in R \mid x^2 = 0\}.$$

例 4.5.5 (相切曲线的共同切向量)

平面 R^2 上的直线 $y = 0$ 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的交集是 D. 这是因为将 $y = 0$ 代入圆的方程, 就得到 $x^2 + 1 = 1$, 也即 $x^2 = 0$.



直观上, 直线与圆相切, 两者在相切处有一条公共的 “无穷小线段”. 更一般地, 任意两条相切的曲线都有一条公共的形如 D 的无穷小线段, 这便是两条曲线共同的切向量.

Kock–Lawvere 公理与导数

公理 4.5.6 (Kock–Lawvere 公理)

对任意映射 $f\colon D \to R$, 存在唯一的 $a, b \in R$, 使得

$$f(d) = a + d \cdot b, \quad \forall d \in D.$$

换言之, 作为 R-代数有

$$\mathrm{Hom}(D, R) \simeq R[x]/(x^2).$$

Kock–Lawvere 公理反映了如下的直观: R 上的一个函数在一个很小的邻域上近乎是一次函数. 由此, 我们立刻得到如下的推论.

命题-定义 4.5.7 (导函数)

对任意函数 $f\colon R \to R$, 存在唯一的函数 $f'\colon R \to R$ 满足

$$f(x+d) = f(x) + d \cdot f'(x), \quad \forall x \in R \, \forall d \in D.$$

称 f' 为 f 的导函数. 归纳地定义 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$.

也就是说, 综合微分几何要求任何函数 $R \to R$ 都是任意次可导的.

Weil 代数与无穷小几何对象

无穷小线段 D 对应代数 $R[x]/(x^2)$. 一般地, 在代数–几何对偶中与无穷小几何对象相对应的代数是 R 上的 *Weil* 代数[2].

定义 4.5.8 (Weil 代数)

Weil 代数是形如 $W = R \oplus J$ 的 R-代数, 其中 J 是有限生成自由 R-模, 且为幂零理想. 等价地,

$$W = R[x_1, \cdots, x_n]/I,$$

且存在正整数 N 使得 $x_i^N \in I \, (i = 1, \cdots, n)$.

[2] Weil 代数有两种含义, 这里所说的不是来自 Lie 代数的那种 Weil 代数.

注 4.5.9

上面的概念在 "经典数学" (经典逻辑) 中对应局部 *Artin* 代数, 其中 Artin 代数是指不存在无限的理想下降链 (这称为下降链条件) 的代数. 设 k 为域, A 是局部 Artin k-代数, $\mathfrak{m}$ 是 A 的唯一极大理想, 并且额外假设 $k \to A/\mathfrak{m}$ 是同构. 可以证明[3] $A \simeq k \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ 是有限维 k-线性空间且为幂零理想. 定义 4.5.8 即是这个结果的类比.
局部 Artin 环在代数几何的形变理论中有重要作用, 这正是因为它对应无穷小几何对象.

定义 4.5.10 (Weil 代数的谱)

对于 Weil 代数 W, 定义 W 的谱为 R-代数同态的空间

$$\operatorname{Spec} W = \operatorname{Hom}_{R\mathsf{Alg}}(W, R),$$

称之为无穷小几何对象.

例 4.5.11 (常见的无穷小几何对象)

- 点
$$\mathrm{pt} \simeq \{x \in R \mid x = 0\} = \operatorname{Spec} R;$$
- 无穷小线段的平方
$$D^2 \simeq \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 = y^2 = 0\} = \operatorname{Spec} R[x, y]/(x^2, y^2);$$
- R^2 上原点的一阶无穷小邻域
$$D(2) := \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 = xy = y^2 = 0\} = \operatorname{Spec} R[x, y]/(x^2, xy, y^2);$$
- 高阶无穷小邻域
$$D_k := \{x \in R \mid x^{k+1} = 0\} = \operatorname{Spec} R[x]/(x^{k+1})\,(k = 1, 2, 3, \cdots).$$

[3] 由中山 (Nakayama) 引理以及下降链条件可得 $\mathfrak{m}$ 幂零; 又由下降链条件可得每个 $\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$ 是有限维 k-线性空间, 从而 A 是有限维 k-线性空间.

前面介绍的 Kock–Lawvere 公理可表述为 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,R[x]/(x^2), R) \simeq R[x]/(x^2)$. 类似地有如下公理.

公理 4.5.12 (Kock–Lawvere 公理)

对于 Weil 代数 W, 有

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,W, R) \simeq W.$$

注 4.5.13 (Weil 代数与 Kock–Lawvere 公理的直观)

设 $W = R \oplus J$ 是 Weil 代数. 投影 $W \to R$ 对应点 pt 到无穷小几何对象 $\mathrm{Spec}\,W$ 的原点的嵌入

$$\mathrm{pt} = \mathrm{Spec}\,R \to \mathrm{Spec}\,W.$$

Kock–Lawvere 公理说的是 Weil 代数 W 等同于 $\mathrm{Spec}\,W$ 上的函数代数. 投影 $W \to R$ 可视为 $\mathrm{Spec}\,W$ 上的函数在原点处取值; 理想 J 是投影 $W \to R$ 的核, 可视为在原点取值为 0 的函数的集合. 要求 J 为幂零理想, 也即要求在原点取值为 0 的函数都幂零, 直观上说明 $\mathrm{Spec}\,W$ 是 “无穷小” 的.

Lawvere 以如下的性质刻画无穷小几何对象.

定义 4.5.14 (无穷小对象, 奇妙右伴随)

对于空间 S, 若 $(-)^S$ 有右伴随, 则称 S 为无穷小对象. 记该右伴随为 $(-)_S$, 称之为奇妙右伴随 (amazing right adjoint).

例 4.5.15

在集合范畴 Set 中, 只有终对象 1 是无穷小对象.

注 4.5.16

回忆对猫猫中任意对象 S, $(-)^S$ 都有左伴随 $(-) \times S$, 而 $(-)^S$ 有右伴随是非常稀奇的事情. 重要的是此时 $(-)^S$ 保持余极限. 一个直观如下. 设空间 X 被一族空间 U_i 覆盖 (X 可写成 U_i 和 $U_i \times_X U_j$ 的某种余极限), 那么 X^S 也被 U_i^S 覆盖, 即 S 到 X 的任何映射都必须穿过某个 U_i; 这是 S 的像 “太小” 导

致的.
类似的性质在不是猫猫的范畴中也有用处. 例如 Abel 群范畴 Ab 中, 函子 $\mathrm{Hom}(A,-)$ 保持余极限当且仅当 A 是有限生成投射 $\mathbb{Z}$-模, 这也是一种 "小" 的性质.

[未完成: 使用 SDG 的例子, 如 Riemann 曲率]

[未完成: 无穷小对象的定义, amazing right adjoint]

综合微分几何的模型

本小节介绍综合微分几何的一些模型. 相对简单的模型就能实现 Kock–Lawvere 公理; 而为了使模型满足更多的公理, 以及更加贴近传统的微分几何 (更加 "有用"), 我们就需要作越来越复杂的调整. 构造综合微分几何模型的贯穿始终的思想是代数–几何对偶.

"代数" 模型

首先考虑一个最简单的模型.

定义 4.5.17

考虑有限表现仿射 $\mathbb{R}$-概形范畴 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$. 回忆, 有限表现 $\mathbb{R}$-代数即形如 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_m)$ 的代数; 对于有限表现 $\mathbb{R}$-代数 A, 以 $\operatorname{Spec} A$ 表示其在对偶范畴中的化身.
所谓代数模型 (algebraic model) 是 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}$ 上的层猫猫

$$\mathsf{Fun}(\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}},\mathsf{Set}).$$

定义 4.5.18 (直线)

定义 直线

$$R := よ(\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]).$$

注 4.5.19

在第 5 章我们将会讲到, 这里考虑的猫猫是 $\mathbb{R}$-代数理论的分类猫猫, 而 R 是一般 $\mathbb{R}$-代数 (generic $\mathbb{R}$-algebra).
这些结论对有限生成 $\mathbb{R}$-代数范畴同样成立.

注意到对 $A \in \mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}$,

$$R(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}}}(\mathbb{R}[x], A) \simeq A \text{ (作为集合)},$$

我们发现, R 正是代数范畴到集合范畴的遗忘函子

$$R \simeq \text{遗忘}\colon \mathbb{R}\mathsf{Alg}_{\mathrm{fp}} \to \mathsf{Set}.$$

因此, 使用米田方法, 我们就得到

命题 4.5.20

R 是交换环.

有了 R, 我们考虑 “由方程定义的子流形”

$$M = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid f_1 = \cdots = f_m = 0\},$$

其中 $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式. 其范畴语义为拉回

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ R^n \arrow[r, "{(f_1,\cdots,f_m)}"'] & R^m, \end{tikzcd}$$

对应 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}$ 中的推出

$$\begin{tikzcd} ? & & \mathbb{R} \arrow[ll] \\ \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n] \arrow[u] & & \mathbb{R}[y_1, \cdots, y_m], \arrow[ll, "y_i \mapsto f_i"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

故

$$M = よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m)).$$

定义 4.5.21 (直线上原点的一阶无穷小邻域)

定义

$$D := \{x \in R \mid x^2 = 0\} = よ\big(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)\big).$$

我们验证它满足公理 4.5.6, 以外部语言叙述即

命题 4.5.22

$$R^D(A) \simeq A[x]/(x^2).$$

证明. 由预层猫猫指数对象的构造 (命题 3.1.13 的证明),

$$\begin{aligned} R^D(A) &= \operatorname{Hom}(よ(\operatorname{Spec} A) \times D, R) \\ &\simeq \operatorname{Hom}\big(よ(\operatorname{Spec} A) \times よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)), よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x])\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}\big(よ(\operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)), よ(\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x])\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}\mathsf{Alg}}(\mathbb{R}[x], A \otimes \mathbb{R}[x]/(x^2)) \\ &\simeq A \otimes \mathbb{R}[x]/(x^2)) \simeq A[x]/(x^2) \text{ (作为集合)}. \end{aligned}$$

其中用到 $\mathbb{R}$-代数的张量积是 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}$ 中的和, 即 $\mathbb{R}\mathsf{Alg}^{\mathrm{op}}$ 中的积. □

注 4.5.23

至此, 我感到有必要介绍对待层的一种观点或一套术语. 范畴 R (这里是某种环范畴) 到 Set 的函子又称 R 上的变集合 (varying set over R, 见 [9] 8.3 节, 回忆 "变集范畴" 1.2.6), R 的每个对象称为一个阶段 (stage), R 的态射称为阶段之间的转移 (transition), 对于 R 的对象 A 与函子 $X\colon \mathsf{R} \to \mathsf{Set}$, $X(A)$ 的元素称为变集合 X 在阶段 A 的元素.

Grothendieck 的概形是函子 $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$, 也即环范畴上的变集合. 对于环 A, 一个概形的 A-点即是这个函子在阶段 A 的元素. 例如 Fermat 概形为函子 $A \mapsto \{(x, y, z) \in A^3 \mid x^n + y^n = z^n\}$, 它在阶段 $\mathbb{R}$ 当然有点, 而人们关心的是其在阶段 $\mathbb{Q}$ 是否就有点. 因此, 一个概形可理解为同时在所有环上解一个方程组.

光滑代数

$\mathbb{R}$-代数上的运算是多项式运算; 若将多项式运算扩充为全体 “光滑” 运算, 则可产生一个更接近微分几何的模型.

定义 4.5.24 (光滑代数)

光滑代数 (C^∞-代数) 是指满足如下条件的集合 A: 对每个非负整数 n 与每个 n 元光滑函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 都有一个 n 元运算, 称为光滑运算 $A(f)\colon A^n \to A$, 使得 $f \mapsto A(f)$ 保持复合, 即对于 $h = g \circ (f_1, \cdots, f_k)$, 有

$$A(h) = A(g) \circ (A(f_1), \cdots, A(f_k)).$$

换言之, 光滑代数是 Lawvere 理论 CartSp 的模型 (例 5.1.6). 光滑代数的同态是保持所有光滑运算的映射. 记光滑代数的范畴为 $C^\infty\mathsf{Alg}$.

注 4.5.25

如上定义的 C^∞-代数首先是 $\mathbb{R}$-代数: 考虑 0 元函数 $\mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$ 就得到了常量 $A^0 \to A$, 考虑加法与乘法函数 $+, \times\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 就得到 A 上的加法与乘法, 考虑映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x(y+z) = xy + xz$, 使用 $f \mapsto A(f)$ 保持复合的条件, 就得到 A 上的分配律, 如此这般.

例 4.5.26

设 M 是光滑流形, 那么 M 上的光滑函数空间 $C^\infty(M)$ 构成光滑代数: 对 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 定义 $A(f)(f_1, \cdots, f_n) = f \circ (f_1, \cdots, f_n)$.

例 4.5.27

$\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 是光滑代数: 对 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 定义

$$A(f)(a_1 + b_1\varepsilon, \cdots, a_n + b_n\varepsilon) = f(a_1, \cdots, a_n) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(a_1, \cdots, a_n)} b_i\varepsilon.$$

$\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 可视为 “无穷小线段上的光滑函数空间”.

例 4.5.28

光滑流形上一点处的光滑函数芽 (定义 3.3.3) 构成光滑代数.

我们需要有限生成 C^∞-代数的概念. 类比于 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 是 n 个元素生成的自由 $\mathbb{R}$-代数 (代数是指交换含幺代数), 有如下命题.

命题 4.5.29

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 n 个元素生成的自由 C^∞-代数.

证明. 要证明的是对任意 C^∞-代数 A 与任意 n 个元素 $a_1,\cdots,a_n\in A$, 存在唯一的同态 $\varphi\colon C^\infty(\mathbb{R}^n)\to A$ 将每个坐标函数 (投影) x_i 映射到 a_i. 由定义, 对任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, φ 必须把 $f=f\circ(x_1,\cdots,x_n)$ 映射到 $f(a_1,\cdots,a_n)$, 这便唯一确定了 φ; 而它确实将投影 x_i 映射到 a_i: $x_i(a_1,\cdots,a_n)=a_i$. □

例 4.5.30

[未完成: 有限表现 vs 有限生成]

定义 4.5.31 (光滑处所)

定义光滑处所 (smooth locus, 复数 loci) 的范畴 $\mathbb{L}$ 为有限生成 C^∞ 代数范畴的对偶,

$$\mathbb{L} := C^\infty\mathsf{Alg}_{\mathrm{fg}}^{\mathrm{op}},$$

此处的记号遵循 Moerdijk 与 Reyes [13]. 对于 C^∞-代数 A, 记 ℓA 为 A 在对偶范畴中的化身. ℓ 是 Spec 在光滑代数范畴中的类比.

定义 4.5.32

$$\mathsf{Fun}(C^\infty\mathsf{Alg}_{\mathrm{fg}},\mathsf{Set}).$$

定义 4.5.33

定义直线

$$R := よ(\ell C^\infty(\mathbb{R})).$$

4.6 量子理论与 Bohr 意象

C^*-代数, 经典语境与 Bohr 景

一般而言, 量子系统是由 C^*-代数表示的.

定义 4.6.1 (C^*-代数)

C^*-代数是 $\mathbb{C}$ 上的 Banach 代数 $\big(\mathcal{A}, \|-\|\big)$, 带有 “伴随” 运算 $(-)^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 满足对任意 $x \in \mathcal{A}$,

- $(x^*)^* = x$,
- $(xy)^* = y^*x^*$,
- $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ $(\lambda \in \mathbb{C})$,
- $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\| = \|x\|^2$.

C^*-代数的 $*$-子代数是指关于 $(-)^*$ 封闭的子代数.

例 4.6.2

对于 Hilbert 空间 H, H 上的有界线性算子的代数 $\mathcal{B}(H)$ 是 C^*-代数, 其中 x^* 是 x 的伴随算子. 事实上, 每个 C^*-代数都同构于某个形如 $\mathcal{B}(H)$ 的代数的 $*$-子代数, 因此后者也可作为 C^*-代数的一种具体定义.

下面我们固定一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$.

定义 4.6.3 (可观测量)

C^*-代数中的自伴元素是指满足 $x^* = x$ 的元素; 自伴元素又称*可观测量* (observable).

Heisenberg 不确定性原理表明, 不交换的可观测量不可同时确定, 而一族相交换的可观测量可以同时确定. 因此我们格外关注那些交换的子代数.

定义 4.6.4 (经典语境)

称 $\mathcal{A}$ 的一个交换 $*$-子代数为一个*经典语境* (classical context). 记 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的交换 $*$-子代数在包含关系下构成的偏序集.

注 4.6.5

语境这个名字的含义是, 一个可观测量只在某些特定的语境 (也就是包含它的那些语境) 下才有确定的值. 在一个固定的语境中, 可观测量的表现无异于一个经典系统.

这里我们稍微偏题, 介绍偏序集上的层.

定义 4.6.6 (Alexandorff 空间)

若一个拓扑空间中开集的任意交仍是开集, 则称其为 *Alexandorff 空间*.

定义 4.6.7 (Alexandroff 拓扑)

设 P 为偏序集. 定义 P 上的 *Alexandroff 拓扑*是以向上封闭集为开集的拓扑. 其中, 称 $Q \subset P$ 为向上封闭集是指对任意 $x \in Q, y \in P$, 若 $x \leq y$, 则 $y \in Q$.

命题 4.6.8

对任意偏序集 P, P 上的预层可自然延拓为 P 的 Alexandroff 拓扑上的层.

4.7 Bohr 意象

定义 4.7.1 (Bohr 意象)

称 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 上的预层意象为 *Bohr 意象*.

状态空间

定义 4.7.2 (Gelfand 谱)

对于交换 C^*-代数 A, 定义其 *Gelfand 谱*

$$\Sigma(A) := \{C^*\text{-代数同态 } \lambda\colon A \to \mathbb{C}\},$$

其拓扑为使得所有映射 $\Sigma(A) \to \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda(x)$ 都连续的最弱拓扑. 由 Gelfand–Mazur 定理, Gelfand 谱 $\Sigma(A)$ 也是 A 的极大理想的集合.

$\Sigma(A)$ 上拓扑的定义旨在保证每个元素 $x \in A$ 都对应 $\Sigma(A)$ 上的一个复值连续函数. 如下定理表明这个对应实际上是一个同构; 这是代数–几何对偶的一例.

命题 4.7.3 (Gelfand–Naimark 对偶)

记 CC^* 为交换 C^*-代数的范畴, CHaus 为紧 Hausdorff 空间的范畴, 那么 Gelfand 谱给出反变函子 $\Sigma\colon \left(\mathsf{CC}^*\right)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{CHaus}$, 且有范畴等价

$$\left(\mathsf{CC}^*\right)^{\mathrm{op}} \underset{C(-,\mathbb{C})}{\overset{\Sigma}{\rightleftarrows}} \mathsf{CHaus},$$

其中 $C(X,\mathbb{C})$ 是空间 X 上复值连续函数的 C^*-代数.

可观测量代数与状态空间互为对偶. 经典力学中, 可观测量是状态空间上的函数; 反过来, 状态空间上的点可视为可观测量代数到 $\mathbb{R}$ 的代数同态. 完全类似地, 在量子力学中, 给定语境 A, 对应的” 状态空间” $\Sigma(A)$ 中的点就是 A 到 $\mathbb{C}$ 的代数同态, 而 A 中的可观测量则可视为状态空间 $\Sigma(A)$ 上的函数.

定义 4.7.4 (谱预层)

对于语境 $A_1 \subset A_2$, 有限制映射 $\Sigma(A_2) \to \Sigma(A_1)$. 这定义了 $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ 上的预层 Σ.

注 4.7.5

预层 Σ 整合了所有经典语境的几何信息.
一般而言, 一个可观测量只能给出预层 Σ 的局部截面, 而无法给出整体截面.

Bohr 意象中对象 Σ 的构造可视为将 Gelfand 谱的构造由交换代数推广到非交换代数, 成为与交换子代数相对偶的空间的系统. 它实际上是 Bohr 意象中的内蕴位象 (internal locale). 而交换子代数的全体构成 Bohr 意象中的一个*内蕴代数*. 由此, Bohr 意象的内语言允许我们像谈论经典态一样谈论量子态.

Bohr 意象中的命题

在一个经典系统中, 命题是状态空间的子集, 表示这个命题在何种状态下成立. 类似地, 量子系统中的命题是预层意象中 Σ 的子对象, 或称子函子.

4.8 Cohen 力迫法

1874 年, Georg Cantor 证明了自然数与实数 (又称连续统) 之间不存在一一对应[4]. Cantor 接着于 1878 年提出了*连续统假设* (continuum hypothesis),

$$\boxed{\text{在自然数集合 } N \text{ 与连续统 } PN \text{ 之间不存在其它的基数.}}$$

1940 年, Kurt Gödel 证明连续统假设与 Zermelo–Fraenkel 集合论相容. 1963 年, Paul Cohen 证明了连续统假设独立于带有选择公理的 Zermelo–Fraenkel 集合论 (ZFC), 即 ZFC 既不能证明, 也不能证伪连续统假设.

在 1.3 节我们介绍了 Boole 猫猫. 我们可以在这样的猫猫中做 “经典数学”. 下面的内容本质上等同于 Cohen 证明连续统假设独立于 ZFC 所使用的方法, 只不过翻译到了猫猫的语境.

[4] 不过他的第一个证明并非现在流行的对角线论证.

命题 4.8.1

存在一个 Boole 猫猫, 其中选择公理成立, 而连续统假设不成立.

第 5 章　句法景与分类猫猫

5.1　句法范畴：语法–语义对偶

[未完成：两种不同的 **syntactic category**]
[未完成：写成单独的一章?]

> The importance of syntactic categories lies in the fact that they allow us to associate with a theory (in the sense of axiomatic presentation), which is a 'linguistic', unstructured kind of entity, a well-structured mathematical object whose 'geometry' embodies the syntactic aspects of the theory.
>
> Olivia Caramello, [3]

逻辑学上有一个一般性的现象，即理论（一阶逻辑，类型论等等）与范畴之间的对应．某些范畴可以为理论提供语义，某些理论可以作为范畴的语法．[未完成：]

我们将看到语法–语义对偶也是一种代数–几何对偶[1]，语法对应代数，语义对应几何．

类型论的语境范畴

附录 B.3 节简单介绍了类型论．

[1]或许也可以反过来说代数–几何对偶不过是一种语法–语义对偶．

定义 5.1.1

对于一种类型论 T, 其语境范畴 (category of contexts) $\mathrm{Con}(T)$ 定义如下.

- $\mathrm{Con}(T)$ 的对象为类型论 T 的语境;
- $\mathrm{Con}(T)$ 中的态射为语境之间的代换.

一阶理论的句法范畴

定义 5.1.2 (一阶理论的句法范畴)

设 $\mathbb{T}$ 是符号表 Σ 上的一阶理论. 定义句法范畴 (syntactic category) $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, 其中

- 对象是 Σ 上带有语境的公式 $(\vec{x}, \phi)$ 的 α-等价类 (α 等价是指两个公式仅有变量名的差异);
- 对象 $(\vec{x}, \phi)$ 到 $(\vec{y}, \psi)$ 的态射 (其中不妨设语境 $\vec{x}, \vec{y}$ 不交) 是公式 $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ 的 $\mathbb{T}$-可证等价类, 满足 $\mathbb{T}$-可证的函数性, 即如下相继式 $\mathbb{T}$-可证.
  - $\phi \vdash_{\vec{x}} \exists \vec{y}\, \theta$, 含义是 "对给定的 $\vec{x}$, 存在 $\vec{y}$ 满足 $\theta(\vec{x}, \vec{y})$";
  - $\theta \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \phi \wedge \psi$,
  - $\theta \wedge \theta[\vec{z}/\vec{y}] \vdash_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \vec{y} = \vec{z}$, 这里 $\theta[\vec{z}/\vec{y}]$ 是指将 θ 中的 $\vec{y}$ 替换为 $\vec{z}$, 公式的含义是 "对给定的 $\vec{x}$, 至多存在一个 $\vec{y}$ 满足 $\theta(\vec{x}, \vec{y})$".

注 5.1.3

句法范畴的态射又称变量代换.

注 5.1.4

由定义, 一个理论的句法范畴依赖于理论所属的类别 (代数, 正则, 凝聚, $\cdots$). 一个代数理论也可以视为凝聚理论, 但一个代数理论的句法范畴与它作为凝聚理论的句法范畴不同.

代数理论的句法范畴–Lawvere 理论

[未完成：万有代数]

命题 5.1.5

对于代数理论 $\mathbb{T}$,

例 5.1.6

CartSp

5.2 分类猫猫

> The notion of classifying topos really formalizes the notion of "content" of a mathematical theory. If you discover that two theories have the same classifying topos, this means that the two theories tell the same story in different languages.
>
> Olivia Caramello

对于拓扑群 G 存在分类空间 BG, 使得 (足够好的) 空间 X 上 G-主丛的等价类一一对应于 X 到 BG 的映射同伦类 (被 BG "分类"),

$$G\text{-}\mathsf{Bund}(X) \simeq [X, BG];$$

从而恒等映射 id_{BG} 对应着 BG 上一个 "万有" 的 G-主丛 $EG \to BG$, "万有" 意指任何 G-主丛都是通过某个映射 $X \to BG$ 将其拉回得到.

类似地, 在许多情形下, 猫猫上的一种结构可由它到一个特殊的猫猫的态射来分类, 这就是分类猫猫的概念; 分类猫猫到自身的恒等态射对应着其上的 "万有" 的这种结构.

G-旋子的分类猫猫

我们将看到, 分类猫猫不仅仅是分类空间的一个精神上的类比; 它某种意义上是分类空间的推广, 这种推广正是沿着 Grothendieck 的 "猫猫作为空间概念的推广" 的

思路.

下面的概念是 "空间上的 G-主丛" 的推广, 取自 [8] VIII.2 节.

定义 5.2.1 (猫猫上的 G-旋子)

设 G 为离散群, 即 Set 中的群. 设 $\gamma\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ 是 Set 上的猫猫 (见命题 3.5.3). 定义 C 上的一个 G-*旋子*[2](torsor over C) 为 C 的对象 T, 以及群对象 $\gamma^*(G)$ 在 T 上的作用 $\mu\colon \gamma^*(G) \times T \to T$, 满足

(i) 映射 $T \to 1$ 为满射;

(ii) 群作用 μ 诱导同构 $(\mu, \pi_2)\colon \gamma^*(G) \times T \to T \times T$.

例 5.2.2 (集合范畴中的 G-旋子)

由于集合范畴 Set 是一个点上的层范畴, Set 中的 G-旋子即是 "一个点上的 G-主丛", 即一个非空集合 T, 带有 G-左作用 $\mu\colon G \times T \to T$, 满足 $(\mu, \pi_2)\colon G \times T \to T \times T$ 为双射. 后一个条件等价于这个作用是自由且传递的: "自由" 等价于 $(\mu, \pi_2)\colon G \times T \to T \times T$ 为单射, "传递" 等价于其为满射.
有趣的是, 两个映射 $\mu, \pi_2\colon G \times T \to T$ 也可视为一个范畴 (具体地, G 在 T 上作用的*作用群胚*) 的箭头集合到对象集合的两个映射, 分别将一个箭头映射到其终点与起点. 那么 $(\mu, \pi_2)\colon G \times T \to T \times T$ 为双射就是说, 作用群胚的任何两个对象 x, y 之间有且仅有一个态射 $x \to y$.

例 5.2.3 (空间上的 G-主丛)

仍设 G 为离散群. 拓扑空间 X 上的 G-主丛等价于 (或可定义为) 平展映射 $E \to X$, 带有 X 上的 G-左作用 $G \times E \to E$, 使得每个纤维 E_x 非空且带有 G 的自由传递作用.
可以证明, 这个定义等价于层猫猫 $\mathrm{Sh}(X)$ 上 G-旋子的定义.

[2] Torsor 似乎没有通行的中文译名, 这可能是因为它在拓扑学中一般被称作主丛. 这里我跟随我的一位老师译为*旋子*.

例 5.2.4 (GSet 上的万有 G-旋子)

对于离散群 G, 考虑其自身作成的 G-右作用集合 R_G. 我们断言它是 GSet 上的 G-旋子.
首先回忆几何态射 $\gamma\colon G\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ (例 3.5.12), 其逆像函子 $\gamma^*\colon \mathsf{Set} \to G\mathsf{Set}$ 将集合对应到其自身, 带有平凡 G-右作用. 群作用 $\mu\colon \gamma^*(G) \times R_G \to R_G$, $(g,h) \mapsto gh$ 是 G-集合的态射, 因为 $\mu(g,hk) = ghk = \mu(g,h)k$. 映射 $(\mu,\pi_2)\colon \gamma^*(G) \times R_G \to R_G \times R_G$ 为 $(g,h) \mapsto (gh,h)$, 从而为 G-集合的同构.

猫猫上的旋子是 “旋子的理论” 的模型.

定义 5.2.5 (G-旋子的理论)

设 G 为离散群, 定义 G-旋子的理论 $\mathbb{T}_G$. 其中只有一个类型 T, 对每个元素 $g \in G$ 都有一个一元函数符号 g, 公理如下.

- (群作用) 对任意 $g,h \in G$ 有公理 $\vdash_x g(hx) = (gh)x$ (注意 “对任意” 不是这条公理的一部分, 这里实际上没有用到任意量词 $\forall$);
- (非空) $\vdash \exists x.\top$;
- (自由性) 对任意不同的 $g,h \in G$ 有公理 $(gx = hx) \vdash_x \bot$ (同上, 这里没有用到 $\forall$);
- (传递性) $\vdash_{(x,y)} \bigvee\limits_{g\in G} gx = y$.

理论 $\mathbb{T}_G$ 是一种几何理论 (定义 B.1.21), 因为它用到了 “真” $\top$, 存在量词 $\exists$, “假” $\bot$ 和无穷析取 $\bigvee$.

子终对象的分类猫猫

考虑范畴 $\mathsf{2} = \{\bullet \longrightarrow \bullet\}$. 例 1.2.6 介绍的 “变集范畴” $\mathsf{Fun}(\mathsf{2},\mathsf{Set}) \simeq \widehat{\mathsf{2}}$ 还有一个特殊的名字叫 *Sierpiński* 猫猫, 因为它与 Sierpiński 空间有关.

命题-定义 5.2.6 (Sierpiński 空间)

开集函子 $\mathrm{Open}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ 是可表函子, 其表示对象称为 *Sierpiński* 空间.

[未完成:]

环的分类猫猫, 万有环

本节以一种有些唐突的方式构造环的分类猫猫, 以及其中 “万有” 的环.

定义 5.2.7 (环)

设范畴 C 有有限极限. 定义 C 中的环为对象 R, 带有元素 $0, 1\colon 1 \to R$, 加法与乘法 $+, \times\colon R \times R \to R$, 满足通常的交换环的条件.
范畴 C 中的环构成一个范畴 $\mathsf{Ring}(\mathsf{C})$. 进一步, 对于两个这样的范畴 C, D, 保持有限极限的函子 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 诱导了函子 $\mathsf{Ring}(\mathsf{C}) \to \mathsf{Ring}(\mathsf{D})$.
特别地, 对于猫猫间的几何态射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 其逆像部分 (见定义 3.5.1) $f^*\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ 诱导了函子 $\mathsf{Ring}(\mathsf{D}) \to \mathsf{Ring}(\mathsf{C})$; 这表示 $\mathsf{Ring}(-)$ 是关于猫猫的反变函子.

下面我们将构造一个猫猫 E, 称为环的分类猫猫, 使得有自然的范畴等价

$$\mathsf{Ring}(\mathsf{C}) \simeq \mathsf{Hom}(\mathsf{C}, \mathsf{E}).$$

[未完成: 群的理论的分类猫猫]

考虑范畴 $\mathsf{A} = (\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}})^{\mathrm{op}}$, 其中 $\mathsf{Ring}_{\mathrm{fp}}$ 是 (Set 中) 有限表现 (finitely presented) 环的范畴 (见例 3.2.21). A 中有一个特殊的对象 $A = \mathbb{Z}[x]$, 也即仿射直线.

几何理论的分类猫猫

定义 5.2.8

设 $\mathbb{T}$ 为一几何理论.

第 6 章　高阶猫猫

6.1　∞-范畴

粗略地说, 一个 ∞-范畴含有如下成分: 对象, 对象之间的态射, 态射之间的 2-态射, $\cdots$, k-态射之间的 $(k+1)$-态射, 以至于无穷. 在实践中, ∞-范畴有许多不同而互相等价的模型, 就像一个算法由许多不同的编程语言实现. 单纯集 (定义 3.1.7) 就是一种实用的 “编程语言”. 如下是用单纯集表达的一种 ∞-范畴的模型, 是 Lurie [12] 使用的模型, 也是最简单的模型.

定义 6.1.1

定义单纯集 Δ^n 为米田嵌入的像 よ$([n])$. 对于单射 $[m] \to [n]$, 设其像为 J, 定义单纯集 Δ^J 为对于 $0 \leq k \leq n$, 定义 Λ^n_k 为 Δ^n 包含顶点 k 的各面之并, 称为*角形* (horn).

定义 6.1.2 (∞-范畴)

∞-*范畴*是满足如下条件的单纯集 X: 对所有整数 $0 < k < n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$$

是满射. ∞-范畴之间的态射是单纯集的态射.

定义 6.1.3 (∞-群胚)

正如集合范畴 Set 是范畴的 “原型”, 在 ∞-范畴中, 扮演这个角色的是某种 “空

间的范畴", 其中各阶态射表达了空间之间映射的同伦.

第 A 章　范畴论基础

A.1　伴随函子

伴随保持极限

命题 A.1.1

右伴随保持极限, 左伴随保持余极限.

证明. 设有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathsf{D} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd} \quad F \dashv G,$$

设 $X\colon I \to \mathsf{C}$ 是一个图 (I 是小范畴). 若极限 $\lim_i X_i$ 存在, 则有自然同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-, G\lim_i X_i) &\simeq \mathrm{Hom}(F-, \lim_i X_i) \\ &\simeq \lim_i \mathrm{Hom}(F-, X_i) \\ &\simeq \lim_i \mathrm{Hom}(-, GX_i) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(-, \lim_i GX_i). \end{aligned}$$

由米田引理, 得同构 $G\lim_i X_i \simeq \lim_i GX_i$, 故右伴随保持极限. 另一结论由对偶性即证. □

例 A.1.2

遗忘函子 Top $\to$ Set 同时有左伴随和右伴随:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[r, "遗忘"] & \mathsf{Set} \arrow[l, bend right, "离散"'] \arrow[l, bend left, "平凡"] \end{tikzcd}$$

因此这个遗忘同时保持极限与余极限; 换言之, 拓扑空间的极限与余极限可用底层集合的极限与余极限来计算.

命题 A.1.3 (伴随产生一对满子范畴的等价)

设有伴随

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D}, \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

其单位和余单位分别为 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{D}} \to GF$, $\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$. 考虑

- C 中由使得 $\eta_X : X \to GF(X)$ 为同构的 X 构成的满子范畴 $\widetilde{\mathsf{C}}$, 以及
- D 中由使得 $\epsilon_Y : FG(Y) \to Y$ 为同构的 Y 构成的满子范畴 $\widetilde{\mathsf{D}}$,

那么 F 与 G 限制为一对互逆的范畴等价

$$\widetilde{G}\colon \widetilde{\mathsf{C}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathsf{D}}, \quad \widetilde{F}\colon \widetilde{\mathsf{D}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathsf{C}}.$$

证明. 由条件, η 限制为自然变换

$$\widetilde{\eta}\colon \mathrm{id}_{\widetilde{\mathsf{D}}} \to \widetilde{G}\widetilde{F},$$

且 $\widetilde{\eta}$ 的每个分量 $\widetilde{\eta}_X : X \to \widetilde{G}\widetilde{F}(X)$ 均为同构. 因此 $\widetilde{\eta}$ 为自然同构. 另一边类似. □

A.2 预层范畴与米田引理

固定如下记号: C 为小范畴, よ$: \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}} = \mathsf{Fun}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 为米田嵌入. 本节参考了 [8] I.5 节.

可表函子的余极限

定义 A.2.1 (元素的范畴)

对 $X \in \widehat{\mathsf{C}}$, 定义 X 的元素的范畴 $\int_{\mathsf{C}} X$ 如下. 其对象为 (c,x), $x \in X(c)$, 态射 $(c,x) \to (d,y)$ 为 $f\colon c \to d$, 满足 $f(x) = y$.
由定义, 存在 "投影" 函子 $\pi_X\colon \int_{\mathsf{C}} X \to \mathsf{C}$, $(c,x) \mapsto c$.

注 A.2.2 (元素的范畴同构于 "广义俯范畴")

由米田引理, X 的元素的范畴同构于如下范畴: 其对象为态射 $\text{よ}(c) \to X$, 其态射为形如

$$\begin{tikzcd} \text{よ}(c) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{よ}(d) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

的交换图; 这是 $\widehat{\mathsf{C}}/X$ 的满子范畴. 若将 X 视为 C 的 "广义元素", 则 X 的元素的范畴可视为 "俯范畴" C/X.
此外, 也有人将这个范畴记作 $(\text{よ} \downarrow X)$, 它还有一个令人迷惑的名称 "逗号范畴" (comma category).

事实上, 所有态射 $\text{よ}(c) \to X$ 共同将 X 表示为一个余极限.

命题 A.2.3 (预层为可表函子的余极限)

$\widehat{\mathsf{C}}$ 的对象 X 是如下余极限:

$$X \simeq \operatorname{colim}\left(\text{よ} \circ \pi_X\colon \int_{\mathsf{C}} X \to \widehat{\mathsf{C}}\right),$$

其万有余锥由所有态射 $\text{よ}(c) \to X$ 给出.

证明. 任给余锥 $\left(\phi_{c,x}\colon \text{よ}(c) \to Y\right)_{(c,x)}$, 定义态射 $\eta\colon X \to Y$, $\eta_c\colon X(c) \to Y(c)$, $x \mapsto \phi_{c,x}$. 那么下图交换, 并且 η 是唯一使得下图交换的态射.

$$\begin{tikzcd} \text{よ}(c) \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "\phi_{c,x}"'] & X \arrow[d, "\eta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$\square$

例 A.2.4 (单纯集)

对于 $\mathsf{C} = \Delta$ (例 3.1.7), $\widehat{\mathsf{C}}$ 中对象 X 的元素可视为单纯集 X 中的单纯形, 包含退化的单纯形. 此时上述命题即是说 X 等同于其所有单纯形的粘合. 这符合了单纯集是由单纯形组成的直观.

自由余完备化

在上个小节, 我们看到 $\widehat{\mathsf{C}}$ 是 C 经过某种添加余极限的过程得到的余完备范畴. 称 $\widehat{\mathsf{C}}$ 为 C 的自由余完备化 (free cocompletion); 以下命题解释了这句话中 “自由” 的含义, 即余完备范畴到一般范畴的 “遗忘” 的左伴随.

命题 A.2.5

设 C 是 (小) 范畴, D 是余完备范畴, 那么米田嵌入 $\text{よ}\colon \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}$ 给出了等价

$$\text{よ}^*\colon \mathsf{Fun}^{\mathrm{colim}}(\widehat{\mathsf{C}}, \mathsf{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D}),$$

其中 $\mathsf{Fun}^{\mathrm{colim}}$ 表示保持余极限的函子构成的范畴. 换言之, 对任意函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 存在本质唯一的保持余极限的函子 $L\colon \widehat{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$ 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, "\text{よ}"] \arrow[dr, "F"'] & \widehat{\mathsf{C}} \arrow[d, dashed, "L"] \\ & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

例 A.2.6

Set 是终范畴 1 的自由余完备化; 这就是说, 对任意余完备范畴 D, 一个保持余极限的函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{D}$ 由对象 $F(1)$ 唯一确定.

事实上我们可以具体写出命题 A.2.5 中的函子 L.

命题 A.2.7

设 C 是 (小) 范畴, D 是余完备范畴. 对任意函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, 存在一对伴随

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathsf{C}} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D}, \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}$$

其中 $R\colon \mathsf{D} \to \widehat{\mathsf{C}}$, $R(d) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(F-, d)$; 其左伴随 L 由如下余极限给出:

$$L(X) = \mathrm{colim}\left(F \circ \pi_X \colon \int_{\mathsf{C}} X \to \mathsf{D}\right).$$

作为左伴随, L 自然保持余极限 (命题 A.1.1).

注 A.2.8

上面的伴随可解读为 "脉" (nerve, 函子 R) 与 "几何实现" (geometric realization, 函子 L) 的伴随, 其中 C 是某种几何形状的范畴 (如下面例子中的 Δ). 脉与几何实现的概念由 Daniel Kan 1958 年的文章 *Functors involving c.s.s complexes* 提出. 这篇文章也首次引入了 Kan 扩张.

注 A.2.9

上面的伴随还可解读为一种张量–同态伴随. 左伴随 L 也记为 $-\otimes_{\mathsf{C}} F\colon \widehat{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$.

例 A.2.10 (单纯集的几何实现)

设 $\mathsf{C} = \Delta$ (例 3.1.7), $\mathsf{D} = \mathsf{Top}$ 为拓扑空间范畴. 我们知道 Top 是余完备的. 设 $F\colon \Delta \to \mathsf{Top}$ 将 $[n]$ 对应到 n-维标准拓扑单形, 也即 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 $(n+1)$ 个基向量的闭包. 那么命题 A.2.7 给出了 "脉–几何实现伴随"

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[r, shift left, "|-|"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top}, \arrow[l, shift left, "\mathrm{Sing}"] \end{tikzcd}$$

其中 "脉" 函子 Sing 给出拓扑空间的奇异单纯集 (singular simplicial set).

例 A.2.11 (几何空间与函子 Ring $\to$ Set 的几何实现)

(本例需要一些背景知识.) 定义几何空间 (又称局部环化空间) $(X, \mathcal{O}_X)$ 为拓扑空间 X 配备环层 $\mathcal{O}_X$, 使得每个茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ (定义 3.3.3) 为局部环. 我们知道几何空间的范畴 GeoSp 是余完备的.

设 $\mathsf{C} = \mathsf{Aff}$ 为仿射概形的范畴 (它等价于交换环范畴的对偶 $\mathsf{Ring}^{\mathrm{op}}$), $\mathsf{D} =$ GeoSp 为几何空间的范畴. 我们知道仿射概形是几何空间, 即存在嵌入函子 $F\colon \mathsf{Aff} \to \mathsf{GeoSp}$. 注意到 $\widehat{\mathsf{C}} \simeq \mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}, \mathsf{Set})$. 那么命题 A.2.7 给出 "脉–几何实现伴随"

$$\mathsf{Fun}(\mathsf{Ring}, \mathsf{Set}) \underset{R}{\overset{|-|}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\scriptstyle\perp}}}} \mathsf{GeoSp},$$

其中右伴随 R 给出几何空间的*点函子* (functor of points), 它是代数几何中表示几何空间的一种方便工具. 这对伴随给出两边某个满子范畴的等价 (命题 A.1.3), 这个满子范畴正是*概形*的范畴. 换言之, 概形既可视为满足某些条件的几何空间, 又可视为满足某些条件的函子 Ring $\to$ Set.

这个例子取自 Demazure 和 Gabriel 的书 *Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups* 1.1 节.

预层范畴的俯范畴

预层范畴的俯范畴仍是预层范畴. 这个事实可证明预层范畴的局部积闭性.

命题 A.2.12

预层范畴的俯范畴等价于 "广义俯范畴" 上的预层范畴:

$$\widehat{\mathsf{C}}/X \simeq \widehat{\mathsf{C}/X}.$$

证明. 在如下证明中, 我们将 $s \in X(c)$ 等同于态射 $s\colon よ(c) \to X$.

对于 $\widehat{\mathsf{C}}/X$ 的对象 $F \to X$, 定义 C/X 上的预层

$$G = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}/X}(-, F).$$

具体地, G 在 C/X 的对象 $s\colon よ(c) \to X$ 上的取值为 s 在映射 $F(c) \to X(c)$ 下的原像.

反过来, 对于 C/X 上的预层 G, 定义 $\widehat{\mathsf{C}}/X$ 的对象 $F \to X$ 如下. 预层 F 为

$$F(c) := \coprod_{s\colon よ(c) \to X} G(s),$$

带有自然的投影 $F(c) \to X(c)$ (将 $G(s)$ 映射到 s), 也即自然变换 $F \to X$.

容易验证, 上述两个构造是互逆的范畴等价. □

注 A.2.13

将 $\widehat{\mathsf{C}}$ 的元素 X 视为 (以 C 的对象为模型的) 广义空间, 态射 $F \to X$ 视为 X 上的 “广义丛”, 则上述命题可视为广义丛与其 “截面层” 之间的伴随等价 (对比命题 3.3.6 以及平展空间的构造 3.3.5).

例 A.2.14

设 $\mathsf{C} = 1$ 是终范畴, X 是 $\widehat{\mathsf{C}} \simeq \mathsf{Set}$ 的对象, 那么 $\mathsf{C}/X \simeq X$ (视为离散范畴). 此时上述命题化为

$$\mathsf{Set}/X \simeq \mathsf{Set}^X.$$

A.3 Kan 扩张

本节取自 nLab 页面 *Kan extension*; 另外 [16] 1.7 节也介绍了这一概念.

定义 A.3.1 (Kan 扩张)

设 $p\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 为函子. 对另一范畴 D, 记 $p^*\colon \mathsf{Fun}(\mathsf{C}', \mathsf{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ 为 p 诱导的函子, 即 $h\colon \mathsf{C}' \to \mathsf{D}$ 对应 $p^*h\colon \mathsf{C} \xrightarrow{p} \mathsf{C}' \xrightarrow{h} \mathsf{D}$.

- 若 p^* 有左伴随 $p_!\colon \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathsf{C}', \mathsf{D})$, 则称之为沿 p 的*左 Kan 扩张*;
- 若 p^* 有右伴随 $p_*\colon \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathsf{C}', \mathsf{D})$, 则称之为沿 p 的*右 Kan 扩张*.

对比例 3.5.9 中的记号.

定义 A.3.2 (局部 Kan 扩张)

设 $p\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 为函子. 对函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$,

- 若存在 $p_! F\colon \mathsf{C}' \to \mathsf{D}$ 使得有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})}(F, p^* -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C}',\mathsf{D})}(p_! F, -),$$

  则称 $p_! F$ 为 F 沿 p 的左 *Kan* 扩张;

- 若存在 $p_* F\colon \mathsf{C}' \to \mathsf{D}$ 使得有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})}(p^* -, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C}',\mathsf{D})}(-, p_* F),$$

  则称 $p_* F$ 为 F 沿 p 的右 *Kan* 扩张.

例 A.3.3 (极限)

设 C' 为终范畴 1, 那么 $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}', \mathsf{D}) \simeq \mathsf{D}$, 函子 $p^*\colon \mathsf{D} \to \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ 将 D 的对象 d 对应到常值函子 $\mathrm{const}_d\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$.
对函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$,

- F 的左 Kan 扩张是余极限,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})}(F, \mathrm{const}_d) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\operatorname{colim} F, d);$$

- F 的右 Kan 扩张是极限,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})}(\mathrm{const}_d, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(d, \lim F).$$

例 A.3.4 (沿米田嵌入的 Kan 扩张)

设 $\mathsf{C}' = \widehat{\mathsf{C}}$, $p = よ\colon \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}$ 为米田嵌入. 设 D 为余完备范畴. 由命题 A.2.5, 任意函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 都有沿 よ 的唯一的左 Kan 扩张 よ

[未完成: 用 **Kan** 扩张定义预层的逆像]

A.4 单子论

本节参考了 [8] IV.4 节和代数学著名教材 [16] 的 7.6 节.

定义 A.4.1 (单子)

范畴 C 上的一个单子 (monad) (T,η,μ) 是一个自函子 $T\colon \mathsf{C}\to\mathsf{C}$, 以及两个自然变换 $\mu\colon T^2\to T$, $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{C}}\to T$, 满足自函子范畴 $\mathsf{End}(\mathsf{C})$ 中幺半群的条件, 即如下交换图.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

注 A.4.2

在历史文献中可见单子的曾用名 “三元组” (triple), 这个名字是无趣的. 相对有趣的是, 单子被某些作者称为代数理论 (algebraic theory). 后面我们将说明单子与代数理论 (定义 B.1.21) 的关系.

命题-定义 A.4.3 (伴随产生单子)

一对伴随函子

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

确定了一个单子 (T,η,μ), 其中 $T=GF\colon \mathsf{C}\to\mathsf{C}$, $\eta\colon \mathrm{id}_C\to GF$ 是单位, 而 $\mu\colon T^2=GFGF\to GF$ 由余单位 $\epsilon\colon FG\to\mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ 给出.

定义 A.4.4 (T-代数)

设 T 是范畴 C 上的单子. 定义范畴 C 上的 T-代数为 C 的对象 X 配备一个态射 $h\colon TX \to X$, 满足如下交换图.

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_X"'] & TX \arrow[d, "h"] \\ TX \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & TX \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

C 上两个 T-代数之间的态射即是 C 中保持上述交换图的态射. 记 C 上 T-代数的范畴为 C^T.

命题-定义 A.4.5 (比较函子)

在伴随产生的单子 (命题 A.4.3) 中, 存在 D 到 T-代数范畴的*比较函子* (comparison functor) $K\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}^T$, 将对象 d 对应到 T-代数 Gd, 其 T-代数结构为

$$TGd = GFGd \xrightarrow{G\epsilon} Gd.$$

例 A.4.6 (集合与 M-集合之间的自由–遗忘伴随)

设 M 是 (集合范畴 Set 中的) 幺半群, 那么 $T\colon X \mapsto M \times X$ 给出了集合范畴上的一个单子, 自然变换 $\mu\colon T^2 \to T$ 由 M 的乘法 $M \times M \to M$ 给出. 定义 A.4.1 中的交换图对应 M 的结合律和左右单位律.

记 $\mathsf{B}M$ 为带有 M-作用的集合的范畴, 那么 Set 与 $\mathsf{B}M$ 之间有如下的伴随, 其中 “自由” 函子将集合 X 对应到 $M \times X$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Set} \arrow[r, shift left, "\text{自由}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{B}M \arrow[l, shift left, "\text{遗忘}"] \end{tikzcd}$$

单子 T 正是这对伴随由命题 A.4.3 给出的单子 “遗忘 $\circ$ 自由”.

此时, 一个 T-代数 (X, h) 即为一个带有 M-作用的集合, $h\colon M \times X \to X$ 为 M-作用, 而定义 A.4.4 中的交换图则对应 M-作用的结合律和单位律. 因此, 比较函子 $K\colon \mathsf{B}M \to \mathsf{Set}^T$ 是范畴的同构.

例 A.4.7 (集合与幺半群之间的自由–遗忘伴随)

以 Mon 表示幺半群范畴, 那么集合范畴 Set 与 Mon 之间存在伴随

$$\mathsf{Set} \underset{\text{遗忘}}{\overset{\text{自由}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Mon}.$$

这对伴随给出的单子 $T=$ 遗忘 $\circ$ 自由: $\mathsf{Set}\to\mathsf{Set}$ 将集合 X 对应到 X 生成的自由幺半群的底层集合

$$TX=\coprod_{n\geq 0} X^n,$$

也即 X 上列表的集合. 自然变换 $\mu\colon T^2\to T$ 将 "列表的列表" 拼接起来变为一个列表. 一个 T-代数 X 即为一个幺半群. 比较函子 $K\colon\mathsf{Mon}\to\mathsf{Set}^T$ 恰好也是范畴的同构.

例 A.4.8 (反变幂集函子与其对偶函子的伴随)

反变幂集函子是指 Set 上的幂对象函子 $P\colon\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ (定义 1.1.24). 考虑其对偶 (即同一个函子, 不过所有箭头反向) $P^{\mathrm{op}}\colon\mathsf{Set}\to\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$. 自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}}(P^{\mathrm{op}}Y,X)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X,PY)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X\times Y,\Omega)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(Y,PX)$ 表明有如下伴随.

$$\mathsf{Set} \underset{P}{\overset{P^{\mathrm{op}}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$$

在代数–几何对偶之下, 集合作为 "几何" 对应的 "代数" 称为完备原子型 *Boole* 代数 (complete atomic Boolean algebra). [**未完成:**]

在上述几个例子中, 我们发现 T-代数的范畴恰好同构于伴随另一边的范畴; 因此这一对伴随恰好可视为范畴 C 与其上的 T-代数范畴 C^T 之间的自由–遗忘伴随.

一般地, 我们将同构放宽为等价, 得到如下的定义.

定义 A.4.9 (单子性伴随)

设一对伴随函子

$$\mathsf{C} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{D}$$

确定了一个单子 $T=GF\colon\mathsf{C}\to\mathsf{C}$. 若比较函子 $K\colon\mathsf{D}\to\mathsf{C}^T$ 构成范畴等价,

则称这对伴随为单子性伴随 (monadic adjunction), 称右伴随 G 为单子性函子. 换言之, G 可视为 C 上某个单子的代数范畴到 C 的遗忘函子.

例 A.4.10 (自反子范畴)

自反子范畴 (reflective subcategory) 是一种满子范畴, 其嵌入函子有左伴随.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D} \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, hook, bend right, "i"'] & \mathsf{C} \arrow[l, bend right, "a"'] \end{tikzcd}$$

例如层范畴是预层范畴的满子范畴, 此时 a 为层化 (命题 3.4.10).
自反子范畴的嵌入 $i\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ 是单子性函子; 也即子范畴 D 的对象可视为单子 $ia\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 的代数.

[未完成：单子与代数理论]

第 B 章　形式逻辑基础

B.1　一阶语言

为了把讨论的话题放在一般的框架中, 我们需要先引入逻辑学中的若干基本概念. 这些概念可以视为 “数学语言由什么构成” 这个问题的一种完全形式化的回答. 写出语言的形式定义之前, 我们先从日常的数学语言中最熟悉的例子开始, 对语言的每个成分建立感性的认知.

数学语言中最常见的成分是*公式* (formula).

例 B.1.1 (公式)

$1+1=2$ 是一个公式, 其中

- $1, 2$ 是自然数, 即是*类型* (type) $\mathbb{N}$ 的*项* (terms);
- 加法 $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个映射;
- 将两个 1 放在一起得到 $(1,1)$, 它的类型是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$;
- 以 $+$ 作用于 $(1,1)$, 得到 $1+1$, 类型为 $\mathbb{N}$;
- 以 $=$ 连接类型 $\mathbb{N}$ 的两个项 $1+1$ 与 2, 得到公式 $1+1=2$.

公式中可以带有*变量* (variables).

例 B.1.2 (带自由变量的公式)

$y = x^2$ 是一个带自由变量 (free variables) 的公式, 其中

- x, y 是类型 $\mathbb{R}$ 的变量, 变量是项的一种, 所以 x, y 也是类型 $\mathbb{R}$ 的项;
- $(-)^2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 以 $(-)^2$ 作用于 x 得到 x^2, 它是类型 $\mathbb{R}$ 的项, 带一个自由变量 x;
- 以 $=$ 连接类型 $\mathbb{R}$ 的两个项 y 与 x^2, 得到公式 $y = x^2$.

对公式中的自由变量, 我们可使用 "存在" 和 "任意" 这两个量词 (quantifiers).

例 B.1.3 (带量词的公式)

$\neg\exists x\ x^2 = -1$ 是一个不含自由变量的公式, 其中

- x 是类型 $\mathbb{R}$ 的变量, x^2 是类型 $\mathbb{R}$ 的项, 带一个自由变量 x;
- $x^2 = -1$ 是带一个自由变量 x 的公式;
- 量词 $\exists x$ 放在含自由变量 x 的公式前面, 得到不含自由变量的公式 $\exists x\ x^2 = -1$ (变量 x 在这里称为约束变量 (bound variable));
- 逻辑运算 $\neg$ ("非") 放在公式 $\exists x\ x^2 = -1$ 前面, 得到公式 $\neg\exists x\ x^2 = -1$.

例 B.1.4 (素数)

如下公式表达了 "p 是素数":

$$\neg(p = 1) \wedge \forall x\big((\exists y\ x \cdot y = p) \Rightarrow (x = 1 \vee x = p)\big),$$

其中 x, y, p 是类型 $\mathbb{N}$ 的变量, 整个公式有一个自由变量 p.

符号表

语言的形式化定义依赖于一个符号表 (signature).[1]

[1] 逻辑学中的 signature 似乎没有通行的中文译名. 由于它给出了语言中所用的符号的集合, 试译为符号表.

定义 B.1.5 (符号表)

一个 (一阶) 符号表 Σ 由如下内容构成:

- 一族类型 (types), 每个类型可有任意多个变量 (variables)[2];
- 一些函数符号 (function symbols), 每一个函数符号 f 具有固定的类型 $A_1, \cdots, A_n, B$, 记作 $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$, 非负整数 n 称为 f 的元数 (arity); (当 $n = 0$ 时, 函数符号是 "零元函数", 也即类型 B 的常数.)
- 一些关系符号 (relation symbols), 又叫谓词 (predicates), 每一个关系符号 R 具有固定的类型 $A_1, \cdots, A_n$, 记作 $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$, 非负整数 n 称为 R 的元数. (当 $n = 0$ 时, 关系符号是 "零元关系", 也即原子命题 (atomic proposition).)

注 B.1.6

如果我们在定义 B.1.5 中加入类型的有限积, 那么就不需要多元函数和多元关系; 但这样定义也有一些代价, 例如本来只有一个类型 G 的语言将会需要无穷多个类型 $1, G, G^2, \cdots$.
另外, 在定义 B.1.5 中, 关系符号与函数符号被区分开了; 但在通常的数学语言中我们可以认为某类型 A 上的关系符号不过是 A 到 "真值集合" 类型 $\{\top, \bot\}$ 的函数符号. 在一般意象的内语言中, $\{\top, \bot\}$ 的角色由子对象分类子 Ω 扮演.

例 B.1.7 (初等算术)

初等算术的语言的符号表包括

- 类型 $\mathbb{N}$;
- 常数 0, 一元函数符号 S (后继), 二元函数符号 $+, \times$ (加法, 乘法);
- 关系符号 $<$.

[2] 要求一个类型有任意多个变量的目的是, 在任何场景我们都可以自由地声明一个此前从未出现的变量. 类型 X 的变量 x 不是 X 的元素, 只是一个形式上的符号, 不携带任何信息. 你可以想象 x 是 "未定元", 但这种说法不具有数学上的含义.

例 B.1.8 (Zermelo–Fraenkel 集合论)

Zermelo–Fraenkel (简称 ZF) 集合论的符号表包括

- 类型 S (“所有东西都是集合”);
- 二元关系符号 $\in$.

例 B.1.9 (群)

群的语言的符号表包括

- 类型 G;
- 常数 1 (单位元), 一元函数符号 $(-)^{-1}\colon G \to G$ (逆), 二元函数符号 $\cdot\colon GG \to G$ (乘法);

没有关系符号[3].
读者可试着写出环的符号表.

例 B.1.10 (小范畴)

小范畴的语言的符号表包括

- 类型 O (对象), M (态射);
- 一元函数符号 $s, t\colon M \to O$, (态射的起点与终点), 一元函数符号 $\mathrm{id}\colon O \to M$ (对象的恒等态射);
- 三元关系符号 $C \hookrightarrow MMM$, $C(f, g, h)$ (“h 等于 $f \circ g$”).

注意, 范畴中并非任意两个态射都能复合, 故表达复合关系只能使用三元关系符号, 而不能使用二元函数符号.

[3]或者说有一个关系符号 “=”. 等号是默认存在的.

项, 公式

定义 B.1.11 (项)

设 Σ 为一符号表, 其上的项 (terms) 由如下条款归纳定义.

- 一个类型 A 的单独一个变量 x 是一项;
- 对于函数符号 $f\colon A_1\cdots A_n \to B$, 若 $x_1,\cdots,x_n$ 分别是类型 $A_1,\cdots,A_n$ 的项, 则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是类型 B 的项.

定义 B.1.12 (公式的形成规则)

语言中的公式 (formulae) 有如下形成规则 (formation rules), 同时我们归纳地定义公式中的自由变量 (free variables).

(i) (关系) 对于关系符号 $R \hookrightarrow A_1\cdots A_n$, 若 $x_1,\cdots,x_n$ 分别是类型 $A_1,\cdots,A_n$ 的项, 则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是公式, 其中的自由变量是所有在某个 x_i 中出现的变量;

(ii) (等式) 对于相同类型的项 x,y, $(x=y)$ 是公式, 其中的自由变量是所有出现在 x 或 y 中 (或两者兼有) 的变量;

(iii) (真) $\top$ 是公式, 其中没有自由变量;

(iv) (且, 又叫合取) 对于公式 ϕ,ψ, $(\phi\wedge\psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(v) (假) $\perp$ 是公式, 其中没有自由变量;

(vi) (或, 又叫析取) 对于公式 ϕ,ψ, $(\phi\vee\psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(vii) (蕴含) 对于公式 ϕ,ψ, $(\phi\Rightarrow\psi)$ 是公式, 其中自由变量是 ϕ 与 ψ 的自由变量的并;

(viii) (否定) 对于公式 ϕ, $\neg\phi$ 是公式, 其中自由变量即为 ϕ 的自由变量;

(ix) (存在量词) 对于公式 ϕ 以及变量 x, $\exists x.\phi$ 是公式, 其中的自由变量为 ϕ 的自由变量去掉 x (我们允许 ϕ 中不含 x);

(x) (任意量词) 对于公式 ϕ 以及变量 x, $\forall x.\phi$ 是公式, 其中的自由变量为 ϕ 的自由变量去掉 x;

(xi) (无穷析取) 对于公式 $\phi_i\,(i \in I)$, 若其中的自由变量有限, 则 $\bigvee_{i\in I} \phi_i$ 是公式 (包括 $\perp$), 其中的自由变量为 ϕ_i 的自由变量的并;

(xii) (无穷合取) 对于公式 $\phi_i\,(i \in I)$, 若其中的自由变量有限, 则 $\bigwedge_{i\in I} \phi_i$ 是公式 (包括 $\top$), 其中的自由变量为 ϕ_i 的自由变量的并.

注 B.1.13

在语法的层面, 项与公式是两种不同的东西; 但后面将会介绍, 在意象的内语言中公式不过是 Ω 类型的项.

定义 B.1.14

对于固定的符号表 Σ, 几类公式由如下形成规则定义.

- *原子公式* (atomic formulae), 关系与等式.
- *正则公式* (regular formulae), 关系与等式, 真, 二元合取, 存在量词.
- *凝聚公式* (coherent formulae), 关系与等式, 真, 二元合取, 存在量词, 假, 二元析取.
- *一阶公式* (first-order formulae), 所有有限规则.
- *几何公式* (geometric formulae), 关系与等式, 真, 二元合取, 存在量词, 假, 无穷析取.
- *无限一阶公式* (infinitary first-order formulae), 所有规则.

例 B.1.15

在环的语言中, “x 幂零” 可表达为如下的*几何公式* (使用无穷析取):

$$(x = 0) \vee (x \cdot x = 0) \vee (x \cdot x \cdot x = 0) \vee \cdots ;$$

“x 可逆” 可表达为如下的几何公式 (使用存在量词):

$$\exists y.xy = 1.$$

但如下表达 “非零元都可逆” 的公式不是几何公式:

$$\neg(x = 0) \Rightarrow \exists y.xy = 1,$$

因为使用了 “蕴涵”.

注 B.1.16

由有限规则定义的一类公式构成集合, 而后两类公式 (几何公式, 无限一阶公式) 只能说构成类.
由于几何公式可能涉及无穷析取, 它不再属于 (有限的) 一阶逻辑.

相继式, 理论

定义 B.1.17 (语境)

语境 (context) 是一列有限个互不相同的变量[4] $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.
对于公式 ϕ (定义 B.1.12) 与语境 $\vec{x}$, 若 $\vec{x}$ 包含了 ϕ 的所有自由变量, 则称 $\vec{x}$ *适合于* (is suitable for) ϕ.

定义 B.1.18 (相继式)

符号表 Σ 上的一个*相继式* (sequent) 是指一个形式的表达式

$$\phi \vdash_{\vec{x}} \psi,$$

意指 “在语境 $\vec{x}$ 中, 若 ϕ, 则 ψ”, 其中 ϕ, ψ 是符号表 Σ 上的公式, $\vec{x}$ 是一个适合于 ϕ, ψ 的语境.
我们用 $\vdash_{\vec{x}} \psi$ 表示 $\top \vdash_{\vec{x}} \psi$.

[4]注意这里 “互不相同” 是指变量的名称不同, 而不是 “值” 不同; 变量是一个形式的记号, 没有 “值”.

注 B.1.19

在完整的一阶逻辑中不需要一般的相继式, 因为 $\phi \vdash_{(x_1,\cdots,x_n)} \psi$ 可表示为 $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n(\phi \Rightarrow \psi)$.

定义 B.1.20 (理论)

符号表 Σ 上的一个**理论** (theory) $\mathbb{T}$ 是若干条**公理** (axioms) 的集合, 每个公理是 Σ 上的一个相继式.

定义 B.1.21 (几类不同的理论)

- 称理论 $\mathbb{T}$ 为**代数理论**, 是指其符号表中没有关系符号 (等号除外), 且其公理形如 $\vdash_{\vec{x}} \phi$, ϕ 为形如 $s = t$ 的原子公式.
- 称理论 $\mathbb{T}$ 为**正则 (凝聚, 几何, $\cdots$) 理论**, 是指其公理只涉及正则 (凝聚, 几何, $\cdots$) 公式.

每种一阶逻辑都有配套的**推理系统** (deduction system). 推理系统中会给出形如

$$\frac{\Gamma}{\sigma}$$

的推理规则, 表示由若干相继式 Γ 可以得到相继式 σ. 双横线表示上下两个相继式由任何一个可得另一个.

首先是**相继式演算** (sequent calculus) 的结构性规则 (structural rules).

定义 B.1.22 (相继式演算的结构性规则)

- **恒等公理** (identity axiom),

$$\frac{}{\phi \vdash_{\vec{x}} \phi}.$$

- **替换规则** (substitution rule), 记 $\phi[t/y]$ 为将公式 ϕ 中的自由变量 y 替换为同类型的项 t 所得的公式, 那么有规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\phi[t/y] \vdash_{\vec{x}} \psi[t/y]}.$$

- 剪切规则 (cut rule),

$$\frac{\Gamma \vdash_{\vec{x}} \Delta, \phi \quad \phi, \Sigma \vdash_{\vec{x}} \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash_{\vec{x}} \Delta, \Pi}.$$

(这里公式 ϕ 被 “剪掉” 了.)

在结构性规则的基础上, 一阶逻辑还可能包含如下规则.

定义 B.1.23 (一阶逻辑的推理系统)

一个一阶逻辑推理系统由如下规则的一部分构成.

- 有限合取规则, 包含公理

$$\phi \vdash_{\vec{x}} \top \quad (\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \phi \quad (\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \psi$$

与推理规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x}} \psi \quad \phi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\phi \vdash_{\vec{x}} (\psi \wedge \chi)}.$$

- 有限析取规则, 包含公理

$$\bot \vdash_{\vec{x}} \phi \quad \phi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi) \quad \psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi)$$

与推理规则

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x}} \chi \quad \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{(\phi \vee \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi}.$$

- 无限合取与析取规则, 其公理与推理规则与前两条类似.
- 蕴涵规则, 有公理

$$\frac{\phi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \chi}{\overline{\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \Rightarrow \chi)}}.$$

- 存在量词规则, 有公理

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x}, y} \psi}{\overline{(\exists y.\phi) \vdash_{\vec{x}} \psi}},$$

其中 ψ 不含自由变量 y.

- 任意量词规则, 有公理

$$\frac{\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi}{\overline{\phi \vdash_{\vec{x}} (\forall y.\psi)}}.$$

- 分配公理

$$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\vec{x}} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi).$$

- *Frobenius* 公理

$$\phi \wedge (\exists y.\psi) \vdash_{\vec{x}} \exists y.(\phi \wedge \psi).$$

- 排中律

$$\top \vdash_{\vec{x}} \phi \vee \neg\phi.$$

注 B.1.24

上述的规则是纯粹形式的, 不具有任何含义.

几种常见的推理系统如下.

定义 B.1.25

在结构性规则的基础上, 几种常见的推理系统有如下规则.

- 代数逻辑 (algebraic logic), 没有附加规则.
- 正则逻辑 (regular logic), 有限合取, 存在量词, Frobenius 公理.
- 凝聚逻辑 (coherent logic), 有限合取与析取, 存在量词, 分配公理, Frobenius 公理.
- 几何逻辑 (geometric logic), 有限合取, 无限析取, 存在量词, 无限分配公理, Frobenius 公理.
- 直觉主义一阶逻辑 (intuitionistic first-order logic), 除排中律以外的所有有限规则.
- 经典一阶逻辑 (classical first-order logic), 所有有限规则.

定义 B.1.26

称相继式 σ 在代数 (正则, 凝聚, $\cdots$) 理论 $\mathbb{T}$ 下可证, 就是指在对应的推理系统中, 由 $\mathbb{T}$ 的公理可以推导出 σ.

例 B.1.27 (初等算术的理论)

继续例 B.1.7, 初等算术的一种理论有如下的公理:

- $\vdash_x \neg(Sx = 0)$;
- $Sx = Sy \vdash_{(x,y)} x = y$;
- $\neg(x = 0) \vdash_x \exists y.Sy = x$;
- $\cdots$ (略)

初等算术有许多不同但互相等价的公理系统.

例 B.1.28 (Zermelo–Fraenkel 集合论)

继续例 B.1.8, ZF 有如下的公理 (我们将 $\forall y.y \in x \Rightarrow \cdots$ 简记为 $\forall y \in x.\cdots$, 将 $\exists y.y \in x \wedge \cdots$ 简记为 $\exists y \in x.\cdots$, 将 $\forall z \in x.z \in y$ 简记为 $x \subset y$, 并且参考注 B.1.19 省略符号 $\vdash_{\ldots}$):

- (外延) $\forall x.\forall y.\forall z.(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$;
- (配对) $\forall x.\forall y.\exists z.\forall w.\big(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y)\big)$;
- (并) $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in y \Leftrightarrow \exists w \in x.z \in w)$;
- (幂集) $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in y \Leftrightarrow z \subset x)$;
- (无穷) $\exists x.\exists y \in x.\forall z \in x.\exists t \in x.z \subset t \wedge z \neq t$;
- (良基) $\forall x.\forall y \in x.\exists z \in x.\forall w \in x.(\neg w \in z)$;
- (分离公理模式) 对每个公式 ϕ (不含自由变量 y), 有一条公理 $\forall x.\exists y.\forall z.(z \in x \Leftrightarrow z \in x \wedge \phi)$;
- (替换公理模式) 对每个公式 ϕ (不含自由变量 w), 有一条公理 $\forall x.\big[(\forall y \in x.\exists! z.\phi) \Rightarrow \exists w.\forall y \in x. \Rightarrow \exists z \in w.\phi)\big]$, 其中 $\exists! z.\phi$ 是指 $\exists z.\phi \wedge \big(\forall z.\forall z'.(\phi \wedge \phi[z'/z]) \Rightarrow z' = z\big)$.

ZF 是一种经典一阶理论.

例 B.1.29 (群的理论)

继续例 B.1.9, 群的理论有如下的公理:

- $\vdash_{(x,y,z)} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- $\vdash_x x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$;
- $\vdash_x 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

群的理论是一种代数理论 (定义 B.1.21).
类似地, 读者可写出环的理论的公理. 环的理论也是一种代数理论.

例 B.1.30 (小范畴的理论)

继续例 B.1.10, 小范畴的理论有如下的公理:

$$s(f) = t(g) \vdash_{(f,g)} \exists h\, C(f, g, h),$$

表示首尾相接的两个态射可以复合.
这个例子取自 [3] 1.2.1 节.

例 B.1.31 (局部环的理论)

在代数中, *局部环*[5]是指满足如下条件的环 R:

- $0 \neq 1$,
- 对任意 $x, y \in R$, 若 $x + y = 1$, 则 x 与 y 至少有一个可逆.

局部环的理论是环的理论加上两条公理

- $(0 = 1) \vdash \perp$,
- $x + y = 1 \vdash_{(x,y)} (\exists z.xz = 1) \vee (\exists z.yz = 1)$.

由于使用了 $\perp$, $\vee$ 和存在量词 $\exists$, 这个理论不是代数理论; 但它是一种凝聚理论, 因为所用的公式都是凝聚公式 (定义 B.1.14).
读者还可试着写出整环的理论, 并说明它也是一种凝聚理论.

例 B.1.32 (域的理论)

域是指非零元均可逆的环. 在环的理论中加入公理

- $\vdash_x (x=0) \vee (\exists y. xy = 1)$

就得到了一种域的理论[6]. 它也是一种*凝聚理论*.

例 B.1.33 (K-代数的理论)

设 K 是一个固定的环. 回忆 K-代数是带有 K 的数乘作用的环. 定义 K-代数的理论: 在环的理论中加入 K 的每个元素 a 作为一个函数符号 m_a, 且对每组元素 a, b 加入如下公理,

- $\vdash_x m_a(x+y) = m_a(x) + m_a(y)$;
- $\vdash_{(x,y)} m_a m_b(x) = m_{ab}(x)$;
- $\vdash_x m_{a+b}(a) = m_a(x) + m_b(x)$.

这样, 对于每个多项式 $p \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 我们就可以在 K-代数的理论中谈论公式 $p(x_1, \cdots, x_n) = 0$; 反之, 这个理论中的原子公式都等价于这种形式的公式. 由定义, 对固定的环 K, K-代数的理论是一种*代数理论*.

注 B.1.34

一阶逻辑能够表达的理论是有限的. 例如*挠群* (torsion group, 即所有元素都是有限阶元素的群) 没有一阶理论. 另外, 在域的一阶理论中, 不存在一个公式表达 "x 是单位根". 参见 [11] 第一讲.

范畴语义

一阶逻辑可在具体的范畴中获得*解释* (interpretation), 又称*范畴语义* (categorical semantics).

---

[5] 局部环还有一种使用极大理想的定义, 但它难以用一阶理论表达.

[6] 在构造主义数学中, 域有不止一种理论, 它们只是恰好在集合范畴 (Boole 猫猫) 中有相同的模型.

定义 B.1.35 (范畴中的 Σ-结构)

固定符号表 Σ. 设范畴 C 有有限乘积. 定义 C 中的一个 Σ-结构 M 为如下信息:

- 对 Σ 中的每个类型 A, 指定 C 的对象 MA;
- 对 Σ 中的每个函数符号 $f\colon A_1 \cdots A_n \to B$, 指定 C 的态射 $Mf\colon MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$;
- 对 Σ 中的每个关系符号 $R \hookrightarrow A_1 \cdots A_n$, 指定 C 中的子对象 $MR \hookrightarrow MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

范畴 C 中两个 Σ-结构之间的态射 $h\colon M \to N$ 是一族态射 $h_A\colon MA \to NA$, 满足合适的交换图. 所有 Σ-结构构成一个范畴 Σ-Str(C).

命题 B.1.36

设 C, D 是具有有限乘积的范畴, $F\colon$ C $\to$ D 是保持有限乘积与子对象的函子. 那么 F 诱导了函子 Σ-Str(F): Σ-Str(C) $\to$ Σ-Str(D).

不同逻辑的范畴语义需要范畴上不同的结构.

定义 B.1.37 (正则范畴)

若一个范畴中存在有限极限和像 (定义 1.3.11), 且拉回保持像, 则称之为*正则范畴* (regular category).

定义 B.1.38 (凝聚范畴)

若一个*正则范畴*中所有对象的子对象格都存在*有限并*, 且被拉回保持, 则称之为*凝聚范畴* (coherent category).

定义 B.1.39 (几何范畴)

若一个*正则范畴*中所有对象的子对象格都存在*任意并*, 且被拉回保持, 则称之为*几何范畴* (geometric category).

B.2 高阶逻辑

[未完成:]

B.3 类型论

A logic is always a logic over a type theory.

Bart Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*

类型论是一种做数学的视角. 类型论中的一切对象, 包括命题 (甚至命题的证明) 都有一个合适的类型. 仅仅通过检查一个对象的类型, 就能验证推理的正确性. 关于类型论的更详细介绍见 [4].

很难给类型论下一个精确的定义. 我们先来看两种风味的类型论.

例 B.3.1 (简单类型论)

简单类型论 (simple type theory, STT) 的风格:

- $n\colon \mathbb{N}$ (“n 是类型 $\mathbb{N}$ 的项”);
- $\mathsf{succ}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (“后继 succ 是函数类型 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的项”);
- $n\colon \mathbb{N}, m\colon \mathbb{N} \vdash n+m\colon \mathbb{N}$ (“设有类型 $\mathbb{N}$ 的项 n, m, 则可以构造类型 $\mathbb{N}$ 的项 $n+m$”), 这里的符号 $\vdash$ 与一阶逻辑中的符号 $\vdash$ 含义不同, 它的左边 $n\colon \mathbb{N}, m\colon \mathbb{N}$ 是一列变量的声明, 称为语境;
-

[未完成: 简单类型论与高阶逻辑的关系]

例 B.3.2 (依值类型论)

- “n 维向量空间” 是依赖于 $n\colon \mathbb{N}$ 的一族类型.

这种风味的类型论叫*依值类型论* (dependent type theory, DTT).

范畴论与类型论有深刻的联系, 本节的目的即是介绍这种联系.

在类型论的学者眼中, 任何逻辑的基础都是一种类型论, 一种对所考虑的类型的项作演算的方法.

定义 B.3.3 (类型论, 粗略定义)

一般地, 一种类型论由如下要件组成:

- 类型的*形成法则* (formulation rules), 即 (从已有类型) 构造新类型的方法;
- 项的*引入法则* (introduction rules), 即构造一个类型的项的方法;
- 项的*消去法则* (elimination rules), 即使用一个类型的项的方法;
- *计算法则* (computation rules), 以等式表示将*消去法则*作用于*引入法则*上的结果.

例 B.3.4 (Martin-Löf 类型论)

空类型

- 形成法则 $0\colon \mathsf{Type}$

例 B.3.5 (群的理论)

B.4　模态逻辑

在形式逻辑中, 模态 (modality) 或模态算子 (modal operator) 是一种将命题变为命题的算子, 通常用 $\Box$, $\Diamond$, $\bigcirc$ 等符号表示. 直觉上, 一个模态算子 $\Box$ 的含义是

$$\Box p = \text{“}p \text{ 以某种方式成立”}.$$

例 B.4.1 (可能性与必然性)

在许多文献中, $\Box$ 表示 “必然性”, $\Diamond$ 表示 “可能性”. 如下是两者的一些性质:

- $\Box p \Rightarrow p$ (必然成立蕴涵实际上成立), $p \Rightarrow \Diamond p$ (实际上成立蕴涵可能成立);
- $\Box(p \wedge q) = \Box p \wedge \Box q$, $\Diamond(p \vee q) = \Diamond p \vee \Diamond q$;
- $\Box\Box p = \Box p$, $\Diamond\Diamond p = \Diamond p$;
- ...

可能性与必然性模态的一种实现方式是考虑 “所有可能世界的集合”, 或 “所有可能观测结果的集合”. 一个命题可能成立就是说存在一个可能世界使得该命题成立; 一个命题必然成立就是说在任意可能世界中该命题都成立. 考虑一个猫猫 C 中对象 X 产生的三元伴随 (命题 1.1.38, 注 1.3.15), 想象 X 为 “所有可能世界的集合”.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}/X \arrow[r, shift left=4, "-\ \Sigma_X"] \arrow[r, shift right=4, "-\ \Pi_X"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] & \mathsf{C}, \arrow[l, "X^* -" description] \end{tikzcd}$$

令

$$\Diamond = X^*\Sigma_X, \quad \Box = X^*\Pi_X.$$

在此种实现下, 可能性 $\Diamond$ (存在) 是必然性 $\Box$ (任意) 的左伴随.

参考文献

[1] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*. Vol. 269, 270, 305. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971.

[2] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3*. Cambridge Univrsity Press, 2008.

[3] Olivia Caramello. *Theories, Sites, Toposes*. Oxford University Press, 2018.

[4] Trebor Huang. 类型论简史. `https://github.com/Trebor-Huang/history`. 2023.

[5] Peter T. Johnstone. “On a Topological Topos”. In: *Proc. London Math. Soc.* (1979). DOI: `https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.2.237`.

[6] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant*. Oxford University Press, 2002.

[7] André Joyal. *A crash course in topos theory : the big picture*. IHES. 2015. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=Ro8KoFFdtS4`.

[8] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer New York, 1994.

[9] René Lavendhomme. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*. Springer New York, NY, 1996.

[10] Zhen Lin. *What is a Lawvere–Tierney topology?* Mathematics Stack Exchange. URL: `https://math.stackexchange.com/q/177894`.

[11] Jacob Lurie. *Categorical Logic (278x)*. 2018. URL: `https://www.math.ias.edu/~lurie/278x.html`.

[12] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.

[13] Ieke Moerdijk and Gonzalo E. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer New York, NY, 1990.

[14] Alex Simpson. "Measure, randomness and sublocales". In: *Annals of Pure and Applied Logic* 163.11 (2012). Kurt Goedel Research Prize Fellowships 2010, pp. 1642–1659. ISSN: 0168-0072. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.apal.2011.12.014`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007211001874`.

[15] The Stacks project authors. *The Stacks project*. `https://stacks.math.columbia.edu`. 2023.

[16] 李文威. *代数学方法: 卷二*. 高等教育出版社 (尚未出版), 2023. URL: `https://www.wwli.asia/downloads/books/Al-jabr-2.pdf`.