盲人摸象 (∞)

∞-意象理论讲义

王进一
jin12003@163.com
QQ 2917905525

2024 年夏至今

此版本编译时间: 2024 年 8 月 23 日

这是一本正在施工的讲义. 目前我迫切需要读者的意见!

目录

第 0 章　前言

本书是意象理论讲义“盲人摸象”的续篇, 讲述 ∞-意象理论, 即意象理论的 ∞-范畴版本. 范畴论的大部分内容 (包括意象理论) 都有在 ∞-范畴中的类比, 但后者包含许多新的现象, 这些新内容是本书的重点.

第 1 章 ∞-范畴的形式语言

The traditional way in the literature to provide foundations (for higher category theory) is via the theory of *quasi-categories*, which in turn rests on set theory. While this can be done, the language of set theory is simply not very adequate to model homotopical notions, ...

Denis-Charles Cisinski, [1]

像许多 ∞-范畴论的文献一样, 本书使用 ∞-范畴的一种公理化语言. 我们不是从 ∞-范畴的任何一种定义 (或模型) 出发, 而是以公理的形式刻画期望中 ∞-范畴的行为. 这样我们可以获得模型无关 (model-independent) 的结果.

1.1 ∞-范畴中的结构与性质

连通性与截断性

定义 1.1.1 (n-截断 ∞-群胚)

设 $n \geq -1$ 为整数. 称一个 ∞-群胚 X n-截断 (或称其为 *n-群胚*) 是指其所有大于 n 阶的同伦群 $\pi_k(X)\,(k > n)$ 均平凡.

定义 1.1.2 (n-群胚)

设 $n \geq -1$ 为整数. 称一个 ∞-群胚 X n-截断是指 X 为关于 $\{S^{n+1} \to *\}$ 的局部对象.

例 1.1.3 (低维群胚的例子)

在同伦等价的意义下,

- (-2)-群胚是一个点.
- (-1)-群胚是空集或一个点.
- 0-群胚是集合, 也即离散群胚.

东西, 结构, 性质

第 2 章 ∞-意象的范畴论结构

Quite contrary to superficial perception, higher topos theory provides just the mathematical context that physicists are often intuitively but informally assuming anyway.

Urs Schreiber, [4]

$$\begin{tikzcd} \text{集合} \arrow[d, rightsquigarrow] & \text{意象} \arrow[d, rightsquigarrow] \\ \text{空间} & \infty\text{-意象} \end{tikzcd}$$

[**未完成: HTT Ch.6 ∞-意象**]

定义 2.0.1 (自反局部化)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, 定义 $\mathcal{C}$ 的一个自反局部化为函子 $a\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, 其具有全忠实的右伴随. 进一步, 若 a 为正合函子 (保持有限极限), 则称之为*正合局部化*. 这与普通范畴中的自反局部化在语法上完全相同.

如下是 Grothendieck 意象的 ∞ 版本.

定义 2.0.2 (∞-意象)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 若存在 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个正合局部化

$$\widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{X},$$

则称 $\mathcal{X}$ 为 (Grothendieck) ∞-意象.

2.1 Grothendieck 拓扑与层

[未完成: 层, HTT 6.2.2]

2.2 Giraud 定理

命题 2.2.1 (∞-意象的等价定义, ∞-Giraud 公理)

∞-意象等价于局部小, 可表现, 余完备, 拉回保持余极限, 且内群胚有效的 ∞-范畴.

第 3 章 ∞-意象与上同调

数学中许多名为某某上同调的概念可以在同一个框架下谈论.

定义 3.0.1 (上同调)

给定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X, A, 定义 X 的取值于 A 的 0 阶上同调为

$$H^0(X,A) := \pi_0 \operatorname{Hom}(X,A).$$

态射 $c\colon X \to A$ 称为上圈 (cocycle), 态射的同伦 $c_1 \to c_2$ 称为上边界 (coboundary), 等价类 $[c] \in \pi_0 \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)$ 称为上同调类 (cohomology class). 通常我们考虑的范畴 $\mathcal{C}$ 是 ∞-意象.

例

例 3.0.2 (奇异上同调, K-理论等)

$A = K(\mathbb{Z}, n)$

例 3.0.3 (层上同调)

例 3.0.4 (群上同调)

第 4 章　∞-意象与 ∞-丛

第 5 章　凝集意象

[T]he existence of a nontrivial shape operation on types is what reflects that types may carry a nontrivial topological (or more generally: cohesive) quality in the first place.

Urs Schreiber, [3]

5.1　凝集的动机, 基本概念

拓扑空间范畴 Top 与集合范畴 Set 之间存在如下的伴随四元组,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left=4.5, "\Pi_0"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=1.5, "\Gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift right=1.5, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, shift left=4.5, "\mathrm{codisc}"]
\end{tikzcd}$$

其中

- Π_0 给出拓扑空间的连通分支的集合;
- disc 将集合对应到离散空间;
- Γ 将拓扑空间遗忘为其底层集合;
- codisc 将集合对应到余离散空间 (即只有空集和全集两个开集的拓扑空间).

定义 5.1.1 (凝集意象)

凝集意象 (cohesive topos)[1] 是指一个意象 $\mathcal{E}$ 带有如下伴随四元组,

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] \mathcal{E} \arrow[r, shift left=6, "\Pi_0"] \arrow[r, shift right=2, "\Gamma"'] & \mathsf{Set} \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{disc}"'] \arrow[l, shift right=6, "\mathrm{codisc}"] \end{tikzcd}$$

使得 Π_0 保持有限乘积.

例 5.1.2 (集合族)

考虑 “集合族范畴” $\mathsf{Fam} = \mathsf{Fun}(\bullet \to \bullet, \mathsf{Set})$. 将 Fam 的对象 $W \to X$ 想象为一个大集合 W 分成了 X 那么多组, 每一组是这个映射的一个纤维. Fam 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto X$, “将每一组捏成一个点”;
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}, X \mapsto (\mathrm{id} \colon X \to X)$, “将一个集合每个点当作一组”;
- $\Gamma \colon \mathsf{Fam} \to \mathsf{Set}$, $(W \to X) \mapsto W$, “忘记分组”;
- $\mathrm{codisc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Fam}$, $X \mapsto (X \to \{*\})$, “将一个集合整体当作一组”.

例 5.1.3 (单纯集)

单纯集范畴 sSet 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, 即 X 的连通分支的集合;
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, 将集合 X 对应到常值单纯集 (也就是离散单纯集) X;
- $\Gamma \colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X_0 = \mathrm{Hom}(\Delta^0, X)$;
- $\mathrm{codisc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{sSet}$, $\mathrm{codisc}(X)_n := X^{n+1}$.

例 5.1.4 (光滑空间)

光滑空间范畴 $\mathsf{SmoothSp} = \mathrm{Sh}(\mathsf{CartSp})$ (例 **??**) 是一个凝集意象, 其中

- $\Pi_0 \colon \mathsf{SmoothSp} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto \mathrm{coeq}(X(\mathbb{R}^1) \rightrightarrows X(\mathbb{R}^0))$, 其中两个态射分别是层 X 取值于 $0, 1 \colon \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^1$ (简而言之, $\Pi_0(X)$ 是 X 的道路连通分支的集合);
- $\mathrm{disc} \colon \mathsf{Set} \to \mathsf{SmoothSp}$, 将集合 X 对应到 “离散光滑空间” X;

- $\Gamma\colon \mathsf{SmoothSp} \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X(\mathbb{R}^0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{SmoothSp}}(\mathbb{R}^0, X)$, 将光滑空间对应到其底层集合;
- $\mathrm{codisc}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{SmoothSp}$, $\mathrm{codisc}(X)(\mathbb{R}^n) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathbb{R}^n, X)$.

第 A 章　∞-范畴的模型

A.1　∞-范畴: 单纯集模型

粗略地说, 一个 ∞-范畴含有如下成分: 对象, 对象之间的态射, 态射之间的 2-态射, $\cdots$, k-态射之间的 $(k+1)$-态射, 以至于无穷. 我们使用的 ∞-范畴又称 $(\infty,1)$-范畴, 意为对所有 $k>1$, k-态射都可逆.

在实践中, ∞-范畴有许多不同而可以互相转化的模型, 就像一个算法由许多不同的编程语言实现. 单纯集就是一种实用的 “编程语言”, 它提供了从集合开始模拟出 ∞-范畴的方法.

定义 A.1.1 (角形)

回忆单纯集 Δ^n 为 $[n]\in\Delta$ 在米田嵌入下的像 よ$([n])$. 对于单射 $[m]\to[n]$, 设其像为 J, 定义单纯集 Δ^J 为对应的态射 $\Delta^m\to\Delta^n$ 的像 (作为 Δ^n 的子对象). 对于 $0\le k\le n$, 定义

$$\Lambda^n_k := \bigcup_{k\in J\neq[n]} \Delta^J,$$

称为*角形* (horn). 其中对应 $0<k<n$ 的角形称为*内角形* (inner horn).

角形是用来描述单纯集模型 ∞-范畴中一些结构的图形. 如下是角形 Λ^2_k $(k=0,1,2)$ 的示意图. 可以看到它们是互不同构的单纯集 (尽管它们的几何实现都是互相同胚的), 其中内角形 Λ^2_1 中的两个箭头可以复合, 而 Λ^2_0,Λ^2_2 中的箭头不能复合.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$$

Λ^2_0　　Λ^2_1　　Λ^2_2

定义 A.1.2 (∞-范畴)

∞-范畴 (又称拟范畴) 是满足如下条件的单纯集 $\mathcal{X}$: 对所有整数 $0 < k < n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, \mathcal{X})$$

是满射; 换言之, 如下提升总存在 (但不要求唯一):

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & X. \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

称之为内角形的填充 (filler).

设单纯集 $\mathcal{X}$ 是 ∞-范畴. 定义

- $\mathcal{X}$ 中的对象为 X_0 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^0 \to X$;
- $\mathcal{X}$ 中的态射 (箭头) 为 X_1 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^1 \to X$, 对象 x 上的恒等态射 id_x 为映射 $\Delta^1 \to \Delta^0 \xrightarrow{x} X$;
- $\mathcal{X}$ 中的实心三角形为 X_2 的元素, 即单纯集映射 $\Delta^2 \to X$, 对于实心三角形 $\begin{tikzcd}[column sep=small] & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z, \end{tikzcd}$ 称 h 为 f 与 g 的一个复合. (很明显, 复合不是唯一的.) 若 id_x 为 f, g 的一个复合, 则称 g 为 f 的一个逆. (当然, 逆也不是唯一的.)

定义 A.1.3 (单纯集的对偶)

考虑函子 $(-)^{\mathrm{op}} \colon \Delta \to \Delta$. 对于单纯集 $\mathcal{X}$, 定义其对偶 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} := \mathcal{X} \circ (-)^{\mathrm{op}} \colon \Delta \to \mathsf{Set}$.

例 A.1.4 (普通范畴的脉)

回忆一个普通范畴 $\mathcal{C}$ 的脉 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ (例 **??**) 定义如下,

$$\mathrm{N}\mathcal{C}_n = \mathsf{Fun}(0 \to 1 \to \cdots \to n, \mathcal{C}),$$

即 $\mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ 的元素是 $\mathcal{C}$ 中连续的 n 个箭头. 由于对任意 $0 < k < n$, Λ^n_k 都包含一条折线 $0 \to 1 \to \cdots \to n$, 故映射 $\Lambda^n_k \to \mathrm{N}(\mathcal{C})$ 总能提升为 $\Delta^n \to \mathrm{N}(\mathcal{C})$, $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ 是一个 ∞-范畴.

注 A.1.5 (∞-范畴单纯集模型的注意事项)

定义 A.1.2 中有两点需要注意; 如果忽视这两点, 就会得到另外两种东西.

- 只有内角形可以填充. 若所有角形都可以填充, 则可证明 $\mathcal{X}$ 的所有态射都可逆, 我们称之为 *∞-群胚*.
- 内角形填充不要求唯一. 若内角形填充存在且唯一, 则 $\mathcal{X}$ 实际上来自一个普通范畴的脉. 直观上, ∞-范畴是一种 “弱化” 的范畴, 其中的复合是在同伦意义下谈论的. 可以证明[1], 对 ∞-范畴中的两个态射 $f\colon x \to y, g\colon y \to z$, 其所有可能的复合构成一个*可缩 Kan 复形* (定义 A.1.9).

因此, ∞-范畴可视为普通范畴与 ∞-群胚的共同推广.

命题-定义 A.1.6 (∞-群胚, Kan 复形模型)

定义 *∞-群胚* (又称 *Kan 复形*) 是满足如下等价条件之一的 ∞-范畴 $\mathcal{X}$:

- $\mathcal{X}$ 中所有态射都可逆;
- $\mathcal{X}$ 中所有角形都可填充, 即对所有整数 $0 \le k \le n$,

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$$

  是满射.

证明. [未完成:] $\square$

例 A.1.7 (基本 ∞-群胚)

拓扑空间 X 的奇异单纯集 $\operatorname{Sing} X$ 是 ∞-群胚, 称为其*基本 ∞-群胚* $\pi_\infty(X)$.

命题-定义 A.1.8 (函子, 函子范畴)

定义 ∞-范畴之间的*函子*为单纯集的映射. 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 与任意单纯集 A, 单纯集的指数对象 $\mathcal{X}^A$ 都是 ∞-范畴. 特别地, 对于无穷范畴 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 定义*函子范畴* $\mathsf{Fun}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. 函子范畴中的态射称为*自然变换* (换言之, 两个函子 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 之间的自然变换是单纯集映射 $\Delta^1 \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$).

[1] `https://kerodon.net/tag/0078`

定义 A.1.9 (范畴等价, 可缩)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 之间的函子 $u\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, 称 u 为一个等价是指存在函子 $v\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$, 以及两个可逆的自然变换 $uv\to \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\to vu$. 称等价于 Δ^0 的 ∞-范畴是可缩的.

定义 A.1.10 (态射集)

对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 以及其中的对象 x,y, 定义单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y)$ 为如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^1,\mathcal{X}) \arrow[d, "{(s,t)}"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x,y)}"'] & \mathcal{X}\times\mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

其中 $s,t\colon \mathsf{Fun}(\Delta^1,\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ 将 $\mathcal{X}$ 的态射对应到其起点与终点.
更一般地, 对 $\mathcal{X}$ 中 $n+1$ 个对象 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 为如下的拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x_0,\cdots,x_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^n,\mathcal{X}) \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x_0,\cdots,x_n)}"'] & \mathcal{X}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

如果 ∞-群胚是空间的模型, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y)$ 就是两点 x,y 之间的道路的空间.

例 A.1.11

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-群胚, x 为其中的对象, 那么单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,x)$ 在同伦论上又叫环路空间 $\Omega(\mathcal{X},x)$, 其连通分支的集合给出基本群 $\pi_1(\mathcal{X},x)$.

如下命题表示我们考虑的 ∞-范畴中 “k-态射都可逆” $(k>1)$.

命题 A.1.12

对 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 中的任意两个对象 x,y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(x,y)$ 是 ∞-群胚.

同伦

命题-定义 A.1.13 (态射的同伦, 同伦范畴)

对于两个态射 $f, g\colon x \to y$, 称 f **同伦于** g 是指 g 为 f 与 id_y 的一个复合; 记 $f \sim g$.
态射的同伦为等价关系.
对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, 定义其**同伦范畴** $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 为如下的范畴: $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象即为 $\mathcal{X}$ 的对象, 态射为 $\mathcal{X}$ 中态射的同伦类, 态射的复合是良定义的.

证明. 我们证明同伦是一个等价关系: 由下面的示意图以及 ∞-范畴的定义, 可知若 $f \sim g$ 则 $g \sim f$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & y \\
y \arrow[r, "\mathrm{id}_y"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_y"] & y \arrow[u, "\mathrm{id}_y"']
\end{tikzcd}$$

□

有趣的是, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ (视为单纯集), 同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 正是 $\mathcal{X}$ 在 Cat 中的几何实现 (卷 1 例 A.4.14). 它是将 ∞-范畴 "截断" 为 1-范畴的结果.

命题 A.1.14

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, 考虑函子 $\mathcal{X} \to \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}))$ 将 $\mathcal{X}$ 的点映射到 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 的对象, n-单形映射到 $\mathrm{Ho}(X)$ 的连续 n 个态射. 那么这个函子给出了范畴的同构

$$|\mathcal{X}| \simeq \mathrm{Ho}(\mathcal{X}),$$

其中 $|-|$ 是卷 1 例 A.4.14 提到的脉函子的左伴随.

同伦范畴还可通过单纯范畴定义: 由定义 A.1.23, 对于 ∞-范畴 $\mathcal{X}$, $\mathfrak{C}[\mathcal{X}]$ 是一个 sSet-充实范畴; 将其中的态射单纯集替换为连通分支便得到同伦范畴. 见 HTT [2] 定义 1.1.5.14. 总结起来, 我们有如下图表.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[rr, shift left, "\mathrm{Ho}"] \arrow[dr, shift left, "{\mathfrak{C}[-]}"] & & \mathsf{Cat} \arrow[ll, shift left, "\mathrm{N}"] \arrow[ll, phantom, "\perp"] \arrow[dl, shift left, "i"] \\
& \mathsf{sCat} \arrow[ul, shift left, "\mathrm{N}^c"] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \arrow[ur, shift left, "\mathrm{ho}"] \arrow[ur, phantom, "\perp"] &
\end{tikzcd}$$

我们还需要描述 ∞-范畴的全子范畴.

定义 A.1.15 (全子范畴)

设 $\mathcal{C}$ 是 ∞-范畴, $\mathcal{S} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 是其同伦范畴的子范畴. 定义 $\mathcal{S}$ 张成的 $\mathcal{C}$ 的全子范畴为如下 (作为单纯集的) 拉回.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \times_{\mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}))} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{S} \arrow[r] & \mathrm{N}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C})) \end{tikzcd}$$

单纯范畴

∞-范畴的另一种模型是用单纯范畴描述的, 其优点包括

- 用单纯范畴模型方便给出某些具体的 ∞-范畴以及函子;
- 单纯范畴中态射的复合唯一定义;

但这种模型的同伦论较难处理.

定义 A.1.16 (单纯范畴)

单纯范畴是指充实于 sSet 的范畴. 具体地, 我们有一个对象集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 对 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有一个单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, 对 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有恒等态射 $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Hom}(x, x)$, 对 $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 有单纯集映射

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z),$$

满足结合律与幺元律.
等价地, 单纯范畴也可定义为小范畴范畴 Cat 中的内蕴单纯集 $\mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$, 满足 “对象的单纯集” $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \mathrm{Ob} \circ \mathcal{C}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ 是常值单纯集.
记 (小) 单纯范畴的范畴为 sCat, 其中的态射是单纯范畴之间的 sSet-充实函子.

定义 A.1.17 (纤维性单纯范畴)

若单纯范畴 $\mathcal{C}$ 的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 均为 Kan 复形 (即前面定义的 ∞-群胚), 则称之为纤维性 (fibrant) 单纯范畴; 它是 ∞-范畴的另一种模型. 换言之, ∞-范畴可视为充实于 ∞-群胚的范畴.

例 A.1.18 (拓扑空间范畴)

拓扑空间范畴 Top 具有单纯范畴结构:

$$\mathrm{Hom}(X,Y)_n := \{\text{连续函数 } |\Delta^n| \times X \to Y\ \}.$$

命题-定义 A.1.19 (∞-范畴的极大子 ∞-群胚)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴. 记 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为所有边都可逆的单形 $\Delta^n \to \mathcal{X}$ 构成的子单纯集, 则 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 为 $\mathcal{X}$ 的*极大子 ∞-群胚*, 即任何 ∞-群胚到 $\mathcal{X}$ 的函子唯一地穿过 $\mathcal{X}^{\simeq}$; ∞-群胚 $\mathcal{X}^{\simeq}$ 又称 $\mathcal{X}$ 的*核心* (core). (关于普通范畴的极大子群胚, 见例 **??**.)

例 A.1.20 (∞-范畴的单纯范畴)

记 $\infty\mathsf{Cat}$ 为 (小) ∞-范畴的范畴 (它是一个普通范畴), 对 ∞-范畴 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 定义 $\mathrm{Hom}_{\infty\mathsf{Cat}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 为 $\mathsf{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 的极大子 ∞-群胚; 这样 $\infty\mathsf{Cat}$ 构成一个纤维性单纯范畴.

例 A.1.21 (链复形范畴)

设 R 为环, $\mathsf{Ch}(R)$ 为 R 上的链复形的范畴. 回忆 R 上的*链复形*是指 R-模范畴中的一个图表

$$M_\bullet = \cdots \to M_2 \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0 \xrightarrow{\partial} M_{-1} \xrightarrow{\partial} M_{-2} \to \cdots,$$

满足 $\partial \circ \partial = 0$. $\mathsf{Ch}(R)$ 可赋予单纯范畴结构. 首先构造 $\mathbb{Z}$ 上的链复形 $C_\bullet(\Delta^n)$: 对于 $0 \le k \le n$ 其第 k 位置是 Δ^n 的非退化 k-单形自由生成的 Abel 群, 边界映射 $\partial := \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i$ 来自单形的面映射 d_i. 例如

$$C_\bullet(\Delta^2) = \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3 \to 0 \to \cdots.$$

(熟悉代数拓扑的读者知道, $C_\bullet(X)$ 就是用于计算单纯同调 $H_\bullet(X)$ 的那个链复形.) 定义

$$\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(R)}(M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet(\Delta^n), N_\bullet).$$

这个范畴是 (现代的) 代数 K-理论的起点. 函子 $C_\bullet\colon \Delta \to \mathsf{Ch}(\mathbb{Z})$ 给出的脉–几何实现伴随限制为单纯 Abel 群与非负位置链复形之间的范畴等价

$$\mathsf{sAb} \underset{\mathrm{N}}{\overset{|-|_{C_\bullet}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}} \mathsf{Ch}_{\ge 0}(\mathbb{Z}),$$

称为 *Dold–Kan 对应*.

定义 A.1.22 (偏序集的道路范畴)

对于偏序集 $(S,\leq)$, 定义其*道路范畴*为一个单纯范畴 $\mathrm{Path}(S)$, 其对象集为 S, 对两个元素 $x,y\in S$, 单纯集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}(S)}(x,y)$ 是 “由 x 到 y 道路的空间”, 它定义为所有形如 $\{x=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_m=y\}$ 的链构成的偏序集的脉, 其序关系为包含关系的反序 (最大元为 $x\leq y$). $\mathrm{Path}(S)$ 中态射的复合即是链的并.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left, "0\leq 2"] \arrow[rr, bend right, "0\leq 1\leq 2"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow"] \arrow[dr, "0\leq 1"'] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur, "1\leq 2"'] &
\end{tikzcd}
$$

S $\qquad\qquad$ $\mathrm{Path}(S)$

定义 A.1.23 (单纯范畴的融贯脉)

考虑函子 $\mathrm{Path}\colon\Delta\to\mathsf{sCat}$, 其对应的脉–几何实现伴随 (命题 **??**, 但要使用 sSet-充实版本)

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[r, shift left, "\mathfrak{C}[-]"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{sCat} \arrow[l, shift left, "\mathrm{N}^{\mathrm{c}}"]
\end{tikzcd}
$$

中的脉 N^{c} 称为单纯范畴的*融贯脉*[2](coherent nerve). 另一边, “几何实现” $\mathfrak{C}[-]$ 又称为拟范畴的 *Joyal 固化* (rigidification).

我们不加证明地陈述如下技术性引理.

命题 A.1.24

纤维性单纯范畴的融贯脉是 ∞-范畴.

定义 A.1.25 (∞-范畴的 ∞-范畴)

定义 ∞-范畴的 ∞-范畴, 以及 ∞-群胚的 ∞-范畴为

$$\infty\mathcal{C}at:=\mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Cat}),\quad \infty\mathcal{G}pd:=\mathrm{N}^{\mathrm{c}}(\infty\mathsf{Gpd}).$$

正如集合范畴 Set 是范畴的 “原型”, 在 ∞-范畴中, 扮演这个角色的是 $\infty\mathcal{G}pd$. 它可视为某种 “空间” (不一定是传统意义上的拓扑空间) 的 ∞-范畴, 其中各阶态射表达了空间之

[2] 又称同伦融贯脉 (homotopy coherent nerve).

间映射的各阶同伦; 许多作者直接称其为空间的 ∞-范畴, 如 HTT [2] 1.2 节. 我们将会看到, 类似于 Set 是终范畴 1 自由生成的余完备范畴, $\infty\mathcal{G}pd$ 是 1 自由生成的余完备 ∞-范畴.

伴随

定义 A.1.26 (∞-范畴之间的伴随)

∞-范畴之间的一对伴随 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$ 是如下资料,

- 两个 ∞-范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$,
- 两个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (称为左伴随), $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (称为右伴随),
- 两个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ (称为单位), $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ (称为余单位);

满足如下 2-态射的关系,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"'] & {} \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & {} & \mathcal{D} \end{tikzcd} \sim \mathrm{id}_F, \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & {} \arrow[d, phantom, "\eta\Downarrow"] & \mathcal{C} \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & {} & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \sim \mathrm{id}_G,$$

其中第一个式子中 $\sim$ 表示 id_F 是 ∞-范畴 $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中两个态射 $F \to FGF$, $FGF \to F$ 的一个复合.

记 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 为 $\infty\mathcal{C}at$ 的同伦 2-范畴, 其中 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$. 由定义, ∞-范畴之间的伴随等同于 $\mathrm{Ho}_2(\infty\mathcal{C}at)$ 中的伴随.

命题 A.1.27 (∞-范畴之间的伴随与 Hom-函子)

设 $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\perp}{\leftrightarrows}}} \mathcal{C}$ 为 ∞-范畴之间的伴随, 则对任意对象 $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, 函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(C), G(D)) \xrightarrow{\eta_C^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

为同伦等价.

极限与余极限

定义 A.1.28 (终对象, 始对象)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{X}$ 中的对象. 若对任意对象 y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(y,x)$ 都可缩, 则称 x 为 $\mathcal{X}$ 的一个终对象. 对偶地定义始对象.
等价的定义是, $\mathcal{X}$ 的终对象是 (唯一的) 函子 $\mathcal{X}\to 1$ 的右伴随 $1\to\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ 的始对象是函子 $\mathcal{X}\to 1$ 的左伴随 $1\to\mathcal{X}$; 这告诉我们终对象和始对象的概念实际上存在于 ∞-范畴构成的 2-范畴中, 见例 **??**.

定义 A.1.29 (俯范畴, 仰范畴)

设 $\mathcal{X}$ 为 ∞-范畴, x 为 $\mathcal{X}$ 中的对象. 定义俯范畴 $\mathcal{X}/x$ 为如下的拉回:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}/x \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}(\Delta^1,\mathcal{X}) \arrow[d, "t"] \\
\Delta^0 \arrow[r, "x"'] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

其中 $t\colon \mathsf{Fun}(\Delta^1,X)\to X$ 将 $\mathcal{X}$ 的态射对应到其终点.

由定义, 俯范畴 $\mathcal{X}/x$ 的对象是 $\mathcal{X}$ 中以 x 为终点的箭头. 可以说明 id_x 是 $\mathcal{X}/x$ 的终对象.

定义 A.1.30 (极限, 余极限)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, I 为单纯集 (称为指标集或指标范畴), $F\colon I\to\mathcal{C}$ 为单纯集映射 (称为 $\mathcal{C}$ 中的一个图表). 类似于普通范畴中极限的定义, 我们可以构造一个 (广义的) "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$, 其对象为 $\mathcal{C}$ 的对象到 F 的锥. 具体地, $\mathcal{C}_{/F}$ 为如下拉回.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{/F} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{C}^I)_{/F} \arrow[d] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "\text{常值}"'] & \mathcal{C}^I
\end{tikzcd}$$

其中 "常值": $\mathcal{C}\simeq\mathcal{C}^{\Delta^0}\to\mathcal{C}^I$ 是 $I\to\Delta^0$ 的拉回, 它将 $\mathcal{C}$ 的对象 $x\colon\Delta^0\to\mathcal{C}$ 对应到 x 处的 "常值图表" $I\to\Delta^0\to\mathcal{C}$, 就像普通范畴的情形一样. 定义图 F 的极限为 "俯范畴" $\mathcal{C}_{/F}$ 的终对象; 对偶地, 定义 F 的余极限为 "仰范畴" $\mathcal{C}_{F/}$ 的始对象.

注 A.1.31 (同伦极限, 同伦余极限)

∞-范畴中的极限和余极限与所谓同伦极限, 同伦余极限有关.

拓扑空间范畴 Top 中的极限和余极限不是同伦不变的. 例如, 下图 (a) 的推出是 S^{n+1} (S^n 是 n 维球面, D^{n+1} 是 $(n+1)$ 维圆盘, $S^n \to D^{n+1}$ 是圆盘的边界), 将 D^{n+1} 替换为与之同伦等价的一个点 $*$ 得到图 (b), 但 (b) 的推出却不是 S^{n+1}, 而是一个点 $*$. 相比之下, 同伦极限, 同伦余极限则是同伦不变的概念; 例如 (a), (b) 的同伦推出都是 S^{n+1}.

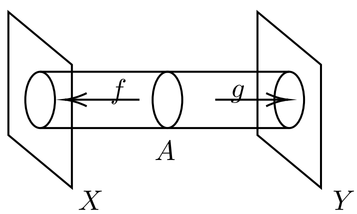
$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & D^{n+1} \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \\ * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

(a) (b) (c)

对一般的两个映射 $f\colon A \to X$, $g\colon A \to Y$, 以 $\mathbb{I}$ 表示单位区间 $[0,1]$, 图 (c) 的同伦推出可构造为商空间

$$X \sqcup (A \times \mathbb{I}) \sqcup Y \Big/ \sim, \quad \text{其中} \quad (a,0) \sim f(a), (a,1) \sim g(a).$$

直观上这是将以 A 为底的柱形两端分别粘到 X 和 Y 上所得的空间. 对于每个点 $a \in A$, 普通的推出粗暴地将 $f(a), g(a)$ 粘在一起, 而同伦推出只是在两者之间连了一条线段. 连一条线段与直接粘起来看似 (在同伦的意义下) 等价, 实则保留了更多的信息: 因为两点之间可连多条线段, 即可以多种方式粘在一起.



同伦推出的例子可以启发一般的同伦余极限. 设 $T\colon I \to \mathsf{Top}$ 为拓扑空间的图表. 对指标范畴 I 每个长为 n 的态射链 $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$, 以及每个点 $a \in T(i_0)$, 普通的余极限会粗暴地将 a 经过这些映射所到的每个点粘在一起, 而同伦余极限则是在这些点之间连上一个拓扑 n-单形 $|\Delta^n|$. 具体地, 先由 T 构造一个自然的单纯空间 $\mathsf{s}T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$, 使得

$$\mathsf{s}T_n = \coprod_{i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n} T(i_0).$$

对于单纯空间 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$, 定义其几何实现为如下的余等化子,

$$|X| := \operatorname{coeq}\Big[\coprod_{[n]\to[k]} X_k \times |\Delta^n| \rightrightarrows \coprod_n X_n \times |\Delta^n| \Big]$$

其中两个映射分别为

$$\coprod_{\sigma\colon [n]\to[k]} (\sigma^*\colon X_k \to X_n) \times |\Delta^n|,$$

$$\coprod_{\sigma\colon [n]\to[k]} X_k \times (|\sigma|\colon |\Delta^n| \to |\Delta^k|).$$

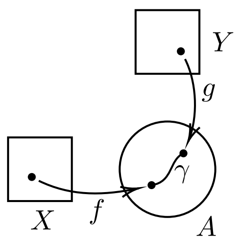
那么 T 的同伦余极限可构造为

$$\operatorname{hocolim} T := |\mathsf{s}T|.$$

同伦极限的一个例子是同伦拉回. 两个映射 $f\colon X \to A$, $g\colon Y \to A$ 的同伦拉回可构造为 $X \times A^{\mathbb{I}} \times Y$ 的子空间

$$\big\{(x,\gamma,y) \in X \times A^{\mathbb{I}} \times Y \mid \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = g(y)\big\}.$$

同伦拉回中的一个点由 X 的点 x, Y 的点 y 以及 $f(x)$ 到 $g(y)$ 的一条道路构成.



一般地, 设 $T\colon I \to \mathsf{Top}$ 为拓扑空间的图表, 对指标范畴 I 每个长为 n 的态射链 $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$, 以及每个点 $a \in T(i_n)$, 普通的极限只允许 $T(i_0), \cdots, T(i_n)$ 的各点恰好落在 a 上, 而同伦极限允许它们落在 $T(i_n)$ 中的一个 n-单形的顶点. 具体地, 构造自然的余单纯空间 $\mathsf{c}T\colon \Delta \to \mathsf{Top}$, 使得

$$\mathsf{c}T_n = \prod_{i_0\to\cdots\to i_n} T(i_n).$$

对于余单纯空间 $X\colon \Delta \to \mathsf{Top}$, 定义其全体 (totalization)[3] $\operatorname{Tot} X$ 为如下的等化子,

$$\operatorname{Tot} X := \operatorname{eq}\Big[\prod_n X_n^{|\Delta^n|} \rightrightarrows \prod_{[n]\to[k]} X_k^{|\Delta^n|}\Big].$$

同伦极限和同伦余极限表现了 ∞-范畴中的极限和余极限. 见 [2] 定理 4.2.4.1.

[3] 几何实现是一种左 Kan 扩张, 而 “全体” 是一种右 Kan 扩张. 记 cosTop 为余单纯空间的范畴, 则余单纯空间 X 的全体也可表示为 $\operatorname{Hom}_{\mathsf{cosTop}}(|\Delta|, X)$, 其中 $|\Delta|\colon \Delta \to \mathsf{Top}$ 将 $[n]$ 对应到拓扑 n-单形.

例 A.1.32

对于 $I=\varnothing$, 空图表 $F\colon I\to\mathcal{C}$ 的极限即是 $\mathcal{C}$ 的终对象.

例 A.1.33 (推出, 拉回)

考虑 $I=\Lambda^2_2$ (见定义 A.1.1 及其后的插图), 则 $F\colon I\to X$ 等同于两个态射 $x\to z$, $y\to z$. 称 F 的极限为 ∞-拉回, 简称拉回, 记为 $x\times_z y$. 对偶地, 形如 Λ^2_0 的图的余极限称为 ∞-推出, 简称推出.

单纯集映射 $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$ 的同伦推出为 $Y\sqcup_{\{0\}\times X}(\Delta^1\times X)\sqcup_{\{1\}\times X}Z$.

定义 A.1.34 (环路空间)

Hom 函子, 预层与 ∞-米田引理

> Perhaps the main technical challenge in extending classical categorical results to the ∞-categorical context is in merely *defining* the Yoneda embedding.
>
> Emily Riehl & Dominic Verity,
> *The Comprehension Construction*

我们希望定义 ∞-版本的预层范畴, 并建立米田引理. 参考卷 1 注 A.4.2, 我们首先需要一个函子 $\mathrm{Hom}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\infty\mathcal{G}pd$. 这个函子同样可借助单纯范畴构造. 注意这并非 ∞-范畴理论中陈述米田引理的唯一方法.

定义 A.1.35 (预层 ∞-范畴)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴. 定义

$$\widehat{\mathcal{C}}:=\mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\infty\mathcal{G}pd)$$

为 $\mathcal{C}$ 上的预层 ∞-范畴.

命题 A.1.36

[未完成：自由余完备化]

A.2 n-范畴

定义 A.2.1 (局部对象)

设 $\mathcal{C}$ 为 ∞-范畴, S 为 $\mathcal{C}$ 中一族态射的集合, 称 $\mathcal{C}$ 的对象 x 为 S-局部对象是指对 S 中任意态射 $f\colon a \to b$,

$$f^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(b,x) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a,x)$$

为 ∞-群胚的等价.

定义 A.2.2 (球面)

归纳定义 $\infty\mathcal{G}pd$ 的 n 维球面 $S^n\,(n \geq -1)$ 如下:

- $S^{-1} = \varnothing$;
- 对 $n \geq -1$, S^{n+1} 是如图所示的推出.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

定义 A.2.3 (n-群胚)

对整数 $n \geq -2$, 定义 n-群胚为 $\infty\mathcal{G}pd$ 中关于 $\{S^{n+1} \to *\}$ 的局部对象 (定义 A.2.1).

[未完成：]

参考文献

[1] Denis-Charles Cisinski. *Formalization of Higher Category Theory*. 课程笔记. 记录人: Bastiaan Cnossen. 2023. URL: https://elearning.uni-regensburg.de/course/view.php?id=64170.

[2] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.

[3] Urs Schreiber. *Diifferential Cohomology in a Cohesive Topos*. (尚未出版). URL: https://ncatlab.org/schreiber/files/dcct170811.pdf.

[4] Urs Schreiber. *Higher Topos Theory in Physics*. 2023. URL: https://ncatlab.org/schreiber/show/Higher+Topos+Theory+in+Physics.