DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2006.03.014

文章编号:1006-4710(2006)03-0283-03

最小二乘混沌算法在水位流量关系拟合中的应用

李梅[1,2],张洪波[1],黄强[1],佟春生[1,3],薛小杰[1]
(1.西安理工大学 水利水电学院,陕西 西安 710048;2.黄河水利委员会规划计划局,河南 郑州 450003;3.中北大学分校,山西 太原 030008)

摘要:针对水位流量关系曲线拟合问题,将最小二乘法(LS)与混沌算法(CA)相结合,提出了一种适应于曲线拟合的最小二乘混沌算法(LSCA),并与最小二乘算法及遗传算法的拟合结果进行比较。结果表明,最小二乘混沌算法具有简便、快速、实用性强等优点,是一种较为优秀的全局优化方法,适应于非线性关系的参数率定。

关键词:最小二乘法;混沌算法;水位流量关系;曲线拟合
中图分类号:TV697　　文献标识码:A

The Application of Least Squares Chaos Algorithm for Stage-Discharge Relation Curve Fitting

LI Mei[1,2], ZHANG Hong-bo[1], HUANG Qiang[1], TONG Chun-sheng[1,3], XUE Xiao-jie[1]
(1. Faculty of Water Resources and Hydraulic Power, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;
2. Department of Planning and Programming, YRCC, Zhengzhou 450003, China;
3. Branch of North University of China, Taiyuan 030008, China))

Abstract: With an aim at the problem of the stage-discharge relation curve fitting, this paper suggests the least squares chaos algorithm (LSCA) suitable for curve fitting based on the combination of the least squares (LS) with chaos algorithm (CA), and also the comparison is made of the fitting results by the least squares algorithm and genetic algorithm. The results indicate that the least squares chaos algorithm is characterized by simplicity, quickness and practicality, which is an excellent and global optimization method and also adapts to parameter rating of non-linear relationship.

Key words: least squares; chaos algorithm; stage-discharge relation; curve fitting

水位流量关系是一种典型的非线性关系,其数学模型一般为:

$$Q = aH^b \tag{1}$$

式中,Q 为流量;H 为水位;a 和 b 为待拟定的模型参数。

为求得参数 a 和 b,一般是先将式(1)的幂函数形式两边取对数,转化为线性关系,再用最小二乘法求出其线性关系的参数,经逆变换后再求得原函数关系中的参数。这种基于线性模型的水位流量关系间接拟合方法,因其计算上的简单方便,至今仍被广大水文工作者所使用。值得注意的是[1],最小二乘法虽然能够保证线性关系的残差平方和最小,但并不能保证未经变换的原始非线性关系的残差平方和同时也为最小;另外,最小二乘法中采用的拟合准则是残差的平方和,当实际观测数据中存在极端数值时,最小二乘法拟合的结果会产生严重的偏差。为此,文[2,3]提出了水位流量关系曲线拟合的绝对残差绝对值和最小准则:

$$J = \min E = \sum_{i=1}^{n} \left| Q_i - aH_i^b \right| \tag{2}$$

由于上述准则中的优化函数为复杂的非线性形式,并且还包含有绝对值的运算,最小二乘法已经不适用,有必要采用性能较为优异的全局寻优策略[3~5]。混沌是一种普遍的非线性现象,其混沌运动具有遍历性、随机性、规律性等特点。混沌算法(Chaos Algorithms, CA)就是基于混沌的遍历性,

收稿日期:2006-04-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(40501011)。
作者简介:李梅(1963-),女,山东寿光人,博士生,研究方向为水资源系统工程。E-mail:limei@yellowriver.gov.cn。
黄强(1958-),男,四川绵阳人,教授,博导,研究方向为水资源系统工程。E-mail:sy-sj@mail.xaut.edu.cn。

利用类似载波的方法将 Logistic 映射产生的混沌变量引入优化变量中，同时将混沌运动的遍历范围转换到优化变量的定义域，然后利用混沌变量进行搜索。混沌已成为一种新颖的优化工具，受到广泛重视和大量研究。本文根据曲线拟合和混沌算法的特点，将最小二乘法（Least Squares，LS）与混沌算法相结合，提出一种最小二乘混沌算法（Least Squares Chaos Algorithms，LSCA）应用于水位流量关系曲线拟合问题，并结合实例验证了其有效性和合理性。

1　最小二乘混沌算法

混沌算法最早是由李兵等人提出[6]，用于求解优化问题。张彤等人给出变尺度混沌优化方法[7]，提高了搜索效率。由于混沌算法在应用前要求对待优化的参数必须有一个确定的范围，本文用最小二乘准则进行拟合，将所得到的参数值作为混沌搜索空间的中心。这样，可以充分利用最小二乘法的内核，使得混沌算法能迅速搜索到参数空间最优解的位置，以解决非线性关系的参数滤定问题。具体的最小二乘混沌算法（LSCA）如下。

选择 Logistic 映射 $z_{n+1} = 4z_n(1.0 - z_n)$ 产生的混沌变量来进行优化搜索：

（1）初始化

① 运用最小二乘法对待拟合的模型（如式（1））进行参数估计，得到 n 个参数的粗估值 $z_i^{\#}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）；选择搜索半径 $\delta_i > 0$，以 $z_i^{\#}$ 为中心、δ_i 为半径确定参数 z_i 的范围为：$z_i^{\#} - \delta_i \leqslant z_i \leqslant z_i^{\#} + \delta_i$，即参数 $z_i \in [d_i, e_i] = [z_i^{\#} - \delta_i,\ z_i^{\#} + \delta_i]$。优化问题为：

$$
\begin{aligned}
&\min J(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\
&\text{s.t.}\quad z_i \in [d_i, e_i] \\
&\qquad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

② 混沌变量迭代标志 $k = 0$，细搜索标志 $r = 0$；初次迭代的混沌变量 $z_i^k = z_i(0)$；当前得到的最优混沌变量 $z_i^* = z_i(0)$；$d_i^r = d_i$，$e_i^r = e_i$；$z_i(0)$ 为 $[0, 1]$ 区间两个相异的初值，且 $z_i(0) \neq 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$；当前最优解 J^* 设为一个较小的数。

（2）将 z_i^k 映射到优化变量取值区间：

$$mz_i^k = d_i^r + z_i^k \times (e_i^r - d_i^r)$$

（3）若 $J(mz_i^k) > J^*$，则 $J^* = J(mz_i^k)$；$z_i^* = z_i^k$。

（4）$k = k + 1$；$z_i^k = 4 \times z_i^{k-1} \times (1.0 - z_i^{k-1})$。

（5）重复（2）（3）（4），直到 J^* 保持不变为止。

（6）尺度变换：

$$d_i^{r+1} = mz_i^* - \eta \times (e_i^r - d_i^r)$$

$$e_i^{r+1} = mz_i^* + \eta \times (e_i^r - d_i^r)$$

$$\text{if}\quad d_i^{r+1} < d_i^r \quad \text{then}\quad d_i^{r+1} = d_i^r$$

$$\text{if}\quad e_i^{r+1} > e_i^r \quad \text{then}\quad e_i^{r+1} = e_i^r$$

$\eta \in (0, 0.5)$，$mz_i^* = d_i^r + z_i^* \times (e_i^r - d_i^r)$ 为当前的最优解。

（7）z_i^* 作如下还原处理：

$$z_i^* = (mz_i^* - d_i^{r+1}) / (e_i^{r+1} - d_i^{r+1})$$

（8）将 z_i^* 与 z_i^k 的线性组合作为新的混沌变量：

$$z_i^k = (1 - \delta) z_i^* + \delta z_i^k \qquad (0 < \delta < 1)$$

① 将 z_i^k 映射到优化变量取值区间：

$$mz_i^k = d_i^r + z_i^k \times (e_i^r - d_i^r)$$

② 若 $J(mz_i^k) > J^*$，则 $J^* = J(mz_i^k)$，$z_i^* = z_i^k$。

③ $k = k + 1$；$z_i^k = 4 \times z_i^{k-1} \times (1.0 - z_i^{k-1})$。

（9）重复第（8）直到 J^* 保持不变为止。

（10）$r = r + 1$，减小 δ 的值，重复第（6）至（9）步若干次后结束寻优计算。此时得到的 mz_i^* 即为算法得到的最优变量，J^* 为问题的最优解。

2　实例计算

现以某水文站的水位流量关系拟合为例，测得 13 组水位流量原始实测数据如表 1 所示。利用最小二乘混沌算法（LSCA）进行参数滤定，取 $\delta_1 = \delta_2 = 1.5$（$a = z_1^{\#} = 4.9169$，$b = z_2^{\#} = 1.7686$）。为了验证算法的性能，选用最小二乘法、蚂蚁算法作对比测试，仿真结果如表 1 所示。

由表 1 可知，在三种算法中，最小二乘混沌算法拟合的绝对残差绝对值和为最小，$J_{混沌} = 113.74$。最小二乘混沌算法拟合的平均绝对误差、平均相对误差分别为 8.75、1.71%，比最小二乘拟合精度分别高 9.70%、21.20%，比蚂蚁算法拟合精度分别高 0.34%、3.39%。可见，最小二乘混沌算法拟合精度明显高于最小二乘拟合方法，也优于蚂蚁算法。

表 2 给出在残差平方和最小准则与绝对残差绝对值和最小准则下 LSCA 法拟合的结果。从表中可见，残差平方和最小准则下的拟合精度远低于绝对残差绝对值和最小准则下的拟合精度，表明基于绝对残差绝对值和最小准则下的 LSCA 法更有效。

3　结　语

针对水位流量关系拟合的参数滤定问题，提出一种最小二乘混沌算法进行求解，并与最小二乘法及蚂蚁算法进行比较。实例计算表明了其有效性、合理性，且精度较高，易找到全局最优解。说明将最小二乘混沌算法应用于求解回归问题更优越，可作为解决非线性回归问题的一种新思路加以运用。

表 1 某水文站水位流量关系数据及三种优化方法的拟合结果比较

Tab.1 Comparison of water-level/outflow relationship data on certain hydrological station and fitting results of some optimization methods

实测水位/m	实测流量/(m³/s)	最小二乘法			蚂蚁算法			最小二乘混沌算法		
		拟合/(m³/s)	绝对误差	相对误差/%	拟合/(m³/s)	绝对误差	相对误差/%	拟合/(m³/s)	绝对误差	相对误差/%
7.77	182	184.71	−2.71	−1.49	182.00	0.00	0.00	182.43	−0.43	−0.24
8.30	204	207.57	−3.57	−1.75	205.37	−1.37	−0.67	205.80	−1.80	−0.87
9.48	258	262.59	−4.59	−1.78	261.96	−3.96	−1.53	262.38	−4.38	−1.67
10.30	309	304.09	4.91	1.59	304.94	4.06	1.31	305.33	3.67	1.20
10.70	331	325.28	5.72	1.73	326.97	4.03	1.22	327.35	3.65	1.12
11.40	372	363.86	8.14	2.19	367.20	4.80	1.29	367.53	4.47	1.22
12.47	433	426.42	6.58	1.52	432.75	0.25	0.06	433.00	0.00	0.00
12.60	435	434.32	0.68	0.16	441.05	−6.05	−1.39	441.28	−6.28	−1.42
12.67	448	438.59	9.41	2.10	445.54	2.46	0.55	445.77	2.23	0.50
14.10	542	529.91	12.09	2.23	541.91	0.09	0.02	541.97	0.03	0.01
14.55	574	560.18	13.82	2.41	573.99	0.01	0.00	573.99	0.01	0.00
14.90	561	584.24	−23.24	−4.14	599.53	−38.53	−6.87	599.48	−38.48	−6.42
15.50	596	626.49	−30.49	−5.12	644.47	−48.47	−8.13	644.32	−48.32	−7.50
平均值		—	9.69	2.17	—	8.78	1.77	—	8.75	1.71
J			125.94			114.08			113.74	
(a, b)			(4.9169, 1.7686)			(4.2629, 1.8310)			(4.3058, 1.8273)	

表 2 不同准则下的 LSCA 法的拟合结果比较

Tab.2 Comparison of fitting result of LSCA under different guidelines

实测水位/m	实测流量/(m³/s)	残差平方和最小准则			绝对残差绝对值和最小准则		
		拟合/(m³/s)	绝对误差/(m³/s)	相对误差/%	拟合/(m³/s)	绝对误差/(m³/s)	相对误差/%
7.77	182	184.48	2.48	1.36	182.43	−0.43	−0.24
8.30	204	208.26	4.26	2.09	205.80	−1.80	−0.87
9.48	258	265.89	7.89	3.06	262.38	−4.38	−1.67
10.30	309	309.68	0.68	0.22	305.33	3.67	1.20
10.70	331	332.14	1.14	0.34	327.35	3.65	1.12
11.40	372	373.16	1.16	0.31	367.53	4.47	1.22
12.47	433	440.04	7.04	1.63	433.00	0.00	0.00
12.60	435	448.51	13.51	3.11	441.28	−6.28	−1.42
12.67	448	453.09	5.09	1.14	445.77	2.23	0.50
14.10	542	551.49	9.49	1.75	541.97	0.03	0.01
14.55	574	584.26	10.26	1.79	573.99	0.01	0.00
14.90	561	610.35	49.35	8.80	599.48	−38.48	−6.42
15.50	596	656.28	60.28	10.11	644.32	−48.32	−7.50
平均值		—	13.28	2.75	—	8.75	1.71
(a, b)			(4.2622, 1.8377)			(4.3058, 1.8273)	

参考文献：

[1] 黄才安(Huang Cai-an). 水位流量关系回归的优化研究(Optimal regression study on stage-discharge relation)[J]. 水利水电技术(Water Resources and Hydropower Engineering), 1995, 26(10): 2-5.

[2] 徐云侠(Xu Yun-xia). 相对偏差多元线性回归法(Multiple linear regression method on relative deviation.)[J]. 苏州医学院学报(Acta Academiae Medicinae Suzhou), 1998, 18(8): 812-813.

[3] 杨晓华, 陆桂华, 郦建强(Yang Xiao-hua, Lu Gui-hua, Li Jian-qiang). 自适应加速遗传算法及其在水位流量关系拟合中的应用(Application of the adaptive accelerative genetic algorithm for stage-discharge curve calibration)[J]. 水文(Hydrology), 2002, 22(2): 14-18.

[4] 詹士昌, 徐婕, 吴俊(Zhan Shi-chang, Xu Jie, Wu Jun). 蚁群算法中有关算法参数的最优选择(The optimal selection on the parameters of the ant colony algorithm)[J]. 科技通报(Bulletin of Science and Technology), 2003, 19(5): 29-34.

[5] 詹士昌, 徐婕(Zhan Shi-chang, Xu Jie). 蚁群算法在水位流量关系拟合中的应用(The application of ant colony algorithm for stage-discharge curve calibration)[J]. 杭州师范学院学报(自然科学版)(Journal of Hangzhou Teachers College), 2005, 4(2): 109-113.

[6] 李兵, 蒋慰孙(Li Bing, Jiang Wei-sun). 混沌优化方法及其应用(Chaos optimization method and its application)[J]. 控制理论与应用(Control Theory & Applications), 1997, 14(4): 613-615.

[7] 张彤, 王宏伟, 王子才(Zhang Tong, Wang Hong-wei, Wang Zi-cai). 变尺度混沌优化方法及其应用(Mutative scale chaos optimization algorithm and its application)[J]. 控制与决策(Control and Decision), 1999, 14(3): 285-288.

(责任编辑 陈洁)