

基于杂交粒子群响应面的边坡稳定可靠性算法

王 彪 龙 刘 晓 郭 将

(中国地质大学(武汉) 教育部长江三峡库区地质灾害研究中心 湖北 武汉 430074)

摘要: 针对可靠度指标 β 数学优化模型的理论不足, 以及常规数学优化方法易陷入于局部最优解的问题, 提出了基于杂交粒子群响应面的边坡可靠性算法。新方法以 β 的几何意义为基础, 在对正值物理量、非正态、非独立随机变量预处理的基础上, 补齐了附加约束条件, 完整地给出了可靠性求解的数学优化模型, 并澄清了 β 的正负取值问题。采用二次响应面法构造极限状态方程, 并基于杂交粒子群算法搜索 β 的全局最优解。3 个代表性案例结果证明: 完善后的可靠性数学优化模型理论正确, 对从数学优化角度求解可靠性问题进行了有效补充; 基于杂交粒子群响应面的可靠性算法具有较好的全局搜索能力和较高的精度, 与蒙特卡洛法的计算结果接近, 但迭代次数明显减少, 计算效率更高。

关 键 词: 可靠度指标; 数学优化; 二次响应面法; 杂交粒子群算法; 边坡

中图分类号: P642

文献标志码: A

DOI: 10.16232/j.cnki.1001-4179.2018.16.017

作为可靠性检验方法的蒙特卡洛法概念明确、精度高, 但缺点是需大量抽样、计算量大, 为此研发高性能算法成为该领域的研究方向之一。一般认为可靠度指标 β 几何意义为标准正态空间坐标原点到极限状态面的最短距离, 属于约束最小化问题。自 20 世纪 90 年代以来, 一系列智能优化算法显示出了广泛的优越性^[1-3], 且在可靠性分析中得到充分运用^[4-7]。苏雅等基于 Kriging 法构造极限状态方程, 并利用遗传算法搜索到 β 的最优解^[8]; Khajehzadeh M 等对粒子群算法改进, 采用 CPSOHS 方法对该可靠性数学优化模型进行优化, 获取了可靠度指标 β ^[9]。虽然上述研究有效提高了计算精度, 但对该数学优化模型本身的认识并不完善, 如无法解释实际案例中 β 取负值的情况, 且上述研究未对随机变量进行截尾分布处理。为此需要依据边坡可靠性的物理实践, 对数学优化模型的诸多理论细节和漏洞进行补齐和夯实。

鉴于此, 笔者拟开展以下 3 个方面的工作: ① 严

格推导可靠性求解的数学优化模型, 澄清被前人所忽略的可靠度指标 β 的正负取值问题, 并给出解决方案, 继而通过完善预处理模块、补齐附加约束条件, 完整地给出可靠性求解的数学优化模型; ② 针对上述可靠性数学优化模型, 采用基于杂交粒子群响应面的可靠性算法搜索 β 的最优解; ③ 以 3 个代表性案例验证上述理论和方法的正确性和有效性。

1 可靠性求解的数学优化建模

1.1 多维空间可靠度指标 β 的几何意义

可靠性研究假定待测系统中的 n 维变量为服从某种联合概率密度分布的随机变量, 记为 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 则待测系统的极限状态方程可表示为 (1) 式, 其形态为曲面。

$$Z = g(X) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

设 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 为曲面 Z 上的一点, 即有 $g(X^*) = 0$ 。在该点处将极限状态函数 Z 按 Taylor 级

收稿日期: 2018-04-16

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(41572279); 中国博士后科学基金特别资助项目(2014T70758); 中国博士后科学基金面上资助项目(2012M521500)

作者简介: 王彪龙, 男, 硕士研究生, 主要从事岩土工程性质与稳定性研究。E-mail: wblstudycug@yeah.net

通讯作者: 刘 晓, 男, 副研究员, 博士, 主要从事工程地质模拟、滑坡演化机制和控制理论方面的研究。E-mail: liuxiao@china.com

数展开并取至一次项,略去高阶小量,则极限状态函数可近似表示为

$$Z \approx g(X^*) + \sum_{i=1}^n [(x_i - X_i^*) (\frac{\partial g}{\partial x_i})_{X^*}] = 0 \quad (2)$$

显然(2)式可视为在 X^* 处极限状态曲面的切平面。当 x_1, x_2, \dots, x_n 为独立正态分布随机变量时,设 μ_Z 和 σ_Z 分别为极限状态函数 Z 的均值和标准差,由可靠度指标 β 定义,可得(3)式:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(X^*) + \sum_{i=1}^n [(\mu_{x_i} - X_i^*) (\frac{\partial g}{\partial x_i})_{X^*}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 (\frac{\partial g}{\partial x_i})_{X^*}^2}} \quad (3)$$

令 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的标准化变量,即有:

$$y_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (4)$$

将(2)式的极限状态方程用 Y 改写,并将(3)式代入整理后得(5)式:

$$\frac{\sum_{i=1}^n [\sigma_{x_i} (\frac{\partial g}{\partial x_i})_{X^*} y_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 (\frac{\partial g}{\partial x_i})_{X^*}^2}} + \beta = 0 \quad (5)$$

由解析几何知识可知,坐标原点到形如(6)式的超平面之间的距离 d 可表示为(7)式。

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0 \quad (6)$$

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \quad (7)$$

将(5)式所示的超平面系数按照(6)式进行展开并依据(7)式计算距离 d ,容易验证有:

$$d = |\beta| \quad (8)$$

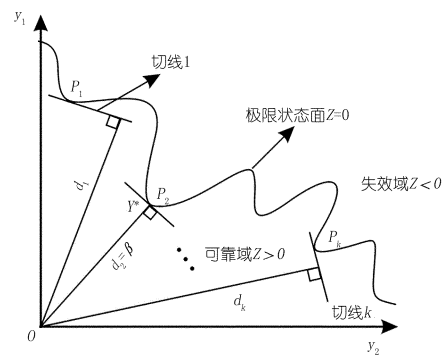
公式(8)表明:在 n 维空间中,可靠度指标 β 的绝对值为独立标准正态空间坐标原点至上述切平面的最短距离。需要指出的是,式(8)所指的最短距离仅仅是原点到一各切平面的距离,是局部最优解。从全局的角度考虑,在极限状态曲面上可以沿着任意多个、连续的点(记为 P_1, P_2, \dots, P_k ,其中 $k \rightarrow \infty$)取无数个切平面,并计算坐标原点至这些切平面的最短距离(记为 d_1, d_2, \dots, d_k),且存在着一个最小值 $d_{\min} = \min\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$,此时独立标准正态空间坐标原点 O 在切平面上的投影(垂足)恰好与Taylor级数展开点 X^* 对应的标准化向量 Y^* 重合,将此时的 X^* 称为验算点,对应的 $|\beta|_{\min} = d_{\min} = \min\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ 即为极限状态方程(2)式的可靠度指标。一般在不强调 β 迭代求

解过程的情况下, $|\beta|_{\min}$ 可去掉下标,简记为

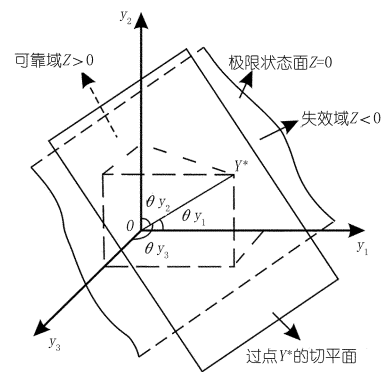
$$|\beta| = d_{\min} = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right)^2} \quad (9)$$

$$s.t. Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (10)$$

公式(9)表明:在 n 维空间中,可靠度指标 β 的绝对值为独立标准正态空间中坐标原点至极限状态面的最短距离。相比于式(8),式(9)并不拘泥于某一特定的切平面,而是在所有的切平面距离中取最小值,是一个全局最小的概念。图1给出了二维、三维条件下可靠度指标 β 的几何意义。



(a) 随机变量为二维
(a) Random variables are 2D



(b) 随机变量为三维
(b) Random variables are 3D

图1 可靠度指标 β 的几何意义

Fig.1 Geometric meaning of reliability index β

当随机向量 X 中存在非正态、非独立分布随机变量时,就需要预处理。技术路线是:首先采用JC法将非正态分布变量转化为正态分布变量,而后采用正交变换法将非独立正态分布变量转换为独立正态分布变量^[10]。

假设 x_i 为非正态分布随机变量,则可利用高斯变换,将其转化为正态分布随机变量 x'_i :

$$x'_i = \Phi^{-1}[F(x_i)] \quad (11)$$

式中, $F(x_i)$ 为 x_i 的累计分布函数; Φ 为标准正态分

布累积分布函数。

重复上述转化过程,直至将随机向量 X 中所有非正态分布随机变量全部完成正态化,记为 $X' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T$ 。接着采用正交变换法使其既保持正态性不变又让各分量独立。假定 X' 的协方差矩阵为 $C_{X'} = [C_{x'_i x'_j}]_{n \times n}$ 。通过正规化可求得 $C_{X'}$ 的特征向量 A , 经过正交变换,将向量 X' 变换为线性无关的向量 U :

$$U = A^T X' \quad (12)$$

对于正态分布随机变量,不相关和独立性等价,故 U 为独立正态分布随机向量。

求得可靠度指标 β 后,采用下式计算失效概率 P_f

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (13)$$

1.2 可靠度指标 β 的正负取值筛选

在众多文献及教材中将 β 阐述为独立标准正态空间中坐标原点至极限状态曲面的最短距离。在此情况下,缺少 β 按照负值处理的情况。追根溯源,可靠度指标 β 被定义为极限状态函数的均值和标准差之商,这一定义式始于 20 世纪 30 年代,那么极限状态函数均值的正负决定了 β 的正负,而不应对其正负取值再作额外限定。追溯 β 的几何解释,其源于 Hasofer 和 Lind 于 1974 年发表的文献^[11],但其大大晚于现有可靠度指标 β 的定义式。因此有必要对 β 的正源予以认定。实际上,郑铎和吴世伟^[12]早在 1992 年就指出 β 取负值是有意义的,并以实例阐述 $\beta < 0$ 的情况时有发生,但这一文献并未获得足够的重视。

本文将可靠度指标 β 的绝对值表述为上述最短距离,见 (9) ~ (10) 式,并应依据案例的实际情况对 β 的两支解进行筛选。具体方法是:对均值样本点(即各随机变量取均值) $X = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ 的失效状态进行判别,若该点处于失效域内($Z < 0$),则取 $\beta < 0$ 的一支解,反之取 $\beta \geq 0$ 的一支解。上述筛选方法的理论依据是:作为一个有着高失效概率 $P_f > 0.5$ 的系统,其在均值样本点处将倾向于失效,文献^[12]列举的一个高失效概率的例子也印证了上述方法。

1.3 正值物理量处理及新增约束条件

由于随机向量 X 中某些物理量(如岩土体的抗剪强度指标)不能取负值,但这些物理量符合的概率分布在数学上却能在更广域的范围,如 $(-\infty, +\infty)$ 中取值,此时比较严谨的方式是取该分布在 $(0, +\infty)$ 域内对应的截尾分布,然后按 1.1 节所述方法对随机向量 X 进行预处理。

以正态分布为例,设有正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, φ 为标准正态分布概率密度函数,则其在 $(0, +\infty)$ 域内的截尾正态分布的概率密度函数 $f_l(\cdot)$ 取为

$$f_l(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma [1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)]} \quad (14)$$

经过上述截尾处理后,其统计矩与对应的原正态分布会有少量差别。

正值物理量带来的另一个问题是,对 (9) 式和 (10) 式构成的数学优化模型有了更进一步的限定。考察 (1) ~ (14) 式的整个推导过程,随机向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 各分量的取值范围是整个实数域,当其中的某些分量(如 x_j, x_k) 进行正值限定后,则可靠度数学优化模型表述为

$$|\beta| = \min G(Y) = \min \|Y\| = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (15)$$

$$s.t. \begin{cases} Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ x_j > 0, x_k > 0, \dots \end{cases} \quad (16)$$

式中,函数 $G(Y) = \|Y\|$ 为优化问题的目标函数;而 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 为随机向量 X 经过一系列预处理(截尾分布转换、正态化转换、独立化和标准化转换)后得到的 n 维标准正态分布随机向量。至此,完整地给出了可靠性求解的数学优化模型。

2 响应面法构造功能函数

可靠性分析的重点之一是提取功能函数 $g(X)$,这是实现从物理模型到数学模型概化的关键一步。假设边坡可靠度计算中存在 n 个随机变量,稳定系数 f_{os} 是 n 个随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数,令 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$,记为 $f_{os}(X)$ 。则有功能函数 $g(X) = f_{os}(X) - 1$,此时极限状态方程 $Z = g(X) = 0$ 表示边坡处于临界稳定状态。由于边坡稳定系数求解流程的复杂性,这一功能函数是隐式的,并且具有显著的非线性。针对这一情况,响应面法显示出了较好的优势。所谓响应面法,就是当自变量与因变量之间的函数关系不能明确表达或未知时,通过有限次的拟合,构造一个简单的显式函数来近似代替真实的目标函数^[13-16],包括一次响应面法、二次响应面法等。为提高拟合精度,本文采用二次响应面法,若不考虑交叉项,则功能函数可用下式近似表示:

$$g(X) = f_{os}(X) - 1 = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} x_i^2 \quad (17)$$

式中, n 为随机变量的个数; λ 为待定系数。

式 (17) 中共有 $2n + 1$ 个未知系数,则至少需要 $2n + 1$ 个样本点才能求解。本文采用 $2n$ 个轴向点加上 1 个中心点(各变量的均值所组成的点)的中心复合设

计方法取样。在 $2n$ 个轴向样本点的取样过程中,对于变量 x_i ,令 μ_{x_i} 、 σ_{x_i} 为变量 x_i 的均值和标准差,在保持其它变量为均值不变的条件下,该变量的取值如下:

$$x_i = \mu_{x_i} \pm \alpha \sigma_{x_i} \quad \alpha = 2^{\frac{n}{4}} \quad (18)$$

为建立稳定系数 $fos(X)$ 与随机向量之间的显式函数关系,采用 Slope/W 软件中内置的稳定性计算方法——Morgenstern-Price(M-P)法进行计算,将上述 $2n+1$ 个样本点代入计算程序,得 $2n+1$ 个稳定系数,并将数据代入(17)式,构造 $2n+1$ 线性方程,求解待定系数 λ ,得到的响应面函数的具体表达式即极限状态函数。

3 杂交粒子群算法

3.1 杂交粒子群算法基本原理

粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)是群体智能算法的一种,它将优化问题的解抽象为没有质量和体积的微粒,每个粒子表现为 3 个特征值:位置、速度和目标函数值。设粒子数为 N ,在 D 维搜索空间中,粒子 i 的位置为 $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}]$,速度为 $V_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}]$,通过目标函数值的比较,粒子 i 更新自己的位置和速度。粒子速度受目前粒子本身所找到的最好位置($pbest$)和全局最好位置($gbest$)控制,并且通过这两个值不断更新,直至找到最优解。粒子依据如下公式来更新自己的位置和速度^[1]:

$$V_{ij}(t+1) = w \times V_{ij}(t) + c_1 r_1 [pbest - X_{ij}(t)] + c_2 r_2 [gbest - X_{ij}(t)] \quad (19)$$

$$X_{ij}(t+1) = X_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (20)$$

$$w = w_{\max} - (t-1) \times (w_{\max} - w_{\min}) \times (\maxgen - 1) \quad (21)$$

式中, w 为惯性权重, $w_{\max} = 0.9$, $w_{\min} = 0.4$; t 为当前迭代次数; \maxgen 为最大迭代次数; c_1 、 c_2 为学习因子,且 $c_1 = c_2 = 2$; r_1 、 r_2 为 $[0, 1]$ 的随机数。

常规粒子群算法在寻优过程中,可能收敛于局部最优解^[17-18],这时导致计算误差偏大。为此,本文引入交叉操作,依据交叉比例 S_p 的大小,将一定数目的粒子存放于杂交池内,使这些粒子两两随机杂交,产生相同数目的子代粒子,并替换原来的亲代粒子^[1]。对于交叉概率 p_c ,产生随机数 a ,当 $a \leq p_c$,随机抽选 $numPool$ 个亲代粒子进行杂交,则交叉后的子代粒子位置为

$$child(X) = a \times parent_1(X) + (1-a) \times parent_2(X) \quad (22)$$

$$mumpool = round(S_p \times N) \quad (23)$$

子代粒子的速度为

$$child(V) = \frac{parent_1(V) + parent_2(V)}{|parent_1(V) + parent_2(V)|} \times |parent_1(V)| \quad (24)$$

式中, $parent_1(X)$ 、 $parent_2(X)$ 、 $parent_1(V)$ 和 $parent_2(V)$ 分别为交叉前亲代的位置和速度。

关于粒子 X_i 初始位置的生成,其各分量可在各自定义域 $(0, +\infty)$ 区间范围内,按照均匀分布随机产生。当随机变量的定义域为开区间,可在区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 范围内按照均匀分布随机产生。特别地,当 $\mu - 3\sigma \leq 0$ 时,区间取 $[0, \mu + 3\sigma]$ 。

3.2 约束条件的处理

对于(15)~(16)式的约束优化问题,本文采用惩罚函数法将粒子的惩罚项和原来的目标函数相加作为新的目标函数,使得原约束优化问题转换为等效的无约束优化问题。

对于式(16)所述约束条件,以存在两个正值分量 x_j 和 x_k 为例,共计有 3 个约束条件,将等式约束转化为不等式约束,构造 3 个惩罚项:

$$Q_1(X) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} |Z(X)| & |Z(X)| > \varepsilon \\ 0 & |Z(X)| < \varepsilon \end{cases} \quad (25)$$

$$Q_2(X) = \begin{cases} -\varepsilon^{-1} x_j & x_j \leq 0 \\ 0 & x_j > 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$Q_3(X) = \begin{cases} -\varepsilon^{-1} x_k & x_k \leq 0 \\ 0 & x_k > 0 \end{cases} \quad (27)$$

式中, ε 为约束容忍度,是一个较小的正值,例如可取 10^{-6} ; $Z(X)$ 为上述二次响应面函数。

定义 $R(X)$ 为惩罚函数,则粒子在搜索最优解的过程中,粒子 X 对所有约束条件的违反程度总和为

$$R(X) = \sum_{i=1}^3 Q_i(X) \quad (28)$$

当随机向量 X 中存在多个正值分量时,可以以此类推。取新目标函数为原始目标函数和惩罚函数之和,记为 $G(Y)$:

$$G(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2 + R(X) \quad (29)$$

显然,新构造的目标函数在 X 符合式(16)的情况下,与原始目标函数值相同,而对违反式(16)的情况施加了线性惩罚,违反程度越大,惩罚值越大。如此一来,在寻找新目标函数最小值的过程中,对 X 违反(16)式的情况自然淘汰。

4 可靠度计算流程

依据完善后可靠度指标 β 的数学优化模型,采用基于杂交粒子群响应面算法实现该模型的优化。首先

基于响应面法构造极限状态方程,从而得到可靠度数学优化模型的具体形式,接着采用基于杂交粒子群响应面算法搜索可靠度指标 β 的全局最优解,图2(a)给出了可靠度计算流程。作为对比,图2(b)、图2(c)分别给出基于响应面蒙特卡洛法和直接蒙特卡洛法的计算流程。

5 算例验证

5.1 均质边坡

采用均质路堤边坡进行可靠性分析^[19],其剖面如图3所示,滑面为圆弧形,确定方法采用文献[19]公布的坐标。已知边坡土体凝聚力 c 的均值 $\mu_c = 15$ kPa,标准差 $\sigma_c = 3$ kPa;内摩擦角 φ 的均值 $\mu_\varphi = 23^\circ$,标准差 $\sigma_\varphi = 4.6^\circ$;重度 γ 的均值 $\mu_\gamma = 16.34$ kN/m³,标准差 $\sigma_\gamma = 0.8$ kN/m³,将3个变量视为独立正态分布随

机变量。计算过程中不考虑地下水及地震作用,土体的破坏符合Mohr-Coulomb准则^[20]。为验证本文算法的全局收敛性,采用直接蒙特卡洛法进行比较,取其抽样100万次的计算结果为基准解,稳定性计算方法为M-P法。分别采用图2所示的3种方法进行计算,计算结果见表1,并得到粒子群算法可靠度指标 β^2 的进化曲线(见图4)。其中杂交粒子群响应面算法的参数设置为:粒子数40,设计变量3个,交叉概率0.9,杂交池大小比例0.1,最大迭代次数500。上述各参数有一定的取值范围^[2],本案例在该范围内取值,其余案例类似。

5.2 非均质边坡

引用澳大利亚计算机应用协会(ACADS)边坡稳定考核题ACADS-EX1C进行可靠性分析^[21],边坡剖

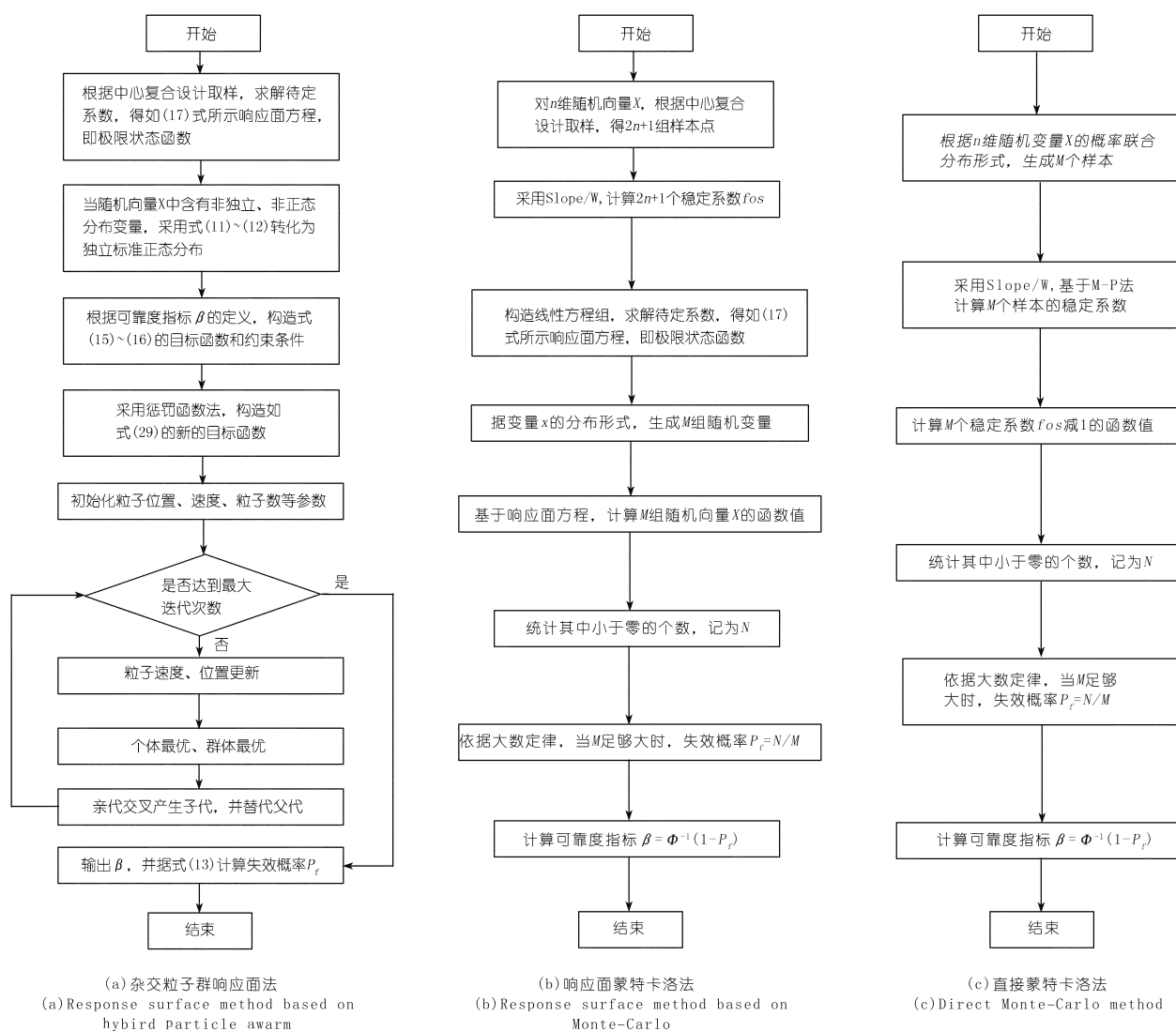


图2 3种不同可靠度计算方法流程对比

Fig.2 Comparison of flow charts for three types of reliability analysis methods

表 1 均质边坡计算结果

Tab.1 Calculation results of homogeneous slope

可靠度 指标	直接蒙特 卡洛 a	杂交 粒子群 b	基于响应面 蒙特卡洛 c	相对误差/%		
				$ a-b /a$	$ a-c /a$	$ b-c /a$
β	2.4840	2.4960	2.5170	0.48	1.33	0.83
P_f	0.0065	0.0063	0.0059	3.08	9.23	6.78

注: 文献[19]计算结果为 $\beta = 2.544$, $P_f = 0.0055$

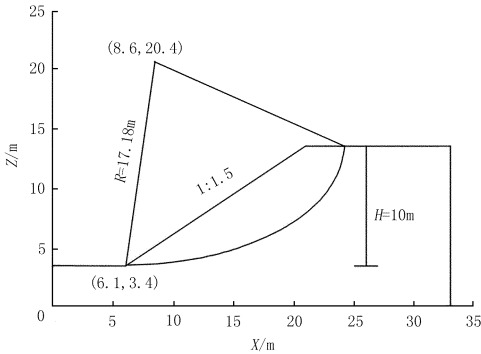


图 3 路堤边坡剖面示意

Fig.3 Profile of embankment slope

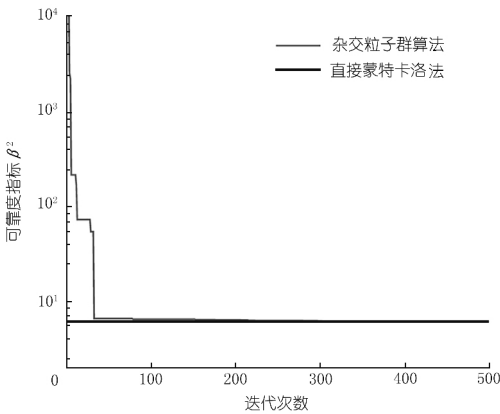


图 4 均质边坡粒子群算法进化曲线

Fig.4 Evolutionary curve of PSO for homogeneous slope

面如图 5 所示,潜在滑面为圆弧形,其确定方法为采用文献[21]公布的圆心坐标及半径。该边坡各土层的力学参数及其分布形式如表 2 所示,其中土体的重度为 $\gamma = 19.5 \text{ kN/m}^3$ 。将各土层的凝聚力、内摩擦角视为独立分布随机变量,分别采用上述 3 种方法进行可靠度计算,并将计算结果列于表 3。粒子群算法进化曲线见图 6。其中杂交粒子群响应面算法的运行参数为:粒子数 40,设计变量 5 个,杂交概率 0.94,杂交池大小比例 0.10,最大迭代次数 500。

表 2 EX1C 土体物理力学参数

Tab.2 Physical and mechanical parameters of EX1C

土层	c			φ		
	均值/kPa	标准差	分布	均值/(°)	标准差	分布
I	0.0	0.0	正态	38	6	正态
II	5.3	0.7	正态	23	3	正态
III	7.2	0.2	正态	20	3	正态

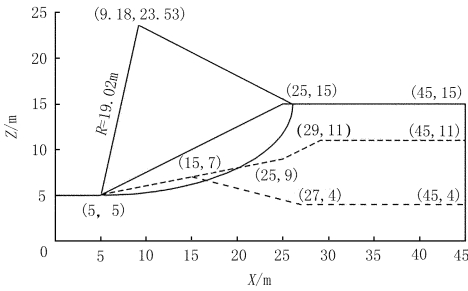


图 5 EX1C 边坡剖面

Fig.5 Profile of EX1C slope

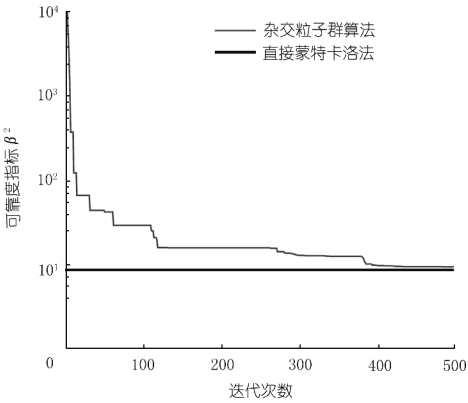


图 6 EX1C 边坡粒子群算法进化曲线

Fig.6 Evolutionary curve of PSO for EX1C slope

表 3 EX1C 边坡计算结果

Tab.3 Calculation results of EX1C slope

可靠度 指数	直接蒙特 卡洛 a	杂交 粒子群 b	基于响应面 蒙特卡洛 c	相对误差/%		
				$ a-b /a$	$ a-c /a$	$ b-c /a$
β	2.93100	3.06300	3.06500	4.50	4.57	0.07
P_f	0.00169	0.00110	0.00109	34.91	35.50	0.92

注: 文献[21]计算结果为 $\beta = 3.143$, $P_f = 0.0008$ 。

6 实例分析

以玉树县结合镇应急燃油电站 H1 滑坡为例进行可靠性分析^[22],其地貌类型为构造侵蚀中低山,地势总体上呈南高北低,西高东低。H1 滑坡平面形态呈近似舌型,纵剖面形态为折线形,整体坡度 $40^\circ \sim 55^\circ$,滑坡后缘高程为 3 910.2 m,前缘高程为 3 719.7 m,斜长 636 m,主要地质剖面如图 7 所示。滑体的平均厚度为 15.4 m,面积为 $3.89 \times 10^4 \text{ m}^2$,体积为 $70.07 \times 10^4 \text{ m}^3$,滑动方向约 79° 。H1 滑坡后缘高度为 39.7 m,坡度近乎直立,呈圈椅状,冲沟发育。滑坡区滑体的主要成分为褐黄色,青灰色残破积碎石土,湿度为稍湿,密度为稍密-中密,各土层降雨工况下的物理力学参数如表 4 所示。将强度参数内摩擦角 φ 和凝聚力 c 视为正态分布随机变量,且各变量之间相互独立,分别采用上述 3 种方法进行可靠度计算。将计算结果列于表 5,并得

到粒子群算法的进化曲线如图 8 所示。杂交粒子群响应面可靠性算法的参数为: 粒子数 30 ,设计变量 3 个 , 杂交概率 0.96 ,杂交池大小比例 0.15 ,最大迭代次数 500。该案例均值点的稳定系数 0.925 ,小于 1 ,依据 1.2 节可靠度指标 β 的正负取值筛选 ,可知 β 应取为负值 , 同时直接蒙特卡洛法的计算结果 β 也为负值 ,故再次验证了 1.2 节筛选方法的合理性。

表 4 降雨工况下 HP1 滑坡土体物理力学参数

Tab.4 Physical and mechanical parameters of H1 landslide

统计 指标	密度/ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	凝聚力/ kPa	内摩擦角/ ($^{\circ}$)
最大值	19.55	22.30	29.52
最小值	18.45	8.10	7.92
平均值	19.10	14.00	18.72
标准差	0.10	1.65	2.16

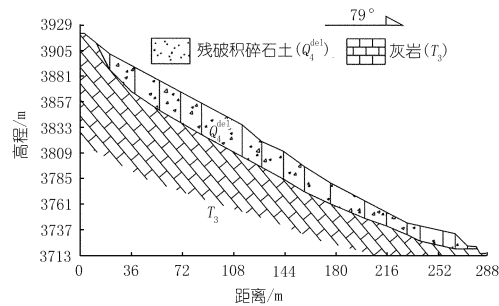


图 7 H1 滑坡剖面
Fig.7 Profile of H1 landslide

表 5 H1 滑坡计算结果

Tab.5 Calculation results of H1 landslide

可靠度 指标	直接蒙特 卡洛 a	杂交 粒子群 b	基于响应面 蒙特卡洛 c	相对误差/%		
β	-0.8538	-0.8637	-0.8638	$ a-b /a$	$ a-c /a$	$ b-c /a$
P_f	0.8034	0.8061	0.8061	0.34	0.34	0.00

注: 文献[22]计算结果为 $\beta = -1.720$, $P_f = 0.957$ 3

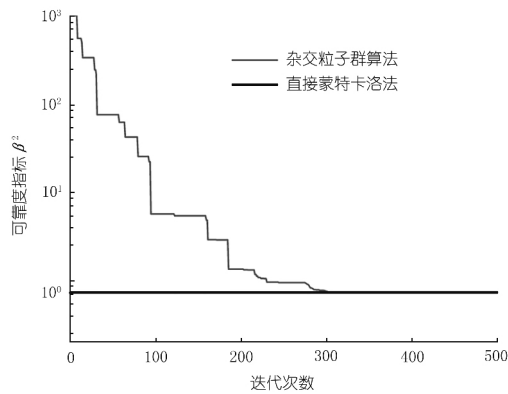


图 8 H1 滑坡粒子群算法进化曲线
Fig.8 Evolutionary curve of PSO for H1 landslide

7 结果分析

7.1 二次响应面函数的拟合精度分析

为分析二次响应面函数的拟合精度 ,对上述 3 种边坡的设计变量进行 10 次随机抽样 ,并将其拟合值和边坡稳定性计算值相比较 ,如图 9~11 所示。对于均质边坡 ,其最大相对误差为 5.6% ,EX1C 边坡最大相对误差为 3.1% ,H1 滑坡最大相对误差为 2.04%。如果以相对误差上限 5% 为标准 ,EX1C 边坡和 H1 滑坡的相对误差都小于该值 ,而均质边坡的相对误差比该值略大 ,但仍属于可接受的范围。理论上 ,如果响应面在式(17) 基础上继续考虑交叉项 ,或者采用更高次的响应面函数 ,误差的控制将会更优 ,但后续算法的复杂度和计算耗时将会显著升高 ,因此在实践中 ,应在复杂度和精度之间做出平衡决策。对目前 3 个案例而言 ,二次响应面函数在保持简洁的同时 ,达到了较好的拟合能力 ,满足可靠性评估的需求。

7.2 杂交粒子群算法的精度分析

利用响应面法拟合极限状态方程 ,并分别利用杂交粒子群算法和蒙特卡洛法计算可靠度指标 。根据表 1 3 5 的计算结果 ,可以获得 3 个层次的认知: ① 基于响应面的杂交粒子群算法与基于响应面的蒙特卡洛法两者结果十分接近 ,最大相对误差仅为 0.83%。这反映了杂交粒子群具有强大的非线性优化能力 ,对二次响应面函数有很好的适应性。② 基于响应面的蒙特卡洛法与直接蒙特卡洛法计算结果最大相对误差仅为 4.57% ,最小误差为 1.17% ,相比于误差上限 5% ,该值较小 ,印证了二次响应面函数的拟合精度较高。③ 基于响应面的杂交粒子群算法具有很高的总体精度 3 个案例中 ,杂交粒子群算法与直接蒙特卡洛法计算结果最大相对误差仅为 4.50% ,最小误差为 0.48%。由此可知 ,当案例的复杂程度不太高时 ,基于杂交粒子群响应面可靠性算法既能发挥二次响应面的拟合能力 ,同时又具有较好的寻优能力。作为可靠性检验方法的直接蒙特卡洛法 ,其计算结果相当于一种精确解 ,由于上述 3 个案例中两种方法的最大相对误差仅为 4.50% ,两者计算结果比较接近 ,故基于杂交粒子群响应面可靠性算法具有较好的全局寻优能力 ,精度较高。为满足精度要求 ,直接蒙特卡洛法抽样次数 N 只有达到一定数目 ,失效概率才趋于稳定 ,而每一次抽样 ,直接蒙特卡洛法相当于一次迭代计算。经计算 ,均质边坡和 EX1C 边坡的至少迭代次数分别为 9 000 和 33 000 ,而对于高失效概率的 H1 滑坡 ,文献[22]表明其迭代次数至少为 3 000 时失效概率才趋于稳定 ,同时

相应的 3 个案例基于杂交粒子群响应面边坡可靠性算法迭代次数均为 500, 可知杂交粒子群响应面可靠性算法用较少的迭代次数就可达到与直接蒙特卡洛法相似的精度, 具有较高的计算效率。

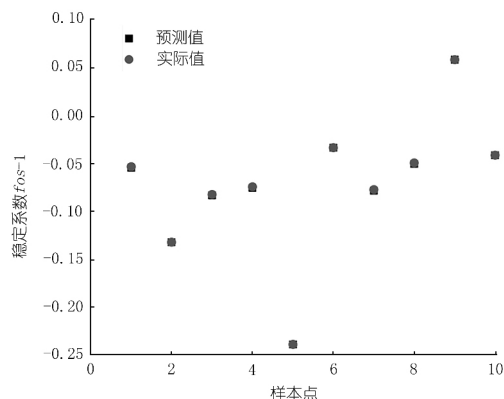


图 9 H1 滑坡拟合精度检验

Fig.9 Fitting accuracy of H1 landslide

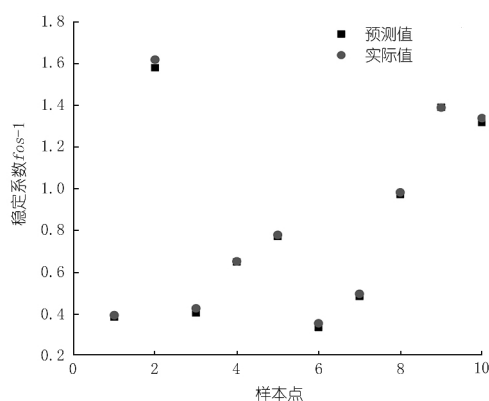


图 10 均质边坡拟合精度检验

Fig.10 Fitting accuracy of homogeneous slope

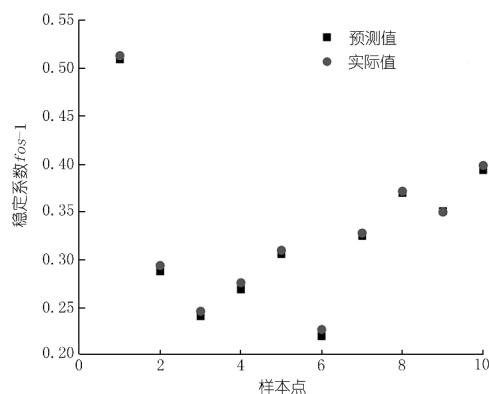


图 11 EX1C 边坡拟合精度检验

Fig.11 Fitting accuracy of EX1C slope

7.3 截尾正态分布对分析结果的影响

3 个边坡案例中, 变量的概率分布类型均为正态分布。由于这些物理量的非负特性, 本文以 1.3 节所述方法按照截尾正态分布进行了预处理, 但计算结果

与原文献相差不大, 原因解释如下: 根据正态分布的 3σ 原理^[23], 随机变量在 $\mu \pm 3\sigma$ 范围内出现的概率高达 99.73%, 而 3 个案例中 3σ 区间的下限仍满足 $\mu - 3\sigma > 0$, 也就是说 3 个案例中随机变量出现负值的几率均小于 0.135%, 即便对负值不进行严密的“过滤”处理, 对计算结果影响也甚微。但从理论严密的角度, 实施截尾正态分布预处理仍然是优选的方案, 且可以预见, 一旦新的案例中得不到满足, 则不考虑非负特性所带来的误差将会升高。

8 结 论

(1) 本文完善了边坡可靠性求解的数学优化模型。该模型对可靠度指标 β 的正负取值筛选问题进行了澄清, 对非独立非、正态变量的预处理问题、非负值附加约束条件等细节方面进行了完善。3 个案例证明, 该模型切实可行。

(2) 3 个案例表明, 针对于极限状态方程为隐式的情况, 二次响应面函数具有较好的拟合精度, 可用于变量之间函数关系的近似构建, 并将其函数关系显式化。

(3) 杂交粒子群响应面可靠性算法具有较强的全局搜索能力, 与动辄上万次随机抽样的蒙特卡洛法相比较, 计算结果非常接近, 精度较高, 同时迭代次数也较少, 节省计算成本。

参考文献:

- [1] 龚纯, 王正林. 精通 MATLAB 最优化计算 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [2] 余胜威. MATLAB 优化算法案例分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [3] 苏永华, 赵明华, 刘晓明. 用遗传算法搜索验算点的复杂响应面函数可靠度分析方法 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(S2): 5868-5873.
- [4] Yi P, Wei K T, Kong X J, et al. Cumulative pso-kriging model for slope reliability analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2015(39): 39-45.
- [5] 黄连娣, 冯新, 周晶. 一种基于 BP 网络和粒子群算法的拱坝可靠度分析方法 [J]. 防灾减灾工程学报, 2012, 32(3): 326-331.
- [6] Xie G H, Zhang J S, Li J X. Slope reliability analysis based on improved genetic algorithm [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(6): 1815-1820.
- [7] 朱剑锋, 陈昌富, 徐日庆. 基坑土钉支护可靠性分析优化算法 [J]. 岩土力学, 2010, 31(7): 2336-2341.
- [8] 苏雅, 杨明辉, 苏永华, 等. 深埋隧道衬砌稳定可靠度的 Kriging 插值法与遗传算法协同优化求解法 [J]. 岩土力学, 2013, 34(9): 2661-2666.
- [9] Khajezadeh M, Taha M R, Ei-shafie A. Reliability analysis of earth slopes using hybrid chaotic particle swarm optimization [J]. Journal of Central South University of Technology (English Edition), 2011, 18(5): 1626-1637.

- [10] 张璐璐, 张洁, 徐耀, 等. 岩土工程可靠度理论 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2011.
- [11] Hasofer A M, Lind N C. An exact and invariant first order reliability format [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1974(3): 71-77.
- [12] 郑铎, 吴世伟. 线性化极限状态方程及归一型算法 [J]. 河海大学学报: 自然科学版, 1992, 20(6): 87-93.
- [13] 严春丽. MLR-Bernstein 多项式模型在大坝监测中的应用 [J]. 人民长江, 2015, 46(8): 61-63.
- [14] 何耀耀, 周建中, 罗志猛, 等. 基于混沌 DE 算法和 PP 多项式函数的洪灾评估 [J]. 人民长江, 2010, 41(3): 92-95.
- [15] 马能武. 大坝安全监测数据的分段多项式滤波方法研究 [J]. 人民长江, 2002, 33(6): 46-47.
- [16] Zhang Jie, Huang H W, Phoon K K. Application of the kriging-based response surface method to the system reliability of soil slopes [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(4): 651-655.
- [17] Suresh S, Sujit P B, Rao A K. Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design [J]. Composite Structures, 2008, 81(4): 598-605.
- [18] 程跃, 程文明, 郑严, 等. 基于混沌粒子群算法的结构可靠性优化设计 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2011, 42(3): 671-676.
- [19] 陈善攀. 土质边坡稳定可靠度分析遗传算法方法及程序设计 [D]. 长沙: 中南大学, 2008.
- [20] 张丽波, 郭将, 刘晓. 响应面法与蒙特卡洛法边坡可靠性评价方法对比研究 [J]. 武汉大学学报: 工学版, 2015, 49(5): 779-786.
- [21] 何木. 基于传递系数法的边坡稳定可靠度分析及应用 [D]. 成都: 成都理工大学, 2010.
- [22] 侯小强. 基于 Monte Carlo 法的滑坡稳定可靠性分析研究——以玉树西航电站 H1 滑坡为例 [J]. 城市道桥与防洪, 2014(11): 210-213.
- [23] Patel J K, Campbell B. Handbook of the normal distribution [M]. New York: Marcel Dekker, 1982.

(编辑: 胡旭东)

Study on reliability algorithm of slope stability based on response surface methodology and hybrid particle swarm optimization

WANG Biaolong, LIU Xiao, GUO Jiang

(Three Gorges Research Center for Geo-hazard of Ministry of Education, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: To solve the theory deficiency of reliability index β in mathematical optimization model and the problem that the conventional mathematical optimization method is easily trapped in the local optimal solution, a slope reliability algorithm based on hybrid particle swarm optimization and response surface methodology is proposed. This algorithm is based on the geometric meaning of β . After preprocessing positive physical variables, non-normal variables and independent random variables, the additional constraints are added, and the mathematical optimization model for reliability solution is given. The positive and negative values of β are clarified. The quadratic response surface method is used to construct the limit state equation, and the global optimal solution of β is searched based on hybrid particle swarm optimization. The results of three representative cases prove that the theory of reliability mathematical optimization model is correct, which is an effective supplement to solve reliability problems. The algorithm can do better global search. Its calculation result is close to that of Monte Carlo method, but the iterative times are obviously less and the calculation efficiency is higher.

Key words: reliability index; mathematical optimization; quadratic response surface methodology; hybrid particle swarm optimization; slope

