目录

电磁学笔记

CCY

2025 年 5 月 24 日

1 基本的电磁现象

1.1 电荷与电场

1.2 导体与电介质

1.3 电流场的描述

1.4 磁场

1.5 磁矩

2 电场

2.1 高斯定理

2.2 电场的散度

2.3 静电场的电势

2.4 静电势能和电场中的能量

2.4.1 电荷在外电场的静电势能

2.4.2 带点体系的静电能

电势能存储在电场中: 类比弹簧：势能储存在弹簧中，压缩弹簧，能量被存储到弹簧中；两个正电荷相互靠近，电场发生改变，电势能存储到电场中；不同之处：弹簧的弹性势能与两端的质量块无关，电势能与电场强度有关

静电势能 <–> 电势 <–> 做功 <–> 电场力:体系的电势能:$E = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\sum q_i U_i = \frac{1}{2}\iint \rho_e u \, d\tau$

例题:

1. 均匀带电球壳带电量为 Q, 求它的电势能

   解：在空间中，将电荷不断从无穷远处移动到球壳上，使球壳的带电量从 0 增加至 Q, 在这个过程中，外力做的功即为体系的电势能：

   运用公式求解：$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$

   $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$

2. 均匀带电球体，半径为 R，电荷密度为 ρ，求它的电势能

   解：利用公式求解：

   $$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r & r > R \end{cases}$$

   $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\int_r^R \vec{E}dx + \int_R^\infty \vec{E}dx) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_r^R xdx + \int_R^\infty \frac{R^3}{x^2}dx = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(-\frac{x}{R^3} \mid_R^\infty + \frac{1}{2}x^2 \mid_r^R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{3R^2-r^2}{2}$

   $E_\phi = \frac{1}{2}\int \rho u d\tau$

   $= \frac{1}{4}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{3Q}{4\pi R^3}\int_\Omega (3R^2 - r^2)dV$

$= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$

2.4.3 电场的能量

在某一带电球壳周围存在伴存电场，假设其等势面是一系列封闭曲面，空间被这些等势面划分成许多薄层，如图所示：

将带点球壳每一部分从无穷远处移动到原处，在移动 dx 段距离的过程中，只有这一部分的电场发生了变化，故外力所做的功存储在这一部分空间中两等势面的电势差为 dU, 每一薄层的电能 $dW = \frac{1}{2}QdU$, 整个电场的能量 $W = \frac{1}{2}Q\int dU = \frac{1}{2}QU_0$

根据高斯定理有：$\oint \vec{E}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$

设 dl 和 dS 的方向一致（即指向 S 的外法线方向）则有：$dU = \vec{E}dl$

所以：$W = \oint \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}d\tau$

所以单位体积内的电场能量为：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{1}$$

w_e 叫做电场的能量密度, 虽然是由孤立带点等势面的特例得到，却对所有电场都适用

例题：

- 有一个厚度为 t 的球壳，内半径为 R，将无穷远处的一个点电荷移动到导体空腔圆心处，求在移动过程中外力所做的功

  解：

  方法一：

  从初态到末态，可以看作只有导体所占空间处的电场消失了，用电场的能量密度求解：

  $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^{R+t}\vec{E}^2 d\tau = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_R^{R+t}\frac{1}{r^4}d\tau = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R+t} - \frac{1}{R})$

  方法二：求移动后体系的静电能

2.4.4 电子的经典半径

带电粒子和他的电场是不可分割的整体，若电场的能量为 W, 按狭义相对论粒子的质量为

$$m_{em} = \frac{W}{c^2} \tag{2}$$

其中，m_{em} 是粒子的电磁质量，W 是电子的电场能量，c 是光速。W 与电荷的分布有关，

假设粒子半径为 r_0，电荷密度为 ρ，电荷量为 q，

电荷均匀分布在球面上：

$$m_{em} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} \tag{3}$$

电荷均匀分布在球体上：

$$m_{em} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} \tag{4}$$

迄今还无法测知电荷的分布，作为一种估计，$m_{em} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}$ 由上式可得：

$$R = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m_{em}} \tag{5}$$

粒子的电量是可以测得的，但是 m_{em} 是未知的

电子的电荷量 $q = -1.6 \times 10^{-19} C$，质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$，若将其全部估算为电磁质量，则

$$R = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m_e} \approx 2.82 \times 10^{-13} m \tag{6}$$

即电子的经典半径，是根据宏观电磁学对电子半径的估计，不可能是准确的。

2.5 导体的静电平衡和电子的发射

2.5.1 导体中的自由电子

势阱：在导体中，电荷分布是均匀的，电场强度为 0，电势是常数，

逸出功：

2.5.2 静电平衡

均匀导体板在匀强电场中的情况

不规则导体在电场中的情况

导体有空腔的情况：空腔内部电场为 0

初始外电场为 0，导体有空腔，空腔内有电荷：

同上，但导体接地：

同上，在导体外部有电荷：

3 电流场

3.1 导体中的传导电流

3.1.1 欧姆定律

电流密度：在导体中任取一个小面积元 dS, 单位法向量为 $\vec{n}$, 电流密度为 $\vec{j}$,

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{n} dS = j dS \cos\theta \tag{7}$$

单位面积的电流密度为 $\vec{j} = nq\vec{v}$, 其中，n 为单位体积内的自由电子数，q 为电子的电荷量，$\vec{v}$ 为电子的漂移速度

真实速度：电子在导体中做无规则运动，常温下平均速率约为 10^5 $10^6 m/s$ 平均速度为 0 不形成电流

漂移速度：由于电场的作用，电子有逆着电场方向的加速度和速度可用 $\vec{u}$ 表示，数量级约为 10^{-4} $10^{-5} m/s$，正是漂移速度产生了宏观电流

在导体中，电子受到电场力的作用，对电子使用冲量定理:

$$\vec{v_0} = 0; m\vec{u} = -eE \tag{8}$$

取一个

3.2 电源及其电动势

3.3 电容

3.4 电流场的连续性

4 磁场与电磁效应

4.1 磁场的通量和环量

4.1.1 磁场的通量————磁场的高斯定理

在 1.4.4 中讲了毕奥-萨伐尔定律：在相对电流元矢径为 $\vec{r}$ 的点 P 处，电流的伴存磁场为：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{9}$$

对任意曲面 S, 磁感应强度矢量的磁通量：

$$\phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{10}$$

由于磁感线是闭合曲线，所以对任意闭合曲面 S，磁通量为零，即 $\oiint_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
对闭合曲面，根据高斯定理：$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$, 因为 S 是任意的，所以必然有：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{11}$$

说明磁场的散度为 0. 散度为 0 的场叫做无散场，电流场也是无散场。

4.1.2 磁场的环量安培环路定理

安培环路定理：磁感应强度沿任一有向闭合环路 L 的环量等于穿过该环路所围成的任意面 S 的电流代数和的 μ_0 倍：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \Sigma_{i=1}^n I_i \tag{12}$$

鉴于全电流的概念：

$$\Sigma_{i=1}^n I_i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{13}$$

所以安培环路定理可以写成：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{14}$$

根据斯托克定律：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \tag{15}$$

其中，$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$,$\nabla \times \vec{B}$ 是磁场的旋度

则，

$$\iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d|vecS \tag{16}$$

所以，

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{17}$$

这是安培环路定律的微分形式

4.1.3 面电流的磁场

面电流：若电流分布在厚度为 Δd 的薄层中，且 Δd 可视为无穷小量，则认为电流分布在一个面上，称为面电流

设一个薄层厚度为 Δd, 宽度为 Δl, 电流为 ΔI, 因为 Δd 是无穷小量，用 $\frac{\Delta I}{\Delta d}$ 表示电流密度，称为面电流密度，记为 $\vec{j_m}$, 单位为 A/m

$$j_m = \frac{\Delta I}{\Delta d} \tag{18}$$

若通过薄层的电流密度矢量为 $\vec{j}$, 则有：

$$\Delta I = \vec{j} \Delta L \Delta d \tag{19}$$

则：$\vec{j_m} = \vec{j} \Delta d$

在实际问题中，只有薄层的厚度 Δd 可视为无穷小量时，才能用面电流的概念。若 j_m 不是无穷小量，则 j 必然为无穷大量，此时 4.1.2 最后的式子（微分形式的安培环路定理）将不再适用，但是积分形式的安培环路定理仍然适用。

4.1.4 柱电流面的磁场

有一截面均匀的无限长圆柱形电流面通有均匀稳定的横向面电流，电流面密度为 j_m, 由于磁感应强度与电流元垂直，所以 $\vec{B}$ 只有 z 分量。又因为 $\nabla \times \vec{B} = 0$

4.2 通电螺线管的磁场

4.3 电磁感应定律与涡旋电场

4.4 几种电磁感应现象

4.5 磁场的能量

4.6 电路中的电磁感应

5 电介质

5.1 电介质的极化

根据电荷能否在物质中在宏观上（即离开电子原来所在的原子，在固体物理上叫做电子公有化）自由移动，将物质分为导体和绝缘体，绝缘体又称介质。但这种分类并不绝对，如半导体既是导体又是绝缘体；“击穿”现象：绝缘体变成了导体。

电介质：能对外加电场做出相应的介质

5.1.1 介质极化的微观原理

在外加电场 $\vec{E_0}$ 的作用下，介质中产生极化电荷 Q', 极化电荷产生电场 $\vec{E}'$，空间中的电场变为 $\vec{E}=\vec{E_0}+\vec{E}'$，这就是电介质极化的微观过程

将每一个分子都看成一个电偶极子（在空间中产生电场；在外加电场的作用下会受力），$\vec{p}=q\cdot\vec{L}$.

无极分子介质的位移极化：氢气 (H_2), 二氧化碳 (CO_2) 等，正负电荷中心重合，无极性。在外加电场的作用下，正负电荷中心发生位移，形成了电偶极子，p 约为 $10^{-29}-10^{-30}cm$ 量级

有极分子的取向极化：例如氯化氢 (HCl)。正负电荷中心不重合，有电偶极矩。无外电场的情况下，由于热运动，分子的取向杂乱无章，所有分子的整体在宏观上无电偶极矩。外加电场之后，所有的电偶极矩受到力矩的作用，使电偶极子尽量往电场的方向分布，最终与热运动形成了一种平衡，宏观上有电偶极矩。且电偶极矩大小与温度有关。

介质的极化主要是有极分子的取向极化。

5.1.2 极化强度矢量

$$\vec{P}=\frac{\Sigma\vec{p_i}}{dV} \tag{20}$$

单位：C/m^2, 是空间位置的函数，只存在于介质内部

5.1.3 极化电荷与极化强度矢量之间的关系

在外加电场的作用下，在空间中的介质中取一个闭合曲面，那么介质中的极化电荷与极化强度之间的关系是什么？

在介质中的闭合曲面中，由于电荷极化时发生的位移非常小，可视为曲面内外部极化电荷为 0，仅在闭合曲面表面的薄层中产生的极化电荷（电偶极子）对曲面包围体积中的极化电荷有贡献。取闭合曲面的一个面积微元 dS, 单位法向量为 $\vec{n}$, 取高为 l，以 dS 为底面的一个小圆柱体，

$$dV = ldS|\cos\theta| \tag{21}$$

$$dN = ndV = nl|\cos\theta|dS \tag{22}$$

$$dQ' = qnl|\cos\theta|dS = -\vec{P}\cdot d\vec{S} \tag{23}$$

虽然介质的均匀极化非常困难，但在该微元中，可视为均匀极化，各电偶极矩相等。则由定义知：$\vec{P} = nq\vec{l}$, 所以：

$$Q' = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \tag{24}$$

两边同时对体积求微分：

$$\rho'(\vec{r}) = -\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r}) \tag{25}$$