二维非稳态热传导方程隐式差分格式矩阵结构分析

传热学数值分析

2025 年 6 月 17 日

1　控制方程

考虑二维非稳态热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

其中：

- $T = T(x, y, t)$ 为温度场
- α 为热扩散系数
- t 为时间变量
- (x, y) 为空间坐标

2　数值离散

2.1　空间-时间离散

将求解域离散为均匀网格：

- 空间步长：Δx, Δy
- 时间步长：Δt
- 网格点索引：(i, j) 对应 (x_i, y_j)
- 时间步索引：n 对应 t_n

2.2　隐式向后差分格式

对时间项采用一阶向后差分：

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{2}$$

对空间项采用二阶中心差分：

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \tag{4}$$

2.3 全离散方程

代入控制方程 (1) 得：

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) \tag{5}$$

3 矩阵系统推导

3.1 方程重排

定义常数：

$$r_x = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{6}$$

$$r_y = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \tag{7}$$

重排方程：

$$-r_x T_{i-1,j}^{n+1} - r_y T_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2r_x + 2r_y) T_{i,j}^{n+1} - r_x T_{i+1,j}^{n+1} - r_y T_{i,j+1}^{n+1} = T_{i,j}^{n} \tag{8}$$

3.2 节点排序与索引映射

将二维网格按行优先顺序展开为一维向量：

$$\mathbf{T}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_{0,0} \\ T_{0,1} \\ \vdots \\ T_{0,N_y-1} \\ T_{1,0} \\ T_{1,1} \\ \vdots \\ T_{N_x-1,N_y-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

索引映射：

$$k(i,j) = i \times N_y + j \tag{10}$$

其中 N_y 为 y 方向节点数。

3.3 矩阵元素分析

根据方程 (8)，对内部节点 (i,j)：

位置	矩阵行	非零元素
自身	$k(i,j)$	$A_{k,k} = 1 + 2r_x + 2r_y$
左邻	$k(i-1,j)$	$A_{k,k-N_y} = -r_x$
右邻	$k(i+1,j)$	$A_{k,k+N_y} = -r_x$
下邻	$k(i,j-1)$	$A_{k,k-1} = -r_y$
上邻	$k(i,j+1)$	$A_{k,k+1} = -r_y$

3.4 矩阵结构

系统矩阵 A 为分块五对角矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2 & B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{N_x-2} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N_x-1} & B_{N_x-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中：

- B_i：大小为 $N_y \times N_y$ 的三对角矩阵
- A_i, C_i：大小为 $N_y \times N_y$ 的对角矩阵

具体子矩阵结构：

$$B_i = \begin{bmatrix} d & -r_y & 0 & \cdots & 0 \\ -r_y & d & -r_y & \ddots & \vdots \\ 0 & -r_y & d & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -r_y \\ 0 & \cdots & 0 & -r_y & d \end{bmatrix}, \quad d = 1 + 2r_x + 2r_y \tag{12}$$

$$A_i = \mathrm{diag}(-r_x, -r_x, \ldots, -r_x) \tag{13}$$

$$C_i = \mathrm{diag}(-r_x, -r_x, \ldots, -r_x) \tag{14}$$

4 物理与数学特性

4.1 物理意义

矩阵结构反映热传导的物理特性：

- **局部性**：热传导仅与相邻节点耦合
- **各向异性**：$r_x \neq r_y$ 时，x 和 y 方向传热不同
- **守恒性**：对角占优保证数值稳定性

4.2 数学特性

- **稀疏性**：每行仅 5 个非零元素
- **对称性**：当 $\Delta x = \Delta y$ 时对称
- **对角占优**：$|A_{k,k}| \geq \sum_{j \neq k} |A_{k,j}|$
- **正定性**：特征值实部为正

5 求解方法

5.1 直接解法

$$A\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{b}^n \tag{15}$$

其中 $\mathbf{b}^n$ 包含右端项和边界条件。

常用算法：

- LU 分解（适用于中小规模问题）
- 追赶法（特殊五对角矩阵）
- 稀疏矩阵求解器（如 SuperLU）

5.2 迭代解法

- Gauss-Seidel 迭代
- 共轭梯度法（CG）
- 多重网格法（高效）

5.3 交替方向隐式法（ADI）

将二维问题分解为两个一维问题：

$$\left(1 - r_x\delta_x^2\right) T^{n+1/2} = \left(1 + r_y\delta_y^2\right) T^n \tag{16}$$

$$\left(1 - r_y\delta_y^2\right) T^{n+1} = \left(1 + r_x\delta_x^2\right) T^{n+1/2} \tag{17}$$

每步仅需求解三对角矩阵系统。

6 边界条件处理

6.1 第二类边界条件

对边界节点 $(i, j) \in \partial\Omega$：

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = q \tag{18}$$

离散形式：

- **左边界** $(i = 0)$：$-k\frac{T_{1,j} - T_{0,j}}{\Delta x} \approx q_{\text{left}}$
- **右边界** $(i = N_x - 1)$：$-k\frac{T_{N_x-1,j} - T_{N_x-2,j}}{\Delta x} \approx q_{\text{right}}$
- 类似处理其他边界

6.2 角点处理

如左下角 $(0, 0)$：

$$\frac{-k}{\sqrt{2}}\left(\frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{\Delta x} + \frac{T_{0,1} - T_{0,0}}{\Delta y}\right) \approx q_{\text{corner}} \tag{19}$$

7 稳定性分析

隐式格式的稳定性由矩阵特征值决定：

$$\rho(I - \Delta t \cdot A) < 1 \tag{20}$$

其中 ρ 为谱半径。

von Neumann 稳定性分析显示隐式格式**无条件稳定**：

$$|g(k)| = \frac{1}{|1 + 4r_x \sin^2(k_x \Delta x/2) + 4r_y \sin^2(k_y \Delta y/2)|} \leq 1 \tag{21}$$

其中 $g(k)$ 为增长因子。

8 总结

二维热传导方程隐式离散化形成五对角矩阵，由离散方程的局部耦合性质决定：

1. 热传导的物理机制仅涉及相邻节点
2. 空间二阶导数离散产生五点耦合
3. 行优先排序产生五对角块结构

此结构虽然比一维复杂，但仍保持稀疏性，可高效求解。