从离散方程到分块矩阵的完整演变过程

数值传热学分析

2025 年 6 月 17 日

1 问题描述

考虑一个简单的 2×2 网格系统（总 4 个节点），展示二维热传导方程隐式离散如何形成原始矩阵，再如何演变为分块矩阵。

1.1 网格点标记

$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(1,1)$

1.2 行优先索引

节点 (i,j)	索引 k	含义
$(0,0)$	0	左上
$(0,1)$	1	右上
$(1,0)$	2	左下
$(1,1)$	3	右下

2 离散方程

通用离散方程为：

$$-r_x T_{i-1,j} - r_y T_{i,j-1} + (1 + 2r_x + 2r_y)T_{i,j} - r_x T_{i+1,j} - r_y T_{i,j+1} = T_{i,j}^n$$

其中 $d = 1 + 2r_x + 2r_y$。

对 4 个节点分别写方程：

2.1 节点 (0,0) 方程

$$dT_{0,0} - r_x T_{1,0} - r_y T_{0,1} = T_{0,0}^n + r_x T_{-1,0} + r_y T_{0,-1}$$

边界项移到右侧

2.2 节点 (0,1) 方程

$$dT_{0,1} - r_x T_{1,1} - r_y T_{0,0} = T_{0,1}^n + r_x T_{-1,1} + r_y T_{0,2}$$

2.3 节点 (1,0) 方程

$$dT_{1,0} - r_x T_{0,0} - r_y T_{1,1} = T_{1,0}^n + r_x T_{2,0} + r_y T_{1,-1}$$

2.4 节点 (1,1) 方程

$$dT_{1,1} - r_x T_{0,1} - r_y T_{1,0} = T_{1,1}^n + r_x T_{2,1} + r_y T_{1,2}$$

3 原始矩阵形式

将方程组织成线性系统 $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{r} \\ k=0: \\ k=1: \\ k=2: \\ k=3: \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} d & -r_y & -r_x & 0 \\ -r_y & d & 0 & -r_x \\ -r_x & 0 & d & -r_y \\ 0 & -r_x & -r_y & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (0,0) \\ \leftarrow (0,1) \\ \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (1,1) \end{array}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{0,0}^n + r_x T_{-1,0} + r_y T_{0,-1} \\ T_{0,1}^n + r_x T_{-1,1} + r_y T_{0,2} \\ T_{1,0}^n + r_x T_{2,0} + r_y T_{1,-1} \\ T_{1,1}^n + r_x T_{2,1} + r_y T_{1,2} \end{bmatrix}$$

4 分块矩阵演变

4.1 步骤 1：识别网格行

将节点按网格行分组：

- 第 0 行: 节点 (0,0) 和 (0,1) $\rightarrow$ 索引 0,1
- 第 1 行: 节点 (1,0) 和 (1,1) $\rightarrow$ 索引 2,3

4.2 步骤 2：定义子矩阵块

定义三个类型的子矩阵：

1. B_i: 第 i 行内部的耦合关系
2. A_i: 第 i 行与第 $i-1$ 行的耦合
3. C_i: 第 i 行与第 $i+1$ 行的耦合

4.3 步骤 3：构建子矩阵

4.3.1 B_0 (第 0 行内部)

$$B_0 = \begin{bmatrix} d & -r_y \\ -r_y & d \end{bmatrix}$$

4.3.2 B_1 (第 1 行内部)

$$B_1 = \begin{bmatrix} d & -r_y \\ -r_y & d \end{bmatrix}$$

4.3.3 A_1 (第 1 行到第 0 行的耦合)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r_x & 0 \\ 0 & -r_x \end{bmatrix}$$

4.3.4 C_0 (第 0 行到第 1 行的耦合)

$$C_0 = \begin{bmatrix} -r_x & 0 \\ 0 & -r_x \end{bmatrix}$$

4.4 步骤 4：组合分块矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -r_y & -r_x & 0 \\ -r_y & d & 0 & -r_x \\ -r_x & 0 & d & -r_y \\ 0 & -r_x & -r_y & d \end{bmatrix}$$

5 一般情况推广

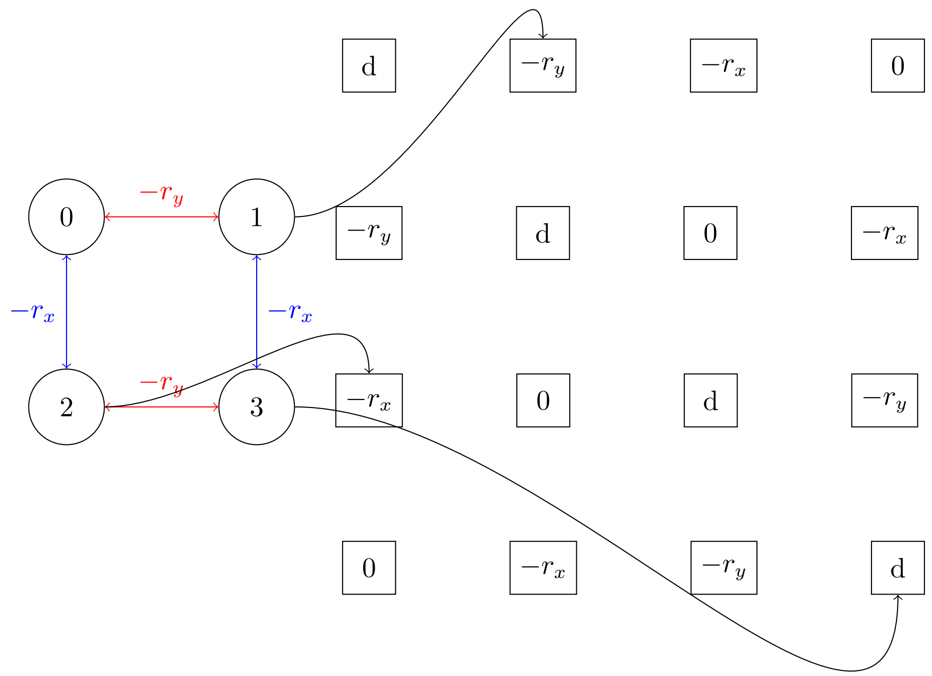
对于 $N_x \times N_y$ 网格，分块矩阵为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2 & B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{N_x-2} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{N_x-1} & B_{N_x-1} \end{bmatrix}$$

其中：

- B_i: $N_y \times N_y$ 三对角矩阵
- A_i: $N_y \times N_y$ 对角矩阵
- C_i: $N_y \times N_y$ 对角矩阵

6 物理意义图解



- 红色连接：行内耦合 $(-r_y)$，反映在 B_i 矩阵的非对角线上
- 蓝色连接：行间耦合 $(-r_x)$，反映在 A_i 和 C_i 矩阵的对角线上
- 网格中的每个连接点直接对应矩阵中的非零元素位置

7 结论

通过这个分析，我们清晰地展示了：1. 如何从离散方程得到原始矩阵 2. 如何识别网格的物理结构组织矩阵块 3. 子矩阵块 B_i, A_i, C_i 的物理意义 4. 如何将原始矩阵重组为块状结构

分块矩阵不是人为创造，而是对热传导物理耦合关系的自然数学表达。这种表达方式：

- 保持矩阵的原始数学特性
- 反映物理系统的空间结构
- 便于高效存储和求解
- 为复杂边界条件的处理提供框架