МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**

Институт информационных технологий, математики и механики

ОТЧЕТ

по лабораторной работе
на тему:

«Численные методы решения систем дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка»

Выполнил: студент группы 381706-2
Синицина Мария Сергеевна

____
подпись

Преподаватель:
Ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИИТММ
Морозов Кирилл Евгеньевич

____
Подпись

Нижний Новгород
2020

Содержание

Введение

При решении научных и инженерно-технических задач часто бывает необходимо математически описать какую-либо динамическую систему. Описать поведение во времени какой-либо системы возможно в рамках использования соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Системой M дифференциальных уравнений первого порядка в общем случае можно назвать следующую совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$,\begin{cases} y'_1(x) = F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_M) \\ y'_2(x) = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_M) \\ y'_M(x) = F_M(x, y_1, y_2, \dots, y_M) \end{cases}$$

где $y_1(x), y_2(x), y_M(x)$ есть некоторые функции независимой переменной x, причем правые части уравнений не зависят от производных $y_i(x)$, то есть все уравнения разрешены относительно производных функций.

Начальными условиями при решении задачи Коши для такой системы будут являться значение независимой переменной и значения всех M функций при этом значении:
$x_0, y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_M(x_0) = y_{M0}$
Функции $y_i(x)$, при подстановке которой система уравнений обращается в тождество, называется решением системы дифференциальных уравнений.

Существует множество методов решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции. Однако, чаще всего эти методы либо вообще не применимы, либо приводят к столь сложным решениям, что легче и целесообразнее использовать приближенные численные методы. В огромном количестве задач дифференциальные уравнения содержат существенные нелинейности, а входящие в них функции и коэффициенты заданы в виде таблиц и/или экспериментальных данных, что фактически полностью исключает возможность использования классических методов для их решения и анализа.

В настоящее время существует множество различных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе рассмотрим наиболее широко используемый на практике метод Рунге-Кутта.

Постановка задачи

В данной работе необходимо реализовать программу для решения систем дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Предлагается рассмотреть модель ФитцХью — Нагумо, так как ее исследование будет иметь значение в будущих работах. На её основе создано большое количество предметных, формально—кинетических, моделей химических и биологических колебательных систем. В традициях моделирования физиологических процессов эта динамическая система записывается как:

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}$$
$$\dot{y} = x + a - \varepsilon y$$

Где x — безразмерная функция, аналогичная трансмембранному потенциалу в биологической возбудимой ткани, и y — безразмерная функция, аналогичная медленному току восстановления. При определённом сочетании параметров системы уравнений наблюдается ответ по принципу «всё или ничего»: если внешний стимул I_{ext} превышает определенное пороговое значение, система будет демонстрировать характерное возвратно-поступательное движение в фазовом пространстве, до тех пока переменные y и x не «релаксируют» до предыдущего состояния. Такое поведение характерно для спайков, возбуждённых в нейроне стимуляцией внешним входным сигналом.

В физиологии используется в качестве концептуальной математической модели поведения возбудимой ткани (например, нейрона). Модель ФитцХью — Нагумо можно рассматривать как упрощенную версию модели Ходжкина — Хаксли, которая довольно детально объясняет динамику активации и деактивации пульсирующего нейрона.

В связи со всем сказанным ранее, а также имея некоторые экспериментальные значения величин, требуется численно решить следующую систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = \varepsilon(x + a) \end{cases}$ при параметре ε=0.05 и двух значениях параметра a: a=2 и a=0.2. Решение показать графически.

Описание методов

Алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка- (погрешность порядка h^4):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$, где

$$k_0 = hF(x_i,\ y_i)$$

$$k_1 = hF\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = hF\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hF(x_i + h,\ y_i + k_2)$$

Алгоритм четвертого порядка требует на каждом шаге четырех вычислений функции, но является весьма точным.

Метод решения задачи Коши для уравнений легко обобщается на случай решения систем ДУ первого порядка. Формулы выбранного метода применяются последовательно к каждому уравнению системы уравнений для определения значения соответствующей функции.

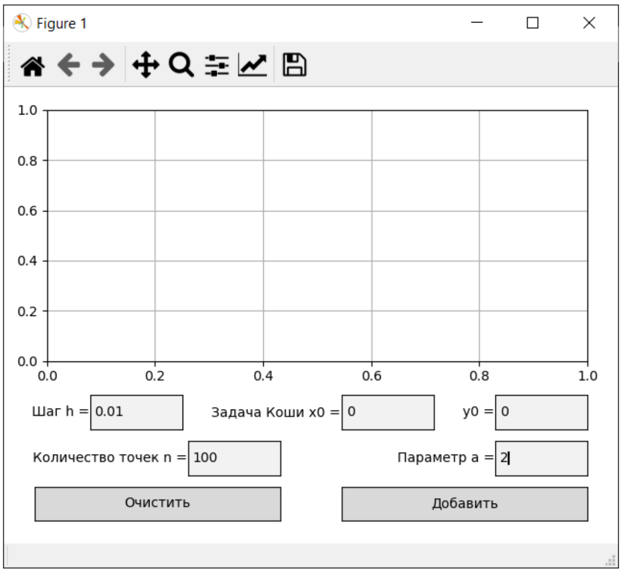
Реализация программы

В ходе работы была реализована программа, решающая предложенную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = \varepsilon(x + a) \end{cases}$ при параметре ε=0.05 и двух значениях параметра а: а=2 и а=0.2.

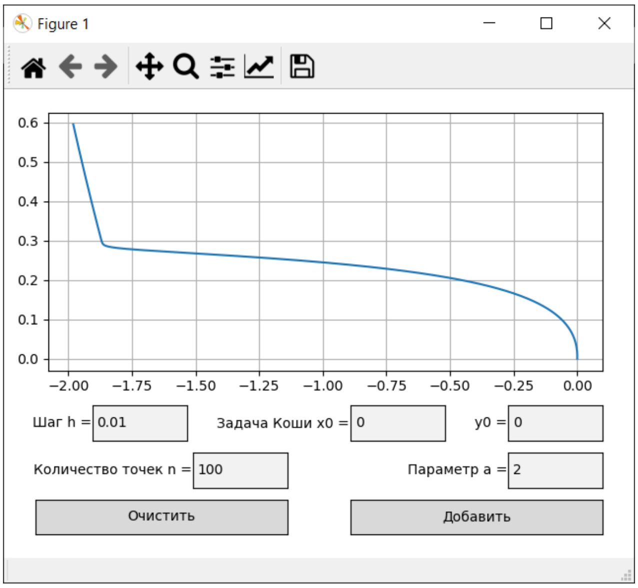
В программе реализованы три вычислительные функции:

1. Функция fx(x,y) , вычисляющая значение первого уравнения системы в точке
2. Функция fy(x), вычисляющая значение второго уравнения системы в точке
3. Функция Runge_Kutta(x0,y0,t,h), вычисляющая результат методом Рунге-Кутта

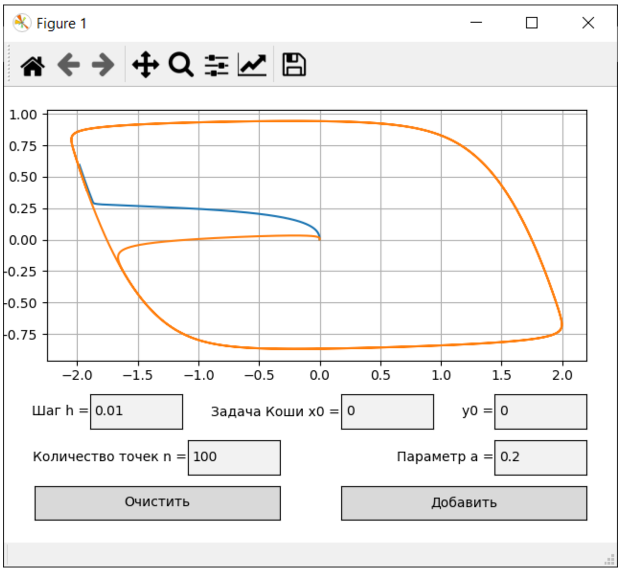
В начале работы выбираем параметры: шаг h=0.01, начальные условия x0=0, y0=0, t=100.



Получен следующий график для случая, где параметр а=2:



Получим следующий график для случая, где параметр a=0.2:



Заключение

В ходе работы была реализована программа решения систем дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта. Были получены практические навыки программирования систем дифференциальных уравнений.

Также в ходе работы было сделано несколько выводов: метод Рунге-Кутта прост в реализации, имеет высокую точность. Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок O(h5), а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок O(h4).

К достоинствам этого метода можно добавить то, что он является явными, т.е. значения y_{i+1} находится по ранее найденным значениям y_1 , y_2, …, y_i . Также метод допускает введения переменного шага h и требует информацию только об одной точке.

В работе использовалась библиотека языка python matpotlib, которая очень удобна в использовании для визуализации 2D графиков.

Литература

1. «Основы численного анализа» Бабенко Константин Иванович
2. «Численные методы анализа» Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.
3. «Численные методы» Самарский А.А., Гулин А.В.
4. URL: https://works.doklad.ru/view/CCpVvppyaYA.html

Приложение

Ниже приведены три основные вычислительные функции:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Button, TextBox

def fx(x, y):
    return float(x - x * x * x / 3. - y)

def fy(x, a):
    E = 0.05
    return float(E * (x + a))

##############################################################################
def Runge_Kutt(x0,y0,t,h):
    x.append(x0)
    y.append(y0)
    t0 = 0.
    i = 0
    xt = 0
    yt = 0
    while(t0<t):

        k1_x = fx(x[i], y[i])
        k2_x = fx(x[i] + h / 2, y[i] + h * k1_x / 2)
        k3_x = fx(x[i] + h / 2, y[i] + h * k2_x / 2)
        k4_x = fx(x[i] + h, y[i] + h * k3_x)
        xt=x[i] + (k1_x + 2 * k2_x + 2 * k3_x + k4_x) / 6 * h
        x.append(xt)

        k1_y = fy(x[i], a)
        k2_y = fy(x[i] + h / 2, a)
        k3_y = fy(x[i] + h / 2, a)
        k4_y = fy(x[i] + h, a)
        yt=y[i] + (k1_y + 2 * k2_y + 2 * k3_y + k4_y) / 6 * h
        y.append(yt)

        t0+=h
        i+=1
```