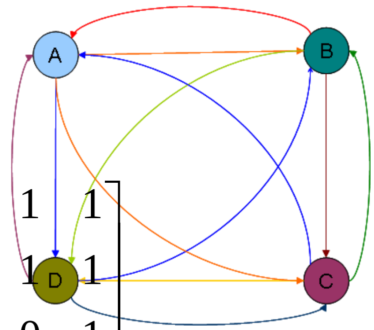


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Unidad 2 *Representación Algebráica*

Gráficas dirigidas

Matriz de Incidencia

Se denota como **A(G)** y se define:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si la línea } e_j \text{ sale del vértice } v_i \\ -1 & \text{Si la línea } e_j \text{ llega al vértice } v_i \\ 0 & \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Observaciones

- En cada columna existe un 1 y -1
- Un renglón de ceros corresponde a un vértice aislado
- Líneas paralelas producen columnas iguales
- La suma de positivos por renglón es el grado externo
- La suma de los negativos es el grado interno
- Un elemento ±1 representa un bucle
- Si se intercambian renglones y columnas con sus respectivas etiquetas sigue representando la misma gráfica

- La suma por columnas es cero
- Una digráfica con k componentes tiene una matriz de incidencia que puede particionarse en k^2 submatrices de modo que las de la diagonal principal tienen cero y unos y las restantes no.

Matriz de Adyacencia

Se denota como $\mathbf{X(G)}$ y se define:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si existe una línea que sale del vértice } v_i \text{ al vértice } v_j \\ 0 & \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Observaciones

- X(G) es cuadrada
- Las líneas paralelas no se pueden representar
- Un renglón de ceros corresponden a un vértice final
- Una columna de cero es un vértice inicial
- Si el mismo renglón y columna son ceros es un vértice aislado
- Si x(G) es simétrica entonces G es una gráfica simétrica
- Un "uno" en la diagonal principal corresponde a un bucle
- Si no hay líneas paralelas el número de 1's es igual al número de líneas
- Si G es simple la suma por renglón representa el grado interno
- Si G es simple la suma por columna representa el grado externo
- Una matriz correspondiente a una digráfica desconectada, con k componentes, puede particionarse en k^2 submatrices. De modo que las k submatrices de la diagonal principal contienen 1´s y 0´s y las demás no.
- Las potencias sucesivas de X(G) tiene elementos $x_{i,j}^{n}$ = el número de caminos de longitud n que hay del vértice i al vértice j

Matriz de accesibilidad

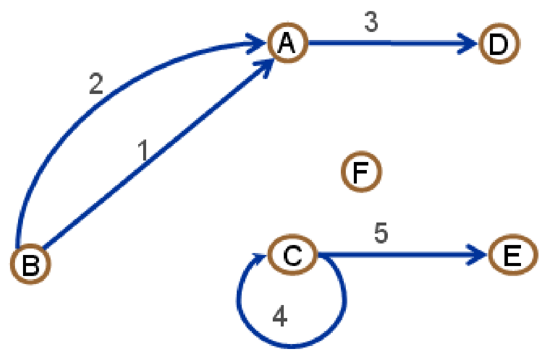
La matriz de accesibilidad se denota como $\mathbf{M(G)}$ y se define:

$$m_{i,j} = \begin{cases} + & \text{Si existe un paseo dirigido del vértice } v_i \text{ al vértice } v_j \\ 0 & \text{Para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Observaciones

- La matriz M(G) puede obtenerse elevando la matriz X(G) a potencias sucesivas y por cada elemento de la potencia que sea distinto de cero se coloca un más en la matriz M(G). El número de potencias necesario es n-1 veceses
- Si la matriz cuenta con puros "+" entonces la gráfica está conectada.

Ejemplo: Sea la siguiente gráfica, sacar la matriz de incidencia, adyacencia y accesibilidad:



La matriz de incidencia es la siguiente:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
A(G)\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \pm 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
\sum 1 & \sum -1 \\
1 & 2 \\
2 & 0 \\
2 & 1 \\
0 & 1 \\
0 & 1 \\
0 & 0
\end{array}
$$

Observaciones:

- Como las columnas 1 y 2 son iguales índica que son líneas paralelas
- El renglón de ceros de la fila F indica un vértice aislado
- Un ±1 en la columna 4 indica que la línea es bucle en el vértice C
- El grado interno de cada vértice es la suma de los -1 cómo se muestra en la matriz
- El grado externo de cada vértice es la suma de los 1 cómo se muestra en la matriz
- El vértice D y E son vértices finales
- El vértice B es inicial

La matriz de adyacencia es la siguiente:

$$X(G) \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observaciones:

- El uno en la diagonal principal indica un bucle en el vértice C
- La columna y el renglón de F en ceros indica que es un vértice aislado

La matriz de accesibilidad es la siguiente:

$$M(G) \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observaciones:

- Cómo la matriz contiene ceros la gráfica esta desconectada