روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی از روش‌های بدون مش

سینا تقی‌زاده

[۱] دانشجوی کارشناسی‌ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۴۰۰۲۰۹۲۷۹ و sina.taghizadeh123@gmail.com

چکیده

ما در این پژوهش پس از بیان مقدماتی پیرامون ضـــرورت وجود روش‌های عددی به معرفی روشـــی جدیدی در این حوزه تحت عنوان روش‌های بدون مش پرداختیم. بیان نمودیم به ســـبب وجود مشکلاتی ناشی از وجود المان در روش اجزا محدود، ما در برخی مواقع ناچار به اسـتفاده از روش‌های بدون مش می‌شـویم. در ادامه مراحل این دسـته روش‌ها را بیان کردیم و دیدم تنها در مراحل اول و دوم با روش اجزا محدود استاندار دارای تفاوت‌هایی می‌باشند به این صورت که در اینجا به جای مش‌ریزی، گره‌ریزی خواهیم داشـــت و توابع درونیابی بر اســـاس این گره‌ها بدســـت خواهند آمد. در بخش بعدی دسته‌بندی روش‌های این خانواده را در پیش گرفتیم و بیان کردیم این دســـته‌بندی‌ها براســـاس نوع فرمولاسـیون که می‌تواند بر اسـاس فرم ضـعیف یا قوی معادلات حاکم و یا ترکیب این دو باشـــد، بر اســـاس نوع توابع درونیابی و نوع بازنمایی دامنه قابل تقسـیم بندی هسـتند. در ادامه به سـراغ جزء اصـــلی روش‌هـای بـدون مش یعنی توابع درون‌یـابی آن‌هـا رفتیم و پس از بیان ویژگی‌های لازم برای این توابع شـکل، روش درون‌یابی نقطه‌ای شـــعاعی از زیرمجموعه‌ی روش‌های درونیابی نقطه‌ای را مورد بررسـی دقیق‌تری قرار دادیم و روش رسـیدن به توابع شـــکل آن را بیـان نمودیم. در انتهـا نیز بـه عنوان نمونـه فرمولاســیون مســئله الاســتیســیته را با روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی پیاده سازی کرده و به دستگاه معادلات جبری نهایی آن دست یافتیم.

واژه های کلیدی

روش‌های عددی، روش‌های بدون مش، توابع شـکل، فرم ضـعیف معادلات، روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی

مقدمه

تمامی پدیده های طبیعت اعم از پدیده‌های مکانیکی، هوافضایی، بیولوژیکی، زمین شـناسـی، الکتریکی و شـیمیایی را اغلب می‌توان با بهره گرفتن از قوانین فیزیک یا زمینه‌های دیگر با اســـتفاده از معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی توصیف کرد. از آنجاییکه این مســـائل پیچیده هســـتند ما معمولا قادر نخواهیم بود جواب‌های دقیق[۱] برای آن‌ها بیابیم لذا باید به دنبال جواب‌های تقریبی[۲] باشـیم. برای به‌دسـت آوردن جواب های تقریبی باید از روش های عددی[۳] اسـتفاده کنیم. امروزه به دلیل توسـعه سـریع فناوری‌های مربوط به رایانه‌ها، تکنیک های شـبیه سـازی عددی با اسـتفاده از رایانه به عبارتی شـبیه سـازی محاسـباتی[۴] به طور فزاینده‌ای به یک رویکرد مهم برای حل مسـائل پیچیده و واقعی در مهندسی و علوم تبدیل شده‌اند[2], [1].

از مجموعه‌ی این روش‌های عددی روش تفاضلات محدود[5] برای قرن‌ها برای حل دســـتگاه‌های معادلات دیفرانســـیل اســـتفاده شـده‌اسـت. این روش برای مسـائل با هندسـه سـاده به خوبی کار می‌کند و قبل از اختراع روش بســـیار کارآمدتر و قوی تر اجزاء محدود[۶] به طور گسـترده اسـتفاده می شـد. روش اجزاء محدود امروزه به طور گسـترده در بررسـی مسـائل خصـوصـا با هندسـه پیچیده استفاده می‌شود. در حال حاضر تکنیک‌های عددی حتی قدرتمندتری نســـبت به روش اجزاء محدود توســـعه یافته‌اند تا راه‌حـل‌هـای تقریبی دقیق‌تری را بـه شـــیوه‌ای راحـت‌تر برای سـیسـتم‌های حتی پیچیده‌تر به‌دسـت آورند. روش بدون مش یا مش‌فری[۷] یکی از پیشـــرفت های خارق العاده در این زمینـه می‌باشـد که ما در این پژوهش به مطالعه‌ی آن خواهیم پرداخت [1].

[۱] Exact solutions
[۲] Approximate solutions
[۳] Numerical methods
[۴] Computational simulation
[5] Finite difference method (FDM)
[۶] Finite element method (FEM)
[۷] Meshfree or Meshless method

در تعریف این روش‌ها آمده است که روش‌های بدون مش به دنبال ایجاد معادلات جبری سیستم برای کل دامنه مسئله بدون استفاده از مش از پیش تعریف شده[8] برای گسسته سازی دامنه می‌باشند [3].

ما در این پژوهش قصد داریم پس از بیان کلیاتی پیرامون روش‌های بدون مش، دسته‌بندی و مراحل آن‌ها در مقایسه با روش اجزا محدود استاندارد، به بررسی دقیق‌تر روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی که یکی از روش‌های مهم این خانواده‌ی جوان می‌باشد، بپردازیم.

ضرورت پژوهش

در این بخش به اهمیت این موضوع و ضرورت انجام آن در حال حاضر خواهیم پرداخت.

روش اجزاء محدود یک روش بسیار قوی و کاملاً توسعه یافته است. از این رو به دلیل تطبیق‌پذیری آن با هندسه‌ها و شرایط مرزی پیچیده و انعطاف پذیری برای بسیاری از انواع مواد مختلف اعم از خطی و غیر خطی، از آن به طور گسترده در زمینه‌های مختلف مهندسی استفاده می‌شود [1]. این روش اما کاستی‌هایی نیز دارد. از جمله این کاستی‌ها می‌توانیم به موارد زیر به طور خلاصه اشاره نماییم.

۱- نیاز به مش‌ریزی[9] که مستلزم صرف هزینه‌ی محاسباتی[10]، وقتی اتوماتیک انجام می‌شود، یا هزینه‌ی اپراتور خصوصا در مسائل سه‌بعدی با هندسه‌ی پیچیده می‌باشد.

۲- پاسخ‌های با دقت کم برای تنش‌های روی مرزهای مشترک المانها که عموما پیوستگی ندارد.

۳- سختی و هزینه‌ی محاسباتی بالا در آنالیز تطابقی[11] زمانی که به دنبال جوابی با یک دقت خاص در روش اجزاء محدود می‌گردیم.

۴- تحت تغییر شکل‌های بزرگ، کاهش قابل توجهی در دقت در نتایج روش اجزاء محدود می‌تواند ناشی از اعوجاج المان[12] و نزدیک صفر شدن دترمینان ژاکوبین باشد.

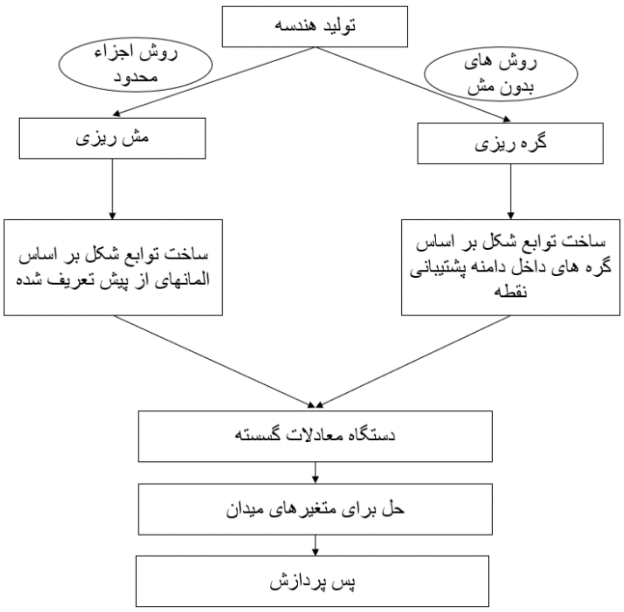
۵- شبیه سازی‌های مربوط به رشد ترک یا شکست به دلیل ویژگی‌های المانهای محیط پیوسته به‌خوبی صورت نمی‌پذیرد.

ریشه ی تمام این مشکلات استفاده از المان و مش ریزی است. از این رو محققان زیادی به سراغ روش‌های بدون مش رفته‌اند به‌طوریکه بدون استفاده از المان و گسسته سازی ناحیه‌ی جواب، به معادلات جبری برای کل دامنه برسند. بدین ترتیب ضرورت استفاده از این روشها تحت عنوان خانواده‌ی روش‌های بدون مش مشخص می‌گردد [1].

مراحل روش‌های بدون مش

در این بخش به بیان مراحل این روش با رویکرد مقایسه با روش اجزاء محدود استاندارد خواهیم پرداخت.

شکل ۱ که از مرجع [1] اخذ و ترجمه شده است، به خوبی مراحل این دو روش را در کنار هم نشان می‌دهد:



شکل ۱) مقایسه روش های اجزا محدود و بدون مش

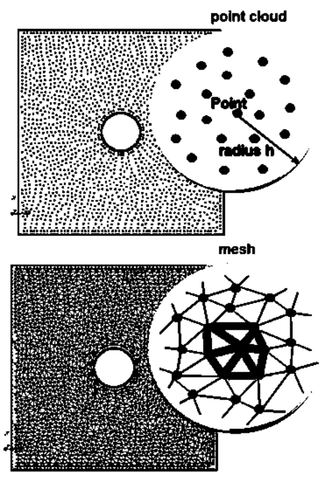
در اینجا یک تفاوت اندکی بین مراحل روش اجزاء محدود نشان داده شده در شکل و مراحل ذکر شده در کلاس وجود دارد به این صورت که اینجا تمام مراحل مونتاژ ماتریس‌های سفتی المان‌ها، اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه را تحت عنوان یک مرحله‌ی حل برای متغیرهای میدان جا داده است. در سایر مراحل تشابه کامل وجود دارد.

از این شکل مشاهده می‌کنیم که تفاوت اصلی این دو روش تنها در مراحل ۱ و ۲ می‌باشد که شامل گسسته سازی ناحیه و ساخت توابع شکل می‌باشد. به این صورت که در روش بدون مش به جای مش‌ریزی از گره‌ریزی[13] بهره می‌بریم و در مرحله‌ی بعد توابع شکل را بر اساس این گره‌ها و نه بر اساس المان‌ها انجام می‌دهیم. این کار به این شکل است که برخلاف روش اجزای محدود که توابع شکل با استفاده از المان‌های از پیش

[8] Predefined mesh
[9] Mesh generation
[10] Computational cost
[11] Adaptive analysis
[12] Element distortions
[13] Node Generation

تعریف شده ساخته می‌شوند و تابع شکل برای کل المان یکسان است؛ در روش‌های بدون مش، توابع شکل ساخته شده معمولاً فقط برای یک نقطه مورد بررسی بر اساس گره‌های محلی انتخاب شده هستند. به همین دلیل هنگامی که نقطه مورد بررسی تغییر می‌کند، توابع شکل نیز می توانند تغییر کنند.
حال به صورت دقیق‌تر مراحل این دسته روش‌ها را بیان می‌کنیم [1].

مرحله۱) بازنمایی دامنه با گره‌ریزی:
در روش‌های بدون مش، ابتدا دامنه مسئله و مرزهای آن با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده در دامنه و روی مرزها آن مدل‌سازی و نمایش داده می‌شود. از آنجایی همانند روش اجزا محدود این گره‌ها مقادیر متغیرهای میدان را نمایندگی خواهند کرد به آن‌ها گره‌های میدان[۱۴] می‌گویند. تراکم گره‌ها به دقت مورد نیاز و منابع موجود از نظر توان محاسباتی بستگی دارد. توزیع گرهی معمولاً یکنواخت نیست. از آنجایی که الگوریتم‌های تطبیقی[۱۵] را همانطورکه در مقدمه نیز اشاره کردیم می‌توان در روش‌های بدون مش استفاده کرد، در نهایت پراکندگی گره‌ها به صورت خودکار و تطبیقی در کدی که نوشته می‌شود می‌تواند کنترل گردد؛ از این رو توزیع اولیه گره‌ها مهم نیست. لازم به ذکر است همانطورکه در بخش توابع شکل نیز بیان خواهیم کرد، یک روش بدون مش باید بتواند برای یک توزیع گرهی دلخواه کار کند.
همانطورکه قبل‌تر نیز ذکر کردیم این مرحله از مراحل متفاوت با روش اجزا محدود استاندارد می‌باشد و این تفاوت به خوبی در شکل ۳ که از مرجع [4] اخذ شده است، مشهود است.

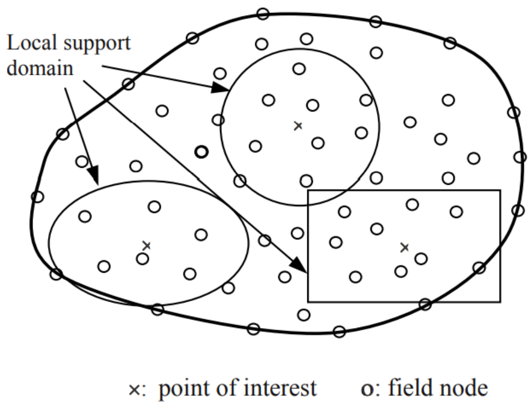


شکل ۳) مقایسه مش ریزی و گره ریزی

مرحله۲) تقریب متغیر میدان با توابع دورنیابی
مشابه روش اجزا محدود در اینجا نیز نیاز به تقریب متغیر میدان با یکسری توابع داریم تا در ادامه از آن‌ها برای فرمولاسیون و رسیدن به جواب تقریبی بهره ببریم. از آنجایی که در این روش المان نداریم؛ متغیر میدان u در هر نقطه‌ی x=(x, y, z) در داخل دامنه مسئله با استفاده از مقادیر گره‌های میدان اطراف آن درونیابی می‌شود. به ناحیه‌ای که متغیر میدان از آن برای درونیابی تاثیر می‌پذیرد دامنه پشتیبانی[۱۶] می‌گویند. این درونیابی مشابه روش اجزا محدود به صورت معادله (۱) انجام می‌شود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi i(x) ui = \varphi^T(x) Us \qquad (۱)$$

که در آن n تعداد گره‌هایی است که در دامنه پشتیبانی محلی نقطه مورد بررسی قرار دارند. ui متغیر میدان گرهی در گره iام بوده پس بنابراین Us برداری است که تمام متغیرهای میدان را در این n گره داخل دامنه پشتیبانی در خود جای داده است. φi نیز تابع شکل گره iام است که با استفاده از آن و گره‌های موجود در دامنه پشتیبانی، مقدار متغیر میدان در نقطه‌ی مورد بررسی تعیین می‌شود.
شکل ۲ نمونه‌ای از این دامنه‌های پشتیبانی را نشان می دهد که برای برخی نقاط دامنه رسم شده‌اند. همانطورکه مشاهده می‌شود، این دامنه‌های پشتیبانی می‌توانند در شکل‌ها و اندازه‌های مختلفی باشند اما عموما دایروی و مستطیلی هستند



شکل ۲) دامنه های پشتیبانی

[1].

مرحله۳) فرمولاسیون دستگاه معادلات
مشابه روش اجزا محدود در اینجا نیز با کمک توابع شکل و بهره‌گیری از فرم قوی یا ضعیف معادلات حاکم بر مسئله، که در

---

۱۴ Field nodes
۱۵ Adaptive algorithms
۱۶ Support domain

بخش بعدی با تفصیل بیشتری بررسی خواهد شد، به دستگاه معادلات جبری گسسته برای مسئله می‌رسند. این معادلات در فرم ماتریسی گرهی نوشته می‌شوند و سپس برای کل دامنه مشابه روش اجزا محدود مونتاژ[17] می‌گردند. این معادلات ماتریسی کلی حاصل شده از روش‌های بدون مش دارای خاصیت‌های نواری بودن[18] و تنکی[19] هستند ولی متقارن بودن آن‌ها بستگی به روش مورد استفاده دارد که در ادامه در مورد آن‌ها صحبت خواهیم کرد [1].

مراحل بعدی کار شامل مونتاژ ماتریس‌های گرهی، اعمال شرایط مرزی، حل و پس پردازش کاملا مشابه روش اجزا محدود استاندارد بوده و تمام تکنیک‌های آن در اینجا نیز در اکثر موارد قابل استفاده است. از این رو از ذکر مجدد مطالبی که در کلاس ذکر گردیده‌اند در اینجا خودداری می‌کنیم.

جدول ۱ نیز که از مرجع اصلی [1] اقتباس و ترجمه گردیده است، تفاوت‌های روش‌های بدون مش و اجزا محدود استاندارد را به صورت کامل‌تری نشان می‌دهد.

در ادامه به دسته‌بندی خانواده‌ی روش‌های بدون مش خواهیم پرداخت.

انواع روش‌های بدون مش

دسته‌بندی‌های مختلفی برای روش‌های بدون مش انجام می‌شود که هرکدام بر اساس یک معیاری صورت می‌پذیرد. از آنجایی که این دسته‌بندی‌ها درک عمیق‌تری از این روش‌ها به ما ارائه می‌کنند؛ در اینجا دسته‌بندی‌های انجام شده توسط مرجع اصلی [1] را به صورت خلاصه ذکر خواهیم کرد تا جایگاه کار خودمان را بهتر بتوانیم در میان سایر روش‌ها تشخیص و تفکیک دهیم.

این دسته‌بندی‌ها بر سه اساس روش فرمولاسیون، نوع توابع درونیابی و نحوه‌ی بازنمایی دامنه انجام می‌شوند که در ادامه به مطالعه‌ی آن‌ها خواهیم پرداخت:

۱) دسته‌بندی بر اساس روش فرمولاسیون

بر این اساس روش‌ها به سه دسته قابل تقسیم بندی هستند:

روش‌های بر اساس فرم ضعیف[20]:

در این روش‌ها معادلات دیفرانسیلی حاکم با کمک روش‌هایی که در کلاس نیز ذکر گردیده‌اند، به فرم ضعیف تبدیل شده و سپس از این فرم ضعیف برای رسیدن به دستگاه معادلات جبری استفاده می‌شود. همین روش‌های فرم ضعیف بسته به اینکه از فرم ضعیف در حالت کلی استفاده کنند یا محلی، خود به دو دسته‌ی روش‌های بدون مش فرم ضعیف کلی[21] و روش‌های بدون مش فرم ضعیف محلی[22] تقسیم‌بندی می‌شوند.

روش‌های فرم ضعیف کلی بر اساس فرم ضعیف کلی گلرکین حاصل می‌شوند و دو روش مطرح‌تر این دسته، روش‌های بدون المان گلرکین[23] و روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی[24] می‌باشند. که اولی در سال ۱۹۹۴ و دیگری در سال ۲۰۰۱ مطرح گردیدند و تمرکز اصلی این پژوهش نیز بر روش دوم می‌باشد که در ادامه توضیحات بیشتری روی آن داده خواهد شد.

گروه دیگر این دسته روش‌های مبتنی بر فرم ضعیف، روش‌های فرم ضعیف محلی، با فرم ضعیف پتروف گلرکین محلی توسعه می یابند. این گروه در این پژوهش مورد نظر ما برای بررسی نخواهند بود.

روش‌های بر اساس فرم قوی یا تکنیک‌های تجمیع[25] :

در این روش‌ها همانطورکه از اسمشان نیز پیداست دیگر به دنبال فرم ضعیف معادلات حاکم نخواهیم بود و مستقیما از خود

جدول ۱) مقایسه روش اجزا محدود و روش های بدون مش

آیتم	روش اجزاء محدود	روش های بدون مش
مش	بله	خیر
ساخت توابع شکل	بر اساس المان های از پیش تعریف شده	بر اساس دامنه پشتیبانی محلی
ماتریس سفتی سیستم گسسته شده	نواری و متقارن	نواری و بسته به روش متقارن یا غیر متقارن
اعمال شرایط مرزی اساسی	آسان و استاندار	بسته به نوع روش ممکن است ساده نباشد
سرعت	سریع	کندتر نسبت به روش اجزاء محدود
دقت	دقیق تر از روش تفاضلات محدود	دقیق تر از روش اجزا محدود
آنالیز تطبیقی	سخت برای سه بعدی ها	راحت تر
مرحله توسعه	کاملا توسعه یافته	درحال توسعه با چالش های زیاد
نرم افزارهای تجاری	زیاد	کم

[17] Assembly
[18] Banded
[19] Sparseness
[20] Weak-forms
[21] MFree global weak-form methods
[22] MFree local weak-form methods
[23] The element-free Galerkin (EFG)
[24] The radial point interpolation method (RPIM)
[25] Collocation techniques

معادله حاکم برای رسیدن به معادلات گسسته بهره خواهیم جست. این دسته روش‌ها به دلیل قدرت کمترشان کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند.

روش‌های ترکیبی فرم ضعیف و قوی[۲۶]:

در این روش‌ها نیز از هر دو فرم قوی و ضعیف معادلات حاکم برای دستیابی به دستگاه معادلات جبری نهایی بهره برده می‌شود که این دسته نیز مورد توجه ما نخواهد بود.

۲) دسته‌بندی بر اساس نوع توابع درونیابی

روش درونیابی یکی از مهمترین مسائل در روش‌های بدون مش می‌باشد و به جرئت می‌توان گفت بدون این روش‌ها عملا روش‌های بدون مش عملی نبوده و نیستند. روش‌های بدون مش بر این اساس به دسته‌های مختلفی از جمله دسته تقریب مربعات متحرک[۲۷]، فرم‌های انتگرالی برای تقریب و روش‌های درونیابی نقطه‌ای تقسیم بندی می‌شوند. ما در این پروژه با توجه به نوع روش انتخابی که در بخش قبل نیز ذکر کردیم به بررسی دقیق‌تر روش‌های درونیابی نقطه‌ای با تمرکز بر نوع شعاعی آن در بخش‌های آتی گزارش خواهیم پرداخت.

۳) دسته‌بندی بر اساس نحوه‌ی بازنمایی دامنه

بر این اساس نیز روش‌ها به دو دسته‌ی دامنه‌ای[۲۸] و مرزی[۲۹] تقسیم بندی می‌گردند. در روش دامنه‌ای گره‌های میدان هم در دامنه و هم در مرز قرار می‌گیرند و معادلات جبری برای کل دامنه در نهایت بدست می‌آیند. ولی در روش مرزی گره‌های میدان تنها روی مرزهای مسئله قرار می‌گیرند و هیچ گرهی در داخل دامنه قرار نمی‌گیرد و معادلات نهایی نیز با کمک همین گره‌های مرزی بدست خواهد آمد. لازم به ذکر است که روش مورد بررسی ما در این پژوهش نیز در دسته‌ی اول قرار می‌گیرد. بر اساس هر یک از این سه دسته‌بندی انجام شده، روش‌های متعدد بدون مش را می‌توان از یکدیگر تمییز داد. جدول ۲ در پیوست۱ که از مرجع [1] اقتباس گردیده است، این کار را انجام داده است. بر این اساس جایگاه روش مورد نظر ما در این پژوهش یعنی روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی در هر دسته‌بندی مشخص می‌شود.

در ادامه‌ی گزارش در مورد توابع شکل مورد استفاده در روش‌های بدون مش کلیاتی را مختصرا بیان خواهیم کرد و سپس روی تابع شکل مورد استفاده در روش مدنظر خود یعنی درونیابی نقطه‌ای شعاعی تمرکز خواهیم نمود.

توابع شکل روش‌های بدون مش

توابع شکل در این روش‌های مشابه روش اجزا محدود استاندارد یکسری ویژگی‌هایی را باید یا بهتر است داشته باشند که در ادامه بخشی از آن‌ها را ذکر می‌کنیم:

۱) برای گره‌ها با توزیع دلخواه[۳۰] بتوانند درونیابی را انجام دهند و فقط برای حالت‌های یکنواخت توزیع گرهی نباشند.

۲) به لحاظ عددی پایدار باشند.

۳) همانند روش اجزا محدود استاندارد اینجا نیز باید تا یک درجه‌ی مشخصی پیوسته باشند.

۴) هر نقطه لازم است با تعداد محدودی گره میدان در ارتباط باشند تا در نهایت به ماتریس کلی تنکی بتوانیم دست یابیم تا بتوانیم با روش‌های سریع‌تری آن‌ها را حل کنیم. اصطلاحا فشرده[۳۱] باشند.

۵) وقتی از فرم ضعیف در حالت کلی استفاده می‌کنیم، که ما در این روش باید استفاده کنیم، باید این توابع شکل در کل دامنه سازگار[۳۲] باشند.

۶) بهتر است خاصیت تابع دلتا که در روش اجزا محدود نیز وجود داشت در این توابع شکل نیز باشد. یعنی در گره مد نظر یک و در سایر صفر باشد. عدم برقرای این خاصیت در مرحله‌ی اعمال شرایط مرزی می‌تواند مشکل‌ساز باشد.

۷) به لحاظ هزینه‌ی محاسباتی بهینه باشند.

توابع مختلفی وجود دارند که با ارضای خواص بالا توانایی استفاده به عنوان توابع شکل در روش‌های بدون مش را دارند. دسته‌بندی‌های مختلفی نیز برای آن‌ها در مراجع مختلف ذکر می‌شود. یک دسته‌ی معروف که در روش اجزا محدود استاندارد نیز به وفور از آن‌ها استفاده می‌گردد، توابع درونیابی به شکل سری[۳۳] می‌باشند که در آن‌ها درصورت استفاده از پایه‌های کامل پیوستگی به راحتی تضمین می‌شود. این دسته شامل دو گروه روش تقریب کمترین مربعات متحرک[۳۴] و روش درونیابی نقطه‌ای[۳۵] می‌باشند که ما با توجه به روش مورد بررسی خود تنها به مطالعه‌ی روش درونیابی نقطه‌ای خواهیم پرداخت [1].

---

۲۶ Combination of weak-form and collocation techniques

۲۷ The moving least squares (MLS)

۲۸ Domain-type

۲۹ Boundary-type

۳۰ Arbitrary nodal distribution

۳۱ Compact

۳۲ Compatible

۳۳ Series representation

۳۴ Moving Least Squares (MLS)

۳۵ Point Interpolation Methods (PIM, RPIM)

روش درونیابی نقطه‌ای

در این روش متغیر میدان u در نقطه‌ی x مورد بررسی به صورت زیر معادله (۲) بازنمایی می‌شود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} Bi(x)ai \qquad (۲)$$

که Biها توابع پایه و ai ها نیز ضـریب آن‌ها هسـتند. m نیز تعداد توابع پایه می‌باشد.

برای درونیابی به این روش یک دامنه پشـتیبانی اطراف نقطه‌ی مورد بررسی انتخاب می‌شود که شامل n گره میدان می‌باشد. در روش‌های سـنتی این n با m برابر بوده و مشـابه روش‌های اجزا محدود اسـتاندارد، با انجام عملیات ساده‌ی مقدار دادن به متغیر میدان در نقاط گرهی و معکوس‌گیری از ماتریس حاصـل، توابع شکل برای هر نقطه به سادگی حاصل می‌شوند.

روش‌های درونیابی نقطه‌ای خود به دو دسـته‌ی با پایه‌های چندجمله‌ای و با پایه‌های شعاعی[۳۶] قابل تقسیم‌بندی هستند. ما در اینجا تنها روش درونیابی نقطه‌ای شـعاعی که حالت پایه‌های چندجمله‌ای را نیز در دلش می‌تواند داشته باشد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی (RPIM)

این روش حالت تعمیم یافته‌ی روش درونیابی نقطه‌ای چندجمله‌ای می‌باشد که به منظور جلوگیری از مشـکل تکین شدن ماتریس در حین استخراج توابع شکل آن‌ها ایجاد می‌شد مطرح گردیده‌اند [5]. درونیابی این روش به صـورت معادله (۳) می‌باشد:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} Ri(x)ai + \sum_{j=1}^{m} Pj(x)bj \qquad (۳)$$

که در آن Ri ها پایه‌های شـعاعی و Pj ها پایه‌های چندجمله‌ای می‌باشـند که ترکیب این دو عموما توابع شـکل این روش را می‌سازند.

در پایه‌های شـعاعی تنها متغیر موجود فاصـله‌ی نقطه‌ی مورد بررسـی با گره‌های میدان اطراف می‌باشـد که برای مثال برای مسائل دوبعدی به صورت معادله (۴) است[۳۷]:

$$r = \sqrt{(x - xi)^2 + (y - yi)^2} \qquad (۴)$$

حالت‌های مختلف پایه‌های شـعاعی قابل اسـتفاده می‌باشـند که مهترین آن‌ها در جدول ۳ پیوسـت ۲ آورده شـده‌اند. مشـاهده می‌کنیم که این حالت‌ها یکسری پارامتر شـکل[۳۸] نیز دارند که با آزمون و خطا عموما برای هر مسئله تعیین می‌گردند.

تعیین ai و bi در معادله‌ی بالا با تشکیل یک دامنه‌ی پشتیبانی اطراف نقطه‌ی مورد بررسـی شـامل n گره میدان و مجبور کردن سـری مدنظر برای برقراری در نقاط گرهی آن، مشـابه کاری که در روش اجزا محدود اسـتاندار انجام می‌دادیم، انجام می‌شـود. برای m مجهول بعدی نیز شـرایط دیگری به صـورت معادله (۵) قرار داده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} Pj(xi)ai = P_m^T a = 0 \quad j = 1, \ldots, m \qquad (۵)$$

با ترکیب این دو شـرط و انجام یک‌سـری عملیات سـاده‌ی ماتریسی که در مرجع [5] نیز با تفصیل بیشتری نسبت به [1] ذکر گردیده است؛ به توابع شکل در این روش دست می‌یابیم که همانند روش اجزا محدود اسـتاندارد به صـورت معادله (۶) قابل نمایش هستند:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi iui \qquad (۶)$$

که φiها توابع شـکل و uiها متغیرهای گرهی در داخل ناحیه‌ی پشتیبانی می‌باشند.

در ادامه می‌توانیم از این توابع شکل استفاده کرده و مشابه روش اجزا محدود اسـتاندارد به معادلات جبری حاکم بر مسـائل مدنظرمان دست یابیم.

در ادامه‌ی گزارش این کار را برای مسـائل الاسـتیسـیته انجام خواهیم داد.

فرمولاسیون مسائل الاستیسیته با روش RPIM

در این بخش فرمولاسیون مسائل الاستیسیته را با روش درونیابی نقطه‌ای شـعاعی در حلت دوبعدی خواهیم یافت. (لازم به ذکر اسـت که ما در این گزارش صـرفا فرم کلی معادلات به همراه نتایج اصـلی و بحث روی این نتایج را خواهیم داشـت و برای مشـاهده‌ی جزئیات بیشـتر می‌توان به مرجع اصـلی [1] مراجعه نمود) معادله‌ی حاکم(تعادل) به همراه شـرایط مرزی طبیعی و ضروری به صورت معادلات (۷) می‌باشد:

$$\begin{aligned} L^T\sigma + b &= 0 \quad in\ \Omega \\ \sigma n &= \bar{t} \quad on\ \Gamma_t \\ u &= \bar{u} \quad on\ \Gamma_u \end{aligned} \qquad (۷)$$

فرم ضـعیف این معادله حاکم روی دامنه‌ی کلی مسـئله با انجام پروسه‌ی مربوطه به صورت معادله (۸) خواهد شد.

$$\int_\Omega (L\delta u)^T(DLu)d\Omega - \int_\Omega \delta u^T b d\Omega - \int_\Gamma \delta u^T \bar{t}\, d\Gamma = 0 \qquad (۸)$$

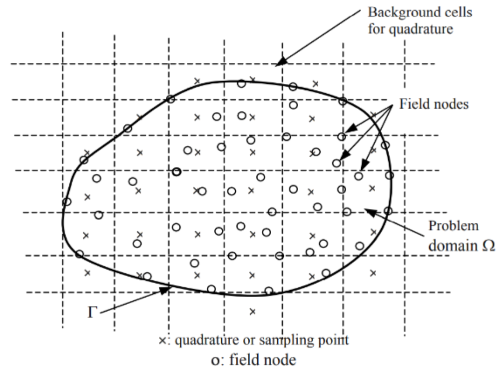
---

۳۶ Radial basis functions (RBF)

۳۷ در مسائل سه‌بعدی هم به همین شیوه قابل تعمیم است.

۳۸ Shape parameters

به منظور ارزیابی انتگرال‌های فوق، دامنه‌ی سراسری مسئله را به مجموعه‌ای از سلول‌های پس‌زمینه‌ای به صورت شکل ۴ تقسیم‌بندی می کنند.



شکل ۴) سلول های پس زمینه ای

حال توابع شکل نقطه‌ای شعاعی بحث شده در بخش قبل وارد شده و میدان جابجایی را در هر نقطه به صورت معادله (۹) بازنمایی می کنند.

$$u^h_{(2\times1)} = \sum_I^n \begin{matrix}\varphi 1 & 0 \\ 0 & \varphi 1\end{matrix} \begin{matrix} u1 \\ v1\end{matrix} = \sum_I^n \varphi i u i \qquad (۹)$$

حال در ادامه‌ی کار با انجام عملیات مشابه روش اجزاء محدود استاندارد با یافتن تنش‌ها و کرنش‌ها بر حسب توابع شکل و متغیرهای گرهی و جایگذاری در معادله حاکم به فرم معادله (۱۰) برای ماتریس سفتی گرهی[۳۹] به جای ماتریس سفتی المان در روش اجزا محدود می‌رسیم.

$$K_{ij} = \int_\Omega (B_i^T) D (B_j) d\Omega \qquad (۱۰)$$

بردار نیروهای حجمی[۴۰] و سطحی گرهی[۴۱] نیز به صورت معادلات (۱۱) خواهد شد. مشاهده می‌کنیم که فرم کلی آن‌ها مشابه روش اجزا محدود استاندار می‌باشد. با این تفاوت که در اینجا به جای مش‌ریزی، گره‌ریزی صورت گرفته است و توابع درونیابی نیز همانطورکه پیش‌تر نیز ذکر گردید بر اساس انتخاب یک دامنه‌ی پشتیبانی برای هر نقطه‌ی مورد بررسی بدست آمده‌اند.

$$F_i^b = \int_\Omega \varphi_i^T b d\Omega \qquad (۱۱)$$
$$(F_i^{(t)}) = \int_\Omega \varphi_i^T \bar{t} d\Gamma$$

که در نهایت به فرم معروف معادله (۱۲) در حلت کلی خواهیم رسید که می‌توان با استفاده از همان تکنیک‌های مطرح شده در روش اجزا محدود استاندارد ادامه‌ی فرآیند را که شامل مونتاژ، اعمال شرایط مرزی اساسی مسئله، حل و پس پردازش می باشد را در پیش گرفت.

$$KU = F \qquad (۱۲)$$

جمع‌بندی

ما در این پژوهش به معرفی روش‌های بدون مش از زیرمجوعه روش‌های عددی پرداختیم. بیان نمودیم به سبب وجود مشکلات ناشی از المان‌ها گاهی ناچار به استفاده از این روش‌ها هستیم. مشاهده کردیم مراحل فرمولاسیون مسائل با روش‌های بدون مش شباهت زیادی با روش اجزا محدود استاندار دارد و تنها در مراحل گسسته سازی مسئله و ساخت توابع درونیابی، این دو روش از یکدیگر تمییز می‌یابند. در ادامه‌ی گزارش به دسته‌بندی روش‌های این خانواده پرداختیم و بیان کردیم بر سه اساس نوع فرمولاسیون، نوع توابع درونیابی و نوع بازنمایی دامنه، این دسته‌بندی قابل انجام است. بیان کردیم که روش مورد مطالعه‌ی ما یعنی روش بدون مش درونیابی نقطه‌ای شعاعی از فرمولاسیون فرم ضعیف در حالت کلی، از توابع درونیابی نقطه‌ای شعاعی استفاده می‌کند و معادلات را برای کل دامنه و نه فقط روی مرزهای آن حاصل می‌کند. در ادامه به نحوه‌ی استخراج توابع شکل در این روش پرداختیم و مشاهده کردیم فرآیندها تا حدودی مشابه روش اجزا محدود استاندارد هستند با این تفاوت که درونیابی برای نقاط مختلف دامنه را باید بر اساس گره‌های میدانی که در داخل دامنه‌ی پشتیبانی آن نقطه قرار دارند، انجام دهیم. در انتها نیز با فرمولاسیون مسائل الاستیسیته در حالت دوبعدی مشاهده کردیم فرم ماتریس‌های سفتی گرهی و بردارهای نیروهای حجمی و سطحی گرهی مشابه روش اجزا محدود استاندارد شدند با این تفاوت که توابع شکل آن‌ها و نحوه‌ی گسسته‌سازی مسئله در این روش متفاوت می‌باشد.

تشکر و قدردانی

در انتها از جناب آقای دکتر محمدرضا موحدی بلبت تدریس کامل و مفهومی ایشان در طول این ترم تحصیلی مجازی و حضوری کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست علائم

- φ تابع شکل
- u متغیر میدان(جابجایی)
- R پایه‌های شعاعی
- P پایه‌های چندجمله‌ای
- r تنها متغیر در پایه‌های شعاعی

[۳۹] Nodal stiffness matrix
[۴۰] Nodal body force vector
[۴۱] Nodal traction force vector

مراجع

[1] *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

[2] J Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Education, 2005.

[3] G. R. Liu, *Meshfree Methods*. CRC Press, 2009.

[4] Https://www.nogrid.com/images/nogrid/produktboxen/ProduktboxPoints/method01.PNG, "No Title." .

[5] J. G. W. G. R. Liu, "Point interpolation meshless method based on radial basis functions," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, pp. 1623–1648, 2002.

پیوست۱

جدول ۲) دسته بندی روش های بدون مش

Table 2.2. Three categories of MFree methods

Classification	Categories	Example MFree methods†
Based on formulation procedure	MFree methods based on strong-forms of governing equations	MFree collocation methods, FPM etc.
	MFree methods based on weak-forms of governing equations	EFG, RPIM, MLPG, LRPIM , etc.
	MFree methods based on the combination of weak-form and strong-form	MWS, etc.
Based on interpolation /approximation method	MFree methods using MLS	EFG, MLPG, etc.
	MFree methods using integral representation method for function approximations	SPH, etc.
	MFree methods using PIM	RPIM, LRPIM, etc.
	MFree methods using other meshfree interpolation schemes.	PUFEM, *hp*-cloud, etc.
Based on domain representation	Domain-type MFree methods	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc.
	Boundary-type MFree methods	BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM, etc.

پیوست۲

جدول ۳) توابع پایه شعاعی مختلف

	Name	†Expression	Shape Parameters
1	Multi-quadrics (MQ)	$R_i(x,y)=(r_i^2+(\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0$, q
2	Gaussian (EXP)	$R_i(x,y)=\exp[-\alpha_c(\frac{r_i}{d_c})^2]$	α_c
3	Thin Plate Spline (TPS)	$R_i(x,y)=r_i^\eta$	η
4	Logarithmic	$R_i(x,y)=r_i^\eta \log r_i$	η