جزوه جلسه ۶ نظریه میدان‌های کوانتومی ۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

در جلسه قبل این لاگرانژی را بررسی کردیم:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} h \Box h + \frac{1}{3} \lambda h^3 + Jh$$

این لاگرانژی را می‌توان به این صورت نیز نوشت که

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{3} \lambda h^3 + Jh$$

یعنی

$$\partial_\mu h \partial^\mu h \;\longrightarrow\; -h \partial_\mu \partial^\mu h = -h \Box h$$

چرا این دو برابرند؟ چون وقتی کنش را می‌نویسیم

$$S = \int \frac{-1}{2} h \Box h d^4x = \int \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h d^4x$$

و تفاوت جملات داخل انتگرال یک مشتق کامل است و می‌دانیم در این صورت لاگرانژی تغییری نمی‌کند

$$h \Box h = \partial_\mu (h \partial^\mu h) - \partial_\mu h \partial^\mu h$$

$$\int \partial_\mu (h \partial^\mu h) d^4x = h \partial^\mu h \Big|_{\text{مرزها}}$$

و می‌دانیم این جمله در مرزها صفر است پس این دو رابطه باهم برابرند. حال برای به‌دست آوردن معادلات حرکت از معادله اویلر لاگرانژ استفاده می‌کنیم

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu h} = 0$$

که داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu h} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = \Box h - \lambda h^2 - J = 0$$

حل این معادله را به روش اختلال در جلسه قبل انجام دادیم. حال برای فهم این معادلات می‌نویسیم:

$$\Box_x \Pi(x,y) = -\delta^4(x-y)$$

به تابع $\Pi(x,y)$ تابع گرین دونقطه‌ای یا انتشارگری که $(x \rightleftarrows y)$ می‌گوییم

$$\begin{aligned}
\Pi(x,y) &= \frac{-1}{\Box}\delta^4(x-y) \\
&= \frac{-1}{\Box}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \\
&= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(ik)^2} e^{ik(x-y)} \\
\Pi(x,y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} e^{ik(x-y)}
\end{aligned}$$

همچنین $\Pi(x,y) = \Pi(y,x)$

$$h(x) = \int d^4y \delta^4(x-y) h(y)$$

حال به جای تابع دلتا دالامبری انتشارگر را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int d^4y (-\Box_y \Pi(x,y)) h(y) \\
&= -\int d^4y \Pi(x,y) \Box_y h_y
\end{aligned}$$

حال مرتبه صفرم معادله قبل را می‌خواهیم به همین روش بازنویسی بکنیم

$$\Box_y h_0(y) = J(y); \qquad h_0(x) = -\int d^4y \Pi(x,y) J(y)$$

حال تمام جواب‌های مرتبه‌ی بعدی اختلال را نیز می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\Box_\omega h_1(\omega) &= \lambda h_0^2(\omega)\\ &= \lambda h_0(\omega)h_0(\omega)\\ &= \lambda\Big(\int d^4y\Pi(\omega,y)J(y)\Big)\Big(\int d^4z\Pi(\omega,z)J(z)\Big)\end{aligned}$$

$$h_1(x) = -\lambda\int d^4\omega\int d^4y\int d^4z\Pi(x,\omega)\Pi(\omega,y)\Pi(\omega,z)J(y)J(z)$$

$$\begin{aligned}h(x) &= h_0(x)+h_1(x)+\cdots\\ &= -\int d^4y\Pi(x,y)J(y) - \lambda\int d^4\omega d^4y d^4z\Pi(x,\omega)\Pi(\omega,y)\Pi(\omega,z)J(y)J(z)+\cdots\end{aligned}$$

حال این انتگرال‌ها را به زبان نمودار فاینمن ترجمه می‌کنیم