جزوه جلسه ۷ نظریه میدان‌های کوانتومی ۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

---

در این جلسه در مورد سطح مقطع برخورد صحبت خواهیم کرد می‌دانیم شدت برهم‌کنش متناسب است با سطح مقطع برخورد

$$\sigma = \frac{\text{تعداد ذرات پراکنده شده}}{\text{سرعت} \times \text{چگالی ذرات در باریکه فرودی} \times \text{زمان}} = \frac{N}{T\Phi}$$

که

$$\Phi = (\text{چگالی تعداد ذرات}) \times (\text{سرعت پرتو})$$

اگر تعداد ذرات فرودی را با $N_{inc}$ نشان دهیم و با استفاده از آن کمیت جدیدی تعریف کنیم $P = \frac{N}{N_{inc}}$ آنگاه سطح مقطع پراکندگی را بازتعریف کرده و برای یک ذره داریم:

$$d\sigma = \frac{1}{T} \times \frac{1}{\Phi} \times dP$$

$$dN = L \times d\sigma$$

به این ضریب تناسب $L$ را درخشندگی می‌گویند

$$\Phi = \frac{|\vec{v}|}{V}$$

اگر ذرات از روبه‌رو به هم برخورد کنند در آن صورت سرعت را می‌توان نوشت:

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V}$$

بنابراین سطح مقطع می‌شود

$$d\sigma = \frac{V}{T} \times \frac{dP}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

حال می‌خواهیم $dP$ که نمایانگر احتمال است را در مکانیک کوانتومی نمایش دهیم که داریم

$$dP = \frac{|\langle f|\, s\, |i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} d\Pi$$

از آنجا که ما بین یک بازه‌ای از تکانه داریم محسبات را انجام می‌دهیم بنابراین $d\Pi$ نشانگر رنج آن تکانه است

$$d\Pi = \prod_j \frac{v\ d^3 p_j}{(2\pi)^3}$$

همچنین از قبل می‌دانیم که

$$(2\pi)^3 \delta^3(p) = \int d^3 x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$
$$(2\pi)^3 \delta^3(0) = \int d^3 x e^{0}$$
$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\delta^4(0) = \frac{V \times T}{(2\pi)^3}$$

برای حالت اولیه می‌نویسیم:

$$|i\rangle = |p_1\rangle |p_2\rangle$$

$$\langle p|p\rangle = 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^3(0) = 2\omega_p V = 2E_p V$$

$$\Big(\langle p_2| \langle p_1|\Big)\Big(|p_1\rangle |p_2\rangle\Big) = \langle p_1|p_1\rangle \langle p_2|p_2\rangle = (2E_1 V)(2E_2 V)$$

و برای حالت نهایی نیز برحسب اینکه چند ذره تولید شده باشند داریم

$$\langle f|f\rangle = \prod_{j=1}^{n}(2E_jV)$$

حال ماتریس پراکندگی را تعریف می‌کنیم

$$s = 1 + iT$$

که به $T$ ماتریس گذار می‌گوییم

$$\langle f|\,T\,|i\rangle = \underbrace{(2\pi)^4\delta^4(\sum p)}_{\text{پایستگی انرژی-تکانه}}\,\langle f|\,\mathcal{M}\,|i\rangle$$

$$\delta^4\Big(\sum p_i^\mu - \sum p_f^\mu\Big)$$

این دلتای دیراک می‌گویید هرجا که که جمع تکانه‌های ورودی و خروجی صفر نبود خود دلتای دیراک آن را صفر می‌کند و ماتریس گذار صفر می‌شود

$$|\,\langle f|\,s\,|i\rangle\,|^2 = \delta^4(\sum p)\delta^4(\sum p)(2\pi)^8|\,\langle f|\,\mathcal{M}\,|i\rangle\,|^2$$

از نظر ریاضی داریم:

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$$
$$\delta(x)\delta(x) = \delta(x)\delta(0)$$

$$\begin{aligned}|\,\langle f|\,s\,|i\rangle\,|^2 &= \delta^4(0)\delta^4(\sum p)(2\pi)^8|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{TV}{(2\pi)^4}\delta^4(\sum p)(2\pi)^8|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

پس احتمال را بازنویسی کرده و داریم

$$\begin{aligned}dP &= \frac{\delta^4(\sum p)TV(2\pi)^4}{(2E_1V)(2E_2V)\prod_j(2E_jV)}|\mathcal{M}|^2\prod_j\frac{vd^3p_j}{(2\pi)^3}\\ &= \frac{T}{V}\times\frac{1}{(2E_1)(2E_2)}|\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}\end{aligned}$$

$$d\Pi_{LIPS} = \prod_{\text{نهایی}} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

این فرمول ناوردای لورنتس است که سطح مقطع برخورد بااین رابطه داده می‌شود و برای نرخ واپاشی می‌نویسیم

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{T} dP \\ &= \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS} \end{aligned}$$

حال این المان زاویه‌ای را در حالت مرکز جرم محاسبه می‌کنیم

$$d\Pi_{LIPS} = ?\text{در دستگاه مرکز جرم}$$

$$P_1 + P_2 \longrightarrow P_3 + P_4$$

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum p) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_4}$$

روی $p_4$ انتگرال می‌گیریم تا این عبارت را ساده‌تر بکنیم

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{d\Omega_p}{16\pi^2} \int dp_f p_f^2 \frac{1}{E_3} \frac{1}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_{cm})$$

$$p_f = |\vec{p}_3| = |p_4|$$

تغیر متغیر میدهیم و داریم

$$x(p_f) = E_3(p_f) + E_4(p_f) - E_{cm}$$

$$dp_f = \frac{dp_f}{dx} dx$$

$$\begin{aligned} d\Pi_{LIPS} &= \frac{1}{16\pi^2}\int_{m_3+m_4-E_{cm}}^{\infty} dx\frac{p_f}{E_{cm}}\delta(x) \\ &= \frac{1}{16\pi^2}d\Omega\frac{p_f}{E_{cm}}\theta(E_{cm}-m_3-m_4) \end{aligned}$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}|\mathcal{M}|^2\frac{1}{16\pi^2}d\Omega\frac{p_f}{E_{cm}}\theta(E_{cm}-m_3-m_4)$$

در دستگاه مرکز جرم می‌توان نوشت

$$|\vec{v}_1-\vec{v}_2| = \left|\frac{|\vec{p}_1|}{E_1}+\frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\right| = |\vec{p}_i|\frac{E_1+E_2}{E_1E_2} = |\vec{p}_i|\frac{E_{cm}}{E_1E_2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2E_{CM}^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}|\mathcal{M}|^2\theta(E_{CM}-m_3-m_4)$$

حال برای مثال پراکندگی زیر را بررسی می‌کنیم

$$e^+e^- \;\longrightarrow\; \mu^+\mu^-$$

$$\mathcal{M}\Big(s_1s_2 \;\longrightarrow\; s_3s_4\Big) = \sum_{\varepsilon}\langle s_1s_2|\varepsilon\rangle\,\langle\varepsilon|s_3s_4\rangle$$

فرض می‌کنیم

$$p_1^\mu = \Big(E,0,0,E\Big); \qquad p_2^\mu = \Big(E,0,0,-E\Big)$$

پراکندگی در راستای محور $z$ ها انجام می‌شود ذرات فرودی برای آنکه بتوانند فوتونی با اسپین ۱ تولید کنند باید هر دو قطبش هایشان یا در جهت هم یا عمود بر هم باشد پس برای فوتون‌ها داریم

$$\varepsilon^1 = (0,1,0,0) \qquad \varepsilon^2 = (0,0,1,0)$$

برای میون‌ها نیز داریم

$$p_3^\mu = E(1,0,\sin\theta,\cos\theta) \qquad p_4^\mu = E(1,0,-\sin\theta,-\cos\theta)$$

حال باید تکانه فوتون را طوری انتخاب کنیم که بر تکانه این دو میون عمود باشد پس داریم:

$$\bar{\varepsilon}^1 = (0,1,0,0) \qquad \bar{\varepsilon}^2 = (0,0,\cos\theta,-\sin\theta)$$

$$\mathcal{M}_1 = \varepsilon^1\bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon^1\bar{\varepsilon}_2 = -1$$
$$\mathcal{M}_2 = \varepsilon^2\bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon^2\bar{\varepsilon}_2 = -\cos\theta$$

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 = 1 + \cos^2\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 E_{CM}^2}\left(1 + \cos^2\theta\right)$$