(تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)
شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

جزوه جلسه ۵ نظریه میدان‌های کوانتومی ۱
نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار

در این جلسه لاگرانژی میدان الکترومغناطیس را حل خواهیم کرد که این لاگرانژی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

که

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

حال برای به‌دست آوردن معادله حرکت بایستی معادله اویلر لاگرانژ را برای این لاگرانژی بنویسیم که داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho A_\sigma} \right) = 0$$

که معادله حرکت به‌دست می‌آید:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

اگر این معادله حرکت را برحسب پتانسیل‌های برداری بنویسیم داریم:

$$\partial_\mu \Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Big) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$$

حال اگر از پیمانه لورنتس استفاده کنیم داریم:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu \ \Rightarrow \ \Box A^\nu = J^\nu$$

برای حل این معادله می‌نویسیم

$$\Box A^\lambda = J^\lambda \implies A^\lambda = \underbrace{\frac{1}{\Box}}_{\text{انتشارگر}} J^\lambda$$

با یک مثال توضیح می‌دهیم:

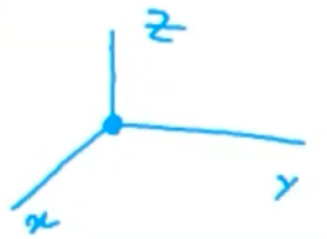
$$J^\lambda = (e\delta^3(x), 0, 0, 0)$$

یعنی

$$\begin{cases} J^0 = e\delta^3(x) \\ J^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

یعنی حالتی را داریم که یک بار در مبدا مختصات به صورت ساکن قرار گرفته است.

$$\int J^0 d^3x = e$$



حال برای این سوال پتانسیل برداری را به‌دست می‌آوریم:

$$A^i = \frac{1}{\Box} J^i \;\Rightarrow\; (J^i = 0) \;\Rightarrow\; A^i = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} = 0$$

از انجا که هیچ میدان مغناطیسی وجود نداشته می‌دانستیم که $\nabla \times \vec{A} = 0$

$$\Box A^0(\vec{x}, t) = e\delta^3(x) = J^0(x, t)$$
$$A^0(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Box} e\delta^3(x)$$

حال برای حل این سوال نیاز به اطلاعاتی در مورد تابع دلتای دیراک و تبدیل فوریه آن داریم

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}\Big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(i\vec{k})(i\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$
$$\Big(\nabla\Big)^n\delta^3(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(-\vec{k}^2\Big)^n e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

حال همین کار را برای $\delta^4(x)$ تکرار می‌کنیم

$$\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik_\mu x^\mu}$$

$$\Box\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Box e^{ik_\mu x^\mu}$$

$$\partial_\mu e^{ik_\mu x^\mu} = ik_\mu e^{ik_\mu x^\mu}$$

$$\Box\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(-k_\mu k^\mu\Big)e^{ik_\mu x^\mu}$$
$$\Box^n\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(-k^2\Big)^n e^{ik_\mu x^\mu}$$

پس داریم:

$$\Box \longrightarrow -k\cdot k = -k_\mu k^\mu = -k^2$$

حال به حل مثال قبل برمیگردیم

$$A_0(x) = \frac{e}{\Box}\delta^3(x) = \frac{e}{\Box}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{-e}{\nabla^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$
$$= -e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{-\vec{k}^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

این انتگرال را در مختصات کروی حل می‌کنیم

$$d^3k = k^2dk\ d(\cos\theta)\ d\varphi$$

$$A_0(x) = \frac{e}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2}e^{ikr\cos\theta}$$
$$= \frac{e}{(2\pi)^3}\times 2\pi \times \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}$$
$$= \frac{e}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k}$$

این انتگرال را با روش مانده‌ها حساب می‌کنیم

$$A_0(x) = \frac{e}{(2\pi)^2}\frac{1}{ir}\lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k+i\delta}$$

که پاسخ انتگرال می‌شود

$$\int_\infty^\infty dk \frac{-e^{-ikr}}{k_i\delta} = -(2\pi i)(-e^{-\delta r}) = 2\pi i(e^{-\delta r})$$

$$A_0(x) = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r} = \frac{e}{4\pi r}$$

حال فرض کنید لاگرانژی به‌صورت زیر داریم:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2}h\Box h + \frac{1}{3}\lambda h^3 + Jh$$

$$h(\vec{x},t) = \text{میدان اسکالر}$$

معادله اویلر لاگرانژ را می‌نویسیم تا با استفاده از آن معادلات حرکت را برای این لاگرانژی به‌دست بیاوریم:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu h} = 0$$

حال آن می‌شود:

$$\Box h - \lambda h^2 - J = 0$$

برای حل این معادله حرکت باید از روش اختلال استفاده کنیم زیرا با روش معمولی نمی‌توان حلش کرد که در این صورت باید فرض کنیم λ کوچک است تا بتوان از اختلال استفاده نمود

$$\Box h_0 - J = 0 \;\Rightarrow\; \Box h_0 = J \;\Rightarrow\; h_0 = \frac{1}{\Box}J$$

حال مرتبه‌های بعدی اختلال را حل می‌کنیم

$$h = h_0 + h_1 + \cdots \qquad h_1 \sim \mathcal{O}(\lambda)$$

$$\Box(h_0 + h_1) - \lambda(h_0 + h_1)^2 - J = 0$$

معادله حرکت تا مرتبه λ

$$\Box h_0 + \Box h_1 - \lambda(h_0^2 + h_1^2 + 2h_0 h_1) - J = 0$$

از جملات مرتبه بالاتر λ صرف نظر می‌کنیم که داریم:

$$\Box h_0 + \Box h_1 - \lambda h_0^2 - J = 0$$

از آنجا که $\Box h_0 = J$ این دوجمله حذف شده و داریم:

$$\Box h_1 = \lambda h_0^2$$

$$h_1 = \frac{\lambda}{\Box} h_0^2 = \frac{\lambda}{\Box}(h_0 h_0)$$
$$h_1 = \frac{\lambda}{\Box}\Big(\frac{J}{\Box}\Big)\Big(\frac{J}{\Box}\Big) \qquad h_0 = \frac{J}{\Box}$$

$$h = \Big(\frac{1}{\Box}\Big)J + \lambda\frac{1}{\Box}\Big(\frac{1}{\Box}J\Big)\Big(\frac{1}{\Box}J\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

مرحله بعد اختلال را به عنوان تمرین حل کنید: