(تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)
شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

جزوه جلسه ۱۱ نظریه میدان‌های کوانتومی ۱
نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار

در این جلسه به بررسی این روش از طریق هامیلتونی می‌پردازیم که از معادله حرکت هایزنبرگ استفاده می‌کنیم

$$i\partial_t\varphi(x) = [\varphi, H]$$

می‌توانیم تحول زمانی میدان را هم مثل مکانیک کوانتومی بنویسیم

$$\varphi(\vec{x}, t) = S(t, t_0)^\dagger \varphi(\vec{x}) S(t, t_0)$$

که خود این عامل زمانی نیز در معادله شرودینگر صدق می‌کند یعنی

$$i\partial_t S(t, t_0) = HS(t, t_0)$$

حال می‌خواهیم اختلال را به این روش اضافه و بررسی کنیم

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

مثلا اختلال می‌تونه به این شکل باشه

$$V = \int d^3x \frac{g}{3!}\varphi^3(\vec{x}, t)$$

میدان آزاد را هم تعریف می‌کنیم

$$\varphi_0(\vec{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)}\varphi(\vec{x})e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$\varphi(x, t) = S^\dagger\varphi(x)S$$

حال می‌خواهیم این دو رابطه بالایی را به هم مرتبط کنیم

$$\varphi(x,t) = \underbrace{S^\dagger e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U^\dagger}\varphi(\vec{x})\underbrace{e^{iH_0(t-t_0)}S}_{U}$$

$$\varphi(x,t) = U^\dagger(t,t_0)\varphi_0(\vec{x},t)U(t,t_0)$$

حال می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
i\partial_t U(t,t_0) &= i\Big(\partial_t e^{iH_0(t-t_0)}\Big)S(t,t_0) + e^{iH_0(t-t_0)}\Big(i\partial_t S(t,t_0)\Big)\\
&= -e^{iH_0(t-t_0)}H_0 S(t,t_0) + e^{iH_0(t-t_0)}H(t)S(t,t_0)\\
&= e^{iH_0(t-t_0)}\underbrace{\Big[-H_0 + H(t)\Big]}_{V(t)}e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}S(t,t_0)\\
&= V_I(t)U(t,t_0)
\end{aligned}$$

پس رسیدیم به معادله‌ای که باید آن را حل کنیم

$$i\partial_t U(t,t_0) = V_I(t)U(t,t_0)$$

برای حل این معادله از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}
U(t,t_0) - U(t_0,t_0) &= -i\int_{t_0}^{t} V_I(t')U(t',t_0)dt'\\
U(t,t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} V_I(t')U(t',t_0)dt'
\end{aligned}$$

این رابطه را به صورت اختلالی حل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
U(t,t_0) &= 1\\
U(t,t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} V_I(t')dt'\\
U(t,t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} V_I(t')dt'\Big[1 - i\int_{t_0}^{t} V_I(t'')dt''\Big]
\end{aligned}$$

می‌توان این رابطه را به شکل عملگر ترتیب زمانی بازنویسی کرد

$$U(t,t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}dt'\;V(t')+\frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t}dt'\;\int_{t_0}^{t}dt''\;T\Big\{V(t')V(t'')\Big\}$$
$$+\frac{(-i)^3}{3!}\int_{t_0}^{t}dt'\;\int_{t_0}^{t}dt''\;\int_{t_0}^{t}dt'''\;T\Big\{V(t')V(t'')V(t''')\Big\}+\cdots$$

می‌شود حاصل این عبارت را به شکل تابع نمایی نوشت

$$U(t,t_0)=T\Big\{\exp\Big[-i\int_{t_0}^{t}dt'V(t')\Big]\Big\}$$