جزوه جلسه سوم نظریه میدان‌های کوانتومی ۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

دانستیم یک میدان آزاد را می‌توان به صورت زیر نوشت که داریم:

$$\varphi_0(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}\right)$$

که تعریف کردیم:

$$P\cdot x = p_\mu x^\mu = P^\mu x_\mu = \omega t - \vec{P}\cdot\vec{x}$$

و داریم:

$$P^\mu = (\omega_P, \vec{P}) \qquad \longrightarrow \qquad \omega_P = \sqrt{m^2 + |\vec{P}|^2}$$

$$P_\mu = (\omega_P, -\vec{P}) \qquad \longrightarrow \qquad \left(P^0 = P_0;\ P^1 = -P_1;\ P^2 = -P_2;\ P^3 = -P_3\right)$$

همچنین داریم:

$$x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$x_\mu = (t, -\vec{x})$$

پس داریم:

$$e^{-iP\cdot x} = e^{-i(\omega t - \vec{P}\cdot\vec{x})}$$

که این همان موج تخت است. همچنین دانستیم که می توان هامیلتونی را نوشت

$$\mathcal{H}_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_P\left(a_P^\dagger a_P + \frac{1}{2}\right)$$

که شبیه هامیلتونی است که در نوسانگر هماهنگ ساده داشتیم. همچنین روابط جابجایی زیر را اثبات کردیم:

$$[\mathcal{H}_0, \varphi_0(\vec{x}, t)] = -i\partial_t \varphi_0(\vec{x}, t)$$

که این رابطه جابجاگری به رابطه حرکت هایزنبرگ معروف است. حال در ادامه می‌نویسیم:

$$\langle x| \ \longrightarrow \ \langle 0| \, \varphi(\vec{x}, t)$$

حال عبارتی که در مکانیک کوانتومی می‌نوشتیم

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

را در نظریه میدان بازنویسی می‌کنیم و داریم

$$\begin{aligned}
i\partial_t \psi(x) &= i\partial_t \langle 0| \, \varphi(\vec{x}, t) \, |\psi\rangle \\
&= i \langle 0| \, \partial_t \varphi(\vec{x}, t) \, |\psi\rangle = \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega_p}} \Big(a_p e^{-ip\cdot x} - a_p^\dagger e^{ip\cdot x} \Big) |\psi\rangle \\
&= \langle 0| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}}{\sqrt{2\omega_p}} \Big(a_p e^{-ip\cdot x} - a_p^\dagger e^{ip\cdot x} \Big) |\psi\rangle
\end{aligned}$$

حال اگر بخواهیم عبارت داخل رادیکال را از انتگرال بیرون بکشیم باید مشتقش را بنویسیم پس داریم:

$$\begin{aligned}
i \langle 0| \, \partial_t \varphi(\vec{x}, t) \, |\psi\rangle &= \langle 0| \sqrt{m^2 - \nabla^2} \varphi_0(\vec{x}, t) \, |\psi\rangle \\
&= \sqrt{m^2 - \nabla^2} \langle 0| \, \varphi_0(\vec{x}, t) \, |\psi\rangle \\
&= \sqrt{m^2 - \nabla^2} \psi(\vec{x}, t)
\end{aligned}$$

حال اگر بسط سری تیلور این رابطه را بنویسیم داریم:

$$i\partial_t \psi(\vec{x}, t) = m \Big(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \Big)^{\frac{1}{2}} \psi(\vec{x}, t)$$

حال بسط دوجمله‌ای این عبارت را نیز می‌نویسیم و در نتیجه داریم:

$$i\partial_t \psi(\vec{x}, t) = m \Big(1 - \frac{\nabla^2}{2m^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{m^3}\Big) \Big) \psi(\vec{x}, t)$$

حال اگر از جمله دارای انرژی سکون صرف نظر کنیم داریم:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi$$

که این همان معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی است. البته در صورتی که مدل‌ها برهم‌کنشی باشند نوشتن این حد کلاسیک به این سادگی نیست. حال تکانه متناظر با میدان را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\pi(\vec{x}) &= \partial_t \varphi(\vec{x},t)\Big|_{t=0} \\ &= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega_p}}\Big(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big)\end{aligned}$$

حال می‌آییم جابجاگر این تکانه متناظر با میدان و خود میدان را در یک لحظه از زمان حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[\varphi(\vec{x}),\pi(\vec{y})] &= -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sqrt{\frac{\omega_q}{2}} \\ &\times\Big(e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}}e^{-\vec{q}\cdot\vec{x}}[a_q^\dagger,a_p] - e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}[a_q,a_p^\dagger]\Big) \\ &= \frac{i}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(e^{ip\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big) \\ &= i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{ip(\vec{x}-\vec{y})} = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}$$

که دقیقا شبیه رابطه جابجاگری بین تکانه و مکان در مکانیک کوانتومی است.

$$\begin{aligned}[\varphi(\vec{x}),\pi(\vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ [x,P_x] = i\ &\longrightarrow\ [x_i,x_j] = i\delta_{ij}\end{aligned}$$

در اینجا ما $c=\hbar=1$ در نظر گرفتیم.

هامیلتونی و لاگرانژی در نظریه میدان

تعریف لاگرانژی و هامیلتونی را بدین ترتیب در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot\varphi) = \pi(\varphi,\dot\varphi)\dot\varphi - \mathcal{H}(\varphi,\pi)$$

از روی این عبارت داریم

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \pi$$

همینطور می‌توان نوشت

$$\mathcal{H}(\varphi,\pi)=\pi(\varphi,\dot{\varphi})\dot{\varphi}-\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi})$$

که از روی این عبارت نیز داریم:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}=\dot{\varphi}$$

که این‌ها تعاریف اولیه‌ای است که در هر مدلی که لاگرانژی و هامیلتونی داشته باشیم استفاده می‌کنیم. حال لاگرانژی یک میدان کلاسیک اسکالر ساده را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-V(\varphi)\\&=\frac{1}{2}\partial_0\varphi\partial^0\varphi+\frac{1}{2}\partial_i\varphi\partial^i\varphi-V(\varphi)\\&=\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-V(\varphi)\end{aligned}$$

حال مشتقاتی را که قبلا نوشته بودیم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\pi\ \longrightarrow\ \dot{\varphi}=\pi$$

پس در این سوال مشتق میدان با تکانه برابر است. حال می‌توان هامیلتونی را نوشت:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}=\pi\dot{\varphi}-\mathcal{L}&=\pi^2-\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-V(\varphi)\right)\\&=\pi^2-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+V(\varphi)\\&=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+V(\varphi)\end{aligned}$$

حال اگر $K=\frac{\pi^2}{2}$ و $\bar{v}=\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+V(\varphi)$ آنگاه می‌توان گفت که:

$$\mathcal{H}=K+\bar{v}\qquad\qquad\mathcal{L}=K-\bar{v}$$

که دقیقا معادل روابطی است که در مکانیک کلاسیک داشتیم. حال برای نوشتن معادله حرکت بایستی کنش را بنویسیم که داریم:

$$S = \int dtL = \int dtd^3x\mathcal{L}$$

پس ما تا الان با چگالی لاگرانژی کار می‌کردیم و برای نوشتن لاگرانژی استفاده از آن در نوشتن کنش باید انتگرال حجمی نیز بگیریم پس برای نوشتن کنش داریم:

$$S = \int d^4x\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$$

حال می‌خواهیم معادلات حرکت را از روی لاگرانژی به‌دست بیاوریم که برای این کار از روش اویلر لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) \\
&= \int d^4x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta(\partial_\mu\varphi)\Big) \\
&= \int d^4x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi\Big) - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\Big)\delta\varphi\Big) \\
&= \int d^4x\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\Big)\delta\varphi + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi\Big)\Big] \\
&= \int d^4x\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\Big)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\delta\varphi\Big|_{Boundry}\Big]
\end{aligned}$$

و فرض می‌کنیم در بی‌نهایت میدان‌هایمان صفر بوده و درنتیجه جمله دوم یعنی شرایط مرزی صفر می‌شود پس فقط جمله اول می‌ماند که باید آن جمله صفر شود تا وردش ما صفر شود پس داریم:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\Big) = 0$$

به این معادله معادله اویلر لاگرانژ می‌گویند. که این معادله را برای یک مثال حل می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

که به جمله دوم لاگرانژی بالا جمله جرمی می‌گویند.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}m^2 \times 2\varphi = -m^2\varphi$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} = \frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi}\Big(\frac{1}{2}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi\Big) = \partial^\mu\varphi$$

حال در معادله اویلر لاگرانژ جایگذاری می‌کنیم که داریم:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi - (-m^2\varphi) = 0$$

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)\varphi = 0$$

که به این معادله کلاین گوردون برای میدان عددی جرم‌دار نیز می‌گوییم که به این صورت نیز نوشته می‌شود:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0$$

$$\Box\varphi + m^2\varphi = 0$$

$$\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

که به این عملگر موج نیز می‌گویند.