جزوه جلسه ۸ نظریه میدان‌های کوانتومی۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

دانستیم در نظریه میدان کوانتومی ماتریس گذار حالت‌های نهایی را به حالت‌های اولیه ارتباط می‌دهد. این ماتریس گذار یا همان پراکندگی را $s-matrix$ می‌گوییم و در این جلسه در این مورد بحث خواهیم کرد.

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}|\mathcal{M}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

همچنین دیدیم که

$$i(2\pi)^4\delta(\sum p)\mathcal{M} = \langle f|\, s\, |i\rangle \tag{۱}$$

سوال اصلی ما شناخت ماتریس $\langle f|\, s\, |i\rangle$ است

$$|i\rangle = \sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}\ \ a^\dagger_{p1}(-\infty)a^\dagger_{p2}(-\infty) \qquad \underbrace{|\Omega\rangle}_{\text{خلا نظریه برهم‌کنشی}}$$

برای لاگرانژی بدون جمله برهم‌کنشی نیز می‌شود

$$|\Omega\rangle \ \longrightarrow\ |0\rangle$$

برای حالت‌های نهایی نیز داریم

$$|f\rangle = \sqrt{2\omega_3}\cdots\sqrt{2\omega_n}a^\dagger_{p3}(\infty)\cdots a^\dagger_{pn}(\infty)\,|\Omega\rangle$$

در این سوال در نظر میگیریم که دو حالت باهم برابر نیستند و ممکنه عمود برهم نیز در نظر بگیریم

$$|f\rangle \neq |i\rangle$$

$$\langle f|\, s\, |i\rangle = \sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}\cdots\sqrt{2\omega_n}\,\langle\Omega|\, a_{pn}(\infty)\cdots a_{p3}(\infty)a^\dagger_{p1}(-\infty)a^\dagger_{p2}(-\infty)\,|\Omega\rangle$$

حال باید این عبارت را محاسبه کنیم به لحاظ تاریخی این کار را ۳ نفر انجام داده‌اند که به LSZ معروف است.

$$\langle f|\, s\,|i\rangle = \left[i\int d^4x_1 e^{-ip_1x_1}(\Box_1+m^2)\right]\left[i\int d^4x_2 e^{-ip_2x_2}(\Box_2+m^2)\right]$$
$$\left[i\int d^4x_3 e^{ip_3x_3}(\Box_3+m^2)\right]\cdots\left[i\int d^4x_n e^{ip_nx_n}(\Box_n+m^2)\right]\underbrace{\langle\Omega|\,T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_2)\}\,|\Omega\rangle}_{\text{تابع n نقطه‌ای}}$$

حال می‌خواهیم این رابطه را اثبات کنیم برای این کار چند رابطه را یادآوری می‌کنیم

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\Big(a_p(t)e^{-ip\cdot x}+a_p^\dagger(t)e^{ip\cdot x}\Big)$$

برای اثبات می‌نویسیم

$$i\int d^4x\; e^{ip\cdot x}(\Box+m^2)\varphi(x)$$
$$=i\int d^4x\; e^{ip\cdot x}(\partial_t^2-\partial_x^2+m^2)\varphi(x)$$

با دو انتگرال‌گیری جز به جز ∂_x^2 را دو عبارت عقب می‌بریم و اعمال می‌کنیم و مشتق زمانی را از مشتق فضایی جدا می‌کنیم و داریم:

$$=i\int d^4x\; e^{ip_\mu x^\mu}(\partial_t^2+\underbrace{\vec{P}^2+m^2}_{\omega_p})\varphi(x)$$

یکی از مشتقات زمانی را نیز با انتگرال‌گیری جز به جز به یک عبارت عقب می‌بریم و اعمال می‌کنیم

$$\int d^4x\;\partial_t\Big(e^{ip\cdot x}(i\partial_t+\omega_p)\Big)\varphi(x)$$
$$=\int dt\;\partial_t\Big[e^{i\omega_p t}\int d^3x\; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}(i\partial_t+\omega_p)\varphi(x)\Big]$$

بخش فضایی را جدا می‌نویسیم که داریم

$$\int d^3x\; e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}(i\partial_t+\omega_p)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\Big(a_k(t)e^{-ik\cdot x}+a_k^\dagger e^{ik\cdot x}\Big)$$

این مشتقات را به داخل میدان می‌بریم و داریم

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \Big[\frac{\omega_k + \omega_p}{\sqrt{2\omega_k}} a_k(t) e^{-ik\cdot x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \frac{-\omega_k + \omega_p}{\sqrt{2\omega_k}} a_k^\dagger(t) e^{ik\cdot x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big]$$

با انتگرال‌گیری از این عبارت به تابع دلتای دیراک می‌رسیم

$$\int d^3x \; e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (i\partial_t + \omega_p)\varphi(x) = \sqrt{2\omega_p} a_p(t) e^{-i\omega_p t}$$

$$\int dt \; \partial_t \; e^{i\omega_p t} \sqrt{2\omega_p} a_p(t) e^{-i\omega_p t} = \sqrt{2\omega_p}\Big[a_p(\infty) - a_p(-\infty)\Big]$$

$$i \int d^4x \; e^{ip\cdot x} (\Box + m^2)\varphi(x) = \sqrt{2\omega_p}\Big[a_p(\infty) - a_p(-\infty)\Big]$$

الحاقی این عبارت نیز می‌شود

$$-i \int d^4x \; e^{-ip\cdot x} (\Box + m^2)\varphi(x) = \sqrt{2\omega_p}\Big[a_p^\dagger(\infty) - a_p^\dagger(-\infty)\Big]$$

حال دوباره رابطه‌ای که داشتیم را می‌نویسیم

$$\langle f| \, s \,|i\rangle = \sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}\cdots\sqrt{2\omega_n} \, \langle\Omega| \, a_{pn}(\infty)\cdots a_{p3}(\infty) a_{p1}^\dagger(-\infty) a_{p2}^\dagger(-\infty) \, |\Omega\rangle$$

این عبارت را از عبارهای بالا بازنویسی می‌کنیم

$$\sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}\cdots\sqrt{2\omega_n} \, \langle\Omega| \, T\{[a_{p3}(\infty) - a_{p3}(-\infty)]\cdots[a_{pn}(\infty) - a_{pn}(-\infty)]$$
$$[a_{p1}^\dagger(-\infty) - a_{p1}^\dagger(\infty)][a_{p2}^\dagger(-\infty) - a_{p2}^\dagger(\infty)]\} \, |\Omega\rangle$$

عملگر ترتیب زمانی زمان‌های بزرگتر را سمت چپ قرار می‌دهد و ترتیب عملگرها را تغییر می‌دهد که یعنی همون عبارت اولیه مان است پس رابطه اثبات شد

$$\langle f| \, s \,|i\rangle = \Big[i \int d^4x_1 e^{-ip_1x_1}(\Box_1 + m^2)\Big]\Big[i \int d^4x_2 e^{-ip_2x_2}(\Box_2 + m^2)\Big]$$
$$\Big[i \int d^4x_3 e^{ip_3x_3}(\Box_3 + m^2)\Big]\cdots\Big[i \int d^4x_n e^{ip_nx_n}(\Box_n + m^2)\Big] \underbrace{\langle\Omega| \, T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_2)\} \, |\Omega\rangle}_{\text{تابع n نقطه‌ای}}$$

و این نقطه شروع نظریه میدان کوانتومی است و در مرحله بعد این توابع دونقطه‌ای را تعریف می‌کنیم که همان تابع گرین یا انتشارگر فاینمن هستند و نظریه را کم کم کامل می‌کنیم