جزوه جلسه ۹ نظریه میدان‌های کوانتومی۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

در این جلسه در مورد انتشارگر فاینمن خواهیم فهمید که نقطه شروع محاسبات اختلالی است برای این کار یک میدان آزاد در نظر بگیرید

$$\varphi_0(\vec{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\Big(a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + a_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu}\Big)$$

$$\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

$$[a_k, a_p^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k})$$

$$a_p^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}|\vec{p}\rangle$$

حال می‌خواهیم این رابطه را اثبات کنیم

$$\langle 0|\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik_\mu(x_2-x_1)^\mu}$$

انتشارگر فاینمن نیز:

$$\langle 0|T\{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\}|0\rangle = D_F(x_1,x_2)$$

این عملگر ترتیب زمانی را می‌توانیم به این صورت نیز به شکل تابع پله بنویسیم:

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}|0\rangle &= \langle 0|\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\theta(t_1-t_2)|0\rangle \\ &\quad + \langle 0|\varphi_0(x_2)\varphi_0(x_1)\theta(t_2-t_1)|0\rangle\end{aligned}$$

$$\langle 0|\, \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\, |0\rangle$$

برای انجام این محاسبه باید:

$$\varphi_0(x_1) = \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k1}}}\Big(a_{k1}e^{-ik_1x_1} + a^\dagger_{k1}e^{ik_1x_1}\Big)$$
$$\varphi_0(x_2) = \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k2}}}\Big(a_{k2}e^{-ik_2x_2} + a^\dagger_{k2}e^{ik_2x_2}\Big)$$

حال با جایگذاری مقدار انتظاری را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\langle 0|\, \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\, |0\rangle &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k1}}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k2}}}\\ &\langle 0|\, a_{k1}e^{-ik_1x_1}a^\dagger_{k2}e^{ik_2x_2}\, |0\rangle\\ &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k1}2\omega_{k2}}}\, \langle 0|\, a_{k1}a^\dagger_{k2}\, |0\rangle\, e^{-ik_1x_1+ik_2x_2}\end{aligned}$$

$$\langle 0|\, a_{k1}a^\dagger_{k2}\, |0\rangle = \langle 0|\, a_{k1}a^\dagger_{k2} - a^\dagger_{k2}a_{k1} + a^\dagger_{k2}a_{k1}\, |0\rangle$$

دو جمله اضافه و کم کردم ولی این دو جمله تاثیری ندارن چون در صورت اعمالشان روی خلا مقدار صفر را نتیجه می‌دهند پس بنابراین داریم

$$\langle 0|\, a_{k1}a^\dagger_{k2}\, |0\rangle = \langle 0|\, [a_{k1}, a^\dagger_{k2}]\, |0\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\, \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\, |0\rangle &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k1}2\omega_{k2}}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)e^{-ik_1x_1+ik_2x_2}\\ &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{k1}}e^{ik_1\cdot(x_2-x_1)}\end{aligned}$$

حال با اعمال عملگر ترتیب زمانی داریم

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}\, |0\rangle &= \langle 0|\, \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\theta(t_1-t_2)\, |0\rangle\\ &+ \langle 0|\, \varphi_0(x_2)\varphi_0(x_1)\theta(t_2-t_1)\, |0\rangle\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\Big[e^{ik\cdot(x_2-x_1)}\theta(t_1-t_2) + e^{ik\cdot(x_1-x_2)}\theta(t_2-t_1)\Big]\end{aligned}$$

حال قسمت زمانی را از قسمت فضایی جدا می‌کنیم که داریم

$$\begin{aligned} e^{ik\cdot(x_2-x_1)} &= e^{ik_0(t_2-t_1)-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \\ e^{ik_0(t_2-t_1)} &= e^{-i\omega_k\tau} \qquad (\tau = t_1 - t_2) \end{aligned}$$

$$\langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}e^{-i\omega_k\tau}\theta(\tau) + e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}e^{i\omega_k\tau}\theta(-\tau)\right]$$

با تغیر دادن علامت یکی از k ها تغیری در انتگرال به وجود نمی‌آید و داریم

$$\langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |0\rangle = \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}_{\text{بخش فضایی}}\underbrace{\left[e^{i\omega_k\tau}\theta(-\tau) + e^{-i\omega_k\tau}\theta(\tau)\right]}_{\text{بخش زمانی}}$$

به جای بخش زمانی از انتگرال زیر می‌توانیم استفاده کنیم

$$e^{i\omega_k\tau}\theta(-\tau) + e^{-i\omega_k\tau}\theta(\tau) = \frac{-2\omega_k}{(2\pi i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2-\omega_k^2+i\epsilon}e^{i\omega\tau}$$

که انتگرال نهایی مون می‌شود که به جای ω قرار می‌دهیم k_0 و با ساده سازی داریم

$$\begin{aligned} \langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |0\rangle &= \iint \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\frac{id\omega}{\omega^2-\omega_k^2+i\epsilon}e^{i\omega\tau}e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{\omega^2-\omega_k^2+i\epsilon}e^{ik\cdot(x_1-x_2)} \end{aligned}$$

$$k_0 \equiv \omega; \qquad k^2 = k_\mu k^\mu = k_0k^0 - \vec{k}^2 = \omega^2 - \vec{k}^2$$

$$\langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k_\mu k^\mu + i\epsilon}e^{ik\cdot(x_1-x_2)}$$

که این برای شرایطی است که جرم نداشته باشیم در صورت وجود جرم برای ذره مجازی در آنصورت داریم:

$$\langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{ik\cdot(x_1-x_2)} = \mathcal{D}_F(x_1,x_2)$$

به این عبارت انتشارگر فاینمن می‌گویند که ناوردای لورنتس است

$$\mathcal{D}_F(x_1,x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{ik\cdot(x_1-x_2)}$$

حال در ادامه در مورد جابجاگرهای این‌های صحبت می‌کنیم

$$\begin{aligned}
[\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] &= 0\\
[\varphi(\vec{x},t),\partial_t\varphi(\vec{x}',t)] &= i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')
\end{aligned}$$

حال می‌خواهیم مشتق زمانی این تابع دونقطه‌ای را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}
&\partial_t \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle\\
&\partial_t\Big[\langle\Omega| \varphi(x)\varphi(x') |\Omega\rangle \theta(t-t') + \langle\Omega| \varphi(x)\varphi(x') |\Omega\rangle \theta(t'-t)\Big]
\end{aligned}$$

که ۴ جمله می‌شود

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega| \partial_t\varphi(x)\varphi(x') |\Omega\rangle \theta(t-t')\\
&+\langle\Omega| \varphi(x)\varphi(x') |\Omega\rangle \partial_t\theta(t-t')\\
&+\langle\Omega| \varphi(x')\partial_t\varphi(x) |\Omega\rangle \theta(t-t')\\
&+\langle\Omega| \varphi(x')\varphi(x) |\Omega\rangle \partial_t\theta(t-t')\\
&=\langle\Omega| T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle + \delta(t-t')\langle\Omega| \varphi(x)\varphi(x')-\varphi(x')\varphi(x) |\Omega\rangle\\
&=\langle\Omega| T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle + \delta(t-t')\langle\Omega| [\varphi(x)\varphi(x')] |\Omega\rangle
\end{aligned}$$

که عبارت دوم صفر است

$$\partial_t \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle = \langle\Omega| T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle$$

حال می‌خواهیم یک مشتق زمانی دیگر نیز بگریم که می‌شود

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle\Omega| T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{\partial_t^2\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle + \delta(t-t')\underbrace{\langle\Omega| [\partial_t\varphi(x)\varphi(x')] |\Omega\rangle}_{-i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')}\\
\partial_t^2 \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{\partial_t^2\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-x')
\end{aligned}$$

حال می‌خواهیم رابطه زیر را اثبات کنیم

$$(\Box+m^2)\langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle = \langle\Omega| T\{(\Box+m^2)\varphi(x)\varphi(x')\} |\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-x')$$

اگر این میدان در معادله اویلر لاگرانژ صدق کند فقط جمله دوم شامل دلتای دیراک باقی می‌ماند

$$(\Box + m^2) \langle 0| T\{\varphi(x)\varphi(x')\} |0\rangle = (\Box + m^2)\mathcal{D}_F(x, x')$$
$$(\Box + m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik\cdot(x-x')}$$
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (\Box + m^2) e^{ik\cdot(x-x')}$$
$$- i\delta^4(x - x')$$

که همان رابطه قبلی را نتیجه داد