(تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)
شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

جزوه جلسه ۴ نظریه میدان‌های کوانتومی۱
نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار

در جلسه‌ی قبل معادله اویلر لاگرانژ را نوشتیم و دیدیم که برای میدان‌های کلاسیک می‌توانیم لاگرانژی بنویسیم حال برای میدان‌های اسکالر مختلط لاگرانژی می‌نویسیم:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*$$

که φ یک میدان مختلط اسکالر است. از معادلات اویلر لاگرانژ برای این لاگرانژی ۲ معادله به‌دست می‌آیید که مجزا از هم هستن چون اینجا یکبار نسبت به φ می‌توانیم مشتق‌گیری بکنیم و یکبار نیز نسبت به φ^* که دو معادله حرکت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)\varphi = 0 &\longrightarrow \text{ for } \varphi^* \\ (\Box + m^2)\varphi^* = 0 &\longrightarrow \text{ for } \varphi \end{aligned}$$

از هریک از این دومعادله می‌توان دیگری را به‌دست آورد. حال می‌بینیم که تقارنی بین این ۲ معادله برقرار است بدین صورت که:

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi \\ \varphi^* &\longrightarrow e^{i\alpha}\varphi^* \end{aligned}$$

تحت این تبدیلات لاگرانژی ناورداست و α یک ثابت است.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* &\longrightarrow \partial_\mu (e^{-i\alpha}\varphi) \partial^\mu (e^{i\alpha}\varphi^*) \\ &= \underbrace{e^{-i\alpha}e^{i\alpha}}_{=1} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* \end{aligned}$$

پس این جمله تغییری نکرد همچنین برای جمله دوم نیز داریم:

$$\begin{aligned} m^2 \varphi \varphi^* &\longrightarrow m^2 (e^{-i\alpha}\varphi)(e^{i\alpha}\varphi^*) \\ &= e^{-i\alpha}e^{i\alpha}(m^2 \varphi \varphi^*) = m^2 \varphi \varphi^* \end{aligned}$$

پس لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا می‌ماند. پش اگر نسبت به α از لاگرانژی وردش بگیریم تغییری در لاگرانژی به‌وجود نمی‌آیید.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \alpha} = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \sum_{n=1}^{2} \Big\{ \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} - \partial_\mu \big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \big) \Big) \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha} + \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha} \Big) \Big\} = 0$$

که این عبارت ساده شده عبارت

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} \delta \varphi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta (\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} \delta (\partial_\mu \varphi^*)$$

است. حال اگر معادله حرکت درست باشد و صفر باشد در معادله بالایی جمله اول صفر می‌شود و فقط جمله دوم باقی می‌ماند که داریم:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = \partial_\mu \underbrace{\Big(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \alpha} \Big)}_{j^\mu} = 0$$

به این عبارت جریان می‌گوییم و درنتیجه داریم

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

که به این معادله پایستگی می‌گوییم پس جریان می‌شود:

$$j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \underbrace{\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha}}_{-i\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} \underbrace{\frac{\delta \varphi^*}{\delta \alpha}}_{i\varphi^*}$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} = -i\varphi \;\Rightarrow\; \varphi \longrightarrow\; e^{-i\alpha}\varphi = \varphi' \Rightarrow\; \varphi' = (1 - i\alpha)\varphi \Rightarrow\; \frac{\varphi' - \varphi}{\alpha} = -i\varphi$$

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\partial^\mu \varphi^*)(-i\varphi) + (\partial^\mu \varphi)(i\varphi^*) \\ &= -i(\varphi \partial^\mu \varphi^* - \varphi^* \partial^\mu \varphi) \end{aligned}$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم ببینیم واقعا شراط $\partial_\mu j^\mu = 0$ برقرار است یا نه

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \Big(-i(\varphi\partial^\mu\varphi^* - \varphi^*\partial^\mu\varphi)\Big) \\ &= -i(\varphi\Box\varphi^* - \varphi^*\Box\varphi)\end{aligned}$$

حال اگر $(\Box\varphi = -m^2\varphi;\ \Box\varphi^* = -m^2\varphi^*)$ باشد در آن صورت داریم:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

که یعنی به یک جریان پایسته رسیدیم. یعنی به خاطر ناوردایی لاگرانژی تحت یک تبدیل خاص و پیوسته یک جریان پایسته داریم که به آن جریان نوتری می‌گوییم.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ \Rightarrow\ \partial_i j^i + \frac{\partial j^0}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \rho = j^0$$

به رابطه بالا معادله پیوستگی می‌گویند که پایستگی بار در الکترومغناطیس یا پایستگی احتمال در مکانیک کوانتومی را نشان می‌دهد.

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \ \Rightarrow\ \int \nabla \cdot \vec{j} d^3x = -\frac{d}{dt}\int \rho d^3x$$

که اگر انتگرال روی کل فضا باشد از قضیه گوس می‌توان استفاده کرد و نوشت

$$\oint \vec{j} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt}Q$$

اگر $\oint \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$ باشد در آن صورت

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ Q = \int j_0 d^3x$$

$$j_\mu = -i(\varphi\partial_\mu\varphi^* - \varphi^*\partial_\mu\varphi) \ \longrightarrow\ j_0 = -i\Big(\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t} - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)$$

حال اگر انتگرال $\oint \vec{j} \cdot \vec{ds} \neq 0$ یعنی بار داخل آن سطح پایسته نیست حال اگر سطح به سمت بی‌نهایت برود در بی‌نهایت میدان‌ها صفر می‌شود و $\oint \vec{j} \cdot \vec{ds} = 0$ است پس در بی‌نهایت میدان‌های فیزیکی صفر هستند پس درنتیجه

بار پایسته است.
لاگرانژی که داریم:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*$$

تحت این تبدیلات ناورداست:

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi \\ \varphi^* &\longrightarrow e^{i\alpha}\varphi^* \end{aligned}$$

البته به شرطی که α یک ثابت باشد. اما اگر α تابعی از x شد آنگاه دیگر لاگرانژی ناوردا نیست و برای ناوردا شدن لاگرانژی باید مولفه‌های دیگر را نیز تغییر دهیم که داریم:

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\varphi \\ \partial_\mu &\longrightarrow \underbrace{\partial_\mu - ieA_\mu(x)}_{D_\mu} \end{aligned}$$

باید این میدان اضافه نیز وارد شود که این تبدیلات مجاز شوند که به این میدان اضافه شده میدان پیمانه‌ای می گویند که لاگرانژی تعمیم یافته شده می‌شود:

$$\mathcal{L} = D_\mu \varphi D^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*$$

همچنین برای انجام تبدیلات علاوه بر تبدیلات قبلی باید

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

در این صورت لاگرانژی ناوردا می‌ماند. به این نوع از تبدیلات در اصطلاح تبدیلات پیمانه‌ای نوع دوم می‌گویند.
حال قضیه نوتر را برای یک نوع دیگری از تبدیلات نیز انجام می‌دهیم و آن انتقال در فضا و زمان تغییری در سامانه فیزیکی به وجود نمی‌آید.

$$x^\nu \longrightarrow x^\nu + \xi^\nu$$

یعنی با بسط تیلور داریم

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x+\xi) = \varphi(x) + \xi^\nu \partial_\nu \varphi + \cdots$$

پس از اینجا می‌نویسیم:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \xi^\nu} = \partial_\nu \varphi$$

اگر برای لاگرانژی نیز بخواهیم بنویسیم داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\nu} = \partial_\nu \mathcal{L} \qquad \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\nu} \xi^\nu$$

پس اگر ما بخواهیم که $\delta S = 0$ باشد در آنصورت داریم:

$$\int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\nu} \delta \xi^\nu = 0$$
$$\delta \xi^\nu \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\nu} d^4x = 0$$

حال معادلات را می‌نویسیم

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi^\nu} = \sum_n \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \xi^\nu} \Big) + \cdots$$

که از آنجا که معادله اویلر لاگرانژ صفر است در نتیجه بخش سه نقطه که همان معادله اویلر لاگرانژ است حذف می‌شود

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi^\nu} = \partial_\mu \Big(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n \Big)$$

حال این معادله را می‌نویسیم:

$$\partial_\mu \Big(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi^\nu} \Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \Big(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n \Big) - \partial_\nu \mathcal{L} = 0$$
$$\partial_\mu \underbrace{\Big\{ \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \Big\}}_{j^\mu} = 0$$

پس توانستیم یک جریان پایسته برای تبدیلات مختصات فضا و زمان به‌دست بیاوریم که به این جریان پایسته تانسور انرژی تکانه می‌گوییم.

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

که ۴ حالت مختلف به ترتیب زیر دارد.

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0; \qquad \begin{cases} \partial_\mu T^{\mu 1} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu 2} = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu 3} = 0 \end{cases}$$

که اولی پایستگی انرژی و آن ۳ تای دیگر پایستگی تکانه را نتیجه می‌دهند. یعنی تحت انتقال در زمان انرژی پایسته است و تحت انتقال در فضا تکانه‌ها پایسته هستند.

$$\begin{cases} T_{\mu\nu} = \sum_n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n\right) - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ \\ T^\mu_\nu = \sum_n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \partial_\nu \varphi_n\right) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \\ \\ T^{\mu\nu} = \sum_n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_n} \partial^\nu \varphi_n\right) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \end{cases}$$

حال انرژی را برای این تانسور انرژی تکانه می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} T_{00} = E &= \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_n} \partial_0 \varphi_n - \mathcal{L} \\ &= \sum_n \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_n}}_{\pi_n} \dot{\varphi}_n - \mathcal{L} \\ &= \underbrace{\sum_n \pi_n \dot{\varphi}_n - \mathcal{L}}_{Hamiltonian} \end{aligned}$$

کل انرژی سیستم از انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید.

$$\text{کل انرژی} = \int T_{00} d^3x$$

برای فضای خمیده یعنی فضایی که متریک آن متفاوت باشد داریم:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ \longrightarrow \ \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

حال کل این فرآیند را برای یک لاگرانژی دیگر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F^2_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

که j^μ جریان و A_μ چهارپتانسیل برداریست.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

حال می‌خواهیم معادله حرکت بنویسیم که داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho A_\sigma} = 0$$

که برای هر بخش حساب می‌کنیم و داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} = -j_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\sigma} = -j_\mu g^{\mu\sigma}$$

$$\begin{aligned}\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho A_\sigma} &= -\frac{\partial_\rho}{4}\Big[\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\mu g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \cdots\Big] \\ &= -\partial_\rho(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) = -\partial_\rho F^{\rho\sigma}\end{aligned}$$

پس معادله حرکت می‌شود:

$$\partial_\rho F^{\rho\sigma} = j^\sigma$$

این معادله را می‌توان ساده کرد و نوشت:

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \ \Rightarrow\ \partial_\mu\Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\Big) = j^\nu \\ &\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu \\ &\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu\end{aligned}$$

اگر پیمانه لورنتس را انتخاب کنیم آنگاه داریم که عبارت $\partial_\mu A^\mu = 0$ بنابراین داریم:

$$\Box A^\nu = j^\nu$$

که به معادله موج رسیدیم.