جزوه جلسه دوم نظریه میدان‌های کوانتومی ۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)

نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

برای میدان‌های الکترومغناطیسی داریم:

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

که φ پتانسیل الکتریکی و $\vec{A}$ پتانسیل برداری است.
حال برای نوشتن میدان‌ها تانسور $F^{\mu\nu}$ را تعریف می‌کنیم و داریم:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

و

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

که در صورت محاسبه داریم

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

حال تک تک مولفه‌های این اعضا را حساب می‌کنیم که برای این کار ۲ معادله داریم:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0$$

با استفاده از این ۲ معادله می‌توانیم معادلات ماکسول را به‌دست بیاوریم در مرحله اول از معادله اول استفاده می‌کنیم و $\nu = 0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \longrightarrow j^0 = c\rho \longrightarrow \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = 4\pi\rho$$

$$F^{00} = 0 \longrightarrow \partial_0 F^{00} = 0$$

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E^i \longrightarrow \partial_i E^i = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

حال برای معادله بعدی همچنان از معادله اول ولی این بار از $\nu = i$ استفاده می کنیم و داریم:

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

$$-\frac{\partial}{c\partial t} E^i + \partial_j \varepsilon^{ijk} B^k = \frac{4\pi}{c} j^i$$

$$-\frac{\partial}{c\partial t} \vec{E} + \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

حال برای نوشتن ۲ معادله بعدی ماکسول از اتحاد نوشته شده استفاده می کنیم:

$$\mu = 0 \qquad \nu = i \qquad \rho = j$$

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0$$

$$\partial^0 (-\varepsilon^{ijk} B^k) + \partial^i E^j - \partial^j E^i = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

و در آخر داریم:

$$\mu = i \qquad \nu = j \qquad \rho = k$$

$$\partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} = 0$$

$$-\partial^i (\varepsilon^{jkl} B^l) - \partial^j (\varepsilon^{kil} B^l) - \partial^k (\varepsilon^{ijl} B^l) = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

تبدیلات پیمانه‌ای یعنی:

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial\chi$$

یعنی تحت این تبدیل

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \longrightarrow & \partial^\mu\Big(A^\nu + \partial^\nu\chi\Big) - \partial^\nu\Big(A^\mu + \partial^\mu\chi\Big)\\ = & \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu\partial^\mu\chi = F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

از جمله این پیمانه‌ها پیمانه لورنتس:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

و پیمانه کولمب

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

که برای x و p داریم

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(a + a^\dagger\Big)$$

$$P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\Big(a + a^\dagger\Big)$$

که داریم:

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad [x, P_x] = i\hbar$$

برای کوانتش میدان‌ها نیز از همین روش که برای نوسانگرها توسط دیراک استفاده شده بود استفاده کردن تا میدان‌ها نیز کوانتومی بشوند و فرض می‌کنیم میدانی داریم و حال آن را کوانتومی می‌کنیم

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(a_p e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a_p^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\Big)$$

در اینجا $\varphi(\vec{x},t)$ یک تابع است که بسط آن را برحسب پایه‌های کامل نوشته‌ایم در نتیجه داریم:

$$[a_p, a_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$$

حال می‌خواهیم یک ذره را تعریف کنیم از روی عملگرهای بالابرنده و پایین برنده این کار را انجام می‌دهیم

$$a_p^\dagger \left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left|\vec{p}\right\rangle$$

یعنی عملگر بالابرنده روی حالت صفر اثر کردده و به ما ذره‌ای با تکانه p می‌دهد. همچنین در این رابطه

$$\omega_p^2 = p^2 + m^2$$

که m جرم ذره و p تکانه آن است. بدین حالت فیزیکدانان میدان‌ها را کوانتومی کردند. فرض بهنجارش نیز می‌شود

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

$$\sqrt{2\omega_p} a_p^\dagger \left|0\right\rangle = \left|\vec{P}\right\rangle$$

$$\sqrt{2\omega_k} a_k^\dagger \left|0\right\rangle = \left|\vec{K}\right\rangle$$

حال این دو عبارت را در هم ضرب می‌کنیم

$$\langle \vec{P}|\vec{K}\rangle = 2\sqrt{\omega_P}\sqrt{\omega_K} \left\langle 0\right| a_p a_k^\dagger \left|0\right\rangle$$

از طرفی میدانیم

$$a_p \left|0\right\rangle = 0$$

پس می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}|\vec{K}\rangle &= 2\sqrt{\omega_P \omega_K} \left\langle 0\right| a_p a_k^\dagger - a_k^\dagger a_p \left|0\right\rangle \\ &= 2\sqrt{\omega_P \omega_K} \left\langle 0\right| [a_p, a_k^\dagger] \left|0\right\rangle\end{aligned}$$

که جابجاگر این عبارت را قبلا نوشته بودیم پس در نتیجه داریم:

$$\langle \vec{P}|\vec{K}\rangle = 2\sqrt{\omega_P \omega_K} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P} - \vec{K}) \langle 0|0\rangle$$

$$\langle \vec{P} | \vec{K} \rangle = 2\omega_P (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P} - \vec{K})$$

حال عملگر واحد را نیز تعریف می‌کنیم

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \left| \vec{P} \right\rangle \left\langle \vec{P} \right|$$

حال برای اثبات اینکه این عملگر واحد است داریم

$$\left| \vec{K} \right\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \left| \vec{P} \right\rangle \left\langle \vec{P} \middle| \vec{K} \right\rangle$$

حاصل $\left\langle \vec{P} \middle| \vec{K} \right\rangle$ را قبلا به‌دست آوردیم درنتیجه داریم

$$\begin{aligned} \left| \vec{K} \right\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} \left| \vec{P} \right\rangle 2\omega_P (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P} - \vec{K}) \\ &= \left| \vec{K} \right\rangle \int d^3p \delta^3(\vec{P} - \vec{K}) = \left| \vec{K} \right\rangle \end{aligned}$$

پس تمام ضرایب انتخاب شده باهم سازگارند و روابطمان درستند. حال در ادامه یک میدان مستقل از زمان می‌نویسیم

$$\hat{\varphi}_0(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_P}} \Big(a_P e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} + a_P^\dagger e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}} \Big)$$

حال هامیلتونی را برای میدان می‌نویسیم و داریم

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hbar\omega_p \Big(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \Big)$$

حال می‌خواهیم جابجاگرش را بنویسیم

$$\Big[\mathcal{H}_0, \varphi_0(\vec{x}, t) \Big] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \Big[\omega_p (a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}), a_k e^{-ik\cdot x} + a_k^\dagger e^{ik\cdot x} \Big]$$

با انجام تمام محاسبات داریم

$$\Big[\mathcal{H}_0, \varphi_0(\vec{x}, t) \Big] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \Big(-\omega_p a_p e^{-iP\cdot x} + \omega_p a_p^\dagger e^{iP\cdot x} \Big) = -i\partial_t \varphi_0(\vec{x}, t)$$

بنابراین رابطه هایزنبرگ اینجا نیز برقرار است. حال می‌خواهیم جابجاگرهای بین میدان‌ها را محاسبه کنیم

$$\Big[\varphi(\vec{x}),\varphi(\vec{y})\Big]=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_q}}\Big[a_pe^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}+a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}},a_qe^{i\vec{q}\cdot\vec{y}}+a_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}}\Big]$$

که با ساده سازی می‌شود

$$\Big[\varphi(\vec{x}),\varphi(\vec{y})\Big]=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\Big[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}-e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\Big]=0$$

پس علیت نسبیتی برقرار است. یعنی میدان در یک لحظه از زمان در مکان x با میدان در مکان y ارتباطی باهم ندارند.