جزوه جلسه ۱۰ نظریه میدان‌های کوانتومی۱ (تاریخ انتشار : ۲۵ مهر ماه ۱۴۰۳)
نام و نام خانوادگی: سینا اعتبار شماره دانشجویی : ۴۰۰۲۱۶۵۴

در جلسه قبل انتشارگر فاینمن را نوشتیم که

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_F(x,y) &= \langle 0|\, T\{\varphi_0(x)\varphi_0(y)\}\, |0\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik\cdot(x-y)}
\end{aligned}
$$

این رابطه یعنی تابع گرین تحت انتقال ناورداست. همچنین می‌دانیم

$$
\begin{aligned}
\Big[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)\Big] &= 0 \\
\Big[\varphi(\vec{x},t), \partial_t\varphi(\vec{x}',t)\Big] &= i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')
\end{aligned}
$$

حال می‌خواهیم معادله شوینگ دایسون را به‌دست آوریم که جلسه قبل بخشی از آن را نوشتیم

$$
\begin{aligned}
\partial_t \langle\Omega|\, T\{\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle &= \langle\Omega|\, T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle \\
\partial_t^2 \langle\Omega|\, T\{\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle &= \langle\Omega|\, T\{\partial_t^2\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-x')
\end{aligned}
$$

$$
(\Box + m^2)\, \langle\Omega|\, T\{\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle = \langle\Omega|\, T\{(\Box + m^2)\varphi(x)\varphi(x')\}\, |\Omega\rangle - i\hbar\delta^4(x-x')
$$

حال اگر برهم‌کنش نداشته باشیم معادله آخر می‌شود

$$
(\Box + m^2)\mathcal{D}_F(x,x') = -i\hbar\delta^4(x-x')
$$

حال همین ترتیب را برای ۳ میدان اعمال می‌کنیم

$$
\partial_t \langle\Omega|\, T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}\, |\Omega\rangle
$$

که با اعمال آن ما ۲ تا تابع دلتای دیراک در هر جمله ظاهر شده و در مجموع ۶ جمله خواهیم داشت و جواب کلی ما خواهد بود

$$\begin{aligned}\partial_t \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{\partial_t\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle \\ &+ \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle \delta(t-t_1)\theta(t_1-t_2) + \cdots\end{aligned}$$

حال اگر دوبار مشتق زمانی بگیریم باید به جابجاگرهایش نیز توجه کنیم

$$\begin{aligned}(\Box + m^2) \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{(\Box + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle \\ &- i\hbar\delta^4(x-x_1) \langle\Omega| \varphi(x_2) |\Omega\rangle \\ &- i\hbar\delta^4(x-x_2) \langle\Omega| \varphi(x_1) |\Omega\rangle\end{aligned}$$

اگر این عبارت را باز هم ادامه دهیم به معادله شوینگر-دایسون می‌رسیم

$$\begin{aligned}&(\Box + m^2) \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\} |\Omega\rangle = \langle\Omega| T\{(\Box + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\} |\Omega\rangle \\ &- i\sum_{j=1}^{n} \delta^4(x-x_j) \langle\Omega| \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n) |\Omega\rangle\end{aligned}$$

برای درک بهتر این معادله شوینگر-دایسون می‌آییم و آن را برای ۴ میدان می‌نویسیم

$$\begin{aligned}(\Box + m^2) \langle\Omega| T\{\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{(\Box + m^2)\varphi(x)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\} |\Omega\rangle \\ &- i\hbar\delta^4(x-x_1) \langle\Omega| T\{\varphi(x_2)\varphi(x_3)\} |\Omega\rangle \\ &- i\hbar\delta^4(x-x_2) \langle\Omega| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_3)\} |\Omega\rangle \\ &- i\hbar\delta^4(x-x_3) \langle\Omega| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\} |\Omega\rangle\end{aligned}$$

برای سادگی یک سری تعریف‌ها را انجام می‌دهیم

$$\delta^4(x-x_i) = \delta_{xi}$$

$$\mathcal{D}_F(x_i, x_j) = \mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}$$

پس با این تعاریف برای ذره بدون جرم داریم

$$\Box_x \mathcal{D}_{x1} = -i\delta_{x1}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}
<\varphi_1\varphi_2> &= \int d^4x \delta_{x1} <\varphi_x\varphi_2> \\
&= \int d^4x (i\Box_x \mathcal{D}_{x1}) <\varphi_x\varphi_2> \\
&= i\int d^4x \mathcal{D}_{x1}\Box_{x1} <\varphi_x\varphi_2> \\
&= \int d^4x \mathcal{D}_{x1}(\delta_{x2}) = \mathcal{D}_{12}
\end{aligned}$$

باز برای میدان‌های آزاد که در معادله کلاین گوردون صدق می‌کنند داریم

$$\begin{aligned}
<\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4> &= i\int d^4x \mathcal{D}_{x1}\Box_x <\varphi_x\varphi_2\varphi_3\varphi_4> \\
&= i\int d^4x \mathcal{D}_{x1}\Big\{ <\underbrace{\Box_x\varphi_x}_{=0}\varphi_2\varphi_3\varphi_4> \\
&- i\delta_{x2} <\varphi_3\varphi_4> - i\delta_{x3} <\varphi_2\varphi_4> - i\delta_{x4} <\varphi_2\varphi_3> \Big\} \\
&= \int d^4x \Big\{ \mathcal{D}_{x1}\delta_{x2} <\varphi_3\varphi_4> + \mathcal{D}_{x1}\delta_{x3} <\varphi_2\varphi_4> + \mathcal{D}_{x1}\delta_{x4} <\varphi_2\varphi_3> \Big\} \\
&= \mathcal{D}_{12} <\varphi_3\varphi_4> + \mathcal{D}_{13} <\varphi_2\varphi_4> + \mathcal{D}_{14} <\varphi_2\varphi_3> \\
&= \mathcal{D}_{12}\mathcal{D}_{34} + \mathcal{D}_{13}\mathcal{D}_{24} + \mathcal{D}_{14}\mathcal{D}_{23}
\end{aligned}$$

پس توانستیم تابع ۴ نقطه‌ای را برحسب ضرب توابع دو نقطه‌ای بنویسیم که به این روش قضیه ویک می‌گویند
حال برای یک لاگرانژی این فرآیند را انجام می‌دهیم

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2}\varphi\Box\varphi + \frac{g}{3!}\varphi^3$$

که جمله دوم در این لاگرانژی جمله برهم‌کنش است حال می‌خواهیم این معادله را تا مرحله دوم اختلال حل کنیم و تابع دونقطه‌ای را به‌دست بیاوریم

$$\langle\Omega| T\{\varphi_1\varphi_2\} |\Omega\rangle = ?$$

در پایین‌ترین مرتبه اختلال این عبارت است

$$\langle\Omega| T\{\varphi_1\varphi_2\} |\Omega\rangle = \mathcal{D}_{12}$$

$$\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle = \int d^4x\delta_{x1}\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x\varphi_2\}\,|\Omega\rangle$$

با تابع دلتای دیراک فقط یک تغیر متغیر انجام دادیم حال به جای تابع دلتای دیراک از دالامری در انتشارگر استفاده می‌کنیم

$$\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle = i\int d^4x(\Box_x\mathcal{D}_{x1})\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x\varphi_2\}\,|\Omega\rangle$$

جاب دالامبری را تغییر می‌دهیم

$$\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle = i\int d^4x\mathcal{D}_{x1}\Box_x\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x\varphi_2\}\,|\Omega\rangle$$

از معادله شوینگر-دایسون استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle &= \int d^4x\mathcal{D}_{x1}\Big\{\,\langle\Omega|\,T\{\Box_x\varphi_x\varphi_2\}\,|\Omega\rangle - i\delta_{x2}\Big\}\\ &= i\int d^4x\mathcal{D}_{x1}\Big\{\,\langle\Omega|\,T\{\mathcal{L}'_{int}(\varphi_x)\varphi_2\}\,|\Omega\rangle - i\delta_{x2}\Big\}\end{aligned}$$

حال محاسبات را ادامه می‌دهیم و در مرحله اول تابع دلتای دیراک را با انتشارگر فاینمن اعمال می‌کنیم که جمله اول به‌دست می‌آید

$$\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle = \mathcal{D}_{12} + \frac{ig}{2}\int d^4x\mathcal{D}_{2x}\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x^2\varphi_2\}\,|\Omega\rangle$$

حال برای محاسبه انتگرال بخش دوم از دلتای دیراک استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle &= \mathcal{D}_{12} + \frac{ig}{2}\int d^4x\mathcal{D}_{1x}\int d^4y\delta_{2y}\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x^2\varphi_y\}\,|\Omega\rangle\\ &= \mathcal{D}_{12} + \frac{ig}{2}\int d^4x\;d^4y\;\mathcal{D}_{1x}(i\Box_y\mathcal{D}_{y2})\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x^2\varphi_y\}\,|\Omega\rangle\\ &= \mathcal{D}_{12} + \frac{i^2g}{2}\int d^4x\;d^4y\;\mathcal{D}_{1x}\mathcal{D}_{y2}\;\Box_y\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x^2\varphi_y\}\,|\Omega\rangle\end{aligned}$$

حال محاسبات را ادامه داده و داریم

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,T\{\varphi_1\varphi_2\}\,|\Omega\rangle &= \mathcal{D}_{12} - \frac{g}{2}\frac{g}{2}\int d^4x\;d^4y\;\mathcal{D}_{x1}\mathcal{D}_{y2}\,\langle\Omega|\,T\{\varphi_x^2\varphi_y^2\}\,|\Omega\rangle\\ &+ ig\int d^4x\;\mathcal{D}_{x1}\mathcal{D}_{2x}\,\langle\Omega|\,\varphi_x\,|\Omega\rangle\end{aligned}$$

که عبارت $\langle\Omega| T\{\varphi_x^2\varphi_y^2\} |\Omega\rangle$ یک تابع ۴نقطه‌ای در پایین‌ترین مرتبه اختلال است

$$\begin{aligned}\langle\Omega| T\{\varphi_x^2\varphi_y^2\} |\Omega\rangle &= \langle\Omega| T\{\varphi_x\varphi_x\varphi_y\varphi_y\} |\Omega\rangle \\ &= \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} \\ &= 2\mathcal{D}_{xy}^2 + \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{O}(g)\end{aligned}$$

یک تابع تک جمله‌ای نیز داشتیم که آن را می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\langle\Omega| \varphi_x |\Omega\rangle &= \int d^4y\delta_{xy} \langle\Omega| \varphi_y |\Omega\rangle \\ &= \int d^4y\ i\Box\mathcal{D}_{xy} \langle\Omega| \varphi_y |\Omega\rangle \\ &= i\int d^4y\mathcal{D}_{xy}\Box \langle\Omega| \varphi_y |\Omega\rangle \\ &= i\int d^4y\mathcal{D}_{xy} \langle\Omega| \frac{g}{2}\varphi_y^2 |\Omega\rangle\end{aligned}$$

حال می‌توان همه را به‌دست آورد و نوشت

$$\begin{aligned}\langle\Omega| T\{\varphi_1\varphi_2\} |\Omega\rangle &= \mathcal{D}_{12} \\ &\quad - g^2\int d^4x\ d^4y \left\{\frac{1}{2}\mathcal{D}_{1x}\mathcal{D}_{xy}^2\mathcal{D}_{y2} + \frac{1}{4}\mathcal{D}_{1x}\mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy}\mathcal{D}_{y2} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_{1x}\mathcal{D}_{2x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yy}\right\}\end{aligned}$$

برای تمرین همین کار را برای لاگرانژی زیر انجام دهید

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$