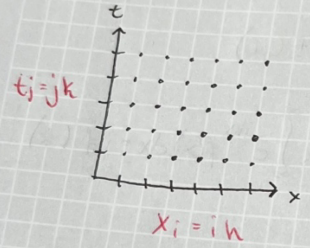
Numerisk løsning av varmeligningen

Eulers eksplisitt

Starter med varmeligningen (setter $\alpha = 1$)

$\Rightarrow \quad u_t = u_{xx}$, her er $u_t = \frac{du}{dt}$ og $u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}$

og $u(x,t)$



Hvert steg i t-retning er størrelse k, og antall steg j.

Tilsvarende i x-retning er størrelse h og antall steg i.

Skriver ut u_t ved def. av den deriverte: $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Skriver ut u_{xx} ved def. av den andre deriv.: $f''(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

$\Rightarrow \quad u_t = u_{xx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

Simplifiserer notasjon: $u(x_i, t_j + k) = u_{i,j+1}$

et steg

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} - u_{i,j} = (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \frac{k}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \frac{k}{h^2} + u_{i,j}$$

Setter $\gamma = \frac{k}{h^2}$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = \gamma u_{i+1,j} - \gamma 2 u_{i,j} + \gamma u_{i-1,j} + u_{i,j}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u_{i,j+1} = \gamma u_{i+1,j} + (1 - 2\gamma) u_{i,j} + \gamma u_{i-1,j}}$$