量子夜話

量子夜話

量子夜話

量子夜話

量子夜話

品切桂（しなぎれ）

まえがき

「量子力学を勉強してみたいのですが、どう勉強したら良いですか？」という質問をよくもらうようになった。その人が物理のプロになりたいのなら、話はそんなに難しくない。多くの大学のカリキュラムは、プロを養成するために理にかなったものだと思う。大学で学ぶとおりに学ぶのが良いとひとまずは答えるだろう。そうすれば、プロの使うツールをずらりと揃えた上で、その使い方まで頭に入ることになるはずだ。

問題は残りの数多くの非専門家たちにとって、そのルートはあまりにも時間がかかりすぎることだ。プロ向けのすべてを学ぶのではなく、もしテーマを限定することができて、それをある程度の内容まで理解してもらうことで十分にニーズに応えられるのであれば、やはり別の方法の方が学びやすいということになる。だから冒頭の質問を受けた場合、私は「量子力学の何を勉強したいんですか？」と聞き返すことが多い。けれども「何を勉強したら良いのかも分からないんです」という答えもしばしばある。

こういう時、私が量子力学で大事だと思う概念をいくつか挙げて勉強してみるように提案することは可能だ。でも本当にそれで良いのだろうか？私の考えは、質問をくれた人の考えとはかけ離れているかもしれない。でも何も勉強しないよりは私の話に付きあってくれた方が、実はその人にとって有益なのかもしれない。その可能性に賭けるとすれば、私の話はある程度まとまっていて、肩肘を張らなくても聞けるような読み物とするのが良いのではないだろうか。

この読み物のシリーズを企画した理由はおよそこんなところである。第 I 部の「量子夜話」は、夜に聞いても睡眠に影響しないくらいの読みやすさで量子力学の話をしようという意気込みがタイトルに表れている。ここではテーマを「波動と粒子の二重性」と「量子統計性」という 2 つに絞り込んでいる。それが量子力学のエッセンスだと私は考えるからだ。

第 II 部の「物性物理と素粒子」では、素粒子について取りあげている。素

粒子とはこの世を構成するこれ以上分割はできないという粒子のこと。一方、物性物理というのは沢山の粒子が寄せ集まって出来ている物質の性質を解き明かそうとする物理のことだ。素粒子ひとつひとつの性質と、それらが数え切れないほど凝集した物質の性質という、一見すると全く異なる世界の、物理という体系における結びつきをテーマにしていると言える。どこまでもひとつながりの体系であるところ、あるいはそれを目指そうとするところが物理の面白さだと私は思う。皆さんに多少なりともそれが伝わるのであれば、ありがたいことだと思う。

目次

第 I 部

量子夜話

第 1 章

粒子と波の古典論

1.1　はじめに

世界は粒子で構成されている。特に基本的なものは素粒子と呼ばれるが、そうでない複合粒子も含めて、それらには「粒のようにもふるまい、波のようにもふるまう」という共通した性質がある。その性質をうまく説明する理論体系は量子力学と呼ばれ、その記述は確固としたものである。

この文章は、その量子力学の言う粒子のふるまいについて、やさしい説明をこころみようというものである。できれば寝る前に聞いても、眠れなくなったりしないくらいのやさしさにしたいと願っているので夜話ということにしてある。

この「粒とも言え、波ともいえる」存在のことを粒子と呼びつづけるのは混乱のおそれがあるので、しばしば量子と呼ぶことになると思う。(専門的には許容される呼び方であるが、国語辞典にこの意味が載っているのをみたことがない)。量子夜話というタイトルはそのような意味にとっていただきたいと思う。

ここでは 2 つのテーマを取りあげたいと思う。それは量子の「粒とも言え、波ともいえる」二重性である。そのためには、そもそも粒子とはどういうものだったか、また波とはどういうものであったかを、振りかえることが

必要だろう。そこで初めの数節をこれにあてようと思う。そこまでが第 1 章となる。そして、その上で量子力学の話を始めるつもりである。とくに波動関数という概念に紙面を割くことになるだろう。これが第 2 章となる。

もうひとつのテーマは「粒子の統計性」と呼ばれるもので、量子が粒として複数あるときに、そのとりうる状態の数え方の違いからくるものである。この違いが量子をボーズ粒子とフェルミ粒子に分類することになる。

これを説明するには、量子が複数個あるときの量子力学を説明する必要がある。ここは、量子を 1 粒分だけ考えれば済んだ時に比べて、急に話がややこしくなるポイントでもあるので、その部分をわかりやすく伝えられたらと考えている。これが第 3 章となる。

1.2　古典力学における粒子の自由度

1.2.1　位置と速度

そのようなわけで、初めに古典力学における粒子の話をしよう。古典力学というのは量子力学が確立される前の段階でほぼまとめられた、物体の運動を記述する学問の体系のことである。量子力学の不可解さもよく取り上げられるけれど、古典力学もなかなかどうして不思議なものである。

とくに私が不思議だと思うのは、粒子は実に不自由なものだということだ。なにせ前提条件として勝手に考えてよいことは、その粒子のある瞬間における位置と速度しかない。

速度というのは位置が時間的に変化する度合いのことであり、そして加速度というのは速度が時間的に変化する度合いのことである。どうしてここで止める必要があるのだろうか？加速度の時間変化、そしてそのまた時間変化というものを次々に考えられてもよさそうなものなのに、実際には加速度は力（ちから）というものが決めてしまう。したがって加速度やその時間変化を勝手に決めるわけにはいかないのである。

力とは言いかえれば他の粒子との相互作用のことである。たとえばここに

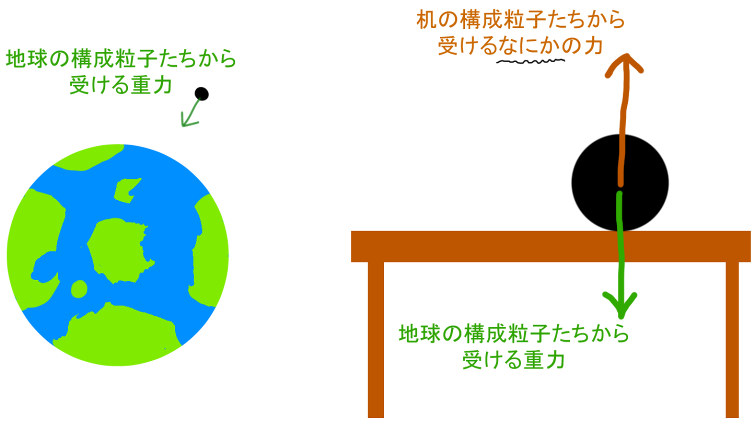

図 1.1　力を受けるボール

ボールがあれば、そのボールは地球の引力を感じるだろう。この引力はつまり、地球を構成する粒子たちとボールとの重力相互作用である。

またこのボールが机に置かれているなら、引力とは別に机からも力を受ける。つまり机を構成する粒子との相互作用である。この力のおかげで、ボールは机に（少なくとも目に見えて）めりこんだりしないが、机から勝手に跳ねとばされることもない。この相互作用は量子力学の領分だけれど、さいわい「めりこまないし、跳ねとばされたりしない」という前提から古典力学の知識だけで逆算することが出来る。

いずれにせよ力というものは、周りに他の粒子がどう配置されているかによって勝手に決まってしまう。そして古典力学の教えるところ（とくにニュートンの運動方程式）によれば、力は勝手に加速度を決めてしまう。加速度とは速度の瞬間的な変化率のことなので、「次の瞬間の速度」は加速度を通して力が決めてしまう。また速度とは位置の瞬間的な変化率のことだから、「次の瞬間の位置」も速度が勝手に決めてしまう。このように初期状態からの運動は完全に決まる。

逆に言えばそれまでの運動の様子を知らなくても、現在の粒子の位置と速度さえ分かっていれば、これから粒子がどう運動するかを予測することができる。このような意味で、古典力学では粒子の状態をあらわす基本的な変数は位置と速度であり、これらのみで完全なのである。

1.2.2　運動の保存量

さて今度は保存量の話をしたいと思う。保存**料**と書けば食べ物を長持ちさせるための添加物のことだが、そちらではなく保存**量**というものである。この物理用語は、粒子たちに関係する量のうち運動の間変化しないもののことを指す。例えばエネルギーは保存量である。変化しないということは、世界全体のエネルギーは勝手に増えたり減ったりしないということだ。そこで「どこからエネルギーを持ってくるか」ということが社会問題にさえなる。

保存量については「世界に連続的な対称性があるときは、それに対応した保存量がある」という有名な定理（ネーターの定理）がある。これは古典力学でも量子論でも成りたつ。「世界の対称性」などというと仰々しいけれども、そんな大層なことでもない。たとえば物理ではよく「特別な時刻というものはない」という仮定を考える。例えばある実験をするとしよう。その場合なら「初期条件が全く同じならば、どの時刻に実験を始めても物理は変わらない」とふつうは考える。これが時間に関する対称性である。あるいはもっと大げさに「この世界が始まるのが仮に何秒か早かったとしても物理は何も変わらない」というような仮定でもいい。このような対称性がある場合に、粒子たちの運動に見いだされる保存量がエネルギーである。

また時刻の代わりに「世界には特別な場所というものはない」という仮定から始めることもできる。その場合、初期条件が全く同じならば世界全体を平行移動させても粒子の運動は変わらないと考えることができる。この場合に対応する保存量は運動量と呼ばれる。それからもし特別な場所がないのなら、平行移動ではなく世界全体をどこかを中心に回転させても物理は変わらないだろう。この場合に対応する保存量は角運動量と呼ばれる。

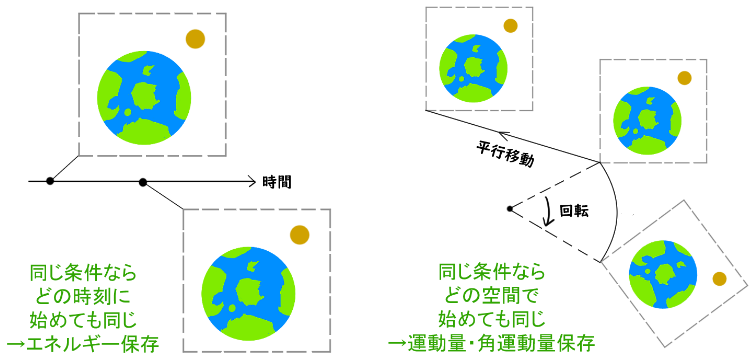

図 1.2　保存量を導く対称性

運動量や角運動量は粒子ごとに定義することもある。その場合、保存量となるのは「粒子ごとの運動量をすべて足しあわせたもの」、それから「粒子ごとの角運動量をすべて足しあわせたもの」になる。

ところで古典力学の教えるところでは、粒子の運動量はその「質量と速度の積」に等しい。前に古典力学では粒子には「位置」と「速度」の自由度しかないということを書いた。運動量と速度は質量という定数倍でしか違わないから、「位置と速度にしか自由度が無い」ということは、「位置と運動量にしか自由度が無い」と言いかえても良い。

実は量子論の話をするときに便利なのは位置と運動量という見方の方なので、すこし覚えておいていただけるといいと思う。

1.3　波と場

「量子は粒子のようでもあり波のようでもある」というのがこのシリーズの主題の一つ。ここまでは古典粒子のはなしだった。今回からは波について

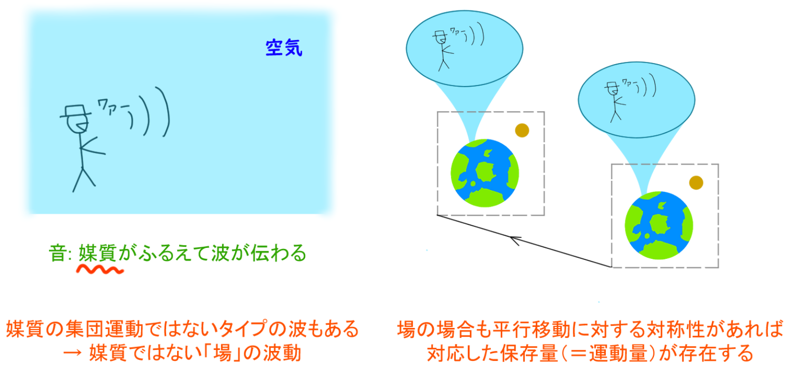

図 1.3　波と場。場にも保存量がある

見てみることにしよう。

波と言えばふつうは水面に立つものを思い浮かべるだろう。これは水の分子の集団運動である。また音波は空気の振動である。空気中では（地球からの重力も影響しながら）分子がお互いに力を及ぼしあっている。そこにとつぜん圧力の高いところができると、それが圧力の変化が周りに伝わっていく。圧力の高かったところが低くなったり、低かったところが高くなったりする様子が波（もしくは波動）と表現されるのである。このような水の波や音の波は媒質（つまり空気や水のような振動して波を伝えるもの）が最初から広がっていることを前提に現象が存在する。

その一方で光も波だけれど、こちらは集団運動の結果として波になっているわけでは無い。これは不思議なことだ。じっさい昔の人は、光を伝える媒質があるのかもしれないと考えてはみたのだけれど、そのアイディアは実情に合わなくて放棄せざるを得なかった。現代的な視点から言えば光は量子であって、「波かつ粒」な量子はひと粒から波なのである。集団運動の結果とは理解されない。このように波とひとくちに言っても色々だ。

波は現象をかなり抽象化したものと言うことができる。共通したこととしては、「空間の各点に割りあてられたなんらかの量の変化を扱っている」ということがある。音波なら圧力、水面の波なら高さのような量だ。また、光の場合は電磁場と呼ばれるものが対応する。この「空間の各点に割りあてられたなんらかの量」を総称して場と言う。

場は空間的にびっしりと広がって定義されているという点で、質点とは対照的である。質点には位置という空間上の決まった一点があるけれど、場にはそういうものはない。これは質点の自由度が「位置」と「運動量」だったことを考えると、かなり大きな違いだと言える。

それでは運動量についてはどうだろう？以前、エネルギーや運動量などの保存量は、時間や空間の対称性からあらわれると説明した。同様のことは場の物理学についても言える。つまり時間や空間の対称性を反映して、保存量が存在する。それは質点系のものと同じ対称性に由来するから、質点の場合と同じ名前で呼ぶことは正当だ。そんなわけで場にもエネルギーや運動量、角運動量と言った保存量が存在する。

しかし波の場には運動量はあっても、粒子のような位置は無い。量子が波と粒子の性質を両方もつというのなら、この「位置」をめぐる問題をさけては通れなさそうだ。これがどのように解決されて量子の二重性にたどりつくのかをこの先で我々は見ていくことになるだろう。

1.4　波の向きと広がり

1.4.1　球面波と平面波

たしかに波という物には粒子のような位置はない。しかし、どこか小さな領域の一部にだけ波が起こるということは考えられるだろう。例えば、池に小石を投げれば、落ちた直後はそのごく周辺にだけ波が起こる。あるいは花火が空ではじければ、初めはその周りの空気だけが振動する。

しかし波はすぐに広がっていく。池の場合なら円形に、花火の場合なら球

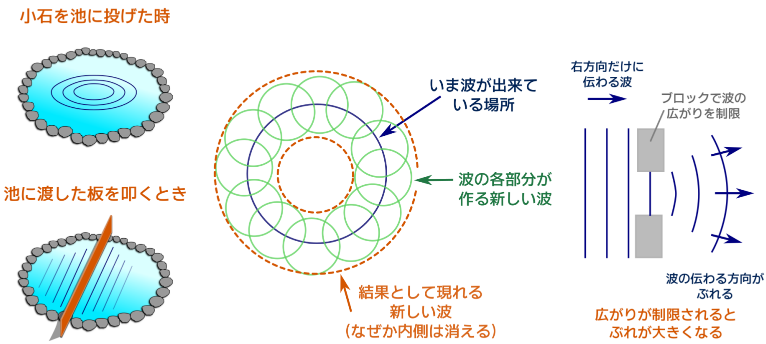

図 1.4　波の伝わり方

面状に音波が伝わる。このとき波はどの方向にも同じように伝わっていく。これらは円形波とか球面波とか呼ばれる。

球面状の波とは正反対に一方向にしか伝わらない波がある。こちらは平面波と呼ばれる。ちょっと想像がつきにくいかも知れないけれど、たとえば池の場合なら池を仕切るように長い板をおいてその板をトントンと叩けば、その板に垂直な方向に伝わる直線状の波が出来る。上手に叩きつづけると、一方向に伝わりつづける平面波にかなり近い波ができる。

またちゃんとした平面波ではないけれど、音をある方向に伝えたいときに使う道具としてメガホンがある。メガホンが口の狭い方ではなく広い方を向けて使うのは、方向性のよい波を作る時にはその方向に垂直な広い面を震わせたほうがよいからだ。

■ホイヘンスの原理（波が波を作る）　では平面波と球面状の波をつなぐような議論は無いのかというと、ホイヘンスの原理という便利な物がある。原理とはいうけれど、いいアイディアくらいに思ってもらった方がよいだろう。それは「波は各部分があらたに球面波を作ることで伝わっていく」とい

う考え方だ。

球面状の波を例にとってみよう。上に述べたように花火でもはじけたことによって、最初はある小さな領域にだけ波が起こる。この波が次の瞬間、その外側に広がるような球面波を作り出す。そしてその次の瞬間には、球面状に少し広がった波のいたる部分がそれぞれまた新しい球面波を作る。そして、その次の瞬間の波を形成する。これがホイヘンスの原理のアイディアだ。その結果、内向きの波は打ち消し合い、外向きの波だけが残るので、結果として最初に見た球面波のようなふるまいをすると考える。(図の真ん中の絵も見ていただきたい)。

ただちょっと注意して欲しいのは、ホイヘンスの原理はこれだけでは不完全で、内向きの波が本当に打ち消すのかはわからない。「いいアイディアくらいに思って」と書いたのはそのためだ。ただこのアイディアはこんにちでも生き残っていて、グリーン関数というものを使った手法で上手にこの様子を表すことが出来る。

今度はホイヘンスの原理を平面波にあてはめてみよう。初めに平面状にできた波がある。するとその平面のいたるところから球面波がでてくる。すると次の瞬間には、球面波が重なり合った結果、少し離れたところに平行に波の平面が広がる。そしてその次の瞬間にもまた同じようにして、その面に平行な波が出来る。こうして平面波は平面状の形を保ちつづける。この時同じ方向に進んでいる波だけが生き残り、逆に進む波は打ち消してしまう(これもホイヘンスの原理だけでは説明できない。そういうものと思っていただければと思う)。

1.4.2　不確定性関係（広がりと向き）

ここまでの結果を波の広がりと向きの関係で整理しよう。球面波のように空間の一部が波立っている時には、波はいろいろな方向に進んでいく。一方、平面波のように波面が広がっている場合には、波は一方向にだけ進むこともできる。

それでは中途半端に広がっている波ではどうなるだろう？ホイヘンスの原理から、波の広がりが大きい面がある場合はその面に垂直な方向には波が伝わりやすく、逆に波面の広がりが小さい時にはいろいろな方向に波が伝わって、波がどちら向きとは言えなくなってしまうことが推測できるだろう。（図 1.4 のいちばん右の絵も参考にして欲しい）。

ここに私たちは、「波の広がりが大きいと波の向きははっきりとしやすく、波の広がりが小さいと波の向きはばらつきが大きくなりやすい」という、ある種の不確定性関係をみたことになる。これは波の性質であるということは強調しておきたい。この不確定性関係は量子論にも現れ違った形で解釈されるけれど、この関係性自体は量子論に特別なものでは無いのである。

第 2 章

量子の波動関数

2.1　波動関数と位置

粒子と波の古典論はこれくらいにして、ここからは量子論における波動関数について取りあげようと思う。波動関数とは私たちの日常感覚とはかけ離れたふるまいをする量子の状態を数学的にうまく表す道具である。一口に説明するのは難しいけれど少しずつみていこう。

ある量子について、その位置や運動量を私たちが観測するとき、それがどうしても確率的になってしまうというのが量子力学の教えるところだ。今回は位置の観測をとりあげよう。古典的には静止した粒子というものがあり、その粒子はいつも同じ位置にある。ところが量子力学では、（ものごとを非常に微細にみたときには）ある量子を位置 A に見いだすこともあれば、位置 B に見いだすこともある。そして、その確率は波動関数から決まる。

きちんとした授業であれば、ここで量子の波動関数がしたがう微分方程式をお見せするところである。けれども波動関数はだいたい波のようなふるまいをするので、方程式をとかなくても大雑把なふるまいはわかる。（例外のひとつにトンネル効果がある）。ホイヘンスの原理も理解の助けになるだろう。とくに波を乱すものが周りにないときはこの扱いでかなりのことが分かる。

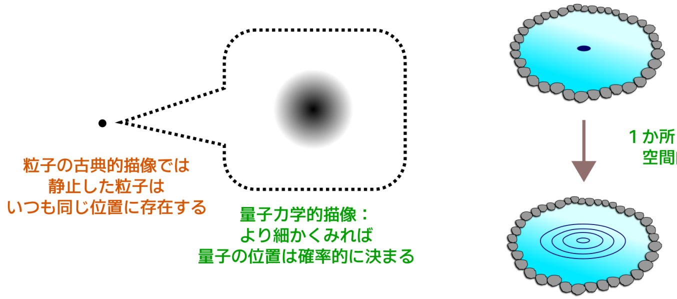

図 2.1　量子論における波動関数

また波動関数はじつは複素数の関数であることを心に留めていただきたい。複素数の波とは何なのかよく分からないと思うかもしれないけれど、ひとまず複素数には実部と虚部の二つの部分があって、それぞれが波になっていると思っていただければ良いと思う。

2.1.1　位置の固有状態

これまで量子には粒子の性質があると言ってきた。実は量子を (確率的とはいえ) 位置 A や位置 B に見いだすことができるということが粒子の性質そのものなのである。いいかえれば、観測の直後の量子は「たしかにこの位置にある」という状態になっているということでもある。このような位置について確定した状態のことを位置の固有状態という。

量子力学の不思議なところは、この状態が一瞬だけ許されてもその後は続かないということだ。この「位置の固有状態」に対応する波動関数の関数形はデルタ関数と呼ばれる。イメージ的にはその特定の位置にだけ実数の非常に大きな値をとり、その他の領域では 0 になるような関数である。このよう

な固有状態に対応する波動関数のことを固有関数と呼ぶ。

こんな状態からスタートして時間を進めたらどうなるか、私たちはすでに（1.4.1 節の球面波のところで）普通の波の場合については見たのである。量子論でも基本的には同じことが起こる。1 箇所でのみ高くなった波は、次の瞬間から広がっていく。その広がってしまった状態はもはや位置の固有状態ではなく、位置が確率的にぼやけた状態になる。つまり、一瞬だけ「たしかにこの位置にある」という状態だったとしても、それを保ちつづけることは出来ないのである。

2.2　波と粒子の二重性

2.2.1　固有状態への分解

今度は波動関数が広がった状態の時に、もういちど量子の位置を測定しようとするとどうなるかをとりあげよう。先に述べたように、波動関数はどの位置に量子が観測されるかを確率として教えてくれる。

数学的に同等な方法は複数あるけれど、その手順のひとつを説明しよう。まずその波動関数が各位置の固有状態の波動関数（つまりデルタ関数）にどれだけ似ているかを調べる。これは数学的には「内積の絶対値の 2 乗」というもので計算される。

たとえば、まだあまり波が広がって無い状態の波動関数なら、その波の中心の位置の固有関数とはよく似ていると考えられる。しかし、その中心から離れた位置の固有関数とはあまり似ていないということになる（図 2.2 で言えば、位置 B の固有関数のほうが（位置 A の固有関数よりは）黒線で示した波動関数に似ていると言うことになる）。

このとき波動関数の正負の向きは無視される。つまり波動関数がその位置で正の実数でも、負の実数でも「内積の絶対値の 2 乗」の値は同じになる。また複素数の場合には位相とよばれる複素平面上の向きがあるのだけど、これも「内積の絶対値の 2 乗」には影響しない。（だから、好きな向きをとっ

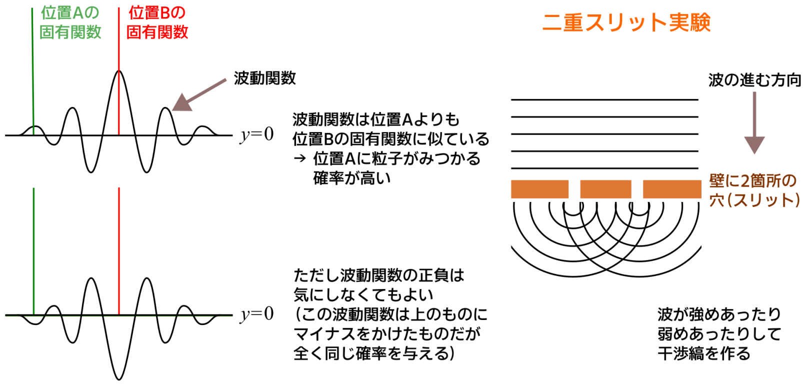

図 2.2　位置の固有関数・二重スリット実験

てみて一番似ていると思える状態で考えればよい)。

実はこの「類似度」はその位置での波動関数の値の絶対値を 2 乗することでも得られる。[*1]類似度が高ければ、そこに粒子を見いだす確率は高いということだから、「波動関数の広がりは、おおよそ粒子をそこに見つけるであろう領域を表している」とも言える。

量子をどの位置にみいだすかの確率は、この「内積の絶対値の 2 乗」に比例する。比例定数を決めなくてはいけないが、量子はどこかの位置にはあるから、確率をすべて足しあわせれば 100% になる。だからそうなるように比例係数を決めればいい。これで確率はきっちりと決まる。

測定の前に量子の位置を確定することは出来ないけれど、位置の測定の直後は再び位置は確定する。その瞬間に波動関数はその見つかった位置の固有関数となる。そして次の瞬間からまた波は広がっていく。

[*1] 初めからこの方法を書かなかったのは、あとに出てくる運動量の説明にはこの方法を使わないつもりだからである。先に述べた方法も覚えておいてもらいたい。

2.2.2　二重スリット実験

ここまでに説明してきたことが、量子の「波と粒子の二重性」である。つまり量子はひとつの粒子としてあり、その位置を確定するような観測をすることも可能である。しかしどの位置に見いだされるかは、波動関数によってきまる確率でしか決まらない。そしてその波動関数が波のようにふるまうことが量子の波動性である。この性質が、量子ひとつひとつについて回ることがとても重要で、そこが不思議なところだ。

その不思議さをよく表す二重スリット実験とよばれるものがある。そのポイントは「波であれば干渉縞ができるような状況で、量子の位置をひとつずつ測定したらどうなるか？」ということである。干渉縞は波と波がぶつかりあい、波を強め合ったり弱めあったりすることで、波の高さの違いが縞状にあらわれることを指す。できるだけ単純に波と波をぶつけるために、波の通る隙間を 2 箇所つくったものが二重スリット実験である（図 2.2)。

古典的に考えれば、粒子は 2 つのスリットのうちどちらかを通るから、右のスリットを通った電子にとっては左のスリットが開いていたかどうかは運動に関係がなさそうだし、左のスリットを通った電子についても右のスリットがどういう状態だったかは運動に関係がなさそうである。だからスリットが 2 つ開いているからと言って、干渉の効果など起こりそうもない。

しかし量子力学の考え方では、量子は「量子ひとつ」から波なのである。そこで二重スリットによって干渉の効果が現れ、縞状に波の立ちやすい部分と立ちにくい部分ができる。波の立ちやすい部分は、その位置の固有関数との「内積の絶対値の 2 乗」が大きくなって、その位置に量子を発見する確率が高くなる。逆に波の立ちにくい部分では確率は低くなる。

位置の測定のたびに、量子は位置が確定する。たしかに量子はひとつずつ見いだされる。これが粒子性である。観測位置のデータは点で表すことができるけれど、この実験を何度も繰り返すと、観測位置のデータ分布は干渉縞を点描したようなものになる。干渉は波の性質であるから、このことを指し

て量子の波動性と言ってよい。これは量子のひとつひとつが粒子でありながら、同時に波の性質をもつことを典型的にあらわしている。

2.3　波動関数と運動量

さてもう少し波動関数の話をつづけよう。1.2.1 節と 1.2.2 節で古典粒子の自由度は位置と運動量だという話をした。この「運動量」という位置と対になるもうひとつの自由度について話をしなければ、量子力学の話をきちんとしたことにはならない。

古典力学では速度とは位置の時間変化のことだった。実はこの位置の時間変化という考え方は量子の見方としては不便である。速度を測るためには時間をずらして位置を 2 回以上測定しなくてはいけない。しかし、前に見たように 1 回目の測定の直後には波動関数が位置の固有関数になってしまう。これでは、元の状態の速度を測っていることにならない。しかし世界の対称性からくる保存量である運動量はそれはそれとしてきちんと定義できる。

2.3.1　運動量の固有関数

位置の時と同じように量子の運動量も確率的にしか観測できないが、その確率はやはり波動関数から導くことができる。そのためには運動量の固有関数を考えることになる。

これは複素数の値を持つ関数で、波が伝わる方向に細長い、複素平面の円筒に巻き付いているような関数の形をしている（図 2.3 の左下）。複素数なので、実部と虚部を別々にかくこともできる（図の右側）。ちなみに運動量の絶対値が大きいほど、巻きつく回数が多くなる（図でいえば $|p_1| > |p_2|$ となる）。

じつはこの関数は、1.4.1 節で説明した決まった方向に動きつづける波「平面波」の量子力学版なのである。この平面波は邪魔するものがない場合、複素平面の円筒が理容室のサインポールのようにくるくる回り続けるような動

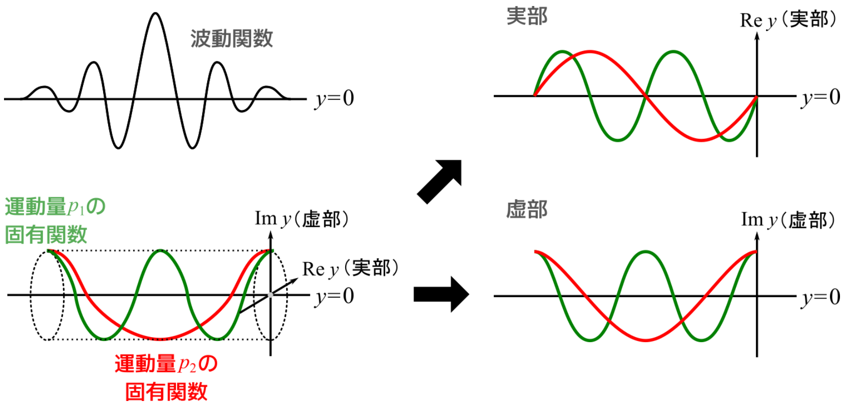

図 2.3　運動量の固有関数（図では紙面の関係でグラフや円筒が途中で切れてしまっているが、これらは両側に無限に長く続くものと思っていただきたい）。

き方をする。この波の進行方向と速さが、運動量の向きと速さに対応するのである。

運動量の確率分布は位置の時と同じように、考えたい波動関数と運動量の固有関数がどれだけ似ているかを「内積の絶対値の 2 乗」で比較すればよい。

前の節で波動関数と固有関数を比べるときには位相と呼ばれる複素平面上の向きは影響しないと書いた。じつはその位相というものは、円筒の中心軸周りの回転角に対応する。だから、円筒をぐるぐる回しても運動量の確率分布の計算には影響しない。

さて、これが平面波の量子力学版だとしても、なぜこの平面波が運動量と関係するのだろうか？ 1.2.2 節で取りあげたように、運動量は世界全体を平行移動させても物理が変わらないことに付随する保存量であった。そのような平行移動を行うと平面波はもとの形とずれてしまうのだが、実は円筒をくるりと回せばもとの平面波と同じ形になるように戻すことができる。つまり平行移動で変わったのは位相だけで、物理には影響しない。結局のところ、平面波は平行移動後の世界でもそのままの形で運動量の固有関数となるので

ある。この不変性が平面波を運動量の固有関数とすることを正当化する。難しい話だけれど、まぁそういうものだと思っていただこう。

2.4　不確定性関係

2.2.1 節では波動関数の広がりと粒子を見いだす位置のばらつきとが関係することをみた。それでは波動関数と運動量のばらつきの関係を見るにはどうしたら良いだろうか？もちろん既に述べた類似度を使った手続きを踏めば分かることだけれど、もう少し直観に訴える方法として、波の向きに注目する方法を見てみよう。

2.4.1　波の重ね合わせ

波の向きとは言っても、それがはっきりとしているのは平面波だけである。そこで波動関数を平面波に分解するということを考える。分解しても、足しあわせて元に戻すことができないと便利では無いのだが、量子の波には重ね合わせの原理という便利な法則がある。

それによると、もしある瞬間の波動関数が分解できて、複数の波動関数の和として表されれば、元の波動関数の時間変化は、分解した波動関数がそれぞれ単独で時間変化したものをあとから足しあわせたものと同じになる。つまり分解してから別々に時間変化を考えて、あとから足しても大丈夫なのである。

もし平面波に分解できれば、平面波は時間変化しても平面波のままなので何かと便利である。この分解は数学的にはフーリエ変換というもので実現される。前に、波動関数と平面波との類似度から運動量の確率的な分布を得るという話をした。実はこの類似度というのは、波動関数を平面波に分解したときに「その運動量に対応する平面波がその分解の中にどれだけたくさん存在するか」ということを計っているとも言える。つまり色々な向きを持つ平面波に分解できるときには、運動量にばらつきが多い波動関数になっている

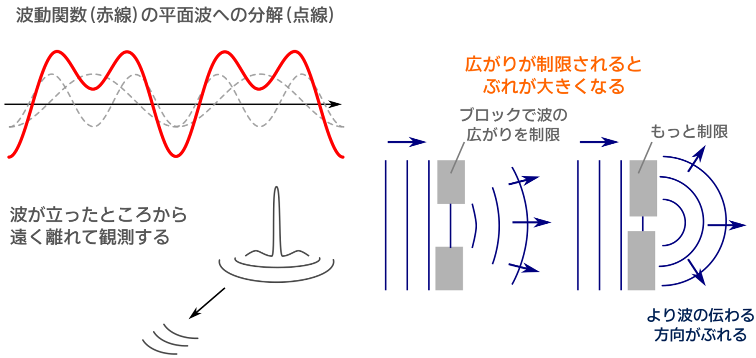

図 2.4　波動関数の分解と運動量のばらつき

のである。

2.4.2　「遠くから見る」という方法

この分解はもうちょっと物理的なやり方で考えることもできる。それが波の立っているところから離れて「遠くから見る」ことだ。実際には波動関数を見ることはできないので、あくまで「もし波動関数が見えたなら」という話であることには気をつけてほしい。

さて、ある程度の広がりがある波も、遠くから見ると小さく見える。やがて波は広がって波を見ている地点にたどり着くわけだけど、もともとの波がその方向に対応する平面波の成分を多く持っていれば、よりたくさんの波をその地点で感じやすいだろう。

一番極端な例から説明しよう。位置の固有関数は、ある位置のところで無限大のようになっていて、他の場所ではゼロとなる関数だった。これも平面波に分解できると言ったら驚くだろうか。そのためには、それぞれの平面波がその位置で正の実数になるよう揃えて、ありとあらゆる平面波を足し合わ

せるのである。これを位相がそろった状態と表現する。このときその位置で足し算は無限大になってしまうけれど、他の位置では色々な波長の平面波が足し合わされるので、平均されてゼロになってしまう。

さてこの状態から時間を進めると、それぞれの平面波がそれぞれの決まった方向に動き出す。同じような波の向きと波長を持った波は、しばらくの間、位相をそろえながら進むので、これが円形の波形としてはっきりわかる。

こんなに極端な場合でなくても同じようなことが起こる。まず初めにある程度の空間的な拡がりをもった波があるとする。そこから離れたところで待っていれば、その待っている方向に進む平面波の集まりが波としてやってくる。こうして波の向きを遠くから見ることで、どんな平面波の成分が含まれているかは大雑把には分かる。

2.4.3　不確定性関係

この観点から 1.4.2 節でみたホイヘンスの原理による波の不確定性関係を見直してみよう。それは「波は空間的なひろがりが小さいと、その波の進む方向がばらつきやすい」ということであった。

今の説明の観点から言うと、そのことは波動関数の空間的な広がりが小さいと、その波の平面波成分にばらつきが大きいことを表している。これは量子力学的には運動量の観測の際にも大きなばらつきが出やすいということに対応する。

また波の立っている部分というのは確率的にその位置に量子を見いだしやすい場所であった。これらを総合すると、波の広がりと向きの不確定性関係から「量子の位置の確率的な広がりが小さいと、それに対応して量子の運動量の確率分布の分散が大きくなりやすい」という量子力学版の不確定性関係が出る。前にも強調したように、この関係は波動関数の波の性質から出ているのである。

2.5　もうひとつの自由度: スピン

2.5.1　もう一つの自由度

古典力学での粒子の独立な自由度は位置と運動量だった。量子力学では波動関数というものがあって、そこから位置と運動量の確率的な分布が出てくる。そしてその位置と運動量の分布は独立に決められるのではなく、不確定性関係を持つと言うことを見た。

そして量子には波動関数とは別の自由度「スピン」がある。本題からはすこし外れるのだけど、ここで簡単に触れておくことにする。

スピンに関するもっとも有名な実験のひとつにシュテルン＝ゲルラッハの実験がある。不均一な磁場の中に銀の原子を通過させると、原子が 2 方向に曲がって分かれるというものである。この 2 方向に分かれるというところが古典的には説明できない。

量子力学ではスピンというベクトルのような自由度を持ちこむことで、このような現象をうまく説明することができる。スピンは向きを持つのだけど、その向きを観測で完全に決めることはできない。ただし、ある方向にどれだけ沿っているかは観測できる。その方向を上下方向に取ることにしよう。単独の電子の場合はその観測に対応する固有状態が 2 通りしかない。つまり上向きのものと、下向きのものである。磁場はこの 2 通りのスピン状態に異なる力を与えるので、上に書いた 2 方向に分かれるような運動が起こるのである。

2.5.2　スピン

スピンは波動関数とは独立な自由度である。とりあえずスピンは波動関数とは別の「ステータス」みたいなものと考えてもらえれば、とりあえずは問題ないかと思う。上で触れた電子の場合なら、「上向き」とか「下向き」とかそれらの両方の成分を持つ状態といったステータスがあるということに

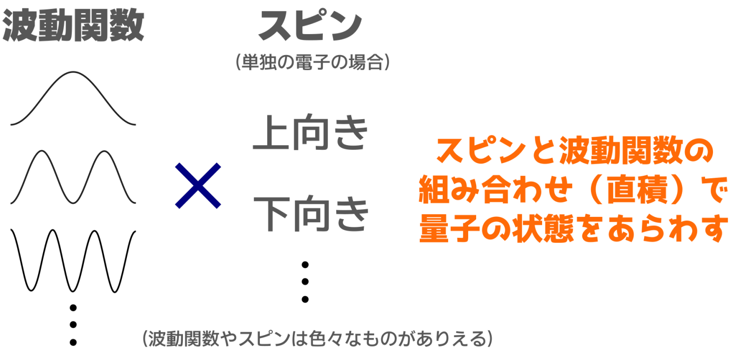

図 2.5　波動関数とスピンの自由度

なる。

これがスピンと呼ばれているのは歴史的な経緯の要素が強い。よく粒子の自転との類推に触れられるけれど、スピンは位置や運動量といった古典的な物理量をつかさどる波動関数とは別の自由度なので、ほんとうに自転とみなすのは無理がある。まぁただの名前と思っておくのが良いだろう。

波動関数とスピンは量子の別々のステータスとなっているので、これらの組み合わせで状態が指定されることになる。たとえば「位置 A の固有関数 × 上向きスピン」のように指定すれば、状態がちゃんと指定されたことになる。

本書ではスピンについてはこれ以上は取り扱わずに進めていくことにする。これはスピンについてはある状態のものだけを考えることにして、波動関数の部分にだけ注目することと同じである。

第 3 章

複数粒子の量子力学

3.1　ベクトル

　さて、ここからは複数粒子の量子力学についてお話ししていこうと思う。その上でベクトルの話をしておいた方がいいと思うので、この節で取りあげたい。そんなに大げさな話ではないはずだけど、もしかすると皆さんが思っているベクトルとはちょっと違うかもしれない。

3.1.1　ベクトルにも色々ある

　ベクトルという言葉を日常会話で使うこともあるけれど、専門的な話の時ですら、この言葉は文脈によって意味が違ったりする。たぶん一番ふつうのベクトルは数字を組にしたもので、足し算やら定数倍やら内積やらが定義されているやつだろう。これもベクトルなのだけど、ここでは数ベクトルと呼ぶことにしよう。

　より一般的な概念としてのベクトルというものもある。ごく粗っぽく言えば「ふつうに足したり定数倍できたりするものは全部ベクトル」という考え方である。（余談になるが、物理屋さんは別の定義のベクトルもよく使う。「回転に対して位置座標と同じように変換する変数の組」というものなのだ

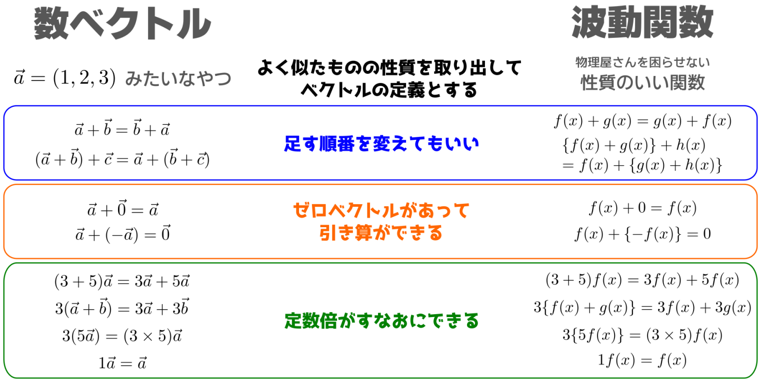

図 3.1　ベクトルとしての波動関数

けど、今回はその話ではない）。

3.1.2　ベクトルとしての波動関数

ここでいうベクトルはかなり適用範囲の広い概念で、ちょっとしたルールが満たされれば何でもベクトルということになる。ちゃんと知りたい人には線形代数の本でも読んでもらうことにして、ここでは波動関数もベクトルとみなせるということを紹介したい。

これまでにすでに波動関数の足し算とか定数倍とかの話が出てきていた。そのような演算をしてもその結果がまた波動関数として認められるという性質をもってベクトルの条件を満たすのである。

ベクトルはとても単純なので、数学的に取り扱いやすい。物理の理論を作る上でも、対象をベクトルとして取り扱えるのであれば、できるだけそうすることで無駄にややこしいことを考える必要がなくなるだろう。そして現在のところその戦略はうまくいっているので、ベクトルという概念が量子論で重宝されているのである。先ほど取りあげたスピンもベクトルとしてうまく

取りあつかうことができる。

3.1.3　ベクトルと数ベクトル

ベクトルと数ベクトルとの関係についても簡単に触れておこう。考えているベクトル全体の集合が有限次元であるとき、その全体の性質を保ったままベクトルを数ベクトルへと読みかえる方法が存在する。これを使うと、もとは抽象的なベクトルであっても具体的な数ベクトルに置きかえて色々と計算ができる。とくにベクトルからベクトルへの線形写像とよばれるものを考えるときに出てくるのが行列である。

量子論の本を読むと、波動関数から波動関数への線形変換を議論している時に行列の話が出てくる。これは波動関数がベクトルであることに基づいて、よく知られている行列というツールで色々と性質を調べられるという大変ありがたい話なのである。もっとも波動関数はふつうは無限次元なので、そこはちょっと気をつけなくてはいけない。こういうことをちゃんと勉強したい人は関数解析と呼ばれる分野の数学の本を探すことになるだろう。(あんまり物理屋さんは気にしないが、たいてい何とかなっているみたいだから不思議である)。

3.2　複数粒子の波動関数

3.2.1　自由度

ここからは量子が複数ある場合に波動関数をどうするかという話をしたい。いま一度、粒子の自由度の話を思い出してみよう。古典力学では粒子の自由度は位置と運動量であった。粒子が複数ある場合、粒子ごとに位置と運動量の自由度がある。つまり粒子 1 には 位置 1、運動量 1 があり、粒子 2 には位置 2、運動量 2 といった具合である。

それが量子力学だとどうなったかというと、位置の関数である波動関数[*1]が自由度であり、ここから運動量の情報も得られるということだった。するとひとつめの粒子に対応して位置 1 の関数である波動関数 f_1、そしてふたつめの粒子に対応して位置 2 の関数である波動関数 f_2 があれば良いような気がする。それぞれ $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ とでも書いておこう（ただし f_1、f_2 は恒等的にゼロではないとする）。ここで x_1 は位置 1 を、x_2 は位置 2 を表す変数である。

3.2.2　複数粒子の波動関数

実はこの 2 つの波動関数を別々に考えてしまうのは得策ではないとわかっている。古典力学では粒子はそれぞれ孤立して空間上の 1 点を占めているのだけれど、量子論ではお互いに力を及ぼさない状態であっても、量子 1 の状態が量子 2 の状態によって影響を受けるとか、その逆に量子 2 が量子 1 の状態に影響を受けるということがある。

その状況をうまく表すためには、量子 1 と量子 2 の両方の情報を持つ波動関数を考える方がよい。このとき波動関数は位置 1 と位置 2 の両方の関数になる。つまり $F(x_1, x_2)$ みたいなものを考えるのが結局便利ということになっている。この波動関数はまたこれは前に説明したような意味でのベクトルにもなっていて、たしかに足し算や定数倍がふつうにできる。

もし量子 1 と量子 2 が全く独立という状況を表したければ、$F(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ としておけば良い。この時、f_1 がどんな関数であっても $F(x_1, x_2)$ は x_2 の関数としては $f_2(x_2)$ の定数倍でしか無い。x_1 と x_2 の立場を逆にしてもまた同じことが言える。とくに f_1、f_2 がともに位置の固有関数の時は、量子 1 と量子 2 がそれぞれの点に局在している様子を表す。

この波動関数 F について、量子の位置がどのような分布で観測されるか

[*1] 波動関数は運動量の関数として表すこともできる。その方法を与えるのがフーリエ変換である。その意味で位置が運動量と比べて特別というわけではない。

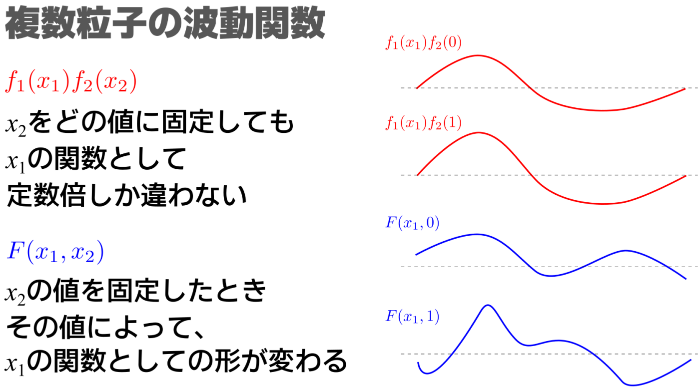

図 3.2　複数粒子の波動関数

を知りたければ、以前量子 1 個の場合で説明したのと同じように、波動関数 $F(x_1, x_2)$ と位置 1・位置 2 についての固有関数とがどれだけ似ているかを調べればよい。

3.3　同種粒子の数え方

ところがこれではまだひとつ大きな問題がある。実は「複数の量子がまったく独立」と言うことが実際にはないのである。つまり $F(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ という関数形は波動関数としては排除されてしまう。[*2]

この制約の物理的な意味は、しばしば「同種粒子は区別することができない」という標語で語られる。ここからはそれを見ていこう。

[*2] f_1 と f_2 が全く同じ関数の時には例外がある。これについては後で取りあげる。しかし全く同じであることを要求されるのなら、やはり独立ではいられないということには違いない。

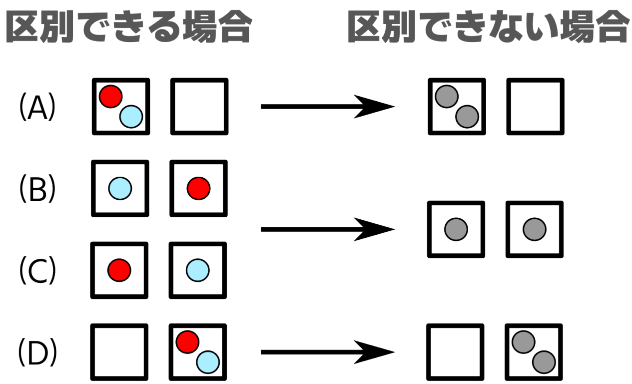

図 3.3　場合の数の数え方

3.3.1　場合の数の数え方

説明のために、簡単な例を考える。ここに 2 つの箱と、2 つのボールがあるとしよう。このボールを箱に入れる場合、その入れ方は何通りあるだろうか？ただしひとつの箱に 2 つボールを入れてもいい。

まずボールが区別できる場合から考えよう。ボールのひとつが赤色に、もうひとつが青色に塗ってあるということにしておこう。このボールは「区別できる粒子」を例えたものである。また箱の方は粒子の空間的な位置を例えたもので、位置が違うからその区別はつく。こちらは箱 1、箱 2 と呼ぶ。

この場合はボールの入れ方は 4 通りとなる。つまり、(A) 箱 1 に赤、青の両方のボールが入っている、(B) 箱 1 に青、箱 2 に赤のボールが入っている、(C) 箱 1 に赤、箱 2 に青のボールが入っている、そして、(D) 箱 2 に赤、青の両方のボールが入っている、の 4 通りである。

ではボールが区別できない場合はどうなると言うのだろうか。実はその場合は (B) と (C) が全く同じ状態ということで、4 通りだったものが 3 通り

になってしまう。我々の日常的な感覚では、同じボールとはいってもどこか多少は違うものなので、こんなことがまかり通ることはない。しかし量子論では、全く区別がつかない同種粒子の場合にはこのような「場合の数」の数え方をしないと現象をうまく説明できないということが分かっているのである。

3.3.2　粒子の分類

「同種粒子が区別できない」というアイディアは波動関数の制約へとつながる。この制約の方法は 2 種類あり粒子の種類によってそのどちらか 1 種類の制限をうける。実はフェルミ粒子（フェルミオン）とボーズ粒子（ボゾン）という粒子の分類はここからでる。例えば電子はフェルミ粒子で、光子はボーズ粒子である。

この分類はとても重要で、たとえば多数の同種粒子が集まった系の熱的性質はフェルミ粒子とボーズ粒子でかなり違い、またこの分類でうまく説明できる。また「パウリの排他律」という言葉を聞いたことがある方もいるかもしれないが、これはフェルミ粒子にだけ働くルールとして波動関数への制約からうまく説明できる。このように、同種粒子の区別不可能性という原理は量子論ではひろく受けいれられているのである。

3.4　ボーズ粒子とフェルミ粒子

3.4.1　同じ状態

同種粒子は区別ができないけれど、波動関数 $F(x_1, x_2)$ は粒子 1 の位置 x_1 と粒子 2 の位置 x_2 が一見区別できる形で書かれている。これが区別不可能であるということを表現するために、波動関数の方を制約するというやり方をする。それは、粒子 1 をあらたに粒子 2 とみなし、粒子 2 をあらたに粒子 1 とみなした波動関数 $F(x_2, x_1)$ が、もとの $F(x_1, x_2)$ と量子論的に同じ状態になるという制約を課すこととなる。

では「波動関数が量子論的に同じ状態をあらわす」とはなんだろう。波動関数は完全一致したものだけでなく、定数倍だけ異なるものも量子論的に同じ状態を表す。つまり $F(x_1, x_2)$ とそれを定数 a 倍した $aF(x_1, x_2)$ は量子論的に同じ状態を指すのである。

これは、この 2.2 節で取りあげた**類似度**の話と関係する。波動関数をゼロではない複素数で定数倍すると、内積の絶対値の 2 乗で定義される類似度は実数倍だけ変更を受ける（以前に述べたように複素数の位相の部分は忘れられてしまう）。そして位置や運動量の確率分布は類似度に比例する。その比例定数は確率が全部で 100% になるように揃えられてしまうので、けっきょく定数の部分は無関係となる。

3.4.2　粒子の入れかえ

そのようなわけで、$F(x_1, x_2)$ と $F(x_2, x_1)$ が量子論的に同じ状態と言うのは、あるゼロでは無い定数 a があって

$$F(x_1, x_2) = aF(x_2, x_1)$$

を満たすことをいう。

この定数 a は、粒子の種類によって異なる。それだけでなく、波動関数の形によっても定数が変わってもいいと思うかも知れないが、実はそうはならない。別の波動関数 $G(x_1, x_2)$ が $F(x_1, x_2)$ と同じ種類の粒子の別の波動関数なら、同じ定数 a によって

$$G(x_1, x_2) = aG(x_2, x_1)$$

となる。

3.4.3　定数 a は波動関数に依らない

その説明は細かい話のわりにちょっと長くなる。この節ではその話だけを書くので、とくに興味が無ければ読み飛ばして頂いてかまわない。

いまゼロでない波動関数 $F(x_1, x_2)$ については

$$F(x_1, x_2) = a\, F(x_2, x_1)$$

が成りたち、さらにゼロでない別の状態の波動関数 $G(x_1, x_2)$ があって、

$$G(x_1, x_2) = b\, G(x_2, x_1)$$

となるとしよう。上で述べたことはつまり、F と G が同じ種類の粒子の波動関数なら $b = a$ となるということだ。

波動関数はベクトルなので（物理的に表現すれば、重ね合わせの原理が成りたつので）F と G を足した

$$H(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) + G(x_1, x_2) \tag{3.1}$$

も波動関数となる。（恒等的に $H(x_1, x_2) = 0$ とはならない。なったとすれば $F = -G$ だが、これは F と G が相異なる状態を表す波動関数であることに矛盾する）。H の入れかえについての定数は c としよう。このとき、

$$H(x_1, x_2) = cH(x_2, x_1) = c\{F(x_2, x_1) + G(x_2, x_1)\}$$

となる。また、$F(x_2, x_1) = 1/a\ F(x_1, x_2)$、$G(x_2, x_1) = 1/b\ G(x_1, x_2)$ であるから、これを上の式に代入して、さらに

$$H(x_1, x_2) = c/a\ F(x_1, x_2) + c/b\ G(x_1, x_2)$$

を得る。これを、式 (3.1) と辺どうしで差をとれば、

$$0 = (c/a - 1)\ F(x_1, x_2) + (c/b - 1)\ G(x_1, x_2)$$

となる。F と G が相異なる状態を表すゼロでない波動関数であることから、$c/a - 1 = 0,\ c/b - 1 = 0$、つまり $a = b = c$ でなくてはならない。よってこういう理論があるとしたら、変数の入れかえによって表れる定数は波動関数に依ってはいけないのである。

ここでは F と G は同種粒子 2 つの波動関数ということしか仮定してないから、同種粒子のほかの波動関数を持ってきても同じように定数は共通の値を持つことになる。このようなわけで、入れかえによって現れる定数は共通となる。

3.4.4　ボーズ粒子とフェルミ粒子

では粒子の種類の数だけ、定数もバリエーションがあるのかというとそうではなく、実は $a = \pm 1$ の 2 種類しかない。これをみるためには、まず $F(x_1, x_2)$ は $F(x_2, x_1)$ と同じ状態を表すので

$$F(x_1, x_2) = aF(x_2, x_1)$$

となることを見る。それだけでなく、$F(x_2, x_1)$ も波動関数だから変数を入れかえると同じ定数 a で倍されなくてはいけない。つまり、

$$F(x_2, x_1) = aF(x_1, x_2)$$

も成りたつ必要がある。下の式を上の式に代入して、

$$F(x_1, x_2) = a^2 F(x_1, x_2)$$

を得るが、両辺が一致するためには $a^2 = 1$ でなくてはいけない。となれば、$a = 1$ か、$a = -1$ かのどちらかでしかあり得ないというわけである。

上に述べたボーズ粒子とフェルミ粒子の分類はここからきていて、$a = 1$ のときにはその粒子はボーズ粒子、$a = -1$ の時にはフェルミ粒子に分類される。歴史的な経緯でこの性質の違いは「統計性」と呼ばれる。統計性が物質の熱的なふるまいに大きな影響を与えると言うことは、前に触れたとおりである。

3.5　パウリの排他律

3.5.1　複数粒子はお互いに独立ではいられない

3.2.2 節で 2 粒子の波動関数 $F(x_1, x_2)$ を、ゼロでない相異なる状態の 1 粒子の波動関数 $f(x)$ と $g(x)$ を使って、

$$F(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) \tag{3.2}$$

のように構成すると、粒子 1 と粒子 2 は独立に振るまう様子をあらわすことに触れた。ところが（前もって触れていたように）これは許されない。粒子 1 と粒子 2 のラベルの入れかえの対称性

$$F(x_1, x_2) = \pm F(x_2, x_1) \tag{3.3}$$

(+: ボーズ粒子, −: フェルミ粒子) を満たさないからだ。

そのことをくわしく見てみよう。波動関数 (3.2) がこの入れかえの対称性を満たすと仮定して、矛盾を示す。仮定が正しいとすると、$g(x)$ はゼロでない波動関数だから、$g(y) \neq 0$ となる点 y がある。もし、$F(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$ がくだんの対称性 (3.3) を満たすなら、任意の x_1 について $f(x_1)g(y) = \pm g(x_1)f(y)$ が成りたつので

$$f(x_1) = \pm \frac{f(y)}{g(y)} g(x_1)$$

となるが、これは関数 $f(x_1)$ が $g(x_1)$ の定数倍であることを示している。つまり、$f(x)$ と $g(x)$ が相異なる状態を表すゼロでない波動関数であることに反する。よって式 (3.2) が、式 (3.3) の対称性を満たせないことが分かる。

3.5.2　パウリの排他律

では $g(x)$ が $f(x)$ と同じ状態なら良いのだろうか？同じ状態の波動関数は定数倍異なっても良いから、この時あるゼロでない定数 α を使って $g(x) = \alpha f(x)$ と書ける。すると、

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= f(x_1)g(x_2) = f(x_1)\alpha f(x_2) = f(x_2)\alpha f(x_1) \\ &= f(x_2)g(x_1) = F(x_2, x_1) \end{aligned}$$

となるが、これはボーズ粒子の関係式 $F(x_1, x_2) = +F(x_2, x_1)$ しか満たさない。つまりボーズ粒子ならそういうこともできるけれど、フェルミ粒子では無理と言うことになる。

この「フェルミ粒子では同じ状態を表す 1 粒子波動関数を 2 回使って複数粒子の波動関数を構成することはできない」というルールはパウリの排他律と呼ばれる有名なものである。

3.5.3　対称・反対称化

これまでに見たように 1 粒子の波動関数の単純なかけ算で、2 粒子の波動関数を構成することはできない。ひと工夫必要なのだが、実は $f(x_1)g(x_2)$ だけではなく、その変数を入れ替えた $f(x_2)g(x_1)$ を一緒に使えば良いことが知られている。2 粒子の波動関数 $G(x_1, x_2)$ を

$$G(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) \pm \ f(x_2)g(x_1)$$

とすればよい (+: ボーズ粒子, −: フェルミ粒子)。$G(x_1, x_2) = \pm G(x_2, x_1)$ となることは簡単に確かめられる。また定数倍を除けばこの方法しかない。この $+$ の符号の方の式が成りたつように構成することを対称化、$-$ の符号の方が成りたつように構成することを反対称化と呼ぶ。ちなみに同じ 1 粒子波動関数 f を 2 回使った $f(x_1)f(x_2)$ を反対称化すると、$f(x_1)f(x_2) - f(x_2)f(x_1) = 0$ となり波が消えてしまう。ここにもパウリの排他律をみることができる。

またフェルミ粒子の場合の $G(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)$ は行列式と呼ばれる形をしている。このように 1 粒子波動関数から作った行列式をとくに**スレーター行列式**と呼ぶ。スレーター行列式は複数の電子を扱うときに基本的な道具としてよく出てくる。

行列式を使うのは 3 粒子以上の場合にも応用がきく優れた方法である。これまで「複数粒子」といいながら、2 粒子のときの量子論しか扱わなかった。しかし、3 粒子以上の場合でも大事なところはこれまで説明したのと同じ精神で処理される。このあたりはより詳しい文献をご覧頂きたい。

3.6　参考文献

本シリーズで取りあげた主要な内容は現代的な量子力学の教科書にはふつう含まれているものだと思う。定評のあるものとして

- 猪木 慶治・川合 光 『量子力学 I』講談社
- 猪木 慶治・川合 光 『量子力学 II』講談社

をあげたい。とは言え、ご自分にあうものを探していただくのが良いと思う。

また波動の説明の部分では

- Max Born and Emil Wolf『Principles of Optics』Cambridge University Press

を参考にした。私の手元には無いが、『光学の原理』の題で和訳もある（草川徹訳、東海大学出版会)。

第 II 部

物性物理と素粒子

第 1 章

物性物理と素粒子

1.1　電子とクォーク

物理という物はひとつながりである。もうすこし正確に言うと、万物をできるだけ一つの系統の理論で表そうという強い傾向が物理にはある。非日常的な対象に目を向けないと突き詰められないような領域の物理学も、我々が普段見るような物の性質を解き明かそうとする物性物理学も、根本のところは同じ理論に基づいている。

物理では素粒子という「万物をそれ以上はないというほどに分割したときに行きあたる粒子」が存在すると考える。それは素粒子物理学だろうが物性物理学であろうが同じ物だ。例えば**電子**という素粒子があるけれど、それは普段よく聞くあの電子のことである。電子は原子の中で原子核の周りを確率的に漂っている。（電子が原子核の周りを「ぐるぐる回っている」絵をよく見るかもしれないが、あれを見るたびに私は「そうじゃないんだ」という気持ちになる。でもそれは別のお話。）

電子は素粒子だけど、原子核は素粒子ではない。原子核は陽子と中性子で出来ている（陽子だけのこともある）。また陽子と中性子も素粒子ではない。どちらもアップクォークとダウンクォークで出来ている。アップクォークとダウンクォークまで来ると、それ以上は分割できずこれらは素粒子というこ

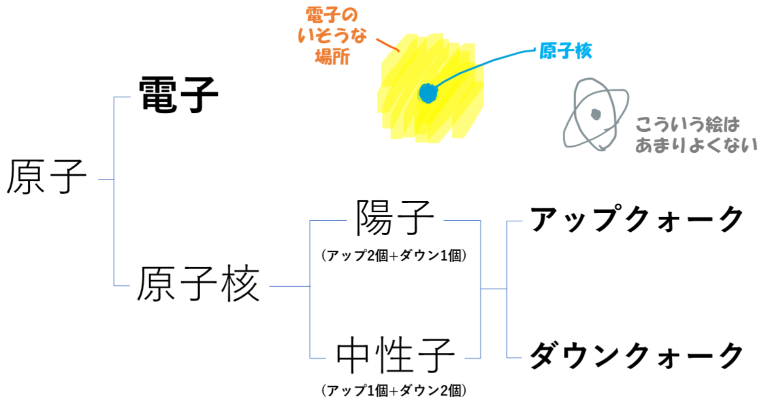

図 1.1　原子を構成する素粒子

とになっている。

物性物理ではそう頻繁には原子核の構造を考慮しない。原子核には壊れやすい物と壊れにくい物があるのだが、壊れやすい物はだいたいもう壊れてしまっているので我々の身の回りには安定した原子核の方が多い。だから原子核のまま扱う方が実践的なのである。(さらにクォークまでいくとすぐに複合粒子をつくってしまう性質があるので単独で考えることはずっと少ない)。

とはいえ、使える物ならなんでも使うのも物性物理である。同じ元素の原子核であっても中性子の数が違うものを同位体という。これは物の性質が含まれる原子核の質量とどのように関わっているか調べるのに使われることがある。また原子核の磁性を用いて、物に含まれる電子の性質を調べる方法もある。原子核の事情も多少は知っていれば、こういう話が出てきても驚かなくて済むという御利益がある。ついでに言うと、中性子そのものを物質にあててみて、その物の性質を調べるという方法もある。

すでにここまでに素粒子の名前がいくつか出てきたが、我々は結構複雑な世界に生きているらしく他にもまだまだある。素粒子を全部紹介するのが私

に適した仕事とは思ってないけれど、物性物理を語る切り口のひとつとしてお話を続けてみたいと思う。

1.2　ゲージ粒子

今度は素粒子の間に働く力、そしてその力を伝える素粒子のお話をしよう。光の粒子、光子もそのひとつ。

世の物理学者のほとんどは、素粒子の間にはたらく力は根源的には 4 種類だと考えている。それは重力・電磁気力・弱い力・強い力と呼ばれるものだ。

まず 1 つ目の重力というのは皆さんがいつも感じているその重力である。万有引力という言葉があるように全ての質量のあるものは互いに重力で引きあっている。重力は遠くまで伝わるのだが、ものすごく弱い。たとえば地球はあんなにも大きい。しかしその重力に逆らって髪の毛を逆立てるにはちょこっとばかり静電気を起こして電磁気力を発生させれば良いのだ。そういう意味で重力は非常に弱い。

我々の普段の生活では重力が大きな影響をもつが、それは我々の生活のサイズ感では電子や原子核レベルの電気的な偏りが打ち消されていることが多いからだ。逆に原子レベルのサイズ感でものを見ると、電子や原子核の電荷がむきだしになっている。それらの電気的な力が強いので、ミクロなサイズ感の現象には重力の影響は非常に小さいのである。

2 つ目の電磁気力というのは、上にも出てきた電気の力、および磁気の力のことだと考えて良い。もしかすると皆さんの中には「いやいや電気の力と磁気の力だったら、それだけで 2 つでしょ?」と思われる方もいるかもしれない。実は電気と磁気はひとまとめにされるだけの十分な理由がある。(きちんと説明するのはそれなりに大変なので、とりあえずそういうものだと思ってほしい)。また電磁波は電気と磁気とが絡みあって、波として伝わる現象だ。光 (可視光) や電波、X 線は電磁波の一種である。物理の人は電磁波の意味で光と言ってしまうことも多い。

最後に弱い力と強い力。これらは原子核の性質そのものには大いに寄与が

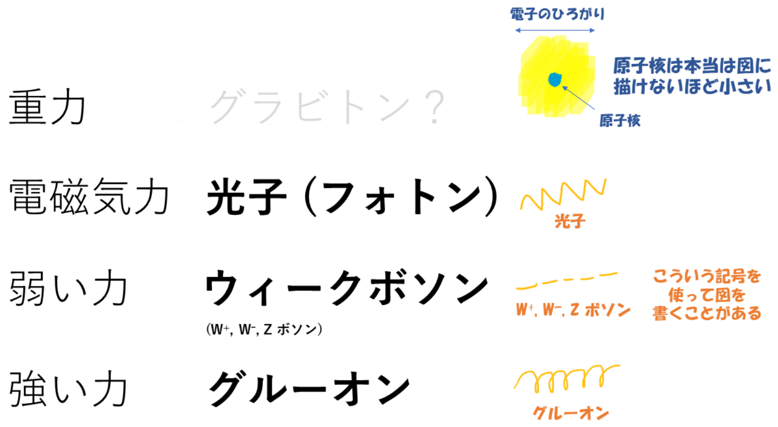

図 1.2　ゲージ粒子

あるのだけど、それ以上には我々の日常に表れてこない。これは弱い力の方は弱くてしかも力が短距離的なためで、強い力の方は閉じ込めと呼ばれる現象が起こるためである。どちらも結局「こういう性質の原子核があって」という話の仕方をする場合には考慮に入れる必要がない。

実はこれもまたサイズ感の問題であると言える。つまり原子核レベルのサイズ感は、原子レベルのサイズ感に比べてずっと小さいので重要となる力も違うのだ。(原子の絵を描くときには原子核をどうしても大きく描いてしまうけど、本当は目に見えないくらいじゃないと比率が合わない)。そんなわけで物性物理で弱い力や強い力をあからさまに考慮に入れることはめったにない。

さて現代の物理学者は、力があるならその力を伝えるための素粒子が存在すると考える傾向にある。そのうち確立した素粒子といえるのは電磁気を伝える粒子である光子（フォトンとも言う)、弱い力を伝える 3 種類のウィークボソン (W^+, W^-, Z ボソン)、そして強い力を伝えるグルーオンである。これらはまとめてゲージ粒子と呼ばれる。ところが重力のゲージ粒子は見つ

かっていない。あっても良いはずだと思っている人は多いのだけれど、あったとしてもそれを人間に確かめられるかどうかは別の話でもある。

となると弱い力にも強い力にも興味が無い場合、物性物理に大いに関わってくるゲージ粒子は光子だけということになる。電磁気力を伝えるものが、実は粒子の性質も持つということはとても重要だ。たとえばレーザーというものがあるけれど、あれは光の粒子の弾丸が集まったようなものである。ひとつひとつの弾丸はある決まったエネルギーを持っているのだけど、それは弾丸の量をどれだけ増やしても変わらない。そういう事情を知ってないと説明できないような物理現象が沢山あるのである。またレーザーに限らず、電磁波をあてて物の性質を調べる上で「光は粒子でもある」ということは基本中の基本の考え方である。光子は物性物理でも大事なのだ。

1.3　陽電子・ニュートリノ

次は陽電子のお話をしてみたい。陽電子は電子の反粒子で、陽子とは全く別の物である。

反粒子とは何かを説明する必要があるだろう。世の中には電子と陽電子のようにお互いに区別できる粒子–反粒子の組み合わせもあれば、光子のように粒子も反粒子も区別できない素粒子もある。さらに粒子と反粒子が互いに区別できるのかできないのか未だに決着のついていない素粒子まである。

反粒子の概念に最初にたどり着いた物理学者はディラック (P. A. M. Dirac) とされている。ディラックは電子のふるまいを記述する方程式を研究していたときに理論上のある困難に突きあたった。何に困ったのかはさておき、ディラックはそれを回避するために「世界には無限個の電子が埋まっていて、物理はその上に成り立っているのではないか」というとんでもない仮説を立てた。いわゆるディラックの海と呼ばれる物だ。そこからの帰結として、マイナスの電気を持つ電子とは別に、それとはそっくりであるけれどもプラスの電気をもつ反粒子が現れると考えた。これが陽電子というわけである。

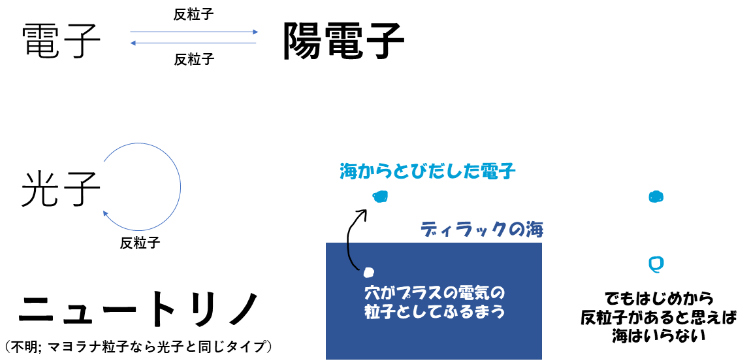

図 1.3　粒子–反粒子の関係

とはいえ反粒子の存在が確立した現在では、その存在を初めから理論に組みいれることで、ディラックの海の概念は必要のないものとされている。反粒子の存在は電子だけに限ったことではない。クォークには反クォークがあるし、ウィークボソンの W^+ と W^- は実は粒子–反粒子の関係である。どの粒子にも反粒子に対応する物はあるのだが、異なる粒子が対応するとは限らない。たとえば光子の反粒子は光子そのもので、粒子と反粒子の区別をつけられない。ウィークボソンの Z も反粒子が Z 自身となる。いずれの場合もある粒子が電荷を持てば、その反粒子はその逆符号の電荷を持つ。したがって粒子と反粒子が同じ場合は電荷はゼロでしかありえない。

さて反粒子のほかの性質として、粒子と反粒子が結びつくと消えてしまうというものがある。いわゆる対消滅である。電子と陽電子ではほとんどの場合あまったエネルギーは光となる。そこで調べたい物質に陽電子を当てて、電子とぶつかったときに発せられる対消滅の光を検出することで、物質の状態を調べるという方法がある。電子の多いところからは対消滅の光が出てきやすいというわけだ。このように陽電子は物性物理の分野でも話題に上るこ

とがある。

ついでに別の素粒子であるニュートリノについても触れておこう。ニュートリノは電荷ゼロの素粒子で、わずかな大きさの質量を持っているが、小さすぎて定量的にはまだ確定できていない。そしてニュートリノは粒子と反粒子の区別があるのかないのかよくわかっていない素粒子である。先ほど粒子と反粒子が同じ場合は電荷はゼロでしかありえないと書いたけれど、その逆は必ずしも正しくない。つまり電荷がゼロで、しかも粒子と反粒子が区別できることも考えられる。むしろ普通の説明ではニュートリノと反ニュートリノを呼びわけることが多い。

「ニュートリノは粒子–反粒子の区別がつかない粒子である」という説はマヨラナ (E. Majorana) という物理学者によって提案された。そこでニュートリノやその仲間の粒子がこの性質を持つ場合、それらを総称したマヨラナ粒子という言葉が使われる。たとえば「ニュートリノがマヨラナ粒子であるかどうかは未解決問題である」という感じ。ニュートリノ自体は、重力と弱い力しか感じることができず、物性物理にはほとんど関係しない。それにも関わらずここで取り上げたのは、物性物理の分野で “マヨラナ粒子” という言葉が出てくることがあるからだ。この業界ではときどき素粒子の方から言葉を借りてくることがあるのだが、それが混乱を生むこともある。物性物理の方でマヨラナ粒子が見つかったと言っても、それは素粒子としてのマヨラナ粒子が見つかったという意味ではない。ご注意を。

1.4　ミューオン

電子によく似た粒子であるミューオンについてもとりあげよう。ミューオンを電子のきょうだいとすれば、ニュートリノはいとこだろうか。これらはレプトンと呼ばれる一家の一員である。μSR と呼ばれるミューオンを使った実験手法についても触れる。

ミューオンの基本的な性質は電子にそっくりで、電荷も電子と同じである。大きな違いは質量で、なんと電子の約 200 倍もある。この 2 つの粒子の

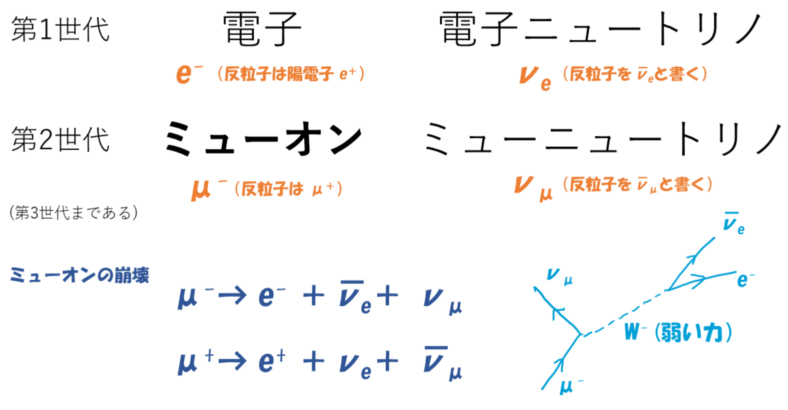

図 1.4　電子・ミューオン・電子ニュートリノ・ミューニュートリノ

違いは世代と表現される。電子は第 1 世代、ミューオンは第 2 世代という感じ。じつはニュートリノにも世代があり、第 1 世代は電子ニュートリノ、第 2 世代はミューニュートリノと呼ばれる。じつは電子のきょうだいもニュートリノのきょうだいも第 3 世代まで知られており、全部まとめてレプトンと呼ばれる。（ちなみに第 3 世代はタウオンとタウニュートリノである）

　もうひとつミューオンについて特徴的なことをあげるとすれば、ミューオンはすぐに他の素粒子へと崩壊することである。その寿命はおよそ 0.000002 秒しかない。それなら世の中にミューオンなんてすぐなくなってしまいそうだが、ほかの粒子が崩壊してミューオンが出てくるので、ミューオンを観測することができるのである。ミューオンはほとんどの場合、崩壊によって 3 つの素粒子、電子、反電子ニュートリノ、そしてミューニュートリノになる。

　さて、ここでちょっと立ち止まって考えてみよう。素粒子とは「それ以上分割できない粒子」ではなかっただろうか？他の素粒子に壊れるのであればミューオンは本当に素粒子だろうか？

実はこの崩壊は弱い力のせいだと考えられている。現代の標準的理論では弱い力は素粒子を変換する作用があるとされる。ミューオンが複合粒子であると考えるよりも、「ミューオンは素粒子であり、弱い力が作用した結果他の素粒子に変換される」と考えるのが実験事実を上手に説明する方法なのだ。そのようなわけでミューオンは素粒子であると信じられているのである。

ミューオンと物性物理との関わりと言えば、先ほども触れた μSR とよばれる実験手法がある。こちらで使われるのはミューオンの反粒子である反ミューオンの方である。反ミューオンは陽電子と電子ニュートリノ、そして反ミューオンニュートリノへと崩壊する。μSR では反ミューオンを調べたい物質に打ちこみ、その物質内で崩壊するのを待つ。崩壊までの間、反ミューオンは物質内の磁気的な性質の影響を受けるのだけれど、その影響は崩壊後に陽電子が出てきやすい方向に反映される。この陽電子を検出することで、物の性質を調べるのに役だてようというわけである。本当に実験にはなんでも使うものだ。

1.5 まとめ

最後にこれまでの話を振り返って整理してみよう。これまでに、電子・ミューオン・ニュートリノなどが分類されるレプトンや、アップクォークとダウンクォーク、それから光子などのゲージ粒子について取りあげた。実は素粒子は大きく 4 つに分類される。それはクォーク、レプトン、ゲージ粒子、そしてヒッグス粒子である。ヒッグス粒子を取りあげていないのは、物性物理に全く登場しないからである。(とはいえその発見の経緯には超伝導と呼ばれる物性との面白い関わりもあるのだが、割愛することにした)。また反粒子という概念についても取りあげた。どの粒子にも対応する反粒子が存在するという話だった(ただし粒子と反粒子を区別できないこともある)。

ヒッグス粒子の他は、まだ紹介していないのはクォークの第 2 世代であるチャームクォークとストレンジクォーク、そして第 3 世代のトップクォークとボトムクォークだけだ。これらは主に低エネルギー現象を扱う物性物理に

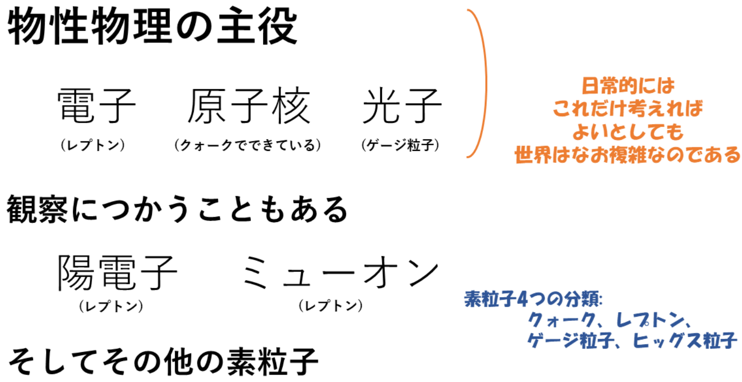

図 1.5　物性物理と素粒子

はほとんど登場しない。他に未発見の粒子もまだまだあるかもしれない。しかし現在の標準的理論に登場するものはこれで全部である。

つぎに物性物理の観点から素粒子を整理してみよう。原子は電子と原子核からできているのだった。電子と原子核は物性物理の主役である。(原子核は素粒子ではないけれど、すでに述べたように物性物理で原子核の構造に触れることはあまり無い)。また光の粒子である光子もまた重要な登場人物といえる。それに比べれば陽電子、ミューオンは物性物理の役者というより、登場人物（とくに電子）の様子をうかがうための粒子として紹介した。ほかの素粒子も紹介するにはしたけれど、物性物理においてはかなりマイナーな興味しかもたれないと言うことを述べてきたつもりだ。

なぜこんな風に登場人物を吟味するのかというと、世界は複雑すぎて全ての粒子を同時に考慮することは人の手に余るからだ。実際のところ、電子と原子核と光子だけを考えることにしても、実に複雑で大変である。

素粒子物理の主な仕事のひとつがこの世界が行っているゲームのルールを理解することだとすれば、物性物理の仕事はこの世界が我々のすぐ側でやっ

ているゲームそのものを理解することである。ゲームはルールを知っているからと言って名人になれるものではない。研究の末になんとか名人のやっていることが理解できる。それが物性物理だと私は考えている。

あとがき

本書の元となったのは note(note.com) に投稿したシリーズの記事である。第 II 部の元となった「物性物理と素粒子」は 2020 年 11 月 24 日から同 12 月 17 日にかけて 1 回の付録を含む計 6 回が投稿され、次いで第 I 部の元となった「量子夜話」が 2021 年 1 月 8 日から 2022 年 1 月 29 日にかけて 1 回の付録を含む計 16 回投稿された。

特に 1 年の年月をかけた量子夜話の執筆は私にとってひとつの挑戦であった。前半の「波と粒子の二重性」の部分では読者の波に対する直観にあえて頼ることで微分方程式を使わずに説明を完結させている。その直観を補強するためにホイヘンスの原理を使うというアイディアだ。

後半部分では、粒子の「統計性」について取りあげた。統計性は複数粒子の量子力学においては非常に重要な概念なのだけれど、複数粒子の量子力学がそもそも難しいものである。私は以前から、統計性の部分に焦点を当てて簡潔に説明してくれるような文章があまりないのが不便だと思っていた。この本では 2 粒子の波動関数を登場させつつもできるだけ単純に統計性について述べることを目指した。せっかく前半では数式をまったく使わずに説明してきたのに、後半になって登場させることに葛藤もあった。結局、ここでは数式は欠くことのできない道具だというのが私の判断だった。

このようなアイディアを形にするのは、元からの非才もあって非常に苦労した。しかし悲しいことに苦労は報われるとは限らない。もともと少なかった読者は回を重ねるごとに減っていった。最終回ともなると、あまりにも投稿後の反響が虚しかったために、私は投稿の何日後かに当時使っていた SNS のアカウントでねぎらいの言葉を乞うほどだった。

それでも諦めきれなかったのか、最終回の翌月には本書の編集に着手した記録が残っている。しかしそれもその月までのことで、打ちひしがれて原稿はしばらく放置された。再着手には 2 年を要した。それはこの 2024 年の 4 月のことだった。原稿を再び手に取ったとき、きっとこれは救いようのない

代物なんだと思って読み返すのが怖かった。実際に読んでみると、この原稿には良いところもあると思えてきた。それでとにかく一度は完成させてみようと決意したのである。

とは言え、正直なところ本書を世に出すのが良いかどうかまだ迷うところがある。推敲を重ねたという違いこそあれ、すでに一度失敗しているのだから答えは出ている気もする。私に慰めの言葉があるとすれば、それでも必要とする読者もいるかもしれないことと、もしまた失敗したとしても私の諦めの悪さの供養にはなるということだろうか。

索引

量子夜話

量子夜話

量子夜話

量子夜話