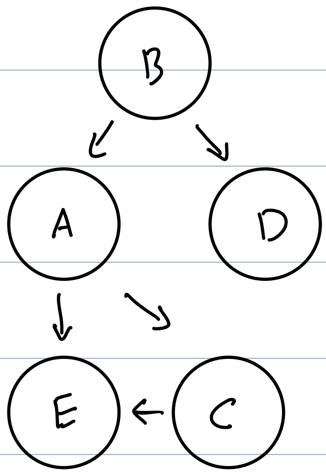
سینا نمازی

شماره دانشجویی: ۴۰۰۱۱۰۱۵۴

۱-

آ-



- مسیر های بین B و C ، (B - A - E - C) و (B - A - C) بوده که به دلیل سه تایی های (B → A → C) و (B → A → E) این مسیر غیرفعال شده و B از C به شرط A مستقل است .

- مسیر های بین A و C ، (A - E - C) و (A - E) بوده که به دلیل سه تایی (A → E ← C) این مسیر با دانستن E فعال شده و A از C به شرط E مستقل نیست .

- تنها مسیر بین A و D ، (A - B - D) بوده که به دلیل سه تایی (A ← B → D) این مسیر غیرفعال شده و A از D به شرط B مستقل است .

ب-

$$P(B|A) = P(B|A,C) \Rightarrow P(B=1|A=0) = P(B=1|A=0,C=0)$$

$$\Rightarrow \frac{P(B=1,A=0)}{P(A=0)} = \frac{P(B=1,A=0,C=0)}{P(A=0,C=0)} \Rightarrow \frac{x+y}{x+y+0.2} = \frac{x}{x+0.1} \Rightarrow x=y$$

$$P(B=1|A=1) = P(B=1|A=1,C=0) \Rightarrow \frac{P(B=1,A=1)}{P(A=1)} = \frac{P(B=1,A=1,C=0)}{P(A=1,C=0)}$$

$$\Rightarrow \frac{z+0.5}{z+4.5} = \frac{0.05}{0.15} \Rightarrow z=0.15 \Rightarrow 0.8+x+y=1 \xrightarrow{x=y} x=y=0.1$$

-2

آ - در یک Bayesian Network، در CPT هر node کافیست $P(x_i \mid Parents(x_i))$ را نگه داریم بنابراین

در این مثال هر node به تعداد حاصل ضرب مقادیر خود در تعداد مقادیر والدهایش سطر دارد:

$A = 2$ $\quad$ $B = 4 \times 3 \times 2 = 24$ $\quad$ $C = 3$ $\quad$ $D = 2 \times 3 = 6$ $\quad$ $E = 3 \times 2 = 6$

$F = 2 \times 2 \times 4 = 16$ $\quad$ $G = 2 \times 2 \times 3 = 12$

ب -

$A \perp\!\!\!\perp C$ - درست است - تمام مسیرهای بین A و C بلاک شده اند.

$A \perp\!\!\!\perp C \mid B$ - لزوما درست نیست - چون مسیر ABC بین A و C فعال است.

$E \perp\!\!\!\perp C \mid G, F$ - لزوما درست نیست - چون مسیر EABFDC بین E و C فعال است.

$B \perp\!\!\!\perp D$ - لزوما درست نیست - چون مسیر BCD بین B و D فعال است.

$B \perp\!\!\!\perp D \mid C$ درست است - تمام مسیرهای بین B و D بلاک شده اند.

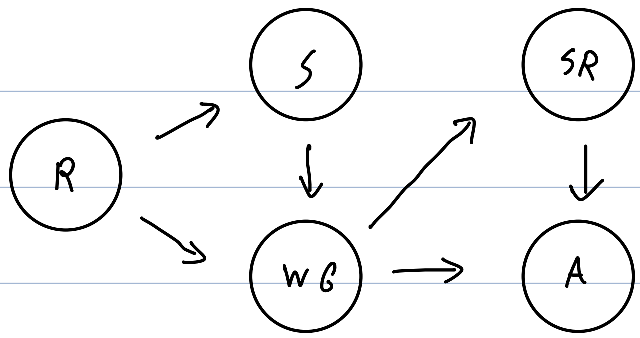
$B \perp\!\!\!\perp D \mid F$ لزوما درست نیست - چون مسیر BCD بین B و D فعال است.

$B \perp\!\!\!\perp D \mid C, F$ لزوما درست نیست - چون مسیر BFD بین B و D فعال است.

$A \perp\!\!\!\perp F \mid B$ لزوما درست نیست - چون مسیر ABCDF بین A و F فعال است.

3-

آ -



ب - می‌دانیم در یک Bayesian Network : $P(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid Parents(x_i))$

$$\Rightarrow \quad P(A \mid +r) = \frac{P(A,+r)}{P(+r)} = \frac{\sum_{SR,WG,S} P(+r)\times P(S\mid +r)\times P(WG\mid +r,S)\times P(SR\mid WG)\times P(A\mid SR,WG)}{P(+r)}$$

$$= \sum_{SR,WG,S} P(S\mid +r)\times P(WG\mid +r,S)\times P(SR\mid WG)\times P(A\mid SR,WG)$$

ج -

(T,F,T,T,F)

(T,T,T,T,T) X → rejected

(F,F,T,T,T)

(F,F,T,T,F) $\Longrightarrow$ $P(A=T \mid SR=T, S=F) = \frac{2}{2+3} = 0.4$

(T,F,T,T,F)

(T,F,F,F,F) X → rejected

(F,F,T,T,T)

(F,T,F,F,T) X → rejected

(F, F, T, F, F) $w = 0.95 \times 0.12$ $\rightarrow$

(F, T, T, F, T) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, F, T, F, T) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, F, T, F, F) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, F, T, F, F) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, F, F, F, F) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, F, T, F, T) $w = 0.95 \times 0.12$

(F, T, F, F, T) $w = 0.95 \times 0.9$

$$P(A=T \mid R=F, SR=F) = \frac{0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9}{0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9 + 0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9} = \frac{1}{2}$$

$$P(A=F \mid R=F, SR=F) = \frac{0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9}{0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9 + 0.95 \times 0.12 \times 3 + 0.95 \times 0.9} = \frac{1}{2}$$

$random() \leq P(X=T) \Rightarrow X=T$ - ②

$$\text{Sample } 0 = (T, T, T, T, F) \Rightarrow P(R=T \mid S=T, WG=T, SR=T, A=F)$$

$$= \frac{P(R=T) \times P(S=T \mid R=T) \times P(WG=T \mid S=T, R=T)}{\sum_R P(R) \times P(S=T \mid R) \times P(WG=T \mid S=T, R)} = 0.17 \leq 0.515 = random()$$

$$\Rightarrow \text{Sample } 1 = (F, T, T, T, F)$$

$$P(WG=T \mid R=F, S=T, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(WG=T \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG=T) \times P(A=F \mid SR=T, WG=T)}{\sum_{WG} P(WG \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG) \times P(A=F \mid SR=T, WG)} = 0.494 \leq 0.856$$

$$\Rightarrow \text{Sample } 2 = (F, T, F, T, F)$$

$$P(A=T \mid R=F, S=T, WG=F, SR=T) = \frac{P(A=T \mid WG=F, SR=T)}{\sum_A P(A \mid WG=F, SR=T)} = 0.007 \leq 0.026$$

$$\Rightarrow \text{Sample } 3 = (F, T, F, T, F)$$

$$P(R=T \mid S=T, WG=F, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(R=T) \times P(S=T \mid R=T) \times P(WG=F \mid S=T, R=T)}{\sum_R P(R) \times P(S=T \mid R) \times P(WG=F \mid S=T, R)} = 0.0004 \leq 0.0813$$

$$\Rightarrow \text{Sample } 4 = (F, T, F, T, F)$$

$$P(WG=T \mid R=F, S=T, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(WG=T \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG=T) \times P(A=F \mid SR=T, WG=T)}{\sum_{WG} P(WG \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG) \times P(A=F \mid SR=T, WG)} = 0.494 \leq 0.711$$

$\Rightarrow$ Sample 5 = (F, T, F, T, F)

$$P(A=T \mid R=F, S=T, WG=F, SR=T) = \frac{P(A=T \mid WG=F, SR=T)}{\sum_{A} P(A \mid WG=F, SR=T)} = 0.007 \leqslant 0.306$$

$\Rightarrow$ Sample 6 = (F, T, F, T, F)

$$P(R=T \mid S=T, WG=F, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(R=T) \times P(S=T \mid R=T) \times P(WG=F \mid S=T, R=T)}{\sum_{R} P(R) \times P(S=T \mid R) \times P(WG=F \mid S=T, R)} = 0.0004 \leqslant 0.0519$$

$\Rightarrow$ Sample 7 = (F, T, F, T, F)

$$P(WG=T \mid R=F, S=T, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(WG=T \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG=T) \times P(A=F \mid SR=T, WG=T)}{\sum_{WG} P(WG \mid S=T, R=F) \times P(SR=T \mid WG) \times P(A=F \mid SR=T, WG)} = 0.494 \geqslant 0.412$$

$\Rightarrow$ Sample 8 = (F, T, T, T, F)

$$P(A=T \mid R=F, S=T, WG=T, SR=T) = \frac{P(A=T \mid WG=T, SR=T)}{\sum_{A} P(A \mid WG=T, SR=T)} = 0.009 \leqslant 0.213$$

$\Rightarrow$ Sample 9 = (F, T, T, T, F)

$$P(R=T \mid S=T, WG=T, SR=T, A=F) =$$

$$\frac{P(R=T) \times P(S=T \mid R=T) \times P(WG=T \mid S=T, R=T)}{\sum_{R} P(R) \times P(S=T \mid R) \times P(WG=T \mid S=T, R)} = 0.171 \leqslant 0.959$$

$\Rightarrow$ Sample 10 = (F, T, T, T, F)

احتمال نهایی $\Rightarrow$ $P(A=T \mid S=T, SR=T) = \frac{0}{10} = 0$, $P(A=F \mid S=T, SR=T) = \frac{10}{10} = 1$

4-

آ-

$$P(B,E,A,F) = \sum_{G,C,H,D} P(B,E,A,F,G,C,H,D) \xrightarrow{\text{Bayes Net}}$$

$$= \sum_{G,C,H,D} P(A) \times P(E|A) \times P(G|E) \times P(H|E) \times P(B|E) \times P(C|B) \times P(F|C) \times P(D|C)$$

$$= P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times \sum_{G,C,H,D} P(G|E) \times P(H|E) \times P(C|B) \times P(F|C) \times P(D|C)$$

$$= P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times \sum_{C,H,D} P(H|E) \times P(C|B) \times P(F|C) \times P(D|C) \overbrace{\sum_{G} P(G|E)}^{1}$$

$$= P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times \sum_{H,D} P(H|E) \times \sum_{C} \overbrace{P(C|B) \times P(F|C) \times P(D|C)}^{P(C,D,F|B)}$$

$$= P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times \sum_{D} P(D,F|B) \times \overbrace{\sum_{H} P(H|E)}^{1}$$

$$= P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times \sum_{D} P(D,F|B)$$

$$= \underline{P(A) \times P(E|A) \times P(B|E) \times P(F|B)}$$

ب - گراف داده شده یک درخت بوده بنابراین می توان از برگ های آن بالا رفت و متغیرها را حذف کرد.

$$\Rightarrow \quad \underline{D \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow A}$$

ج - در این مثال خاص اگر هر ترتیبی برای حذف متغیرها انتخاب کنیم در حافظه مورد نیاز تفاوتی ایجاد نمی کند.
چون در این درخت و با query خواسته شده متغیر نهائی وجود ندارد که فرزند نهان داشته باشد. متغیرهای G و D و F برگ بوده
و حذف آن‌ها به اندازه CPT خود آن‌ها حافظه نیاز دارد و حتی اگر B را هم در ابتدا حذف کنیم چون تنها فرزند آن جزو evidence است
باز هم به اندازه CPT آن حافظه نیاز است

د - تعداد ردیف‌های CPT هر متغیر در یک Bayesian Network برابر با $2^{1+|parents(x_i)|}$ که چون متغیرهای ما Binary
هستند و برای هر حالت از مقدار دهی parent ها نیاز به نگه داشتن هر دو حالت از متغیر نیست چون جمع آن با نقیضش 1 می‌شود. بنابراین
تعداد ردیف‌های CPT هر متغیر را می‌توان به $2^{|parents(x_i)|}$ کاهش داد

Row Counts: CPT(A) = 1 , CPT(B) = 2 , CPT(C) = 2 , CPT(D) = 2
CPT(E) = 2 , CPT(F) = 2 , CPT(G) = 2 , CPT(H) = 2

جمع تعداد ردیف‌ها : 15

بنابراین حافظه مورد نیاز برای ذخیره این Bayesian Network از اردر جمع ردیف های CPT های آن است.

-5

آ -

$$P(x_4^{(1)}=-3 \mid x_3^{(1)}=-1) = D(x_4^{(1)} - x_3^{(1)}) = D(-2) = 0.25$$

$$P(x_4^{(2)}=3 \mid x_3^{(2)}=2) = D(x_4^{(2)} - x_3^{(2)}) = D(1) = 0.1$$

$$\Rightarrow P(x_4^{(1)}=-3,\ x_4^{(2)}=3) = 0.025$$

$$\Rightarrow P(x_5^{(1)}=-4,\ x_4^{(1)}=-3,\ x_3^{(1)}=-1) = \overset{1}{P(x_3^{(1)}=-1)} \times P(x_4^{(1)}=-3 \mid x_3^{(1)}=-1) \times P(x_5^{(1)}=-4 \mid x_4^{(1)}=-3) = 0.025$$

$$\Rightarrow P(x_5^{(2)}=4,\ x_4^{(2)}=3,\ x_3^{(2)}=2) = \underset{1}{P(x_3^{(2)}=2)} \times P(x_4^{(2)}=3 \mid x_3^{(2)}=2) \times P(x_5^{(2)}=4 \mid x_4^{(2)}=3) = 0.01$$

$$\Rightarrow P(x_5^{(1)}=-4,\ x_4^{(1)}=-3,\ x_5^{(2)}=4,\ x_4^{(2)}=3) = 0.00025$$

ب -

$$W(x_7^{(1)}=2,\ x_7^{(2)}=2) =$$

$$P(G_7^{(1)}=2 \mid x_7^{(1)}=2) \times P(S_7^{(1)}=2 \mid x_6^{(1)}=3,\ x_7^{(1)}=2,\ x_7^{(2)}=2) \times$$

$$P(G_7^{(2)}=2 \mid x_7^{(2)}=2) \times P(S_7^{(2)}=2 \mid x_6^{(2)}=0,\ x_7^{(2)}=2,\ x_7^{(1)}=2) = 0.0225$$

$$W(x_7^{(1)}=4,\ x_7^{(2)}=1) =$$

$$P(G_7^{(1)}=2 \mid x_7^{(1)}=4) \times P(S_7^{(1)}=2 \mid x_6^{(1)}=3,\ x_7^{(1)}=4,\ x_7^{(2)}=1) \times$$

$$P(G_7^{(2)}=2 \mid x_7^{(2)}=1) \times P(S_7^{(2)}=2 \mid x_6^{(2)}=5,\ x_7^{(2)}=1,\ x_7^{(1)}=4) = 0.000105$$

اگر سیگنال تلفن‌همراه را نداشته باشیم:

$$W(x_7^{(1)}=2,\ x_7^{(2)}=2) = P(G_7^{(2)}=2 \mid x_7^{(2)}=2) \times P(G_7^{(1)}=2 \mid x_7^{(1)}=2) = 0.25$$

$$W(x_7^{(1)}=4,\ x_7^{(2)}=1) = P(G_7^{(2)}=2 \mid x_7^{(2)}=1) \times P(G_7^{(1)}=2 \mid x_7^{(1)}=4) = 0.0105$$

$-\mathcal{E}$

$$X^{(1)} = \begin{cases} 2 & p = \dfrac{0.09}{0.09 + 0.01} = 0.9 \\ 4 & p = \dfrac{0.01}{0.09 + 0.01} = 0.1 \\ \text{o.w} & p = 0 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = \begin{cases} 2 & p = \dfrac{0.09}{0.09 + 0.01} = 0.9 \\ 1 & p = \dfrac{0.01}{0.09 + 0.01} = 0.1 \\ \text{o.w} & p = 0 \end{cases}$$