

ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I
(CURSO DIDACTICO SISTEMATIZADO)

IVAN FERNANDO ALDANA RUIZ
MARLON BRAND BERMUDEZ ROJAS

70000646

13725

Universidad Autonoma de Occidente
Depro. Biblioteca



C.U.A.O.
BIBLIOTECA



0017794

CORPORACION UNIVERSITARIA AUTONOMA DE OCCIDENTE
DIVISION DE INGENIERIAS
PROGRAMA ELECTRICA

1991

ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I
(CURSO DIDACTICO SISTEMATIZADO)

IVAN FERNANDO ALDANA RUIZ
MARLON BRAND BERMUDEZ ROJAS

Trabajo de grado presentado
como requisito parcial para
optar al título de Ingeniero
Electricista.

Director:

ORLANDO VARGAS
Ingeniero Electricista

CALI
CORPORACION UNIVERSITARIA AUTONOMA DE OCCIDENTE
DIVISION DE INGENIERIAS
PROGRAMA ELECTRICA

1991

+
371.394 45
A357a
e.1

Nota de Aceptación

Aprobado por el comité de trabajo de
grado en cumplimiento de los
requisitos exigidos por la C.U.A.O.
para optar al título de ingeniero
Electricista

Presidente del Jurado

Henry Mayas
Jurado

Cali, Octubre de 1991

AGRADECIMIENTOS

Al Ingeniero Orlando Vargas, director del proyecto, profesor asociado de la Universidad Autónoma de Occidente, por su colaboración en el desarrollo de todo este proyecto.

Al Ingeniero Harold Guzmán, asesor del proyecto de grado, profesor asociado de la Universidad Autónoma de Occidente, por la orientación que nos dió para la culminación de este proyecto.

A los Ingeniero José Willian Bolaños y Rodrigo Rodriguez, por la asesoria que nos brindaron en la parte de sistemas para poder desarrollar la tesis.

A Lucy Aldana por su colaboración en la edición de este proyecto.

A todos aquellos que de una u otra manera colaboraron para que se hiciese posible la finalización de este proyecto.

DEDICATORIA

A mi esposa Sheila que me brindó mucho apoyo cuando más lo necesité para poder culminar esta carrera

A mi padre que todo el tiempo estuvo pendiente de mi trabajo de tesis

IVAN FERNANDO

DEDICATORIA

**Al Señor por darme la fe y la seguridad que necesité
para poder seguir siempre hacia adelante**

**A mis padres y a mis hermanos, que en los momentos más
difíciles me brindaron mucho apoyo y comprensión
para poder culminar esta meta tan deseada**

MARLON

Donación de Víctor Fernando Meléndez Rojas - X- 25-91

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	1
1. OBJETIVOS	3
2. METODOLOGIA	4
3. DEFINICIONES Y PARAMETROS DE UN CIRCUITO	7
3.1. SISTEMA DE UNIDADES	7
3.1.1. NOTACION CIENTIFICA	8
3.1.2. NOTACION DE INGENIERIA	9
3.1.3. CIFRAS SIGNIFICATIVAS	10
3.2. LEY DE COULOMB	12
3.3. DIFERENCIA DE POTENCIAL	13
3.4. CORRIENTE ELECTRICA	14
3.5. POTENCIA, ENERGIA	16
3.6. ELEMENTOS RESISTIVO, INDUCTIVO Y CAPACITIVO	17
3.6.1. RESISTOR	17
3.6.2. BOBINA	18
3.6.3. CONDENSADOR	20
3.7. RESISTENCIA, AUTOINDUCCION Y CAPACITANCIA	21
3.7.1. RESISTENCIA	21

3.7.2.	AUTOINDUCCION	22
3.7.3.	CAPACITANCIA	23
3.8.	LEYES DE KIRCHHOFF	24
3.8.1.	LEYES DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (L.C.K.)	25
3.8.2.	LEYES DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF (L.V.K.)	27
4.	INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSION SENOIDALES	29
4.1.	INTRODUCCION	29
4.2.	INTENSIDAD DE CORRIENTE SENOIDAL	31
4.3.	INTENSIDAD DE TENSION SENOIDAL	33
4.4.	IMPEDANCIA	35
4.5.	ANGULO DE FASE	35
4.5.1.	PARA UNA ONDA EXPRESADA EN FORMA SENO	37
4.5.2.	PARA UNA ONDA EXPRESADA EN FORMA COSENO	37
4.6.	CIRCUITO SERIE Y PARALELO	37
4.6.1.	CIRCUITO SERIE	37
4.6.2.	CIRCUITO PARALELO	38
5.	NUMEROS COMPLEJOS	40
5.1.	NUMEROS REALES, IMAGINARIOS Y COMPLEJOS	40
5.2.	SUMA Y RESTA DE COMPLEJOS	44
5.3.	MULTIPLICACION Y DIVISION DE COMPLEJOS	47
6.	IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL	52
6.1.	IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL	52
7.	CIRCUITOS SERIE Y PARALELO	59
7.1.	CIRCUITO SERIE	59
7.1.1.	CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO	61
7.1.2.	CIRCUITO RL	64
7.1.3.	CIRCUITO RC	68
7.1.4.	CIRCUITO RLC	72

7.2.	CIRCUITO PARALELO	74
7.2.1.	CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO	75
7.2.2.	CIRCUITO RLC	78
7.3.	DIVISOR DE VOLTAGE	82
7.4.	DIVISOR DE CORRIENTE	86
8.	POTENCIA ELECTRICA Y FACTOR DE POTENCIA	89
8.1.	POTENCIA ACTIVA	89
8.2.	POTENCIA REACTIVA	91
8.3.	POTENCIA APARENTE	94
8.4.	TRIANGULO DE POTENCIAS	96
8.5.	POTENCIA COMPLEJA	98
8.6.	CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA	99
9.	ANALISIS DE UN CIRCUITO POR EL METODO DE LAS CORRIENTES DE MALLAS	105
9.1.	METODO DE RESOLUCION, ELECCION DE MALLAS, NUMERO MINIMO DE MALLAS INDEPENDIENTES	105
9.2.	MATRICES	107
9.3.	APLICACION DEL ALGEBRA MATRICIAL AL ANALISIS DE CIRCUITOS	110
10.	ANALISIS DE UN CIRCUITO POR EL METODO DE LAS TENSIONES O NODOS	117
10.1.	METODO DE RESOLUCION, NUMERO DE ECUACIONES EN LOS NODOS	117
11.	TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON	125
11.1.	TEOREMA DE THEVENIN	125
11.2.	TEOREMA DE NORTON	126
11.3.	CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THEVENIN Y NORTON	128
12.	CIRCUITOS POLIFASICOS	134

12.1.	SISTEMAS BIFASICOS	134
12.2.	SISTEMAS TRIFASICOS	136
12.3.	TENSIONES EN SISTEMAS TRIFASICOS	138
12.4.	CARGAS EQUILIBRADAS	141
12.5.	CARGAS DESEQUILIBRADAS	143
12.6.	POTENCIA TRIFASICA	144
13.	PROBLEMA DE CIRCUITOS RESISTIVOS	148
13.1.	SOLUCION POR NODOS	148
13.2.	SOLUCION POR MALLAS	151
14.	CIRCUITOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	155
14.1.	FUNCION DE TRANSFERENCIA	155
14.2.	SOLUCION LIBRE	157
14.3.	TRANSITORIO EN CIRCUITOS ESTABLES	161
14.4.	SOLUCION FORZADA	164
14.5.	CONDICIONES INICIALES	166
14.5.1.	EJERCICIO TIPO 1	166
14.5.2.	EJERCICIO TIPO 2	168
14.6.	SOLUCION COMPLETA	170
14.6.1.	EJERCICIO TIPO 1	170
14.6.2.	EJERCICIO TIPO 2	175
15.	RESOLUCION POR FASORES	178
15.1.	SOLUCION POR NODOS	178
15.2.	SOLUCION POR MALLAS	180
16.	EJERCICIOS DE POTENCIA	184
16.1.	POTENCIA ACTIVA - FACTOR DE POTENCIA	184
16.2.	POTENCIA REACTIVA Y APARENTE	186
16.3.	CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA	189
16.3.1.	EJERCICIO TIPO 1	189

16.3.2. EJERCICIO TIPO 2	190
17. RECOMENDACIONES	197
BIBLIOGRAFIA	198
ANEXOS	200

LISTA DE FIGURAS

	Pág
FIGURA 1. TIPOS DE CORRIENTE ELECTRICA	15
FIGURA 2. REPRESENTACION GRAFICA DE LA LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (L.C.K.)	26
FIGURA 3. REPRESENTACION GRAFICA DE LA LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF	28
FIGURA 4. ANGULO DE FASE θ	36
FIGURA 5. CIRCUITO SERIE	38
FIGURA 6. CIRCUITO PARALELO	39
FIGURA 7. CIRCUITO COMBINADO SERIE-PARALELO	39
FIGURA 8. RELACION GRAFICA ENTRE LA FORMA POLAR Y LA FORMA RECTANGULAR DEL NUMERO COMPLEJO	43
FIGURA 9. ANGULOS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN LA FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO	44
FIGURA 10. SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS UTILIZANDO LA FORMA POLIGONAL	46
FIGURA 11. REPRESENTACION GRAFICA DE UN FASOR	55
FIGURA 12. DIAGRAMA FASORIAL DE VOLTAJE Y DE CORRIENTE	57
FIGURA 13. EJEMPLO DE CIRCUITO RESISTIVO	61

FIGURA 14.	CALCULO DE LA RESISTENCIA EQUIVALENTE	62
FIGURA 15.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE	62
FIGURA 16.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE	63
FIGURA 17.	EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE	63
FIGURA 18.	CIRCUITO RL SERIE	65
FIGURA 19.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RL SERIE	66
FIGURA 20.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RL SERIE	66
FIGURA 21.	EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO RL SERIE	66
FIGURA 22.	CIRCUITO RC SERIE	69
FIGURA 23.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RC SERIE	70
FIGURA 24.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RC SERIE	70
FIGURA 25.	CIRCUITO RLC SERIE	72
FIGURA 26.	EJERCICIO EXPLICATIVO CIRCUITO RLC SERIE	73
FIGURA 27.	CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO	76
FIGURA 28.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO	77
FIGURA 29.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO	77

FIGURA 30.	CIRCUITO RLC PARALELO	79
FIGURA 31.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RC PARALELO	80
FIGURA 32.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RL PARALELO	80
FIGURA 33.	EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO RLC PARALELO	81
FIGURA 34.	CIRCUITO SERIE PARA DIVISOR DE VOLTAJE	83
FIGURA 35.	EJERCICIO EXPLICATIVO 1. DIVISOR DE VOLTAJE	84
FIGURA 36.	EJERCICIO EXPLICATIVO 2. DIVISOR DE VOLTAJE	85
FIGURA 37.	CIRCUITO PARALELO PARA DIVISOR DE CORRIENTE	86
FIGURA 38.	EJERCICIO EXPLICATIVO DE DIVISOR DE CORRIENTE	88
FIGURA 39.	GRAFICO DEL TRIANGULO DE POTENCIAS	97
FIGURA 40.	TRIANGULO DE POTENCIA PARA Q INDUCTIVO. F.P. EN ATRASO	97
FIGURA 41.	TRIANGULO DE POTENCIA PARA Q CAPACITIVO. F.P. EN ADELANTO	97
FIGURA 42.	EJEMPLO EXPLICATIVO SOBRE POTENCIAS	102
FIGURA 43.	CONVERSION DEL FACTOR DE POTENCIA	103
FIGURA 44.	SOLUCION POR MATRICES DEL METODO DE MALLAS	109
FIGURA 45.	EJERCICIO EXPLICATIVO. ANALISIS DE MALLAS POR MEDIO DE ALGEBRA MATRICIAL	114

FIGURA 46.	EJERCICIO EXPLICATIVO UTILIZANDO ANALISIS DE NODOS	121
FIGURA 47.	SOLUCION A EJERCICIO EXPLICATIVO. ANALISIS DE NODOS	122
FIGURA 48.	CALCULO DE LOS PARAMETROS THEVENIN	126
FIGURA 49.	EJERCICIO EXPLICATIVO SOBRE TEOREMA NORTON	127
FIGURA 50.	EJERCICIO EXPLICATIVO TEOREMA DE THEVENIN	129
FIGURA 51.	CONVERSION DE FUENTE DE CORRIENTE A FUENTE DE VOLTAJE	129
FIGURA 52.	EJERCICIO EXPLICATIVO DE CALCULO DE Z_{TH}	130
FIGURA 53.	CIRCUITO EQUIVALENTE DEL EJERCICIO EXPLICATIVO	131
FIGURA 54.	EJERCICIO EXPLICATIVO SOBRE TEOREMA NORTON	132
FIGURA 55.	CIRCUITO EQUIVALENTE NORTON AL EJERCICIO EXPLICATIVO	133
FIGURA 56.	EQUIVALENCIA ENTRE CIRCUITO EQUIVALENTE THEVENIN Y NORTON	133
FIGURA 57.	REPRESENTACION GRAFICA DE LOS SISTEMAS BIFASICOS	134
FIGURA 58.	REPRESENTACION GRAFICA DE LOS DIAGRAMAS FASORIAL Y DE TIEMPO DEL SISTEMA BIFASICO	135
FIGURA 59.	REPRESENTACION GRAFICA DEL DIAGRAMA FASORIAL Y DE TIEMPO DEL SISTEMA TRIFASICO	136

FIGURA 60.	REPRESENTACION GRAFICA DE CONEXION ESTRELLA EN SISTEMA TRIFASICO	137
FIGURA 61.	REPRESENTACION GRAFICA DE CONEXION TRIANGULO EN SISTEMA TRIFASICO	137
FIGURA 62.	REPRESENTACION FASORIAL ENTRE LOS VOLTAJES DE LINEA Y DE FASE EN SISTEMA TRIFASICO	139
FIGURA 63.	DIAGRAMA FASORIAL DE LA CONEXION TRIANGULO	140
FIGURA 64.	DIAGRAMA FASORIAL DE CARGAS EQUILIBRADAS EN TRIANGULO	142
FIGURA 65.	DIAGRAMA FASORIAL PARA CARGAS EQUILIBRADAS EN ESTRELLA	143
FIGURA 66.	TRIANGULO DE POTENCIAS EN SISTEMA TRIFASICO BALANCEADO	147
FIGURA 67.	PROBLEMA TIPO DE SOLUCION DE UN CIRCUITO POR NODOS	148
FIGURA 68.	CONVERSION DE FUENTE DE VOLTAJE A FUENTE DE CORRIENTE	149
FIGURA 69.	CIRCUITO EQUIVALENTE DEL EJERCICIO	149
FIGURA 70.	PROBLEMA TIPO DE SOLUCION DE CIRCUITOS POR MALLAS	151
FIGURA 71.	EJERCICIO TIPO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA	155
FIGURA 72.	CIRCUITO PARALELO CON GENERADOR, RESISTENCIA Y BOBINA	158

FIGURA 73.	CIRCUITO DESPUES DE ABRIR EL INTERRUPTOR	158
FIGURA 74.	CIRCUITO CON INTERRUPTOR ABIERTO Y CERRADO	161
FIGURA 75.	REPRESENTACION GRAFICA DE TRANSITORIO EN CIRCUITOS ESTABLES	164
FIGURA 76.	EJERCICIO TIPO DE SOLUCION FORZADA	164
FIGURA 77.	CIRCUITO EQUIVALENTE PARA SOLUCION FORZADA	165
FIGURA 78.	EJERCICIO TIPO 1 DE CONDICIONES INICIALES	166
FIGURA 79.	EJERCICIO TIPO 2 DE CONDICIONES INICIALES	169
FIGURA 80.	EJERCICIO TIPO 1 DE SOLUCION COMPLETA	171
FIGURA 81.	CIRCUITO EQUIVALENTE	171
FIGURA 82.	EJERCICIO TIPO 2 DE SOLUCION COMPLETA	175
FIGURA 83.	REPRESENTACION GRAFICA DE SOLUCION COMPLETA	177
FIGURA 84.	CIRCUITO AC ESTACIONARIO	179
FIGURA 85.	EJERCICIO TIPO DE SOLUCION POR MALLAS	181
FIGURA 86.	CIRCUITO PARA HALLAR EL FACTOR DE POTENCIA	184
FIGURA 87.	CIRCUITO ILUSTRATIVO	187
FIGURA 88.	CIRCUITO ILUSTRATIVO	189
FIGURA 89.	SISTEMA FINAL	189
FIGURA 90.	SISTEMA INICIAL	191

FIGURA 91.	SISTEMA FINAL	191
FIGURA 92.	CIRCUITO ILUSTRATIVO	193
FIGURA 93.	TRIANGULO DE POTENCIAS PARA EL SISTEMA INICIAL	194
FIGURA 94.	TRIANGULO DE POTENCIAS PARA EL SISTEMA FINAL	194
FIGURA 95.	TRIANGULO DE POTENCIAS COMPLETO	195

LISTA DE TABLAS

	Pag.
TABLA 1. UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL	8
TABLA 2. PREFIJOS DE NOTACION DE INGENIERIA	10

LISTA DE ANEXOS

	Pag.
ANEXO 1. MENU PRINCIPAL DEL TUTOR DE CIRCUITOS ELECTRICOS	201
ANEXO 2. MENU DEL TUTOR 1 (PARTE TEORICA)	202
ANEXO 3. MENU DEL TUTOR 2 (EJEMPLOS Y EJERCICIOS)	212

INTRODUCCION

Debido a que un curso de ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I ha dejado de ser exclusivo para los estudiantes de Ingeniería Eléctrica, y ha pasado a ser parte de otras disciplinas de la ingeniería, es nuestro interés facilitar la comprensión del curso a través de un paquete didáctico con aplicación sistematizada, de forma tal que el estudiante adquiera habilidad para resolver los problemas más comunes con la ayuda del computador.

Este proyecto se diseñó con el objetivo de crear un "DIALOGO" entre el estudiante y el computador y así contribuir al aprendizaje del curso de ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I.

El proyecto consta de la base teórica que incluye todo el curso de Circuitos I y los ejercicios o problemas tipo que abarca: Circuitos resistivos, circuitos en el dominio del tiempo, circuitos estacionarios por fasores y circuitos de potencia.

Es importante que el estudiante tenga una ayuda adicional a los textos o a la del profesor, por lo tanto con nuestro proyecto se pretende que el estudiante que quiera progresar en sus conocimientos, pueda utilizar éste sistema.

Está definido que el proyecto beneficia a los estudiantes que tomen el curso de CIRCUITOS ELECTRICOS I sin circunscribirse a los de Ingeniería Eléctrica.

1. OBJETIVOS

- Suministrar el material didáctico suficiente en un Programa Tutorial que facilite el autoaprendizaje y de soporte al estudiante de Ingeniería que tome el curso: ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I.
- Ofrecer al estudiante una base teórica (TUTOR1), como medio de consulta, en un lenguaje comprensible del contenido del curso: ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I.
- Dar al estudiante la oportunidad de poder observar los problemas tipos resueltos de los temas más representativos del curso de ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I.
- Ofrecer al estudiante la ventaja de poder cambiar los valores de los parámetros, en los problemas tipo, y obtener su respuesta respectiva

2. METODOLOGIA

El proyecto se divide en dos partes que se encuentran en un menú de entrada denominado TUTOR (ver anexo 1).

1. La primera, denominada en el diskette TUTOR 1, la cual es la base teórica necesaria del curso ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I, y se obtiene en pantalla por la modalidad de "MENUS".

Los menús secundarios se pueden observar en el anexo 2, pero se describirán en general los capítulos que contiene el MENU PRINCIPAL.

MENU PRINCIPAL TUTOR 1

C. CONVENCIONES UTILIZADAS

- 1. DEFINICIONES Y PARAMETROS**
- 2. INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSION SENOIDALES**
- 3. NUMEROS COMPLEJOS**
- 4. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL**
- 5. CIRCUITO SERIE Y PARALELO**
- 6. POTENCIA ELECTRICA Y FACTOR DE POTENCIA**

- 7. ANALISIS DE CIRCUITOS METODO CORRIENTES O MALLAS
- 8. ANALISIS DE CIRCUITOS METODO TENSIONES O NODOS
- 9. TEOREMA DE THEVENIN Y NORTON
- 0. CIRCUITOS POLIFASICOS ¹
- 5. SALIR AL DOS (SHELL)

Como se observa en el diskette tutor 1, se encuentra la base teórica del curso de ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS I, con la ventaja que es escrita en un lenguaje de fácil comprensión y bastante explícito.

2. La segunda parte denominada en el diskette como TUTOR 2 es la esencia del proyecto, pues el estudiante puede aplicar su conocimiento, despejará dudas y solucionará problemas tipo ingresando los parámetros lógicos de las variables.

En este proyecto se cuenta con los problemas tipo y se obtienen también por la modalidad de "MENUS".

Los menús secundarios se encuentran en el anexo 3, pero en general los temas tratados en el MENU PRINCIPAL son:

¹ Para facilidad del estudiante, en el menú se presenta la opción 0 refiriéndose al capítulo 10 del tutor.

MENU PRINCIPAL TUTOR 2

1. OBJETIVOS Y METODOLOGIA
2. CIRCUITOS RESISTIVOS
3. CIRCUITOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO
4. SOLUCION POR FASORES
5. POTENCIA
6. SALIR DEL PROGRAMA

Cuando se escoja alguna de las opciones anteriores, aparecerá el CUADRO DE OPCIONES de cada tema y al accionar alguno de éstos, aparecerán en la pantalla cuatro opciones.

- A. **GRAFICA:** Se encuentra la gráfica del problema tipo con sus parámetros prefijados.
- B. **AYUDA:** Se encuentra el problema tipo solucionado paso a paso con unos valores prefijados.
- C. **EJEMPLO:** Aparece el nombre de cada variable que se va a ingresar por cada problema tipo y con su respectiva respuesta al problema.
- D. **SALIR:** Con esta opción el estudiante se sitúa de nuevo en el submenú o menú secundario.

3. DEFINICIONES Y PARAMETROS DE UN CIRCUITO

3.1. SISTEMA DE UNIDADES

Cuando se realiza cualquier medida se desea obtener una información cuantitativa de una cantidad; es necesario por lo tanto, definir las magnitudes para poder expresar los resultados de las medidas.

Se conocen como magnitudes fundamentales aquellas que no pueden definirse con respecto a otras magnitudes. Las magnitudes fundamentales son: longitud, masa, tiempo, temperatura, intensidad luminosa, intensidad de corriente eléctrica y cantidad de sustancia o cantidad de partículas en un cuerpo.

El Sistema Métrico Internacional de Unidades, conocido como SI (système internationale) es un sistema adoptado por la conferencia General de Pesas y Medidas como un acuerdo internacional con el fin de unificar la utilización y denominación de las magnitudes fundamentales.

La tabla 1 muestra las unidades básicas del SI.

TABLA 1. UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

CANTIDAD	UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	Kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	grado kelvin	°K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

En el campo de la ingeniería eléctrica son unidades muy usuales el voltio, el ohmio y el vatio además de las anteriores.

Generalmente se encuentran en la práctica unidades que no pertenecen al SI y por lo tanto es necesario realizar conversiones adecuadas para poder expresar las magnitudes en unidades del SI.

3.1.1. NOTACION CIENTIFICA

Es una manera de expresar las cantidades como múltiplos

de potencias de 10; es útil para comparar números o indicar cifras significativas. Un número en notación científica se expresa con el punto decimal a la derecha del primer dígito y un multiplicador 10^N donde N expresa el número de dígitos que se ha desplazado el punto decimal a partir del número original. Este exponente será positivo si el desplazamiento del número decimal se realiza hacia la izquierda y negativo si el desplazamiento es hacia la derecha.

Ejemplo:

$$0.016 = 1.6 * 10^{-2}$$

$$687 = 6.87 * 10^2$$

$$0.00038 = 3.8 * 10^{-4}$$

$$7300000 = 7.3 * 10^6$$

3.1.2. NOTACION DE INGENIERIA

Comúnmente en el uso de cantidades de ingeniería tales como la corriente en amperios, la resistencia en ohmios y la potencia en vatios, se suelen presentar magnitudes muy grandes o muy pequeñas que sería difícil manejar tal como están expresadas.

La notación de ingeniería se ha encargado de utilizar

prefijos a las unidades medidas con el fin de facilitar su manejo. Tales prefijos son: (Ver Tabla 2)

TABLA 2. PREFIJOS DE NOTACION DE INGENIERIA

	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
PREFIJO	Tera	Giga	Mega	Kilo	mili	micro	nano	pico
ABREVIATURA	T	G	M	K	m	μ	n	p

Ejemplo:

$4'000.000 \text{ W} = 4 * 10^6 \text{ W} = 4 \text{ Megavattios} = 4 \text{ MW.}$

$0.00006538 \text{ A} = 65.38 * 10^{-6} = 65.38 \text{ microamp} = 65.38 \mu\text{A}$

$1200 \Omega = 1.2 * 10^3 \Omega = 1.2 \text{ Kilo-ohmios} = 1.2 \text{ K}\Omega$

3.1.3. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando se efectuan mediciones con instrumentos se obtienen aproximaciones y por lo tanto, no se tendrá nunca la exactitud de la medida puesto que ésta dependerá del número de cifras que se hayan considerado. Por ejemplo; si se mide una batería con diferentes

instrumentos capaces de dar diversas cantidades de cifras es posible encontrar medidas como éstas: 1.48 V, 1.487 V, 1.5 V; sin que ninguna de las tres sea exacta. El número de dígitos en las mediciones se llama número de cifras significativas. Es usual establecer un número determinado de cifras significativas para unificar el grado de exactitud de la cantidad medida; esto es posible por medio del redondeo. Para realizar el redondeo de una cantidad se debe proceder así: Si el primer dígito que se va a eliminar es mayor que 5 entonces el dígito que se va a conservar como última cifra significativa debe aumentarse en 1; si el primer dígito que se va a eliminar es menor que 5 entonces el dígito que se conserva se mantiene invariable; si el primer dígito que se va a eliminar es exactamente igual a 5 entonces la cifra que se va a conservar se aumenta en 1 si es un valor impar y se deja invariable si el dígito a conservar es par.

Ejemplo: Redondear a 3 cifras significativas

0.0158324	----->	0.0158
594287	----->	594 * 10 ³
7.13500	----->	7.14
6.76500	----->	6.76
5.7863	----->	5.79

3.2. LEY DE COULOMB

La materia se compone de átomos, y ocupa una masa y un lugar en el espacio. Los átomos están constituidos a su vez por pequeñas partículas que son los electrones, los protones y los neutrones. El electrón es la unidad de carga negativa y gira alrededor del núcleo en órbitas. La carga fundamental positiva es el protón y se encuentra en el núcleo y el neutrón es la carga fundamental neutra y se encuentra también en el núcleo.

Aunque el átomo en estado estable posee igual número de electrones que de protones, es posible que el átomo pueda ganar o perder electrones lo que lo dejará cargado ya sea negativa o positivamente provocando un fenómeno de transferencia de electrones, lo que altera el estado de reposo del átomo y lo convierte en una carga eléctrica.

Cuando dos cuerpos quedan con la misma carga, o sea, ambos positivos o ambos negativos, experimentan una fuerza de repulsión, pero si están con carga diferentes experimentan una fuerza de atracción.

Para medir esta fuerza Charles Coulomb estableció una ley que en su honor se conoce como LEY DE COULOMB, en la que involucra los valores de carga eléctrica cuya magnitud se simboliza con la letra Q y su unidad de medida es el

Coulomb (C), donde una carga negativa de 1 Coulomb significa que el cuerpo posee 6.25×10^{18} más electrones que protones.

La ley de Coulomb establece que un cuerpo cargado colocado en la vecindad de otros cuerpos cargados experimentará una fuerza cuya magnitud es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre las dos cargas y se expresa como:

$$F = K Q_1 Q_2 / d^2$$

donde Q_1 es la carga en Coulombios de uno de los dos cuerpos; Q_2 es la carga del otro (C); F es la fuerza en Newton; d es la distancia en metros que separa a los cuerpos cargados y K es una constante de valor 9×10^9 new-m² /C, $K = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ donde ϵ_0 es la permitividad del vacío.

3.3. DIFERENCIA DE POTENCIAL

Cuando una carga eléctrica se mueve dentro de un campo eléctrico debe realizar un trabajo. La diferencia de potencial indica cuanta energía puede ser adquirida o perdida, por unidad de carga, por una partícula cuando se ha movido dentro del campo eléctrico. La unidad de

diferencia de potencial es el voltio, y por lo tanto, dos puntos de un sistema tienen una diferencia de potencial de 1 voltio, si se requiere un julio de energía para mover una carga de un coulombio de un punto a otro. O sea,

$$\text{Diferencia de Potencial} = \text{Voltios} = \text{julios} / \text{coulombio}$$

3.4. CORRIENTE ELECTRICA

Se conoce como corriente eléctrica al flujo de electrones que se presenta en un circuito cerrado y que es impulsado por una fuente de voltaje. La unidad de corriente eléctrica es el amperio (A) y su símbolo es I.

La corriente eléctrica se define como el cambio con respecto al tiempo del movimiento de cargas eléctricas, esto es,

$$I = dQ / dt$$

Por lo tanto un amperio es el movimiento de una carga de un coulomb que pasa por un punto de un conductor durante un segundo.

Se introduce aquí un nuevo concepto, el de conductor que es un material que permite el paso libre de una corriente cuando se conecta a una batería u otra fuente de energía

eléctrica.

Dependiendo fundamentalmente de la característica de la fuente que impulsa la corriente, ésta puede ser continua o alterna. la corriente continua (cc) se presenta cuando el movimiento de los electrones en el conductor es unidireccional, lo que significa que los electrones se mueven desde un terminal que convencionalmente se denomina negativo hacia el terminal positivo únicamente; la corriente continua es suministrada por fuentes unidireccionales y baterías. La corriente alterna (CA) se presenta cuando el flujo de electrones viaja primero en una dirección y luego en dirección opuesta, oscilando con respecto a su posición inicial; esta corriente alterna es causada por una fuente de tensión alterna. La siguiente figura esquematiza los dos tipos de corrientes:

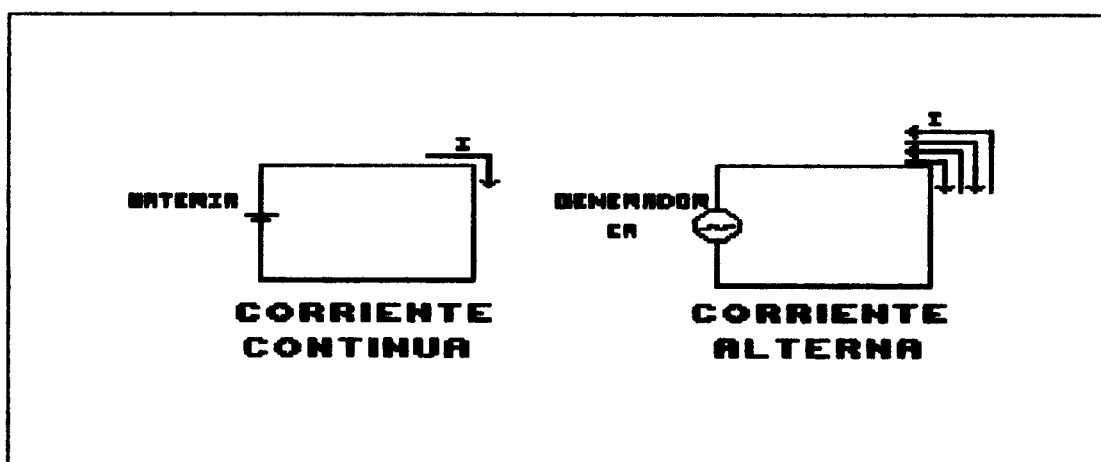


FIGURA 1. TIPOS DE CORRIENTE ELECTRICA

3.5. POTENCIA, ENERGIA

En términos genéricos la energía es un trabajo y por lo tanto se relaciona con la fuerza que se hace para mover un cuerpo una cierta distancia. En el sentido específico, la energía eléctrica se refiere al trabajo realizado por una fuente de tensión que se mueve un coulomb de carga eléctrica a través de una diferencia de potencial de un voltio. Por lo tanto $W = Vq$, donde :

W : Es la energía (joule)

q : Carga eléctrica (Coulomb)

V : Voltaje (voltios)

Si se evalúa la velocidad de consumo de energía al transferir una carga de un coulomb en un segundo a través de la diferencia de potencial, se está definiendo el vatio (w) que es la unidad de potencial p; o sea,

$$p = W / t$$

donde:

W : Energía (joule)

t : Tiempo (segundos)

La potencia eléctrica tiene su forma más general cuando

se considera su proporcionalidad con la cantidad de coulombs transferidos por segundo, o corriente, y con la energía necesaria para transferir un coulomb a través de un elemento, o tensión; entonces:

$$p = V.I$$

Un elemento de circuito puede absorber o entregar potencia dependiendo de la dirección de corriente que lo atravieza y la diferencia de potencial que existe en sus terminales al paso de la corriente.

El elemento absorbe potencia si por él pasa una corriente positiva que encuentra en sus terminales una diferencia de potencial positiva.

El elemento entrega potencia si la corriente que pasa por él es negativa y encuentra una diferencia de potencial positiva o viceversa.

3.6. ELEMENTO RESISTIVO, BOBINA Y CONDENSADOR

En un circuito eléctrico se distinguen elementos pasivos que son aquellos que solo pueden almacenar o disipar energía y no pueden actuar como fuentes de ella. Los elementos pasivos usados en el desarrollo de un circuito

son el elemento resistivo o resistor, la bobina y el condensador.

3.6.1. RESISTOR

El resistor es un objeto cuya resistencia al paso de la corriente tiene un valor específico conocido. Sus usos más frecuentes son: Establecer el valor adecuado de voltaje en un circuito, limitar la corriente y proporcionar una carga. Los resistores son de dos clases: fijos y variables. El resistor fijo posee un solo valor de resistencia y éste permanece constante en condiciones normales. El resistor variable son aquellos a los cuales se les puede variar manualmente su valor de resistencia y se conocen como **reóstatos o potenciómetros**; se utilizan como elementos de control para corrientes muy grandes.

3.6.2. BOBINA

La bobina es esencialmente un conductor el cual se ha enrollado en más de una vuelta, con el fin de aprovechar el efecto que una corriente produce al pasar por un conductor tantas veces como se haya enrollado éste. Para entender su uso real se debe recordar que una corriente

pasando a través de un conductor crea un campo magnético alrededor de éste, cuya magnitud fundamental es la densidad de flujo magnético. Asociada con la bobina se debe mencionar la inductancia, que es una constante introducida en el modelo matemático desarrollado por M. Faraday y J. Henry simultaneamente, cuando demostraron que un campo magnético variable podía producir una tensión en un circuito próximo, que era proporcional a la velocidad de variación con el tiempo de la corriente que producía el campo magnético, por lo tanto:

$$v = L \, di/dt$$

donde:

L : Inductancia medida en henrios (H)

v e i son funciones del tiempo.

Se pueden sacar dos conclusiones importantes del concepto anterior:

- Es claro que no puede existir tensión a través de una bobina por la que pasa una corriente constante, independientemente de la magnitud de la corriente, entonces podemos considerar la bobina como un "Cortocircuito para la C.C"

- Por la proporcionalidad directa entre el voltaje y la variación de la corriente en el tiempo, se puede deducir que un cambio brusco o discontinuo de la corriente debe estar asociado con una tensión infinita a través de la bobina; esto no es posible de encontrar en un circuito real y por lo tanto se concluye que la bobina se opone a cambios bruscos de la corriente.

3.6.3. CONDENSADOR

Otro elemento pasivo que almacena energía es el condensador, el cual está constituido fundamentalmente por placas paralelas separadas por un dieléctrico. Cuando se aplica una tensión a las placas una de ellas quedará cargada positivamente y la otra quedará con cargas negativas lo cual creará un campo eléctrico que va de la placa negativa a la placa positiva; se establece entre las placas una diferencia de potencial que es de magnitud igual a la tensión aplicada y con polaridad diferente a ésta. Durante ese proceso es que se realiza el almacenamiento de energía por parte del condensador.

El uso más frecuente del condensador se presenta en circuitos en donde se desee incrementar el tiempo de retraso del voltaje generado, o donde se desee mayor capacidad de almacenamiento de energía.

La capacitancia de un condensador de placas paralelas está relacionada con el área de la superficie de las placas, el espesor del dieléctrico y el tipo de dieléctrico utilizado, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C = \epsilon A / d$$

ϵ : Constante dieléctrica

A : Area de las placas

d : Separación entre placas

3.7. RESISTENCIA, AUTOINDUCCION, CAPACIDAD

Como ya se vió, los elementos pasivos son los resistores, las bobinas y los condensadores. Existen ciertos comportamientos o fenómenos propios de cada uno de estos elementos y son respectivamente la resistencia, la autoinducción y la capacidad.

3.7.1. RESISTENCIA

La resistencia es la oposición al flujo de corriente. La unidad de medida de la resistencia es el ohm (Ω) y su símbolo es R. Un ohm se define como la cantidad de

resistencia que limita una corriente de un amperio por un conductor, cuando se aplica un voltio a sus terminales.

La relación matemática que expresa la interacción lineal entre voltaje, corriente y resistencia se conoce como ley de Ohm y se define así:

$$V = I \cdot R$$

donde:

V : Voltaje en V

I : Corriente en A

R : Resistencia en Ω

3.7.2. AUTOINDUCCION

La autoinducción es la capacidad que tiene un conductor de inducir voltaje en sí mismo cuando cambia la corriente. Se caracteriza por tener la propiedad de retardar el cambio en la corriente que pasa por él. Este retardo está acompañado por absorción o liberación de energía. Está descrita por la siguiente ecuación:

$$L = V / (di/dt)$$

donde:

L : Inductancia en H

V : Voltaje en V

di/dt : Cambio de la corriente en el tiempo, A/s.

3.7.3. CAPACITANCIA

La capacidad o capacitancia es la propiedad que tiene un condensador de almacenar una carga eléctrica. Se define como la cantidad de carga que puede almacenar un condensador con respecto al voltaje aplicado entre sus placas y su ecuación es la siguiente:

$$C = Q / V$$

donde :

C : Capacitancia en faradios (F)

Q : Cantidad de carga en coulombs(C)

V : Voltaje en V.

La capacitancia es la propiedad de un circuito eléctrico de retardar un cambio de voltaje que pasa a través de él; asociando también este retardo con absorción o liberación de energía. Este retardo en el cambio, de voltaje se puede explicar más claramente considerando la relación

proporcional entre la corriente que puede atravesar el condensador, o corriente de conducción y la variación de la tensión a través del condensador.

La relación es lineal y la constante de proporcionalidad es la capacidad C que ya se ha definido, entonces:

$$i = C \, dv/dt$$

Se puede también concluir, en este caso, que para un cambio brusco en el voltaje del condensador se necesitaría de una corriente infinita, por lo tanto el condensador se opone a cambios bruscos de voltaje.

La otra conclusión, también evidente, es que no puede existir corriente a través del condensador si el voltaje es constante, por lo tanto el condensador se comporta como un "Circuito abierto en C.C.".

3.8. LEYES DE KIRCHHOFF

Las leyes de Kirchhoff son una herramienta muy útil para la solución de circuitos eléctricos. Solucionar circuitos eléctricos significa conocer todas las corrientes y diferencias de potencial que están involucradas tanto en el circuito general como en cada

uno de los elementos pertenecientes a él.

El profesor alemán Gustav R. Kirchhoff estableció unas leyes axiomáticas para el análisis de circuitos que son:

- Ley de Corrientes de Kirchhoff (L.C.K.)
- Ley de Voltajes de Kirchhoff (L.V.K.)

Se introducirán unas definiciones necesarias para el entendimiento de las leyes de Kirchhoff.

NODO PRINCIPAL:

Es la unión de 3 o más elementos simples de circuito. No acumula carga.

RAMA PRINCIPAL:

Es un camino que une dos nodos principales.

Se estudiarán a continuación las leyes:

3.8.1. LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (L.C.K)

Puede enunciarse de dos maneras:

A. La suma algebraica de corrientes que llegan a un nodo principal es cero.

Se requiere de una convención de corrientes para desarrollar esta expresión: la más general es considerar que las corrientes que llegan al nodo son positivas (+) y las que salen del nodo son negativas (-).

B. La suma de las corrientes que llegan a un nodo es igual a la suma de las que salen.

Ejemplo:

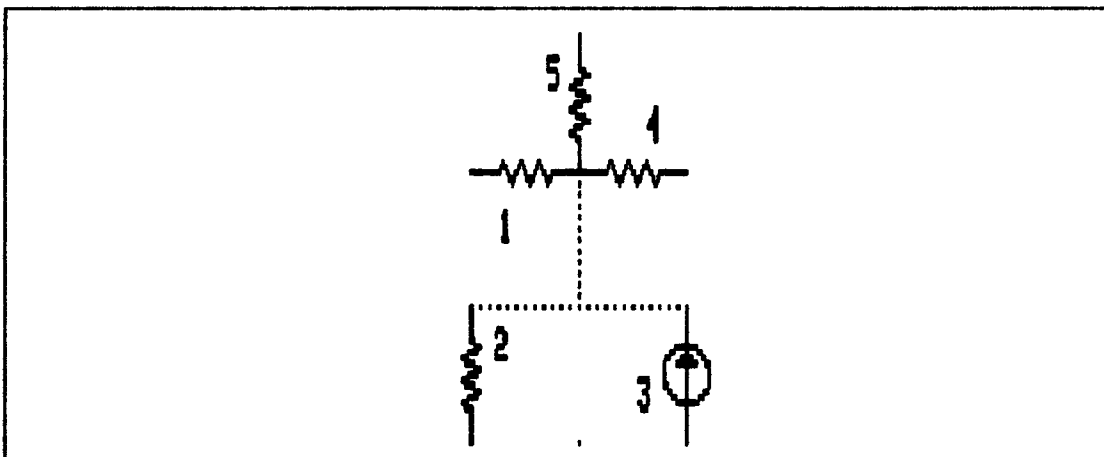


FIGURA 2. REPRESENTACION GRAFICA DE LA LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (LCK)

A. $i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) - i_5(t) = 0$

B. $i_1(t) + i_3(t) = i_2(t) + i_4(t) + i_5(t)$

3.8.2. LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF (LVK)

Puede enunciarse de dos formas:

A. La suma algebraica de los voltajes a través de un camino cerrado (moviéndose a través de las ramas) es cero.

Se debe considerar como convención lo siguiente una elevación, o sea, cuando una corriente entra a un elemento por el terminal negativo y sale por el positivo, se considera positiva (+) y cuando una corriente entra a un elemento por el terminal positivo y sale por el negativo, se habla de caída y se considera negativa (-).

B. En el sentido del movimiento (como se recorre el camino cerrado) la suma de las elevaciones de voltaje es igual a la suma de las caídas de voltaje.

Ejemplo:

Elevación

Caída

- \longrightarrow +

+ \longrightarrow -

Movimiento

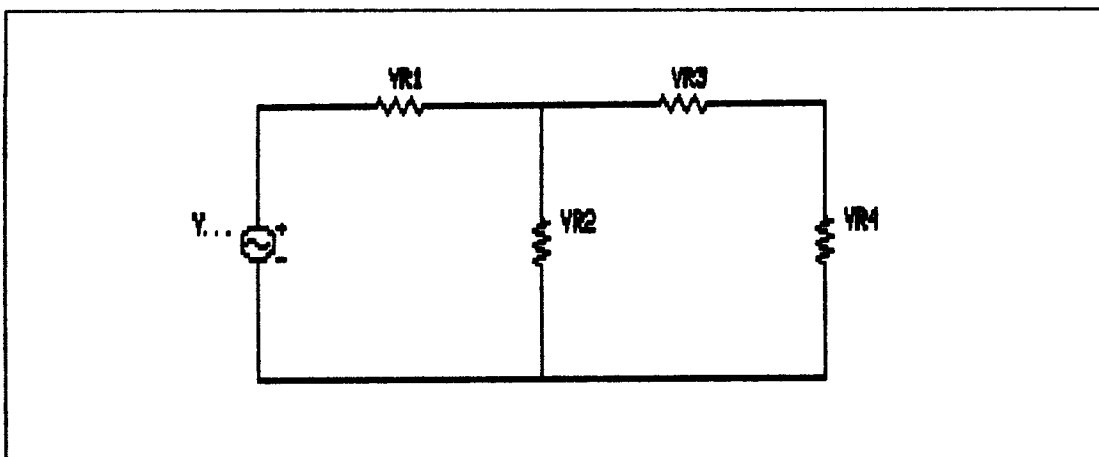


FIGURA 3. REPRESENTACION GRAFICA DE LA LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF (LVK)

Aplicando LVK por la RAMA 1.

A. $V(t) - V_{R1} + V_{R2} = 0$

B. $V(t) + V_{R2} = V_{R1}$

4. INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSION SENOIDALES

4.1. INTRODUCCION

Cuando una corriente viaja por un conductor primero en un sentido y luego en otro, ésta ha sido impulsada por una tensión que también presenta ese comportamiento. Esa oscilación de la corriente constantemente alrededor de un punto y la tensión que la produce, se conocen como corriente y tensión alternas y entran a jugar un papel muy importante en el estudio de los circuitos eléctricos.

La variación que presenta la corriente y la tensión, puede estar regida por cualquier tipo de función periódica, siendo las más comunes las funciones senoidales, puesto que todo sistema real, como por ejemplo el sistema que es distribuido a cada una de las casas, está regido por este comportamiento.

Existen algunos conceptos que estan estrechamente ligados al estudio de las funciones periódicas, y en nuestro caso particular a las funciones senoidales; estos conceptos

son:

CICLO: Es el conjunto completo de valores de una onda periódica.

FRECUENCIA: La frecuencia (f) de una onda periódica es el número de ciclos completos por segundo. Un ciclo por segundo es un hertz (Hz). (Generalmente 60 Hz en sistema americano y 50 Hz en sistema europeo)

PERIODO: El periodo (T) de una onda periódica es el tiempo necesario para completar un ciclo. Se expresa en segundos y es el recíproco de la frecuencia.

$$T = 1 / f.$$

ALTERNANCIA: Los medios ciclos positivos y negativos de las ondas periódicas que tienen alternadamente valores positivos y negativos.

AMPLITUD: Valor instantáneo que toma la función en un tiempo t .

Después de definir estos conceptos se podrá hacer un estudio de la corriente y tensión senoidales.

4.2. INTENSIDAD DE CORRIENTE SENOIDAL

Cuando se habla de corriente senoidal se está haciendo referencia a una corriente alterna, definida en el tiempo por una función seno, que tiene asociada a ella una frecuencia y una amplitud máxima. Esta función seno se expresa así:

$$i(t) = I_m \text{sen } \omega t$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$i(t) = I_m \text{sen } 2\pi f t$$

$i(t)$: Valor instantáneo de la corriente en el tiempo t .

I_m : Valor máximo de la onda de corriente, A (amplitud máxima).

ω : Velocidad angular, radianes por segundo.

Generalmente 377 rad/seg.

f : Frecuencia, Hz. Generalmente 60 Hz.

t : Tiempo, en segundos, que ha transcurrido desde que la onda cruzó la abscisa ωt viajando en la dirección positiva.

Para las funciones periódicas se determina el valor eficaz o RMS, el cual es muy importante en el estudio de los circuitos eléctricos por cuanto este valor eficaz es el que se obtiene de las mediciones experimentales con los instrumentos de medida como amperímetros y

voltímetros.

En general se define el valor eficaz como la raíz cuadrada del valor medio de una función al cuadrado, o sea:

$$\text{Valor medio de una función } f(t) = 1/T \int_0^T f(t)dt$$

Valor medio de la función al cuadrado

$$f^2(t) = 1/T \int_0^T f^2(t)dt$$

Raíz cuadrada del valor medio de la función al cuadrado

$$f^2(t) = \sqrt{(1/T \int_0^T f^2(t)dt)} = \text{VALOR EFICAZ O RMS}$$

Aunque esta es una simple expresión matemática que no da idea clara de la utilidad del valor eficaz, la aplicación directa de este concepto a una corriente alterna es muy útil y se puede definir así:

El valor eficaz o RMS de una corriente alterna $i(t)$ indica que una corriente continua I es capaz de disipar la misma potencia promedio que la que disipa una corriente alterna $i(t)$, al pasar por la misma carga R . De acuerdo con la definición matemática se tienen que:

$$I_{rms} = \sqrt{\left(1/T \int_0^T i^2(t) dt\right)}$$

Si se reemplaza $i(t) = I_m \sin wt$ y se evalúa entre 0 y 2π se obtendrá como resultado general que:

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

y este es el valor que se leerá siempre en los amperímetros.

4.3. INTENSIDAD DE TENSION SENOIDAL

Una corriente senoidal debe ser impulsada a través de un circuito por medio de una tensión senoidal que debe cumplir con los mismos parámetros que definen a la corriente que ella produce. Por lo tanto se puede definir la función de la tensión senoidal como

$$v(t) = V_m \sin wt$$

$$w = 2\pi f$$

$$v(t) = V_m \sin 2\pi ft$$

v : Valor instantáneo de la tensión en el tiempo t .

V_m : Valor máximo (pico) de la onda, V (amplitud máxima).

w : Velocidad angular, rad/seg.

f : Frecuencia, Hz.

t : Tiempo que ha transcurrido desde que la onda cruzó la abscisa ωt viajando en dirección positiva, seg.

En el preciso instante que se conecte el generador a un circuito se obtendrá en la carga un valor instantáneo en la onda de voltaje que dependerá del valor instantáneo que en el momento de conexión tenía la onda de voltaje de la fuente.

Se define también para la tensión senoidal, el valor eficaz o RMS el cual es leído directamente en los voltímetros y se relaciona con la tensión alterna así:

$$V_{RMS} = \sqrt{\left(1/T \int_0^T v^2(t) dt\right)}$$

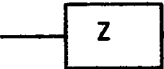
$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

$$T = 2\pi$$

$$V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Este valor aparecerá siempre que se tenga una onda senoidal definida entre 0 y 2π .

4.4. IMPEDANCIA

Es un elemento pasivo en el dominio de la frecuencia que se define por la relación matemática: $Z = V/I$. Se representa como , se expresa en ohmios y puede involucrar resistencias, inductancias o capacitancias que se definen por medio de las siguientes relaciones en el dominio de la frecuencia:

Para resistencias $Z = R \quad (\Omega)$

Para inductancias $Z = j\omega L \quad (\Omega)$

Para capacitancias $Z = -j/\omega C \quad (\Omega)$

Donde j : es el número imaginario

$\omega = 2\pi f$: Velocidad angular, rad/seg.

La definición del dominio de frecuencia y del número imaginario se aclararán en los capítulos correspondientes a números complejos y fasores.

4.5. ANGULO DE FASE

Las formas de voltaje y corriente, en un circuito, se expresan en forma general como:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t \pm \theta) \qquad i(t) = I_m \cos(\omega t \pm \theta)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

Donde θ es el ángulo de fase e indica que diferencia en ángulo existe entre la función considerada y una función coseno o seno que parten desde cero. Gráficamente es:

FIGURA 4. ANGULO DE FASE θ

y representan lo que podría denominarse "función normal" o sea que su ángulo de fase θ es cero. Si a partir de estas funciones normales se observa qué tanto se ha desplazado el valor mínimo positivo o el valor máximo positivo con respecto a ellas, se puede determinar el valor del ángulo de fase. El movimiento puede hacerse entre $-\pi$ y π .

4.5.1. ANGULO θ PARA UNA ONDA EXPRESADA EN LA FORMA SENO

Recorriendo entre $-\pi$ y π , si la onda se va a expresar en la forma seno; θ será aquel valor en donde está situado el primer mínimo positivo que se encuentre; si ese valor se encuentra a la izquierda del eje vertical entonces se tendrá un ángulo positivo ya que $(wt \pm \theta)$ quedaría como $(wt + \theta)$ y si ese valor se encuentra a la derecha, entonces se tendría un ángulo θ negativo ya que $(wt \pm \theta)$ quedaría como $(wt - \theta)$.

4.5.2. ANGULO θ PARA UNA ONDA EXPRESADA EN LA FORMA COSENO

Siguiendo el recorrido entre $-\pi$ y π , θ será aquel valor donde está situado el primer máximo positivo que se encuentre; si está a la izquierda entonces quedará $(wt + \theta)$ y si está a la derecha quedará $(wt - \theta)$.

4.6. CIRCUITOS SERIE Y PARALELO

4.6.1. CIRCUITO SERIE

Se define como circuito en serie aquel en que sus elementos estando conectados unos tras otros, permiten que les circule una misma corriente; aun cuando en sus

terminales presenten diferente voltaje.

Ejemplo:

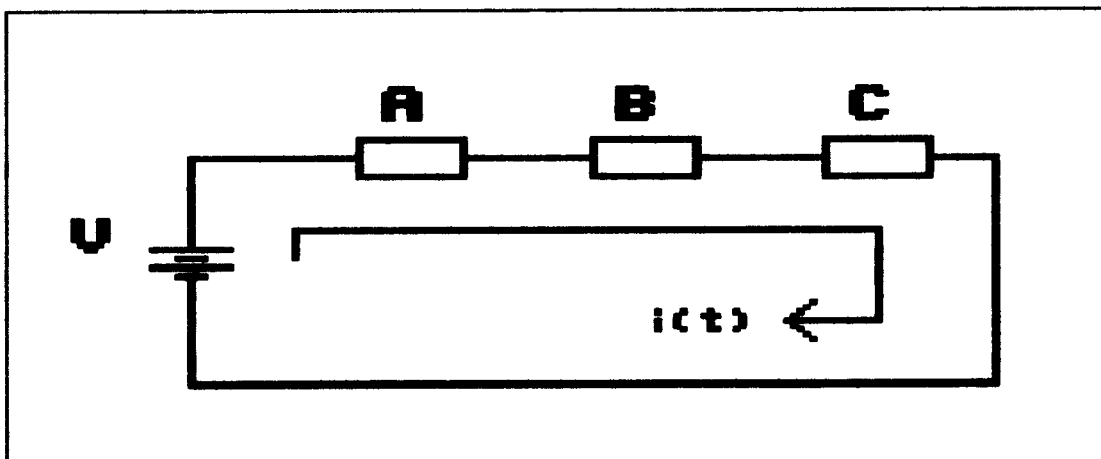


FIGURA 5. CIRCUITO SERIE

A través de A, B y C circula $i(t)$.

4.6.2. CIRCUITO PARALELO

Los circuitos en paralelo son aquellos cuyos elementos tienen los mismos puntos de acción de sus dos terminales y aparece entre ellos el mismo voltaje, aunque la corriente que circula a través de cada uno de ellos es diferente.

Ejemplo:

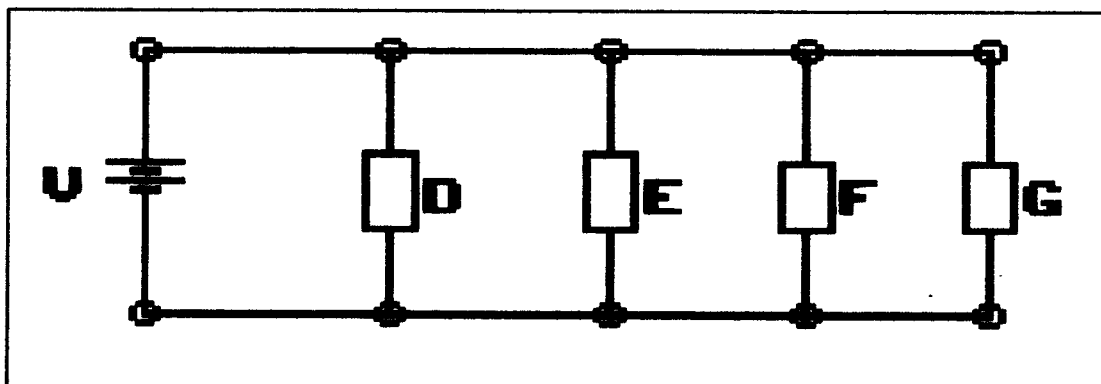


FIGURA 6. CIRCUITO PARALELO

Entre los terminales de D, E, F y G existe un voltaje V .

En general, en un circuito eléctrico pueden aparecer indiscriminadamente elementos conectados en serie o en paralelo y en la combinación de serie-paralelo, y se seguirán cumpliendo las mismas condiciones en cada grupo de elementos en serie y de elementos en paralelo.

Ejemplo:

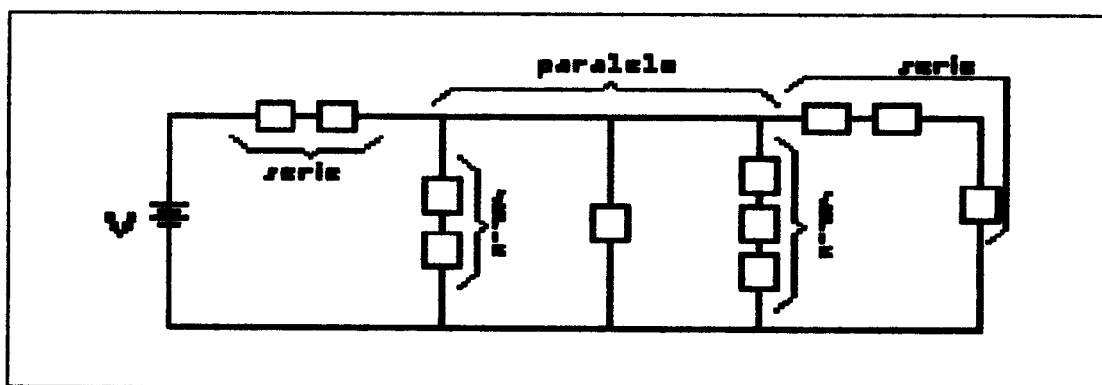


FIGURA 7. CIRCUITO COMBINADO SERIE-PARALELO

5. NUMEROS COMPLEJOS

5.1. NUMEROS REALES, IMAGINARIOS Y COMPLEJOS

Para obtener un manejo más sencillo de las soluciones de circuitos eléctricos se hace necesario disponer de una herramienta tal como el álgebra compleja. Esta simplifica la manipulación matemática de las cantidades senoidales y tiene la ventaja de incluir las magnitudes y ángulos de fase de la corriente, voltaje e impedancia en todas las ecuaciones relacionadas.

Se define en el álgebra compleja un plano de dos dimensiones, llamado plano complejo, donde el eje horizontal es una línea de números reales y el eje vertical es una línea de números imaginarios; se deben considerar ambos ejes con la misma escala (volts, amp, Ω , etc) y con las mismas divisiones por unidad de longitud.

Los números reales, ubicados en el eje horizontal del plano complejo dan idea de valores tangibles de cantidades como voltios, amperios y ohmios y no llevan

asociados con ellos directamente ángulos de fase. Se puede considerar como ejemplo de magnitudes reales el voltaje V de una batería, la corriente continua I que ella proporciona, y la resistencia R como elemento del circuito.

Los números imaginarios aparecen como una necesidad de expresar aquellos valores que no tienen significación real y que se pueden asociar con ángulos de fase, esto es, por ejemplo cuando se requiere extraer la raíz cuadrada de un valor negativo, no se puede establecer una idea real de éste hecho, debido a que cualquier número sea positivo o negativo al elevarse al cuadrado resultará positivo; por lo tanto no existirá ningún número real que elevado al cuadrado tenga un resultado negativo y entonces esto no se puede representar en el eje real. Se define por lo tanto un operador imaginario j que representará a la raíz cuadrada de -1 y podrá convertir en real el resto del valor que antes era negativo.

Ejemplo: $j = \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2j$$

$$\sqrt{-6} = \sqrt{-1 \cdot 6} = j\sqrt{6}$$

Por lo tanto el plano complejo el eje vertical corresponderá a los números imaginarios. En la

aplicación gráfica sobre el plano complejo se define j como el operador que hace girar a un segmento de línea dirigida 90° en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Por lo tanto, cada multiplicación sucesiva realizada por medio del operador j hace girar el segmento de línea en 90° adicionales:

Para hacer girar el segmento se multiplica por

90°	j
180°	j^2
270°	j^3
360°	j^4
$(m \cdot 90)^\circ$	j^m

Si se ubica un punto dentro de algún sector del plano complejo, corresponderá a éste una parte real y una parte imaginaria y por lo tanto el número se podrá expresar en la forma:

$$n = \text{real} + j \cdot \text{imaginario}$$

y se define como número complejo. Cuando la representación del número complejo involucra la parte real más la parte imaginaria con el operador j , se conoce como forma rectangular del número complejo. Existe una manera alterna de representar al número complejo si se

considera el ángulo θ que forma un segmento, que va desde el origen hasta el punto de coordenadas complejas, con el eje horizontal, esta representación se conoce como forma polar del número complejo y se expresa así:

$$A = A \angle \theta$$

donde A es el segmento ubicado en el plano complejo, que tiene como longitud A y como ángulo θ . Debe tenerse claro que la forma rectangular del número complejo representa al segmento como una parte real "y" una parte imaginaria, por lo tanto el signo "+" corresponde al conector "y", y no a la suma algebraica de ellos por cuanto no pueden nunca sumarse cantidades reales con cantidades imaginarias. Si se considera la siguiente figura pueden realizarse unas relaciones entre la forma polar y la forma rectangular del número complejo:

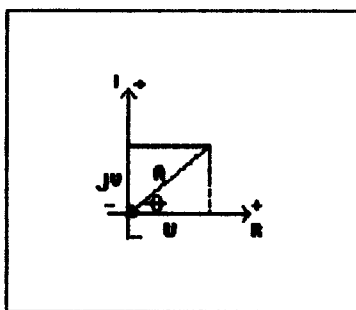


FIGURA 8. RELACION GRAFICA ENTRE LA FORMA POLAR Y LA FORMA RECTANGULAR DEL NUMERO COMPLEJO

Entonces:

$$A = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} v/u$$

$$u = A \cos \theta$$

$$v = A \sin \theta$$

Cuando se usan números complejos en forma polar dentro del plano complejo, los ángulos se miden desde el eje real positivo; un ángulo positivo es una medida en sentido contrahorario y un ángulo negativo es una medida en sentido horario.

Ejemplo:

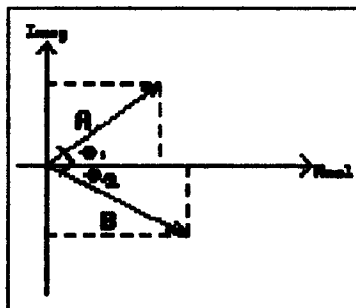


FIGURA 9. ÁNGULOS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN LA FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

5.2. SUMA Y RESTA DE COMPLEJOS

Cuando se desea sumar o restar dos o más números complejos se puede realizar gráficamente utilizando la

adición poligonal en el plano complejo. Cuando la operación se realiza por medio del algebra compleja, sólo sera posible utilizando la forma rectangular.

La adición o sustracción por medio del algebra compleja se lleva a cabo sumando o restando algebraicamente la parte real de los números entre sí y la parte imaginaria entre sí.

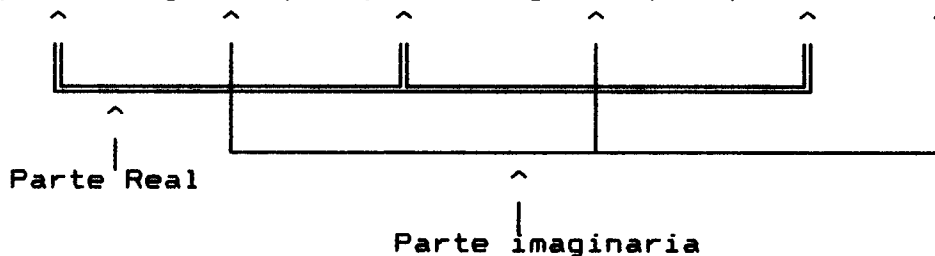
Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{Sumar} \\ \text{y} \\ \text{Restar} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = 74.31 + j66.91 \\ B = 48.50 - j35.20 \\ C = -30.38 + j32.14 \end{array} \right.$$

Suma:

$$A + B + C =$$

$$(74.31 + j66.91) + (48.50 - j35.20) + (-30.38 + j32.14)$$

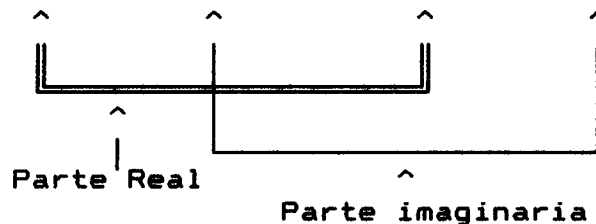


$$A + B + C = (74.31 + 48.50 - 30.38) + j(66.91 - 35.20 + 32.14)$$

$$A + B + C = 92.43 + j63.85$$

Resta:

$$B - C = (48.50 - j35.20) - (-30.38 + j32.14)$$



$$B - C = (48.50 - (-30.38)) + j (-35.20 - 32.14)$$

$$B - C = 78.88 - j67.34$$

Ejemplo: Resolver por suma poligonal : $A + B$

$$A = 35 \angle 60^\circ$$

$$B = 20 \angle 20^\circ$$

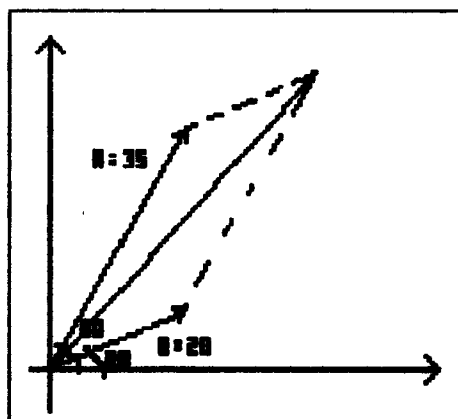


FIGURA 10. SUMA DE NUMEROS COMPLEJOS UTILIZANDO LA FORMA POLIGONAL

El procedimiento para esta suma poligonal es trazar paralelas a cada segmento por el extremo del otro segmento y la resultante será un segmento que va desde el

origen de los segmentos a sumar hasta el punto donde se cortan las paralelas de éstos.

5.3. MULTIPLICACION Y DIVISION DE COMPLEJOS

Los números complejos pueden expresarse además de su forma rectangular y polar en forma trigonométrica y exponencial.

La forma trigonométrica de un número complejo es:

$$A = A \cos \theta + j A \sin \theta$$

La forma exponencial de un número complejo es:

$$A = A e^{j\theta}$$

La multiplicación y división de números complejos 'puede realizarse para cualquiera de las formas de representación de éstos; sin embargo la multiplicación de complejos en forma trigonométrica no es muy usual.

La multiplicación de complejos en forma rectangular se realiza normalmente de acuerdo con las normas ordinarias del algebra, o sea:

$$A = a + jc$$

$$B = b + jd$$

$$\begin{aligned} A.B &= (a + jc)(b + jd) = (a.b + a.jd + jc.b + jc.jd) \\ &= (a.b + ja.d + jb.c + j^2c.d) \end{aligned}$$

$$\text{como } j^2 = -1 \implies A.B = (a.b - c.d) + j(a.d + b.c)$$

$$\text{Ejemplo: } A = 3 + j2$$

$$B = 4 + j5$$

$$\begin{aligned} A.B &= (3 + j2)(4 + j5) = 12 + j15 + j8 + j^210 \\ &= (12 - 10) + j(15 + 8) = 2 + j23 \end{aligned}$$

Para la división en la forma rectangular debe de multiplicarse el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, esta operación se conoce como racionalización del denominador.

El conjugado de un número complejo es su imagen de espejo en el plano complejo, así: el conjugado de $A=a+jb$ es $A^*=a-jb$.

El método de división de números complejos en forma rectangular es muy engorroso, por lo cual no es muy usado.

La multiplicación de complejos en forma exponencial, es sencilla comparada con la forma rectangular. Para multiplicar complejos en forma exponencial, se multiplican los coeficientes del número y se suman los exponentes del número e, o sea:

$$A = ae^{j\theta^1}$$

$$B = be^{j\theta^2}$$

$$A.B = a.b e^{j(\theta^1 + \theta^2)}$$

Para dividir complejos en forma exponencial se dividen los coeficientes del número y se restan los exponentes del número e:

$$\frac{A}{B} = \frac{ae^{j\theta^1}}{be^{j\theta^2}} = \frac{a}{b} e^{j(\theta^1 - \theta^2)}$$

Ejemplo: 1. Multiplicar A.B

2. Dividir A/B

$$A = 8e^{j40^\circ}$$

$$B = 2e^{j30^\circ}$$

$$1. A.B = (8e^{j40^\circ})(2e^{j30^\circ}) = 8 \times 2 e^{j(40^\circ + 30^\circ)} = 16e^{j70^\circ}$$

$$2. A/B = (8e^{j40^\circ})/(2e^{j30^\circ}) = 8/2 e^{j(40^\circ - 30^\circ)} = 4e^{j10^\circ}$$

A pesar de la facilidad relativa de multiplicar y dividir complejos en forma exponencial, generalmente se llevan a cabo estas operaciones en forma polar (cuando se involucran mas de dos números complejos). La multiplicación y la división de números complejos en forma polar, se realiza con el mismo procedimiento que en la forma exponencial, esto es:

$$\text{Multiplicar: } A = A / \theta_1$$

$$B = B / \theta_2$$

$$A.B = (A / \theta_1)(B / \theta_2) = A.B / \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{Dividir: } A = A / \theta_1$$

$$B = B / \theta_2$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A / \theta_1}{B / \theta_2} = \frac{A}{B} / \theta_1 - \theta_2$$

$$\text{Ejemplo: } A = 30 / \underline{65^\circ}$$

$$B = 15 / \underline{30^\circ}$$

$$1. A.B = (30 / \underline{65^\circ})(15 / \underline{30^\circ}) = 30*15 / \underline{65 + 30} = 450 / \underline{95^\circ}$$

$$2. A/B = (30 / \underline{65^\circ}) / (15 / \underline{30^\circ}) = 30/15 / \underline{65 - 30} = 2 / \underline{35^\circ}$$

El método más comunmente utilizado para efectuar la multiplicación y la división entre números complejos es expresándolos en su forma polar, ya que además de la sencillez, da información inmediata acerca de la magnitud y ángulos de fase de las componentes, productos y cocientes.

6. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL

6.1. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL

Los números complejos ofrecen una manera fácil de expresar magnitudes senoidales y por lo tanto pueden dar idea clara de estas magnitudes a partir de fasores ubicados en el plano complejo.

Como los valores de corriente y de voltaje alternos que se están estudiando están regidos por funciones senoidales o cosenoidales pueden expresarse como:

$$v = V_m \cos(\omega t \pm \theta_1) \Rightarrow V = V_m \angle \pm \theta_1$$

$$i = I_m \cos(\omega t \pm \theta_2) \Rightarrow I = I_m \angle \pm \theta_2$$

Si se expresa la relación del voltaje y la corriente por medio de la ley de Ohm, se puede definir la impedancia a partir de la notación compleja de voltajes y corrientes; ésta se conoce como impedancia compleja y es:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_m \angle \pm\theta_1}{I_m \angle \pm\theta_2} = \frac{V_m}{I_m} \angle \pm\theta_1 \mp \theta_2$$

Esta impedancia se puede expresar en su forma trigonométrica como:

$$Z = V_m/I_m \cos(\pm\theta_1 \mp \theta_2) \pm jV_m/I_m \sin(\pm\theta_1 \mp \theta_2)$$

$$\text{Si } R = V_m/I_m \cos(\pm\theta_1 \mp \theta_2)$$

$$X = V_m/I_m \sin(\pm\theta_1 \mp \theta_2)$$

la impedancia se puede expresar en forma rectangular como:

$$Z = R \pm jX$$

donde R será la parte real y jX la parte imaginaria.

En la teoría de circuitos se comprueba que R corresponde físicamente al valor de resistencia de un elemento resistivo de un circuito y X corresponde al valor en ohmios de reactancia de un elemento inductivo o capacitivo del circuito.

La reactancia inductiva o capacitiva indica el comportamiento de oposición al paso de corriente que presentan los capacitores y las inductancias cuando esta

corriente es alterna; como ese comportamiento es similar al presentado por la resistencia, se ha denominado a él reactancia y se expresa en ohmios. La reactancia asocia al elemento inductivo o capacitivo con la velocidad angular y por lo tanto con la frecuencia de la onda alterna que pasa por él, por lo tanto:

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = 1/\omega C$$

donde X_L es la reactancia inductiva y X_C es la reactancia capacitiva. La impedancia compleja será ahora:

$$Z = R + j\omega L \quad : \quad \text{Para resistencia y bobina}$$

$$Z = R - j/\omega C \quad : \quad \text{Para resistencia y condensador}$$

El inverso de la impedancia se conoce como admitancia y se denota como:

$$Y = 1/Z \quad (\text{Su unidad es el mho.})$$

Tanto la corriente, el voltaje y la impedancia, por ser cantidades representadas en complejos pueden ubicarse en el plano complejo y trabajar con ellos con fasores.

El fasor se define como un radio-vector giratorio de amplitud constante que gira con una velocidad ω conocida

en sentido contrario de las manecillas del reloj. Este radio-vector parte de un instante cualquiera llamado t_0 , con un eje de referencia horizontal y forma con el giro un ángulo en cada instante de valor ωt . De acuerdo con la posición original de partida, este radio-vector forma un ángulo θ con respecto a la horizontal, siendo positivo si gira en sentido contrahorario y negativo si gira en sentido horario. El radio-vector giratorio origina formas de onda senoidales.

Caracterización de un fasor:

Trabajando sólo con amplitud y ángulo de fase circuitalmente se tiene una solución, ya que ω es conocido.

Se puede caracterizar un fasor por medio de:

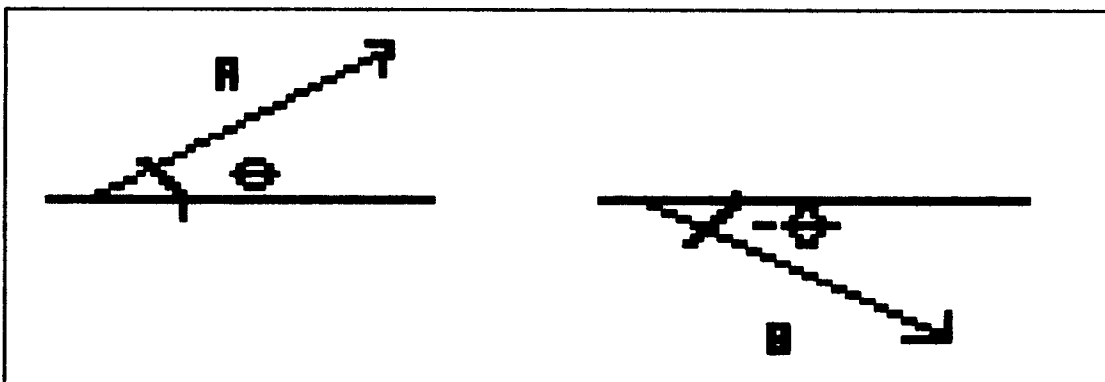


FIGURA 11. REPRESENTACION GRAFICA DE UN FASOR

A y B : amplitud.

θ : ángulo.

Cuando se expresa de esta manera se está hablando del dominio fasorial.

Transformación fasorial:

La transformación fasorial consiste en tener una función (senoidal o cosenoidal) en el dominio del tiempo y pasarla al dominio fasorial.

Pasos para la transformación fasorial:

Se deben expresar las funciones en el dominio del tiempo como funciones seno o coseno.

Cuando se expresan como funciones seno:

La transformación fasorial requiere del siguiente proceso:

- Todas las funciones coseno, se expresan como funciones seno mediante,

$$\cos wt = \sin(wt + 90^\circ)$$

- De todas esas funciones se toma para el dominio fasorial la amplitud (valor máximo) y su ángulo de fase,

obteniendo un fasor: $V_m / \underline{\text{ángulo de fase}}$

Cuando se expresan como funciones coseno:

La transformación fasorial requiere, que todas las funciones seno se expresen como funciones coseno mediante,

$$\sin wt = \cos(wt - 90^\circ)$$

De todas esas funciones se toma la amplitud y el ángulo de fase para el dominio fasorial.

Diagrama fasorial:

Es la representación gráfica de todos los fasores de voltaje y corriente que intervienen en un sentido.

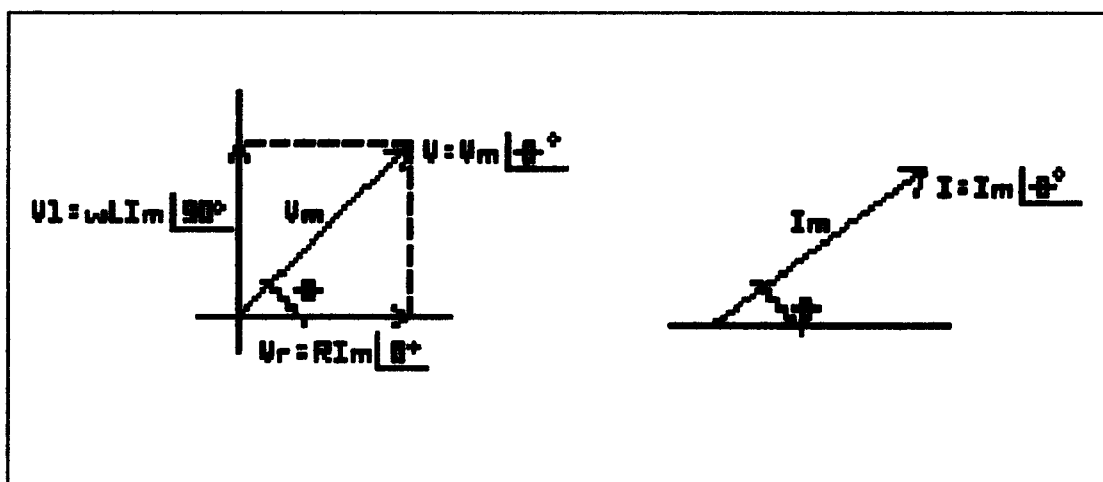


FIGURA 12. DIAGRAMA FASORIAL DE VOLTAJE Y DE CORRIENTE

Matemáticamente los fasores se pueden operar con todas las normas establecidas en el álgebra compleja de suma, resta, división y multiplicación de números complejos.

7. CIRCUITOS SERIE Y PARALELO

7.1. CIRCUITOS SERIE

La definición más general del circuito serie implica elementos conectados unos tras otros que permiten que les circule una misma corriente. Estos elementos pueden ser resistencias, bobinas y condensadores.

Todo circuito serie puede ser reemplazado por un circuito equivalente que permita encontrar su solución, o sea, voltajes y corrientes por cada elemento, del circuito, de una manera más sencilla, tanto visual como matemáticamente.

Dos circuitos son equivalentes si al hacer relaciones de voltaje y de corriente entre un par de puntos ellas resultan iguales.

Para llegar al circuito equivalente de un circuito serie se considerarán las siguientes situaciones:

a- **Circuito puramente resistivo:** Sus elementos son solo resistencias, la alimentación al circuito puede ser directa (DC) o alterna (AC); se analizará solo el caso de alimentación DC puesto que se tendrá exactamente el mismo comportamiento del circuito equivalente si se alimenta con AC.

b- **Circuito RL:** Sus elementos son resistencias e inductancias. La alimentación del circuito será necesariamente alterna, (AC) puesto que el comportamiento de la bobina ante alimentación DC, se asimila a un corto y no existe significación real.

c- **Circuito RC:** Sus elementos son resistencias y condensadores. La alimentación será alterna (AC). El comportamiento en DC del condensador es un circuito abierto y su análisis no tiene significación real.

d- **Circuito RLC:** Sus elementos son resistencias, inductancias y condensadores. Su análisis es la unión de los procedimientos para circuitos RL y RC.

Los circuitos puramente inductivos y puramente capacitivos se consideran como circuitos RL y RC con valores para R iguales a cero, aunque en la realidad no es posible encontrarlos.

7.1.1. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO

La resistencia equivalente viene dada por: $R_{eq} = V/I \text{ (}\Omega\text{)}$

V e I pueden ser dc o ,ac.

Entonces en un circuito serie se tiene que la corriente que circula por todos los elementos es la misma así:

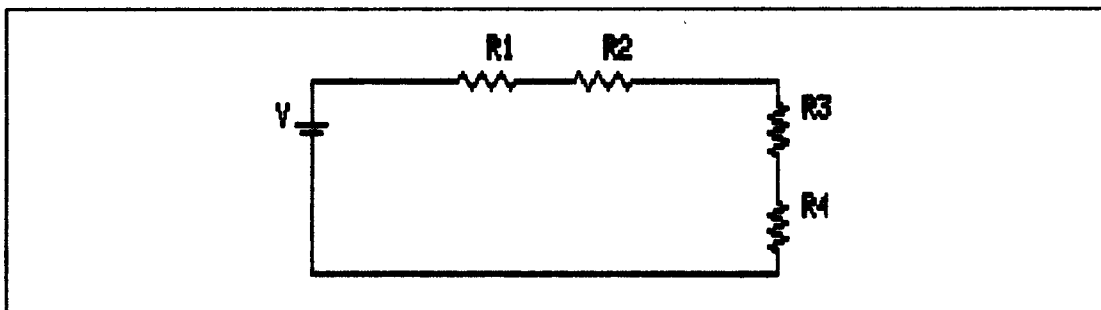


FIGURA 13. EJEMPLO DE CIRCUITO RESISTIVO

Por L.V.K.:

$$V = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4}$$

$$V = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_4$$

$$V = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Por lo tanto la resistencia equivalente de un circuito serie es igual a la suma de todas las resistencias

conectadas en serie. El circuito equivalente será:

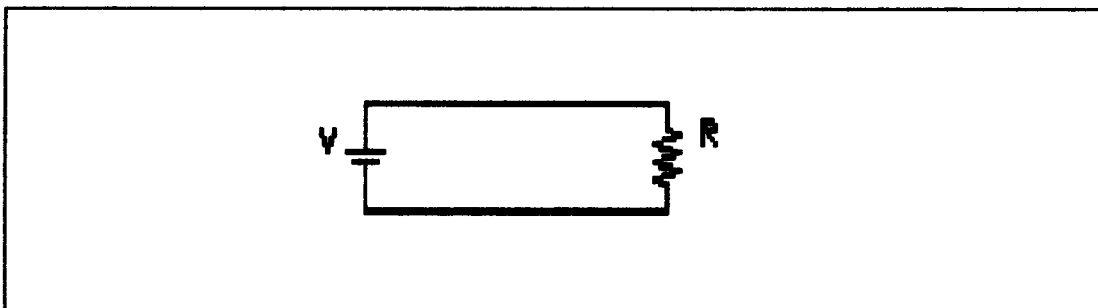


FIGURA 14. CALCULO DE LA RESISTENCIA EQUIVALENTE

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Ejemplo:

Hallar el circuito equivalente para los siguientes circuitos.

1.

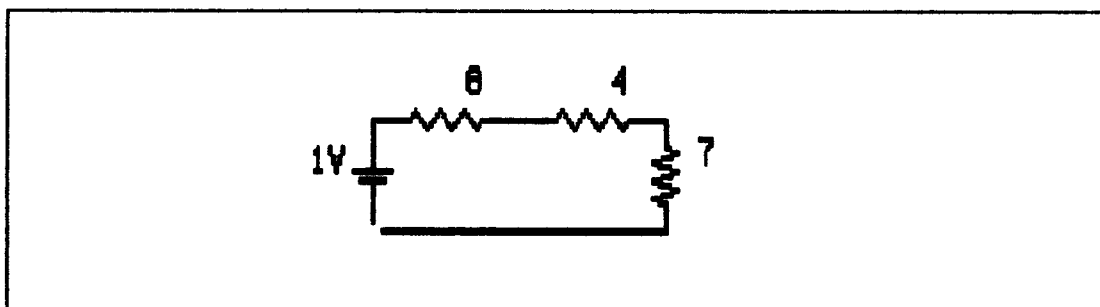


FIGURA 15. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE

2.

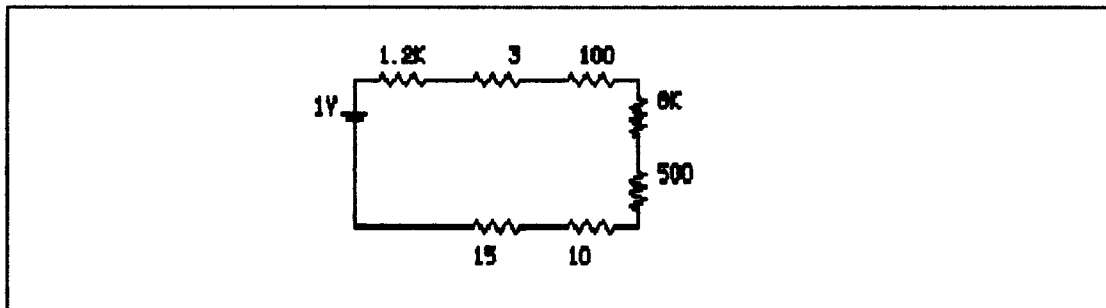


FIGURA 16. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE

3.

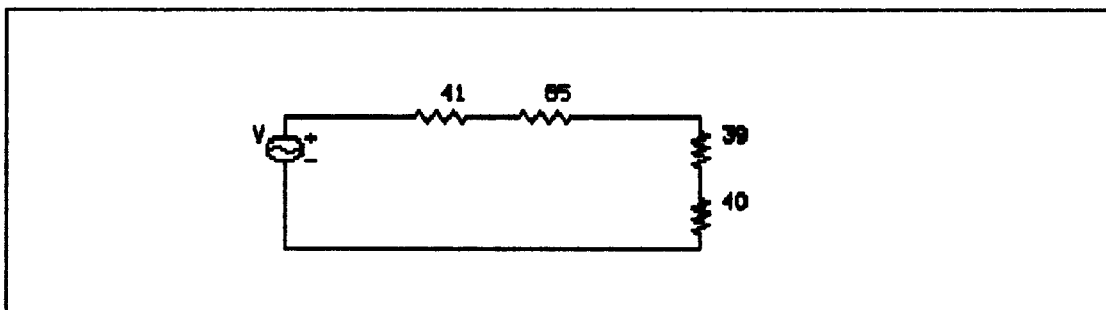


FIGURA 17. EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO SERIE

Solución:

1.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 8 + 4 + 7 = 19 \, \Omega$$

2.

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \\ &= 1.2K + 3 + 100 + 8K + 500 + 10 + 15 = 9828 \, \Omega \end{aligned}$$

3.

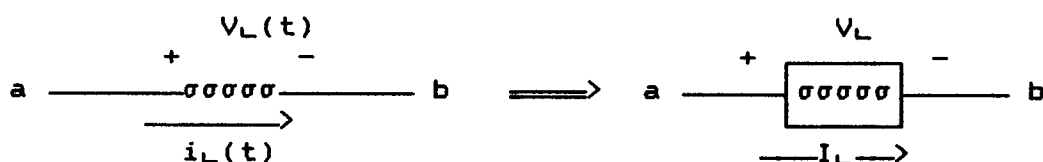
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 41 + 85 + 39 + 40 = 205 \, \Omega$$

7.1.2. CIRCUITO RL

Para proceder al cálculo del circuito equivalente para un circuito RL se debe hallar la impedancia de las bobinas que lo componen, para luego determinar la impedancia equivalente del circuito que está definida por:

$$Z_{eq} = \frac{V}{I}$$

En una rama con un elemento inductivo, la impedancia correspondiente es:



$$Z_L = \frac{V_L}{I_L}$$

$$\text{Si } i_L(t) = I_m \cos \omega t \quad \longrightarrow \quad I_L = I_m / 0^\circ$$

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \cdot di/dt = L \cdot d(I_m \cos \omega t)/dt = -\omega L \cdot I_m \sin \omega t \\ &= \omega L \cdot I_m \cos(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}$$

$$V_L = \omega L I_m / 90^\circ$$

$$\frac{V_L}{I_L} = \frac{\omega L I_m / 90^\circ}{I_m / 0^\circ} = \omega L / 90^\circ \longrightarrow Z_L = j\omega L (\Omega)$$

Entonces el circuito equivalente para un circuito RL se desarrolla así: ($Z_R = R$; $Z_L = j\omega L$)

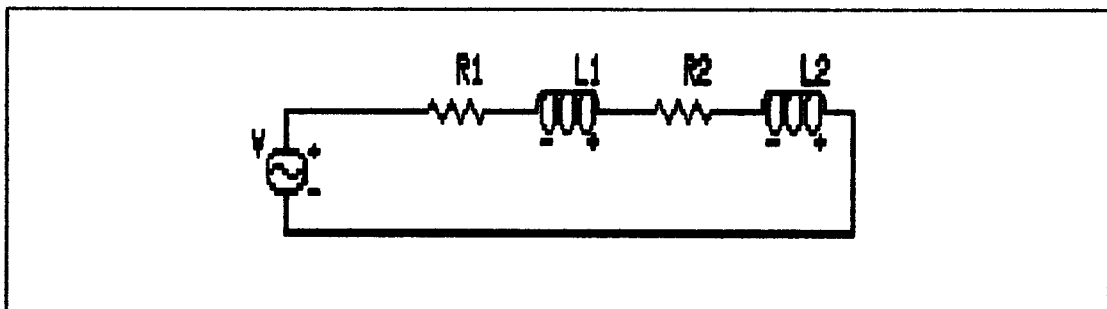


FIGURA 18. CIRCUITO RL SERIE

Por L.V.K.:

$$V = V_{ZR1} + V_{ZL1} + V_{ZR2} + V_{ZL2}$$

$$V = I \cdot Z_{R1} + I \cdot Z_{L1} + I \cdot Z_{R2} + I \cdot Z_{L2}$$

$$V = I (Z_{R1} + Z_{L1} + Z_{R2} + Z_{L2})$$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = Z_{R1} + Z_{L1} + Z_{R2} + Z_{L2}$$

Ejemplo:

Hallar el equivalente de los siguientes circuitos:

1.

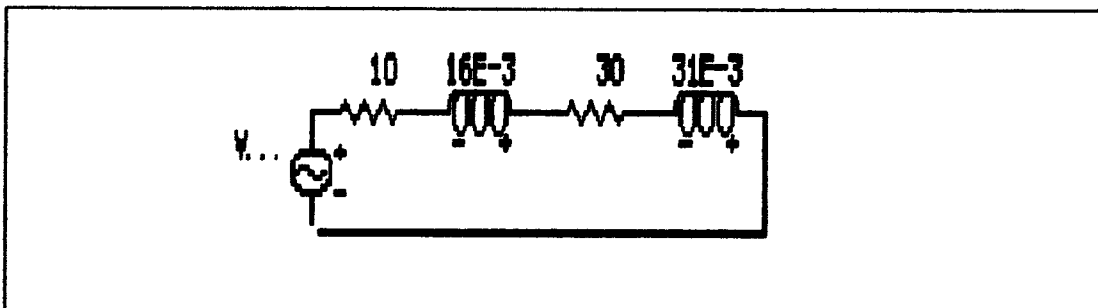


FIGURA 19. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RL SERIE

2.

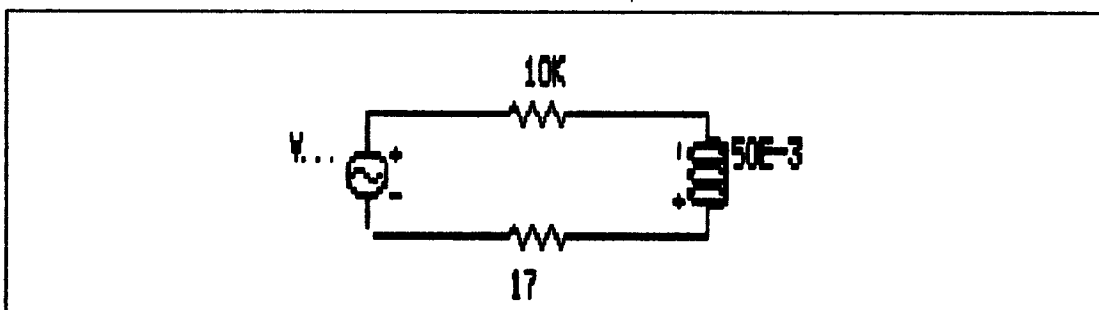


FIGURA 20. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RL SERIE

3.

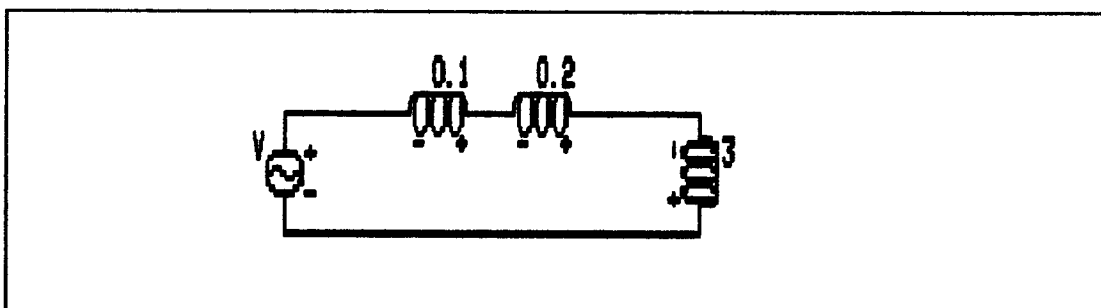


FIGURA 21. EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO RL SERIE

Solución:

1.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377$$

$$Z_1 = 10 \, \Omega \qquad Z_2 = j\omega L = j(377)(16 \cdot 10^{-3}) = j6.032 \, \Omega$$

$$Z_3 = 30 \, \Omega \qquad Z_4 = j\omega L = j(377)(31 \cdot 10^{-3}) = j11.687 \, \Omega$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 10 + j6.032 + 30 + j11.687$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = 40 + j17.72$$

2.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377$$

$$Z_1 = 10 \, k\Omega \qquad Z_2 = j\omega L = j(377)(50 \cdot 10^{-3}) = j18.85$$

$$Z_3 = 17 \, \Omega$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 10 \cdot 10^3 + j18.85 + 17$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = 10017 + j18.85$$

3.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377$$

$$Z_1 = j\omega L_1 = j(377)(0.1) = j37.7 \, \Omega$$

$$Z_2 = j\omega L_2 = j(377)(0.2) = j75.4 \, \Omega$$

$$Z_3 = j\omega L_3 = j(377)(3) = j1131 \, \Omega$$

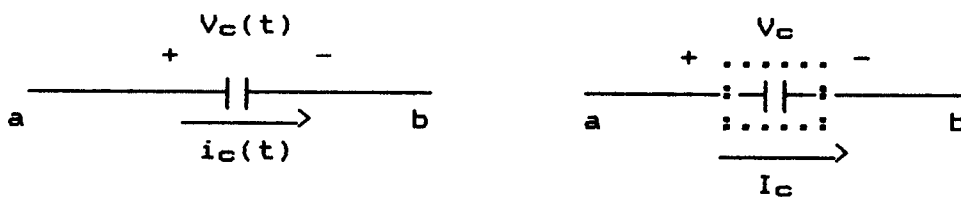
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = j37.7 + j75.4 + j1131$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = j1241.1 \, \Omega$$

7.1.3. CIRCUITO RC

Al igual que para el circuito RL, el procedimiento central del cálculo del circuito equivalente para un circuito RC es hallar la impedancia de los condensadores que lo componen y luego calcular la impedancia equivalente del circuito como la suma de todas las impedancias en serie; como se demostrará.

En una rama con un elemento capacitivo, la impedancia correspondiente es:



$$Z_C = \frac{V_C}{I_C}$$

$$\text{Si } V_c(t) = V_m \cos wt \implies V_c = \underline{0^\circ}$$

$$i_c = C \frac{dV_c(t)}{dt} = C \frac{d(V_m \cos wt)}{dt} = -\omega C V_m \sin wt \implies$$

$$i_c(t) = \omega C V_m \cos(wt + 90^\circ)$$

$$I_c = \omega C V_m \underline{90^\circ}$$

$$\implies Z_C = \frac{V_c}{I_c} = \frac{V_m \underline{0^\circ}}{\omega C V_m \underline{90^\circ}} = \frac{1}{\omega C} \underline{-90^\circ} \implies Z = \frac{-j}{\omega C} \Omega$$

Entonces el circuito equivalente para un circuito RC se desarrolla para sus impedancias, así: ($Z_R = R$; $Z_C = -j/\omega C$)

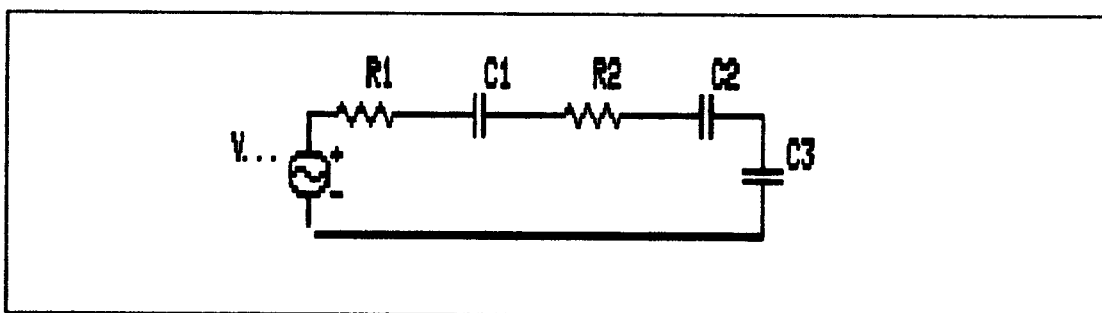


FIGURA 22. CIRCUITO RC SERIE

Por L.V.K.:

$$V = V_{ZR1} + V_{ZC1} + V_{ZR2} + V_{ZC2} + V_{ZC3}$$

$$V = IZ_{R1} + IZ_{C1} + IZ_{R2} + IZ_{C2} + IZ_{C3}$$

$$V = I (Z_{R1} + Z_{C1} + Z_{R2} + Z_{C2} + Z_{C3})$$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = Z_{R1} + Z_{C1} + Z_{R2} + Z_{C2} + Z_{C3} + Z_{C32}$$

Ejemplo:

Hallar el circuito equivalente de los siguientes circuitos:

1. $f = 60 \text{ Hz.}$

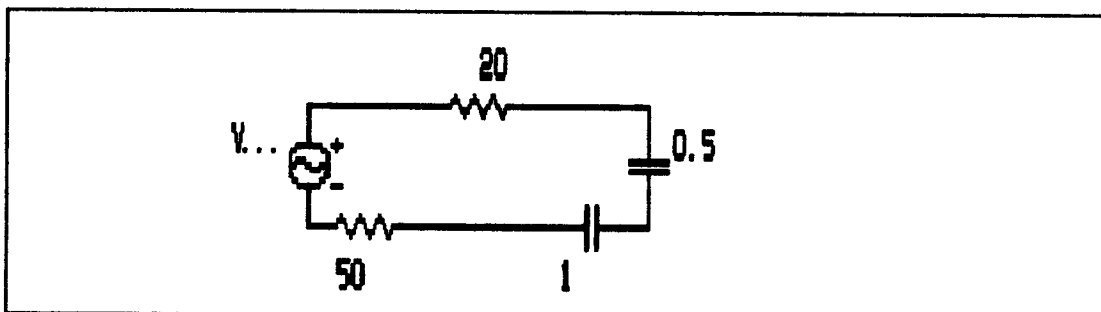


FIGURA 23. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RC SERIE

2. $f = 60 \text{ Hz.}$

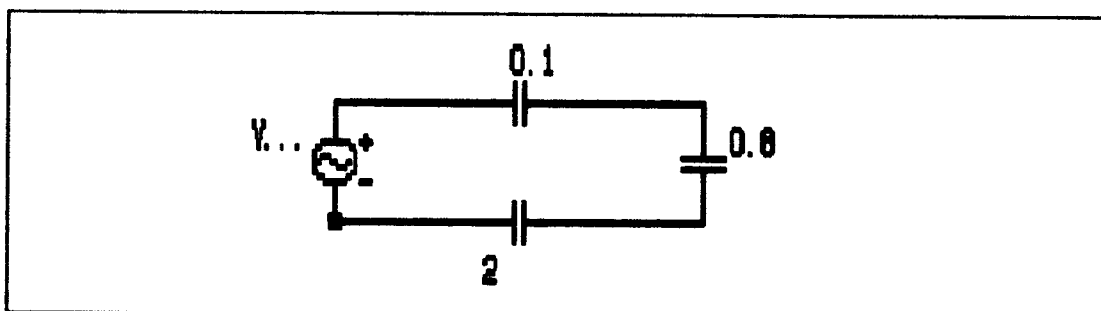


FIGURA 24. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RC SERIE

Solución:

1.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377$$

$$Z_1 = 20 \, \Omega$$

$$Z_2 = -j/\omega C = -j/(377)(0.5) = -j5.3 \times 10^{-3}$$

$$Z_3 = -j/\omega C = -j/(377)(1) = -j2.65 \times 10^{-3}$$

$$Z_4 = 50 \, \Omega$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 20 - j5.3 \times 10^{-3} - j2.65 \times 10^{-3} + 50$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = 70 - j7.95 \times 10^{-3}$$

2.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377$$

$$Z_1 = -j/\omega C_1 = -j/(377)(0.1) = -j26.52 \, m\Omega$$

$$Z_2 = -j/\omega C_2 = -j/(377)(0.8) = -j3.31 \, m\Omega$$

$$Z_3 = -j/\omega C_3 = -j/(377)(2) = -j1.32 \, m\Omega$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = -j26.52 \times 10^{-3} - j3.31 \times 10^{-3} - j1.32 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = -j31.15 \, m\Omega$$

7.1.4. CIRCUITO RLC

El circuito equivalente para un circuito RLC se halla combinando los métodos para circuito RL y circuito RC que consisten en hallar las impedancias correspondientes a cada elemento del circuito y luego calcular la impedancia equivalente como la suma de todas las impedancias en serie.

Entonces, el circuito equivalente del siguiente circuito serie es:

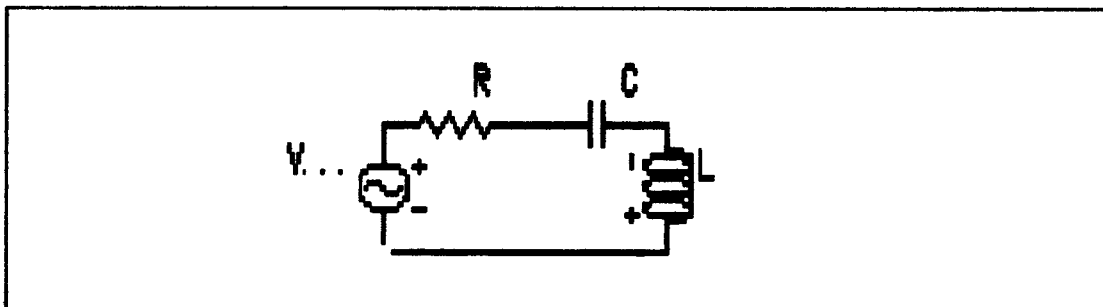


FIGURA 25. CIRCUITO RLC SERIE

$$Z_R = R$$

$$Z_C = -j/\omega C$$

$$Z_L = j\omega L$$

Por L.V.K.:

$$V = V_{ZR} + V_{ZC} + V_{ZL}$$

$$V = IZ_R + IZ_C + IZ_L$$

$$V = I(Z_R + Z_C + Z_L)$$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = Z_R + Z_C + Z_L$$

Ejemplo:

Hallar el circuito equivalente:

$$f = 60 \text{ Hz.}$$

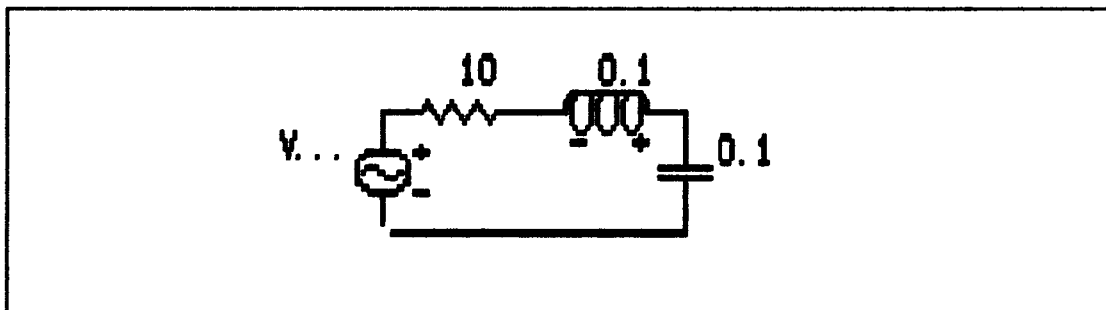


FIGURA 26. EJERCICIO EXPLICATIVO CIRCUITO RLC SERIE

Solución:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377$$

$$Z_1 = 10 \, \Omega$$

$$Z_2 = j\omega L = j(377)(0.1) = j37.7 \, \Omega$$

$$Z_3 = -j/\omega C = -j/(377)(0.1) = -j26.52 \, \text{m}\Omega$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 10 + j37.7 - j26.52 \times 10^{-3}$$

$$Z_{eq} = 10 + j37.67 \, \Omega$$

7.2. CIRCUITOS PARALELO

Los circuitos en paralelo son aquellos en que sus elementos están conectados unos con otros de sus dos terminales correspondientemente y aparece entre ellos el mismo voltaje. Los elementos que constituyen estos circuitos pueden ser resistencias, bobinas y condensadores. Al igual que los circuitos serie, los circuitos paralelo permiten expresarse como circuitos equivalentes que faciliten su manejo. Fundamentalmente el manejo de los elementos que constituyen el circuito se facilita cuando se calculan sus impedancias correspondientes y se trabaja, por lo tanto, en el dominio de la frecuencia. Entonces la reducción del circuito paralelo a su circuito equivalente se llevará a cabo a partir de las impedancias del circuito, calculadas anteriormente.

El circuito paralelo puede analizarse básicamente de dos formas, dependiendo de los elementos conectados en él. Se debe hacer claridad de que el concepto de impedancia surge a partir del comportamiento de las bobinas y condensadores ante la presencia de un voltaje y una corriente alterna y por lo tanto en D.C. sólo tiene sentido para circuitos compuestos únicamente de resistencias.

Se hallará el circuito equivalente del circuito paralelo ante los siguientes casos:

a- **Circuito resistivo puro:** Sus elementos son sólo resistencias y su análisis es similar si su alimentación es D.C. o A.C.; por lo tanto el análisis se realizará para alimentación D.C. y será aplicable para circuitos con alimentación A.C.

b- **Circuito RLC:** Se presentan aquí los elementos resistivos, inductivos y capacitivos. Su análisis tiene significación para circuitos con alimentación A.C. y se realiza con todos los elementos al mismo tiempo, puesto que se hace a partir de impedancias en general, y el cálculo de cada impedancia es el que establece la diferenciación de cada elemento.

7.2.1. CIRCUITO RESISTIVO PURO

La relación entre el voltaje y la corriente, de acuerdo con la ley de Ohm, es la resistencia; entonces se define la resistencia equivalente como:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} (\Omega)$$

V , I pueden ser A.C. o D.C.

En un circuito paralelo se tiene que el voltaje que se presenta en los terminales de cada elemento es igual al del elemento conectado en paralelo a él:

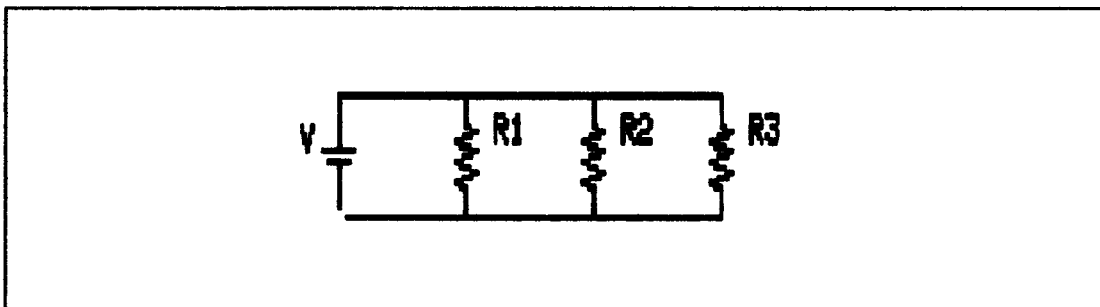


FIGURA 27. CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO

Aplicando L.C.K. en el nodo I:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Por la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{V_{R1}}{R_1} + \frac{V_{R2}}{R_2} + \frac{V_{R3}}{R_3}$$

$$V_{R1} = V_{R2} = V_{R3} = V$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} \Rightarrow I = V \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ejemplo:

Hallar el circuito equivalente para los siguientes circuitos:

1.

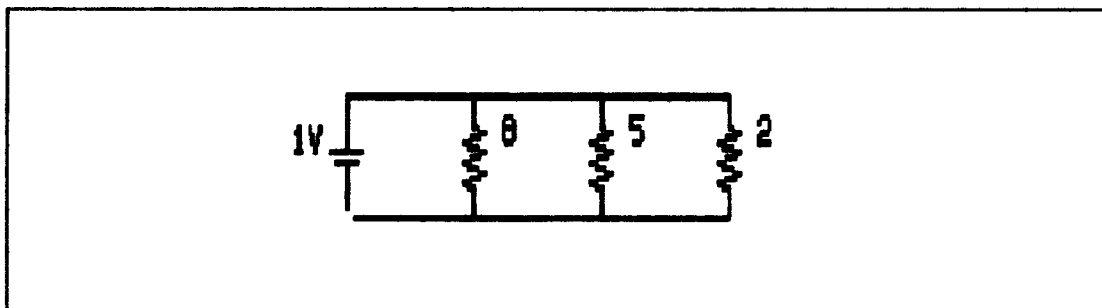


FIGURA 28. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO

2.

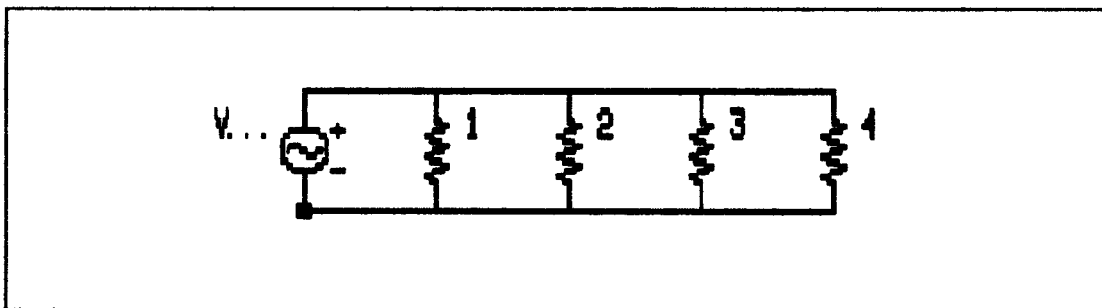


FIGURA 29. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO PARALELO PURAMENTE RESISTIVO

Solución:

1.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 0.125 + 0.2 + 0.5 = 0.825$$

$$\Rightarrow R_{eq} = 1/0.825 = 1.21 \, \Omega$$

2.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + 0.5 + 0.33 + 0.25 = 2.08$$

$$R_{eq} = 1/2.08 = 0.48 \, \Omega$$

7.2.2. CIRCUITO RLC

El circuito equivalente para un circuito paralelo RLC se halla calculando primero la impedancia correspondiente a cada elemento y luego se procede a hallar la impedancia equivalente, como se mostrará.

La impedancia correspondiente a cada elemento R, L o C de un circuito es:

Impedancia de un elemento resistivo: $Z_R = R$

Impedancia de un elemento inductivo: $Z_L = j\omega L$

Impedancia de un elemento capacitivo: $Z_C = -j/\omega C$

Entonces para calcular el circuito equivalente se tiene:

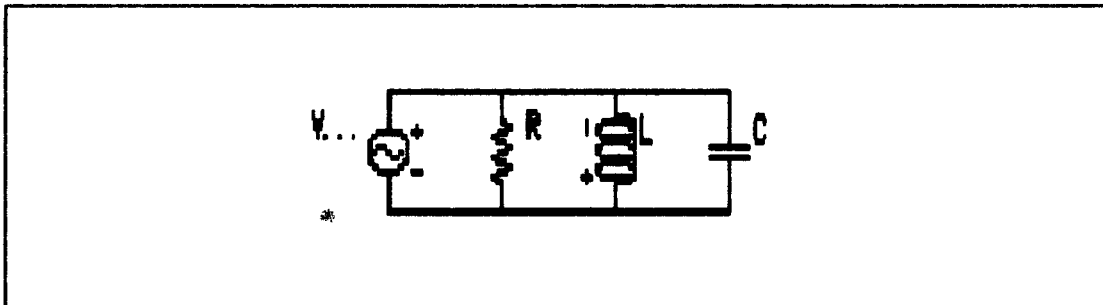


FIGURA 30. CIRCUITO RLC PARALELO

Se expresan sus elementos en impedancias y todo el circuito en el dominio fasorial:

$$V_{ZR} = V_{ZL} = V_{ZC}$$

Aplicando L.C.K. en el nodo 1:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{V_{ZR}}{Z_R} + \frac{V_{ZL}}{Z_L} + \frac{V_{ZC}}{Z_C} \Rightarrow I = V \left[\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \right]$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\left[\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \right]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

Ejemplo:

Hallar el circuuito equivalente de:

1. $f = 60 \text{ Hz}$.

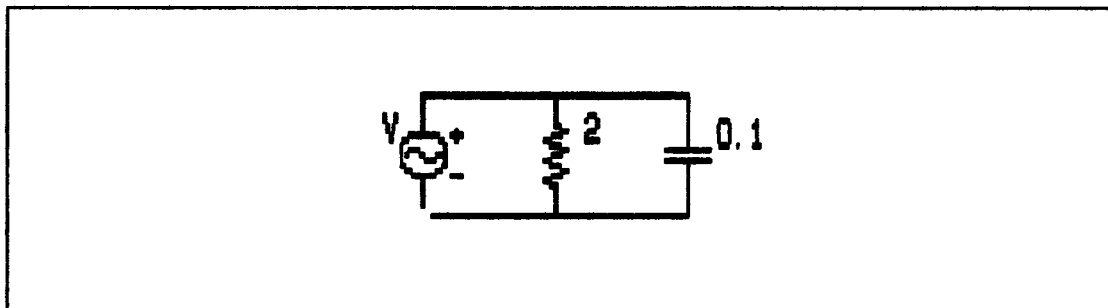


FIGURA 31. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. CIRCUITO RC PARALELO

2. $f = 60 \text{ Hz}$.

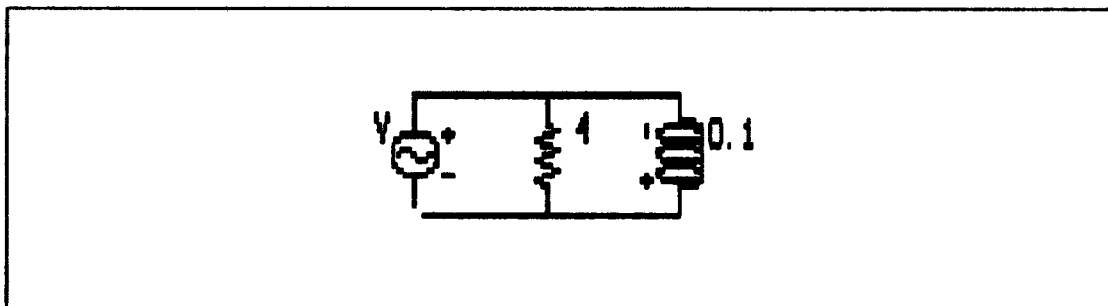


FIGURA 32. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. CIRCUITO RL PARALELO

3. $f = 60 \text{ Hz}$.

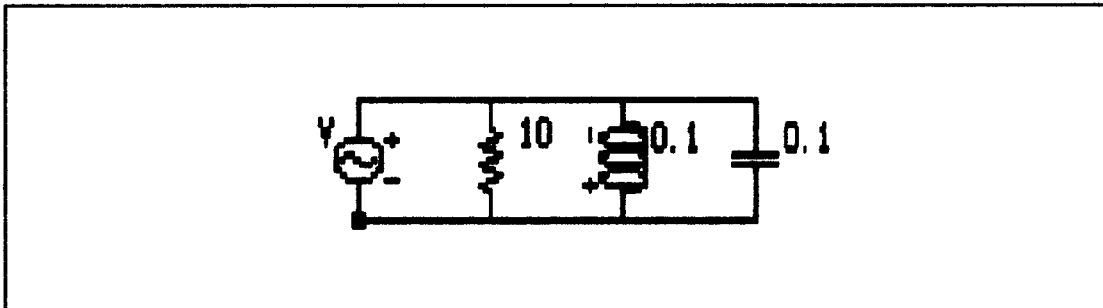


FIGURA 33. EJERCICIO EXPLICATIVO 3. CIRCUITO RLC PARALELO

Solución

1.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377$$

$$Z_1 = 2 \, \Omega \qquad Z_2 = -j/(377)(0.1) = -j26.52 \, \text{m}\Omega$$

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{-j26.52 \times 10^{-3}} = 0.5 + j \frac{1}{26.52 \times 10^{-3}}$$

$$1/Z_{\text{eq}} = 0.5 + j37.7 \Rightarrow Z_{\text{eq}} = 1/(0.5 + j37.7) = 1/(37.7/\underline{89.94})$$

$$Z_{\text{eq}} = 0.352 - j26.517 \times 10^{-3}$$

2.

$$\omega = 2\pi f = 377$$

$$Z_1 = 4 \, \Omega \qquad Z_2 = j\omega L = j(377)(0.1) = j37.7$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{j37.7} = 0.25 - j26.52 \times 10^{-3}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{0.25 - j26.52 \times 10^{-3}} = \frac{1}{0.25 \angle -6.05^\circ} = 4 \angle 6.05^\circ$$

$$Z_{eq} = 3.97 + j0.42$$

3.

$$\omega = 2\pi f = 377$$

$$Z_1 = 10 \, \Omega$$

$$Z_2 = j37.7 \, \Omega$$

$$Z_3 = -j26.52 \, m\Omega$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{j37.7} + \frac{1}{-j26.52 \times 10^{-3}} = 0.1 - j26.52 \times 10^{-3} + j37.7$$

$$= 0.1 + j37.67$$

$$Z_{eq} = 1/(0.1 + j37.67) = 1/(37.67 \angle 89.84) = 26.54 \times 10^{-3} \angle -89.84$$

$$Z_{eq} = 74.11 \times 10^{-6} + j26.54 \times 10^{-3}$$

7.3. DIVISOR DE VOLTAJE

A partir de un circuito con varias resistencias en serie

conectadas con una fuente de voltaje $V(t)$, se puede conocer el voltaje a través de cada resistencia de la siguiente manera:

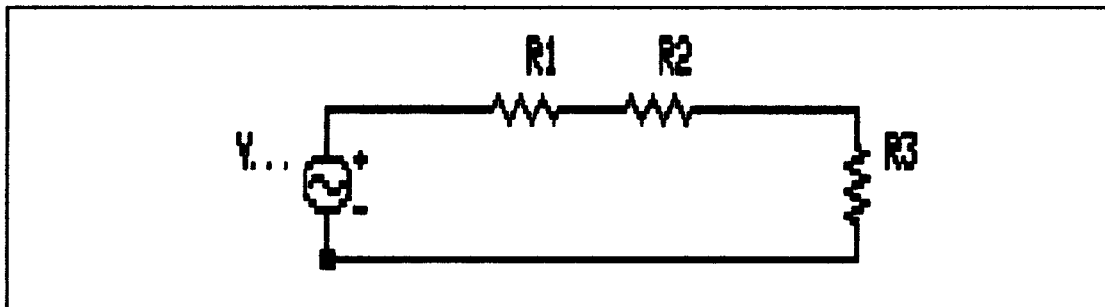


FIGURA 34. CIRCUITO SERIE PARA DIVISOR DE VOLTAJE

Por L.V.K.:

$$V(t) = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} \quad (1)$$

Por ley de Ohm:

$$V(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) + R_3 i(t) \quad (2)$$

$$V(t) = (R_1 + R_2 + R_3) i(t) \Rightarrow i(t) = V(t) / (R_1 + R_2 + R_3) \quad (3)$$

Iguando (1) y (2) se tiene:

$$V_{R1} = R_1 i(t) ; \quad V_{R2} = R_2 i(t) ; \quad V_{R3} = R_3 i(t) \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (4):

$$V_{R1} = R_1 * V(t) / (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$V_{R2} = R_2 * V(t) / (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$V_{R3} = R_3 * V(t) / (R_1 + R_2 + R_3)$$

De las deducciones anteriores se puede establecer que el voltaje a través de cada resistencia es igual al voltaje aplicado de la fuente multiplicado por la resistencia considerada y dividido por la suma de las resistencias del circuito.

Ejemplo:

Calcular el voltaje a través de la resistencia R_1 :

1.

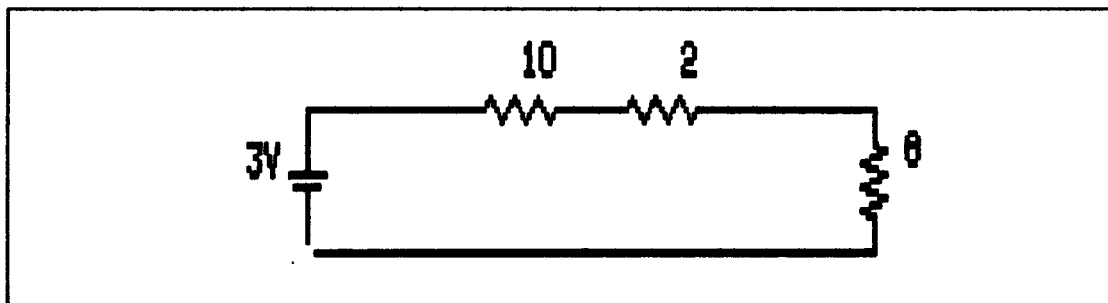


FIGURA 35. EJERCICIO EXPLICATIVO 1. DIVISOR DE VOLTAJE

2.

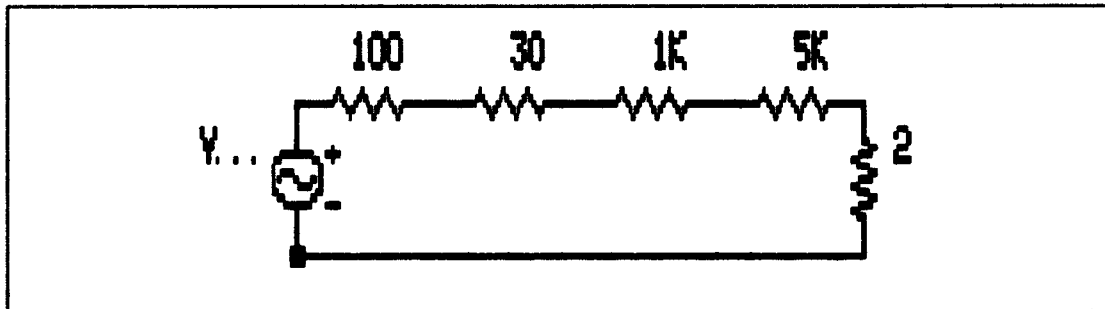


FIGURA 36. EJERCICIO EXPLICATIVO 2. DIVISOR DE VOLTAJE

Solución:

1.

$$V_{R1} = \frac{R_1 * V}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10\Omega * 3V}{10\Omega + 2\Omega + 8\Omega} = 1.5 V$$

2.

$$V_{R1} = \frac{R_1 * V}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{100\Omega * V_m \text{ sen } \omega t}{100 + 30 + 10^{-3} + 5*10^{-3} + 2} =$$

$$V_{R1} = \frac{100\Omega * V_m \text{ sen } \omega t}{6132} = 0.016 V_m \text{ sen } \omega t$$

7.4 DIVISOR DE CORRIENTE

Para conocer la corriente que circula por cada rama de un circuito con dos resistencias en paralelo, que están siendo alimentadas por una corriente $i(t)$, se procede así:

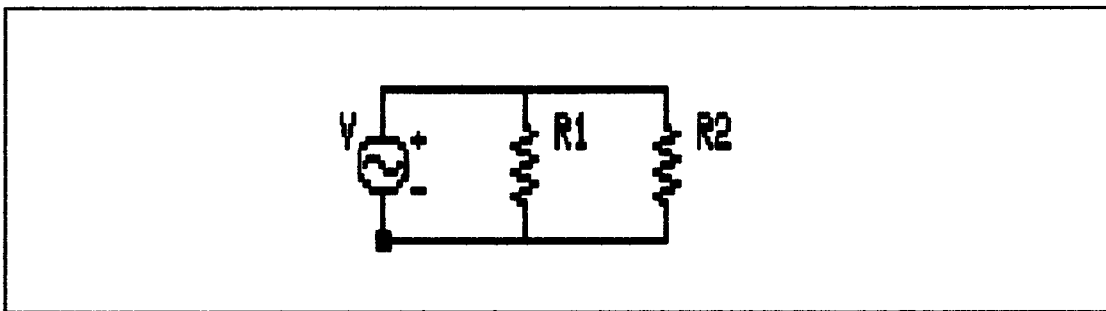


FIGURA 37. CIRCUITO PARALELO PARA DIVISOR DE CORRIENTE

Por L.C.K.:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (5)$$

Por L.V.K.:

$$V(t) = V_{R1} = V_{R2}$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \implies i_1 = \frac{R_2 i_2}{R_1} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5):

$$i(t) = \frac{R_2 i_2 + i_2}{R_1}$$

$$i(t) = \left[\frac{R_2}{R_1} + 1 \right] i_2(t)$$

$$i(t) = \left[\frac{R_2 + R_1}{R_1} \right] i_2(t)$$

$$i_2(t) = \frac{i(t) \cdot R_1}{R_2 + R_1} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6) :

$$i_2(t) = \frac{i(t) \cdot R_1 \cdot R_2}{(R_2 + R_1) \cdot R_1} \implies i_1(t) = \frac{i(t) \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

De lo anterior se concluye que la corriente que circula por cada resistencia es igual a la corriente aplicada multiplicada por la resistencia no considerada sobre la suma de las resistencias.

Ejemplo:

Hallar la corriente que circula por la resistencia R2.

$$i(t) = 1 \text{ A.}$$

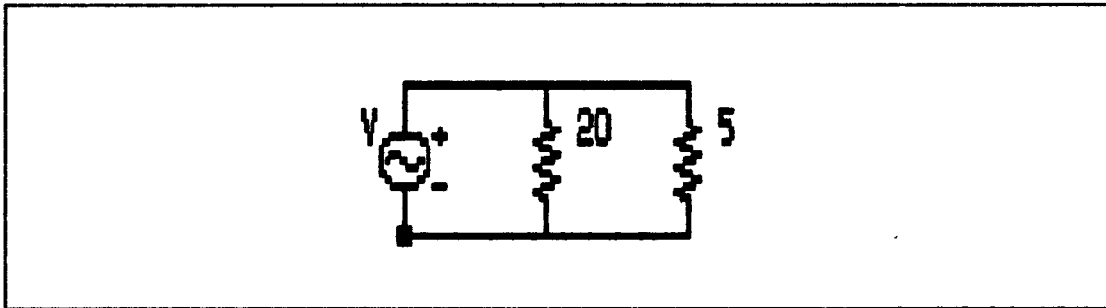


FIGURA 38. EJERCICIO EXPLICATIVO DE DIVISOR DE CORRIENTE

Solución:

$$i_2(t) = \frac{i(t) \cdot R_1}{R_2 + R_1} \Rightarrow i_2(t) = \frac{1 \text{ A} \cdot 20 \, \Omega}{20 \, \Omega + 5 \, \Omega} = \frac{4}{5} \Rightarrow i_2 = 0.8 \text{ A}$$

Si con la regla establecida se calcula la corriente i_1 , se demostrará que se cumple L.C.K.: $i(t) = i_1 + i_2$

$$i_1(t) = \frac{1 \text{ A} \cdot 5 \, \Omega}{20 \, \Omega + 5 \, \Omega} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ A}$$

$$i(t) = i_1 + i_2 = 0.2 + 0.8 = 1 \text{ A}$$

8. POTENCIA ELECTRICA Y FACTOR DE POTENCIA

8.1. POTENCIA ACTIVA

La potencia en un circuito eléctrico se define como la velocidad de transferencia de energía desde el generador a la resistencia. Esta es unidireccional, o sea, que no se devuelve de la resistencia hacia el generador, sino que se disipa en la resistencia en forma de energía calorífica.

Se denomina potencia activa, real o útil a la velocidad promedio de transferencia de la energía unidireccional.

La potencia activa que entrega una fuente sinusoidal a una resistencia se expresa como el valor eficaz de voltaje de la fuente por la corriente eficaz a través de la resistencia:

$$P_R = V_R \cdot I_R$$

y la unidad que mide la potencia activa es el vatio: W.

Si se expresa fasorialmente el voltaje y la corriente del circuito se tiene:

$$\begin{aligned} V_R &= V_T / 0^\circ & I_R &= I_T / \theta_T^\circ \\ V_R &= V_T & I_R &= I_T \cos \theta_T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_R = V_R \cdot I_R \Rightarrow P_R = V_T \cdot I_T \cos \theta_T$$

En general, la potencia activa demandada por un circuito desde una fuente sinusoidal es:

$$P_T = V_T \cdot I_T \cos \angle \begin{matrix} V_T \\ I_T \end{matrix}$$

Donde:

V_T : Voltaje de excitación en los terminales de entrada del circuito. V.

I_T : Corriente en los terminales de entrada del circuito. A.

P_T : Potencia activa demandada por el circuito. W.

$\angle \begin{matrix} V_T \\ I_T \end{matrix}$: Angulo de fase entre el voltaje y la corriente, medido desde el fasor de corriente I_T . El ángulo medido en sentido antihorario es positivo y el ángulo medido en sentido horario es negativo.

8.2. POTENCIA REACTIVA

La potencia reactiva es la potencia demandada por una inductancia o un condensador en un circuito eléctrico.

El producto del voltaje RMS a través de una inductancia, por la corriente RMS que circula por ella se llama potencia reactiva inductiva:

$$Q_L = V_L \cdot I_L$$

Q_L : Potencia reactiva demandada por la inductancia.

La unidad de potencia reactiva es el VAR (Voltiamperios reactivos).

La potencia reactiva demandada por la inductancia se conoce como potencia reactiva en atraso o vars en atraso, debido al atraso que presenta la corriente que circula por la inductancia ante el voltaje en sus terminales.

Si se considera el producto del voltaje RMS a través del condensador y la corriente RMS por el mismo, se está definiendo la potencia reactiva capacitiva:

$$Q_C = V_C \cdot I_C$$

A la potencia reactiva demandada por el condensador se le conoce como potencia reactiva en adelanto o vars en adelanto, ya que la corriente que circula por el condensador adelanta al voltaje a través de él.

La potencia reactiva demandada por un circuito con inductancias y condensadores es la combinación de vars en atraso y en adelanto.

La potencia reactiva entregada por una fuente a una carga se considerará positiva si la carga es inductiva y negativa si la carga es capacitiva, entonces, la potencia reactiva neta en un circuito con elementos inductivos y capacitivos será:

$$Q_T = |Q_L| - |Q_C|$$

$$Q_T = V_L \cdot I_L - V_C \cdot I_C$$

Para un circuito serie:

$$I_T = I_L = I_C \qquad V_L - V_C = V_T \sin \theta_T$$

$$\Rightarrow Q_T = V_L \cdot I_T - V_C \cdot I_T = (V_L - V_C) I_T$$

$$Q_T = V_T \cdot I_T \sin \theta_T$$

Para un circuito paralelo:

$$I_L - I_C = I_T \sin \theta_T \quad V_T = V_L = V_C$$

$$\Rightarrow Q_T = V_T \cdot I_L - V_T \cdot I_C = V_T (I_L - I_C)$$

$$Q_T = V_T \cdot I_T \sin \theta_T$$

Entonces la potencia reactiva demandada por cualquier circuito de una fuente sinusoidal es:

$$Q_T = V_T \cdot I_T \sin \angle \frac{V_T}{I_T}$$

Donde:

Q_T : Potencia reactiva entregada al circuito. VAR.

V_T : Voltaje de excitación en los terminales de entrada del circuito. V.

I_T : Corriente en los terminales de entrada del circuito.
A.

$\angle \frac{V_T}{I_T}$: Angulo de fase entre el voltaje y la corriente,
medido desde el fasor de corriente I_T .

8.3. POTENCIA APARENTE

Si se tiene un circuito en CC al cual se aplica una tensión V y fluye una corriente I hacia la carga, entonces se tendrá que la velocidad con que se transfiere la energía de la fuente a la carga será la potencia eléctrica y se expresa como el producto de voltaje por corriente:

$$P_{cc} = V_{cc} \cdot I_{cc}$$

Cuando se aplica este mismo concepto en el análisis de un circuito sinusoidal se puede obtener, a partir de los valores eficaces de tensión y de corriente, que son los que establecen equivalencias entre circuitos CC y CA, una potencia que aparentemente absorbe la carga.

Por lo tanto al producto $V_{ef} \cdot I_{ef}$ se le conoce como potencia aparente, puesto que la potencia que en realidad absorbe la carga está afectada por la diferencia de fase que se presente entre los fasores de voltaje y corriente.

La potencia aparente se designa con la letra S y su unidad es el voltiamperio, VA. Está relacionada con la potencia real y con la potencia reactiva de la siguiente forma:

$$S = V_{ef} \cdot I_{ef} \quad P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cos \angle \frac{V}{I} \quad Q = V_{ef} \cdot I_{ef} \sin \angle \frac{V}{I}$$

$$V_{ef}^2 \cdot I_{ef}^2 = V_{ef}^2 \cdot I_{ef}^2 \cos^2 \angle \frac{V}{I} + V_{ef}^2 \cdot I_{ef}^2 \sin^2 \angle \frac{V}{I}$$

$$V_{ef}^2 \cdot I_{ef}^2 = V_{ef}^2 \cdot I_{ef}^2 \left(\underbrace{\cos^2 \angle \frac{V}{I} + \sin^2 \angle \frac{V}{I}}_{\hat{1}} \right)$$

$$\implies S^2 = P^2 + Q^2$$

La relación existente entre la potencia real entregada a una carga P, y la potencia total que suministra la fuente se le denomina **factor de potencia**. Entonces:

$$f.p. = P/S$$

considerando que $P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cos \angle \frac{V}{I}$ y $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$ se tiene:

$$f.p. = \frac{P}{S} = \frac{V_{ef} \cdot I_{ef} \cos \theta}{V_{ef} \cdot I_{ef}}$$

$$f.p. = \cos \theta$$

de lo que se concluye que el factor de potencia es el coseno del ángulo de fase entre el voltaje de entrada del circuito y la corriente en los terminales de entrada del circuito, medido desde el fasor de corriente; este ángulo de fase θ se conoce generalmente como ángulo del factor de potencia.

Es evidente que el factor de potencia no puede ser mayor que uno por lo tanto la potencia real será menor que la potencia total entregada por la fuente, o potencia aparente y sólo será igual cuando el factor de potencia sea 1 o sea $\theta = 0$, lo que sucede en circuitos puramente resistivos donde el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente es cero.

8.4. TRIANGULO DE POTENCIAS

Observando las ecuaciones de potencia real, potencia reactiva y la relación entre éstas y la potencia aparente, se pueden representar en un triángulo rectángulo cuyos catetos son P y Q y la hipotenusa es S :

$$P = V.I \cos \theta$$

$$Q = V.I \sin \theta$$

$$S = V.I \implies P = S \cos \theta ; Q = S \sin \theta$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

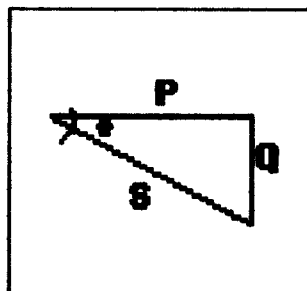


FIGURA 39. GRAFICO DEL TRIANGULO DE POTENCIAS

El triángulo de potencias es una representación que relaciona los tres tipos de potencias involucrados en un circuito eléctrico; variará la ubicación de la potencia reactiva de acuerdo con el signo del ángulo de fase que es positivo para un sistema inductivo y negativo para un sistema capacitivo, entonces los triángulos de potencia pueden ser:

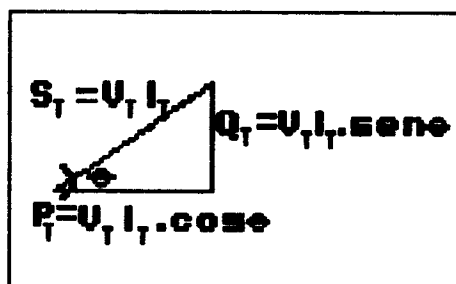


FIGURA 40. TRIANGULO DE POTENCIA PARA Q INDUCTIVO. F.P. EN ATRASO

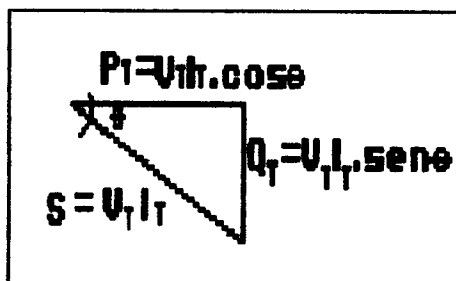


FIGURA 41. TRIANGULO DE POTENCIA PARA Q CAPACITIVO. F.P. EN ADELANTO

Donde θ : ángulo de fase entre el voltaje en los terminales de entrada del circuito y la corriente en los mismos terminales, medido desde el fasor de corriente. Ángulo del factor de potencia.

8.5. POTENCIA COMPLEJA

La potencia compleja es una simplificación que facilita el manejo y el entendimiento de las potencias real, reactiva y aparente.

La potencia compleja tendrá como magnitud el valor de potencia aparente; su parte real es la potencia real o media y su parte imaginaria la potencia reactiva.

$$\text{Si } I = I_m \angle 0^\circ \longrightarrow I_{\text{ef}} = I_m/2 \longrightarrow I = I_{\text{ef}} \angle 0^\circ$$

$$V = V_m \angle \pm\theta^\circ \longrightarrow V_{\text{ef}} = V_m/2 \longrightarrow V = V_{\text{ef}} \angle \pm\theta^\circ$$

$$\begin{aligned} P_c &= V \cdot I = V_{\text{ef}} \angle \pm\theta^\circ \cdot I_{\text{ef}} \angle 0^\circ = V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}} \angle \pm\theta \\ &= V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}} \cdot \cos \theta \pm j V_{\text{ef}} \cdot I_{\text{ef}} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$P_c = P \pm jQ$$

$$|P_c| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$$

8.6. CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA

Una fuente que entrega potencia a una carga, con un factor de potencia diferente de la unidad, debe entregar un mayor valor de KVA que si tuviera factor de potencia 1. Por ejemplo:

Una carga de 8 KW con un factor de potencia de 0.8 en atraso requiere de una potencia aparente de:

$$S = \frac{P}{f.p} = \frac{8KW}{0.8} = 10 \text{ KW}$$

Si esa carga operara a un factor de potencia de 1, la potencia que demandaría de la fuente sería:

$$S = \frac{P}{f.p} = \frac{8KW}{1} = 8 \text{ KW}$$

y la potencia reactiva demandada sería:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{8^2 - 8^2} = 0$$

Mientras que la potencia reactiva demandada por la carga a f.p igual a 0.8 en atraso es:

$$Q = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ KVAR en atraso (inductivo)}$$

Si se conecta en paralelo con la carga un condensador de 6 KVA, la potencia reactiva total entregada por la fuente será:

$$Q_L - Q_C = 6 \text{ KVAR} - 6 \text{ KVAR} = 0$$

y podrá por lo tanto suministrar la potencia real requerida por la carga a partir de una potencia de 8 KVA y no de 10 KVA como inicialmente sucedió, ya que el excedente de potencia requerido por la carga lo suministrará el condensador conectado en paralelo a ella.

La instalación de condensadores con el fin de reducir los voltiamperios entregados por la fuente a un sistema con factor de potencia en atraso, o sea un circuito inductivo, mejora el factor de potencia.

Si se utilizan condensadores de valor nominal suficientemente alto para suministrar toda la potencia reactiva del sistema, el factor de potencia se elevará a 1; pero si no es suficientemente alto, entregará parte de la energía suministrada a la carga pero el factor de potencia se elevará a un valor mejor que el inicial.

Entonces la corrección del factor de potencia puede hacerse conectando condensadores en serie o en paralelo con la carga, con el fin de reducir la demanda de

potencia desde el generador; aunque lo mas general es la conexión en paralelo. Otra ventaja que ofrece la corrección del factor de potencia es la reducción de la corriente de línea y por lo tanto de las pérdidas I^2R y caídas $I.R$ e $I.X_L$ en la línea de distribución.

Cuando se posee un factor de potencia malo se presentan inconvenientes tanto en la empresa generadora, líneas de distribución, como en la carga del usuario y todas estas anomalías son penalizadas en las tarifas del servicio de energía suministrado.

Se debe tener presente que para corregir el factor de potencia es mas beneficioso conectar los condensadores adecuadamente dimensionados en la carga y no en el generador porque con la instalación de los condensadores se aumenta el voltaje en el punto de instalación.

Ejemplo:

Una carga A de 12 KVA que opera a un f.p de 0.7 en atraso y una carga B de 10 KVA que opera a un f.p de 0.8 en atraso, están conectadas en paralelo y alimentadas por un generador de 440 V, 60Hz. Hallar:

a) Potencia activa total.

- b) Potencia reactiva total.
- c) Potencia aparente total.
- d) f.p del sistema.
- e) KVAR nominales de un condensador conectado en paralelo para aumentar el f.p del sistema a 1.
- f) Repetir e) para corregir el f.p a 0.9 en atraso.
- g) KVA de cada carga para las condiciones de e) y f).

Solución:

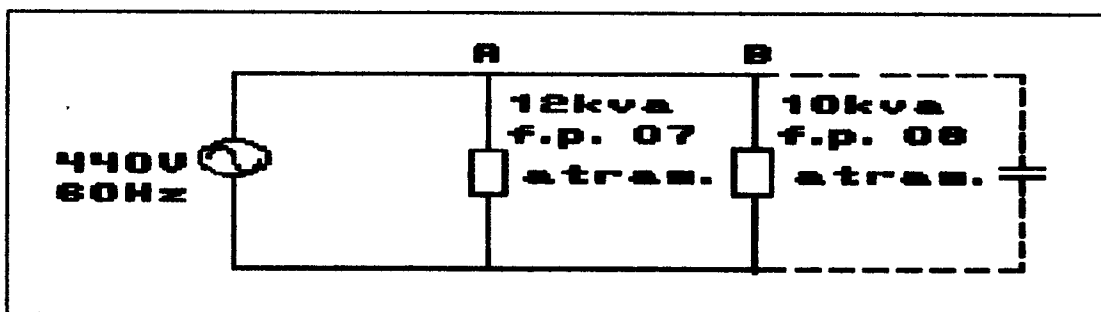


FIGURA 42. EJEMPLO EXPLICATIVO SOBRE POTENCIAS

$$a) \quad P_T = P_A + P_B = 12 \times 0.7 + 10 \times 0.8 = 16.4 \text{ KW}$$

$$b) \quad \theta_A = \cos^{-1} 0.7 = 45.57^\circ$$

$$\theta_B = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$$

$$Q_A = S_A \sin \theta_A = 12 \sin 45.57^\circ = 8.57 \text{ KVAR}$$

$$Q_B = S_B \sin \theta_B = 10 \sin 36.87^\circ = 6.00 \text{ KVAR}$$

$$Q_T = Q_A + Q_B = 8.57 + 6.00 = 14.57 \text{ KVAR}$$

$$c) \quad S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$S_T = \sqrt{(16.4)^2 + (14.57)^2} = 21.94 \text{ KVA}$$

$$d) \quad f.p_T = P_T/S_T = 16.4/21.94 = 0.747$$

$$\theta_T = \cos^{-1} f.p_T = \cos^{-1} 0.747 = 41.62^\circ$$

e) Para obtener un $f.p = 1$, el condensador instalado debe tener KVARs nominales iguales a los KVARs de atraso del sistema; así:

$$Q_C = Q_T = 14.57 \text{ KVARs}$$

f)

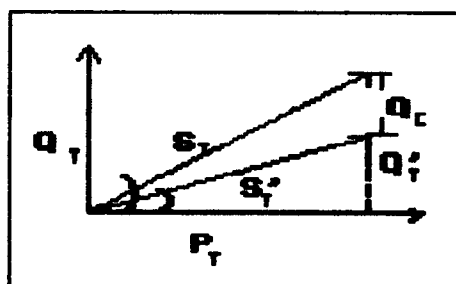


FIGURA 43. CONVERSION DEL FACTOR DE POTENCIA

Para un $f.p = 0.9$ en atraso el nuevo ángulo de factor de potencia será:

$$\theta'_T = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$$

Puesto que el condensador de corrección de $f.p$ no consume potencia activa, la componente de potencia activa no se

alterará para ningún valor de f.p corregido.

$$\Rightarrow P_T = 16.4 \text{ KW}$$

El valor de Q'_T se obtiene del triángulo de potencias anterior, utilizando la potencia activa del sistema y el ángulo de f.p nuevo:

$$\tan 25.84^\circ = Q'_T / 16.4 \Rightarrow Q'_T = 7.94 \text{ KVAR}$$

Entonces, del triángulo de potencias se tiene que los KVAR nominales del condensador a utilizar para llevar el f.p a 0.9 en atraso son:

$$Q_C = Q_T - Q'_T = 14.57 - 7.94 = 6.63 \text{ KVAR}$$

g) Los KVA y f.p de cada carga no se afectan si se añaden condensadores en paralelo:

Carga A: 12 KVA, f.p = 0.7 atrasado.

Carga B: 10 KVA, f.p = 0.8 atrasado.

9. ANALISIS DE UN CIRCUITO POR EL METODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA

9.1. METODO DE RESOLUCION, ELECCION DE MALLAS, NUMERO MINIMO DE MALLAS INDEPENDIENTES

El método de solución de un circuito por mallas de corriente utiliza la ley de voltajes de kirchhoff para obtener un conjunto de ecuaciones simultáneas que permiten determinar la magnitud y ángulos de fase de las corrientes que pasan por las ramas.

Se define como malla a un camino cerrado que no contiene ramas en su interior.

El método de corrientes de malla es un método sistemático y se pueden plantear unos pasos a seguir en el desarrollo de estos métodos. Estos pasos son:

1. En el circuito deben existir sólo fuentes de voltaje. Convertir todas las fuentes de corriente, si las hubiese, a fuentes de voltaje.

2. Marcar los nodos principales.
3. Determinar el número de ramas.
4. Determinar el número mínimo de mallas independientes a partir de la siguiente ecuación:

$$l = (b - n) + 1$$

donde l: número de mallas independientes

b: número de ramas

n: número de nodos principales

5. Seleccionar y marcar sobre el diagrama la dirección arbitraria asignada a cada corriente de malla. Una vez escogidas no deberán cambiarse durante la solución. Cada malla debe poseer al menos una fuente o impedancia que no pertenezca a otra malla para que todas las ecuaciones sean independientes.

6. Escribir las ecuaciones de malla, a medida que se viaja en la dirección asignada alrededor de las mallas respectivas, por medio de las corrientes de Kirchhoff.

a) Las fuentes de voltaje se suponen positivas (+) si la corriente de malla en el sentido asignado entra por el terminal negativo y sale por el positivo de la fuente, y

negativa (-) en caso contrario.

b) Las caídas de voltaje se consideran positivas (+) si la corriente en ellas está en la misma dirección que se supuso para la corriente de malla y negativas en caso contrario.

9.2. MATRICES

Las ecuaciones que se plantean en el proceso desarrollado para el método de mallas se puede expresar en forma matricial para utilizar las ventajas del álgebra matricial en el análisis del circuito.

Las matrices que se forman en el método de mallas son:

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} : \text{Matriz de impedancias}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} : \text{Matriz de corrientes de malla}$$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} : \text{Matriz de fuentes de voltaje}$$

Los términos de las matrices que surgen en este método son:

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} & -Z_{13} & \dots\dots \\ -Z_{21} & Z_{22} & -Z_{23} & \dots\dots \\ -Z_{31} & -Z_{32} & Z_{33} & \dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Z_{11} : Sumatoria de las impedancias de la malla I

Z_{12} : Impedancia total (compartida) entre las mallas I y II

Z_{13} : Impedancia total entre las mallas I y III

Z_{22} : Sumatoria de las impedancias de la malla II

Z_{21} : Impedancia total compartida entre las mallas II y I

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$I_1, I_2 \dots I_n$: Corrientes de las mallas $I_1, I_2 \dots I_n$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma V_{11} \\ \Sigma V_{22} \\ \Sigma V_{33} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ΣV_{nn} : Suma de las fuentes de voltaje de la malla n.

Con la definición de los términos que conforman las matrices se pueden establecer los valores correspondientes a cada matriz con simple inspección del circuito.

Ejemplo:

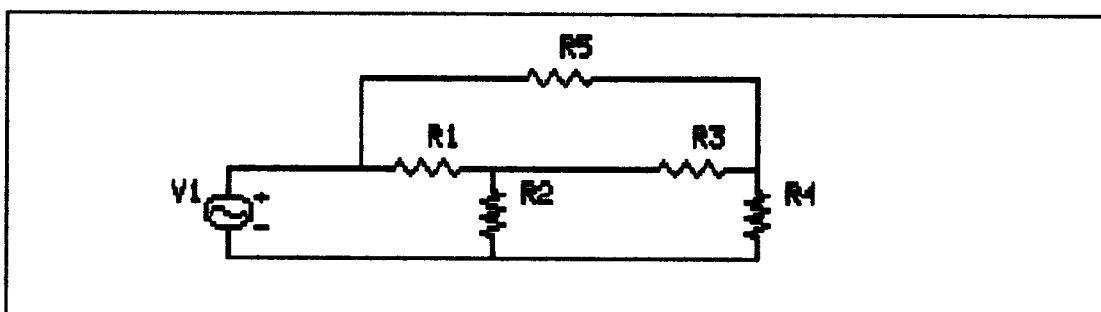


FIGURA 44. SOLUCION POR MATRICES DEL METODO DE MALLAS

Plantear ecuaciones de mallas:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1+R_3+R_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1+R_3+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9.3. APLICACION DEL ALGEBRA MATRICIAL AL ANALISIS DE CIRCUITOS

Al establecer las ecuaciones de mallas de un circuito por medio de matrices se pueden obtener soluciones desarrollándolas con el álgebra matricial.

En un circuito analizado por mallas se conocen los valores de impedancia del circuito, los voltajes de las fuentes que aparecen en él, pero se desconocen las corrientes de malla y por lo tanto la matriz de incógnitas es la de corrientes.

El sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}$$

Este se puede resolver hallando la inversa de la matriz de impedancias y multiplicándola por la matriz de voltajes.

Sin embargo un método más sencillo es tratar los coeficientes de las matrices como determinantes y resolver por la regla de Cramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta z \end{vmatrix}} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta z_2 \\ \Delta z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta z \end{vmatrix}} \quad I_n = \frac{\begin{vmatrix} \Delta z_n \\ \Delta z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta z \end{vmatrix}}$$

Donde Δz = Determinante de impedancias

Δz_1 = Determinante Δz sustituyendo su primera columna por la matriz de voltajes.

Δz_n = Determinante Δz sustituyendo su n-ésima columna por la matriz de voltajes.

La solución de determinantes por la regla de Cramer toma como base la evaluación de un determinante de 2º orden así:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix} = z_1 \cdot z_4 - z_3 \cdot z_2$$

Si el determinante es de tercer orden, su solución se hace más complicada; se procede así:

1. Señalar todos los elementos de la columna izquierda.
2. Asignar un signo (+) al primer elemento de la columna izquierda y seguir asignando alternadamente signos (-) y (+) a los demás elementos. Los elementos de la columna izquierda se denominan factores.
3. Elimine imaginariamente la fila y la columna a la que corresponde cada elemento de la columna izquierda, cada vez que vaya a formar los determinantes menores.
4. El determinante será la suma algebraica de los productos de los factores por su determinante menor.

Ejemplo:

Hallar el determinante de:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} + & :Z_1: & Z_2 & Z_3 \\ & : & : & : \\ - & :Z_4: & Z_5 & Z_6 \\ & : & : & : \\ + & :Z_7: & Z_8 & Z_9 \\ & : & : & : \end{vmatrix}$$

Determinante menor de Z_1 :

$$\begin{vmatrix} + & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ - & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ + & Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{vmatrix} = Z_1 \begin{vmatrix} Z_5 & Z_6 \\ Z_8 & Z_9 \end{vmatrix} = Z_1(Z_5 \cdot Z_9 - Z_8 \cdot Z_6)$$

Determinante menor de Z_4 :

$$\begin{vmatrix} + & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ - & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ + & Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{vmatrix} = -Z_4 \begin{vmatrix} Z_2 & Z_3 \\ Z_8 & Z_9 \end{vmatrix} = -Z_4(Z_2 \cdot Z_9 - Z_8 \cdot Z_3)$$

Determinante menor de Z_7 :

$$\begin{vmatrix} + & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ - & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ + & Z_7 & Z_8 & Z_9 \end{vmatrix} = Z_7 \begin{vmatrix} Z_2 & Z_3 \\ Z_5 & Z_6 \end{vmatrix} = Z_7(Z_2 \cdot Z_6 - Z_5 \cdot Z_3)$$

$$\Rightarrow \Delta Z = Z_1(Z_5 \cdot Z_9 - Z_8 \cdot Z_6) - Z_4(Z_2 \cdot Z_9 - Z_8 \cdot Z_3) + Z_7(Z_2 \cdot Z_6 - Z_5 \cdot Z_3)$$

Con este método se pueden obtener soluciones rápidas y sencillas de circuitos por el método de mallas.

Ejemplo:

Determinar la corriente RMS demandada por la impedancia $(1+j2)\Omega$ del siguiente circuito:

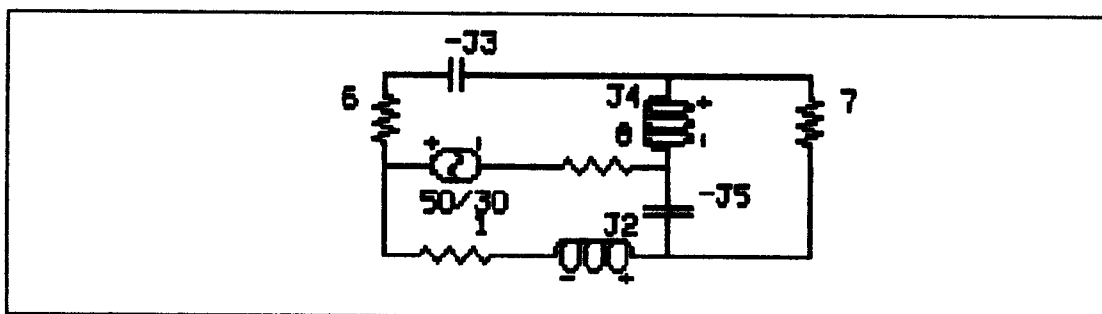


FIGURA 45. EJERCICIO EXPLICATIVO. ANALISIS DE MALLAS POR MEDIO DE ALGEBRA MATRICIAL

$$\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-j3+j4+8 & -8 & -j4 \\ -8 & 8-j5+1+j2 & j5 \\ -j4 & j5 & j4-j5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+j & -8 & -j4 \\ -8 & 9-j3 & j5 \\ -j4 & j5 & 7-j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/\underline{30} \\ -50/\underline{30} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}$$

El determinante de Z es ΔZ

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} + : 14+j : & -8 & -j4 \\ - : -8 : & 9-j3 & j5 \\ + : -j4 : & j5 & 7-j \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta Z = & (14+j) [(9-j3)(7-j) - (j5)^2] + 8 [-8(7-j) - (-j4)(j5)] \\ & -j4 [-8(j5) - (-j4)(9-j3)] \end{aligned}$$

$$\Delta Z = 676 \underline{-28.16^\circ}$$

La corriente en la impedancia $(1+2j)\Omega$ es la de la malla II.

Entonces:

$$I_2 = \frac{|\Delta Z_2|}{|\Delta Z|}$$

$$\underline{\Delta z} = \begin{vmatrix} + & \vdots & 14+j & \vdots & 50/\underline{30^\circ} & -j4 \\ & \vdots & & \vdots & & \\ - & \vdots & -8 & \vdots & -50/\underline{30^\circ} & j5 \\ & \vdots & & \vdots & & \\ + & \vdots & -j4 & \vdots & 0 & 7-j \\ & \vdots & & \vdots & & \end{vmatrix}$$

$$\underline{\Delta Z_2} = (14+j)[(-50/\underline{30})(7-j)-(0)(j5)] - (-8)[(50/\underline{30})(7-j) - (0)(-j4)] + (-j4)[(50/\underline{30})(j5)-(-50/\underline{30})(-j4)]$$

$$\underline{\Delta Z_2} = 1950/\underline{-148.53^\circ}$$

$$I_2 = \frac{|\underline{\Delta Z_2}|}{|\underline{\Delta z}|} = \frac{1950/\underline{-148.53^\circ}}{676/\underline{-28.16^\circ}} = 2.88/\underline{-120.37^\circ} \text{ A}$$

10. ANALISIS DE UN CIRCUITO POR EL METODO DE LAS TENSIONES O NODOS

10.1. METODO DE RESOLUCION, NUMERO DE ECUACIONES EN LOS NODOS

La solución de un circuito por el método de nodos se apoya en las ecuaciones de la ley de corrientes de Kirchhoff.

Se va a caracterizar un nodo con un voltaje en él, el cual se llamará voltaje de nodo. Se tomará un nodo de referencia al cual se le asignará un voltaje cero.

El método en general consiste en:

1. Se debe de disponer sólo de fuentes de corriente.
2. Se determina el número de nodos principales.
3. Se toma un nodo como referencia (preferiblemente aquel al que llegan mayor número de elementos) para asignarle

un voltaje cero. Los demás nodos tendran un voltaje específico (V_1, V_2, \dots, V_{n-1})

4. Por medio de L.C.K. se plantean $(n-1)$ ecuaciones de corriente (n : número de nodos).

5. Se expresan estas ecuaciones en función de los voltajes de nodo. La polaridad de la fuente de corriente se supone positiva si está dirigida hacia el nodo y negativa si está dirigida hacia afuera del nodo. La polaridad de todas las corrientes de carga es positiva.

Al igual que en el método de mallas, el método de nodos ofrece una solución al circuito donde se pueden plantear unas matrices correspondientes a los parámetros del circuito y obtener resultados con ayuda del álgebra matricial y del desarrollo de determinantes por la regla de Crammer.

Las matrices planteadas son:

$$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix}$: Matriz de admitancias. Sus términos son los inversos de las impedancias.

$[V]$: Matriz de los voltajes de nodos.

$[I]$: Matriz de corrientes.

La incognita a resolver es la matriz de voltajes; conociendo la matriz de admitancias y la matriz de fuentes de corriente.

Para formar las matrices por inspección se procede así:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} & \dots \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} & \dots \\ -Y_{31} & -Y_{32} & Y_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Y_{11} : Sumatoria de las admitancias que llegan al nodo I.

Y_{12} : Admitancia que une al nodo I y II.

Y_{mm} : Sumatoria de las admitancias que llegan al nodo m.

Y_{mn} : Admitancia que une al nodo m y n.

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma I_1 \\ \Sigma I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Sigma I_{n-1} \end{bmatrix}$$

ΣI_1 : Suma algebraica de las fuentes de corriente que se unen al nodo 1.

ΣI_{n-1} : Suma algebraica de las fuentes de corriente que se unen al nodo (n-1).

La solución por el método de matrices se resuelve estrictamente así:

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{Transpuesta de la matriz de cofactores}}{\text{Determinante de } Y}$$

Es también usual la solución por determinantes donde:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta Y \end{vmatrix}}$$

ΔY : Determinante de admitancias.
 ΔY_1 : Determinante de admitancias al cual se le ha sustituido su primera columna por la matriz

$$V_{n-1} = \frac{|\Delta Y_{n-1}|}{|\Delta Y|} \quad \text{de corrientes } I.$$

ΔY_{n-1} : Determinante de admitancias al cual se le ha sustituido su columna n-1 por la matriz de corrientes I.

Ejemplo:

Determine la lectura del amperímetro de la siguiente figura utilizando el análisis de los nodos de voltaje.

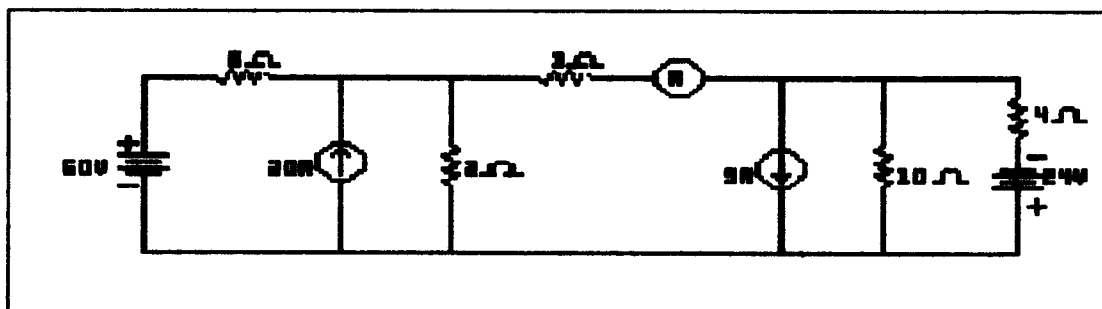


FIGURA 46. EJERCICIO EXPLICATIVO UTILIZANDO ANALISIS DE NODOS

Solución:

Se convierten todas las fuentes de voltaje a fuentes de corriente cuyo valor será el voltaje de la fuente sobre la resistencia serie, y tendrán en paralelo una resistencia del mismo valor de la que tenía en serie; el sentido de la fuente de corriente irá de menos a más en

la fuente de voltaje:

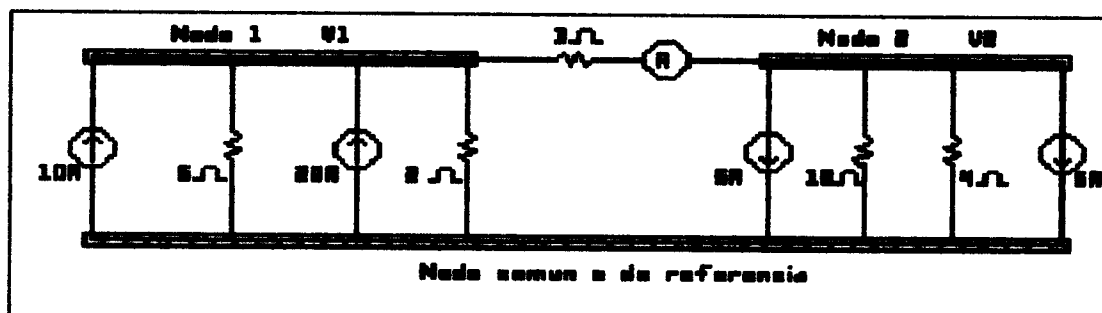


FIGURA 47. SOLUCION A EJERCICIO EXPLICATIVO ANALISIS DE NODOS

Se determinan los nodos del sistema y se asigna un voltaje a ellos.

Se forman las matrices:

Matriz de admitancias:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{41}{60} \end{bmatrix}$$

Matriz de voltaje:

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de fuentes de corriente:

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 20 \\ -5 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Positivas las que llegan} \\ \text{Negativas las que salen} \end{array}$$

La lectura del amperímetro será:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{3 \, \Omega}$$

Entonces debe determinarse V_1 y V_2

$$V_{11} = \frac{\left| \frac{\Delta Y_1}{\Delta Y} \right|}{\left| \frac{\Delta Y}{\Delta Y} \right|} ; \quad V_2 = \frac{\left| \frac{\Delta Y_2}{\Delta Y} \right|}{\left| \frac{\Delta Y}{\Delta Y} \right|}$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{41}{60} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{41}{60} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{41}{60} - \frac{1}{9} = \frac{103}{180} = 0.572$$

$$\Delta Y_1 = \begin{vmatrix} 30 & -\frac{1}{3} \\ -11 & \frac{41}{60} \end{vmatrix} = 30 \cdot \frac{41}{60} - 11 \cdot \frac{1}{3} = \frac{41}{2} - \frac{11}{3} = \frac{101}{6} = 16.83$$

$$\Delta Y_2 = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ -\frac{1}{3} & -11 \end{vmatrix} = -11 \cdot 1 - 30 \left(-\frac{1}{3}\right) = -11 + 10 = -1$$

$$V_1 = \frac{|\Delta Y_1|}{|\Delta Y|} = 16.83/0.572 = 29.42 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{|\Delta Y_2|}{|\Delta Y|} = -1/0.572 = -1.75 \text{ V}$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{3 \Omega} = \frac{29.42 - (-1.75)}{3} = 10.4 \text{ A.}$$

11. TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON

11.1. TEOREMA DE THEVENIN

El teorema de Thevenin es aplicable a un circuito activo cuando en él se quiere conocer la corriente, el voltaje o la potencia en un punto específico (punto de interés); o en algún sector del circuito se quiere hallar equivalente y en el sector intervienen fuentes independientes y elementos pasivos.

Un equivalente Thevenin está conformado por una fuente de voltaje llamado voltaje thevenin (V_{th}), en serie con una impedancia equivalente llamada impedancia thevenin (Z_{th}).

V_{th} : Es el voltaje a través del punto de interés, cuando éste está en circuito abierto.

Z_{th} : Es la impedancia equivalente vista a través de los terminales de interés en circuito abierto, cuando el resto del circuito está muerto (desenergizado).

Ejemplo:

El equivalente thevenin del siguiente circuito entre los puntos a y b:

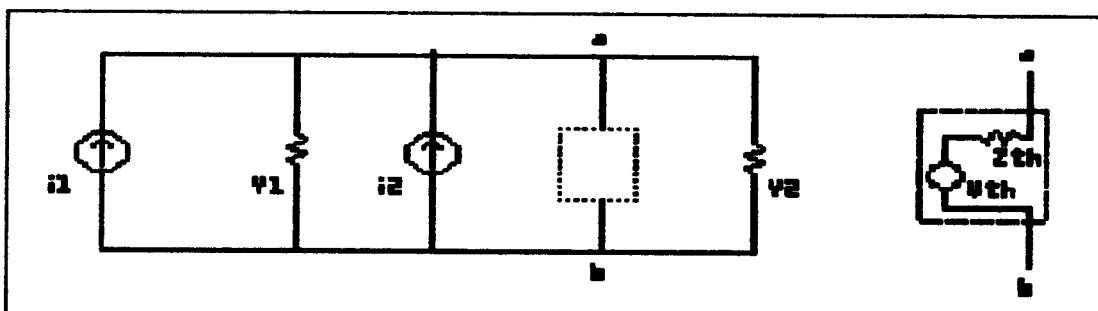


FIGURA 48. CALCULO DE LOS PARAMETROS THEVENIN

$$V_{th} \cdot [Y_1 + Y_2] = i_1 + i_2$$

$$V_{th} = \frac{i_1 + i_2}{Y_1 + Y_2}$$

Para hallar Z_{th} se suponen i_1 e i_2 abiertos.

$$Z_{th} = Y_1 \parallel Y_2$$

11.2. EQUIVALENTE NORTON

El teorema de Norton es equivalente al teorema de Thevenin pero éste consta de una fuente de corriente equivalente llamada corriente norton (I_N), en paralelo

con una impedancia equivalente o impedancia norton (Z_N).

El equivalente norton puede obtenerse del equivalente thevenin y viceversa aplicando las siguientes relaciones:

$$Z_N = Z_{th}$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{Z_{th}}$$

I_N : Corriente vista a través de los terminales de interés.

Z_N : Impedancia equivalente vista a través de los terminales de interés.

Ejemplo:

Hallar equivalente norton entre c y d.

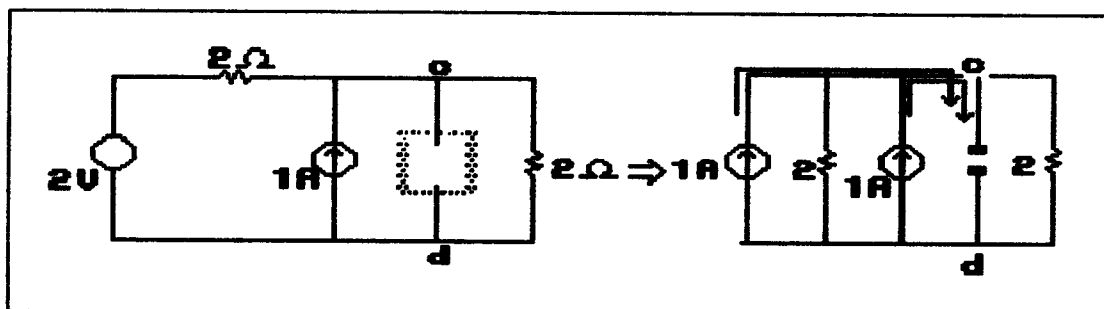


FIGURA 49. EJERCICIO EXPLICATIVO SOBRE TEOREMA NORTON

I_N es la corriente que circularía entre c y d y que en este caso es suministrada por las dos fuentes de corriente.

$$\Rightarrow I_N = 2 \text{ A}$$

Z_N es la impedancia equivalente entre c y d suponiendo las fuentes de corriente abiertas.

$$Z_N = 2 \parallel 2 \Rightarrow Z_N = 1 \Omega$$

11.3. CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THEVENIN Y NORTON

El procedimiento a seguir para hallar equivalentes thevenin es el siguiente:

Para hallar el voltaje thevenin, se quita la parte del circuito que no va a intervenir en el equivalente, o sea el punto de interés y se procede a hallar el voltaje entre los terminales a los cuales corresponde el punto de interés ya sea por inspección, por nodos, por L.V.K. o por ley de Ohm.

Para hallar la impedancia thevenin, se suponen cortocircuitadas las fuentes de voltaje y en circuito abierto las fuentes de corriente y se procede a hallar la

impedancia equivalente por medio de simplificaciones serie-paralelo, o por ley de Ohm, asumiendo un voltaje V , y una corriente I que se expresen en función de las impedancias del circuito; según lo permita cada caso.

Ejemplo:

Determinar el equivalente thevenin a la izquierda de los terminales T_1 y T_2 de la siguiente figura:

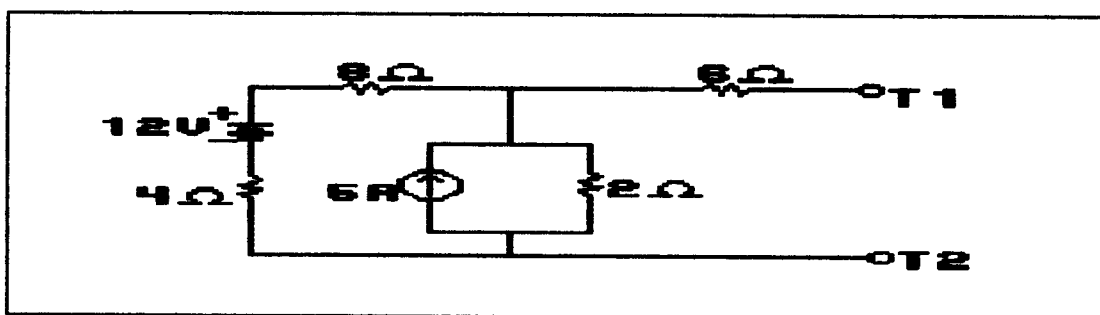


FIGURA 50. EJERCICIO EXPLICATIVO TEOREMA DE THEVENIN

Se convierte la fuente de corriente a fuente de voltaje:

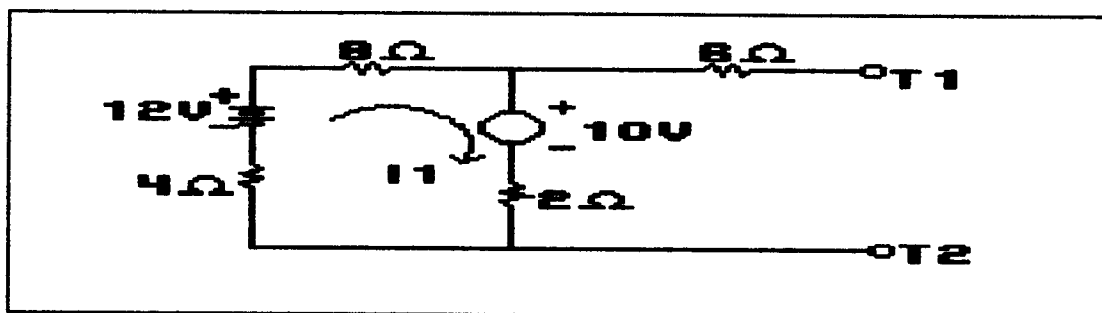


FIGURA 51. CONVERSION DE FUENTE DE CORRIENTE A FUENTE DE VOLTAJE

El voltaje thevenin se calcula, teniendo en cuenta la fuente de 10 V y las caídas en las resistencias de 2Ω y 6Ω .

Planteando L.V.K. en la malla 1:

$$12 - 10 = 8I_1 + 4I_1 + 2I_1 \Rightarrow 12 - 10 = (8 + 4 + 2)I_1$$

$$\Rightarrow I_1 = 2/14 = 1/7 = 0.14 \text{ A}$$

$$V_{th} = \Sigma \text{Fuentes} - \Sigma \text{Caídas}$$

$$V_{th} = 10 - [(-0.14)2\Omega + (0)6\Omega] \Rightarrow V_{th} = 10.3 \text{ V}$$

Para calcular la impedancia thevenin se cortocircuitan las fuentes entonces:

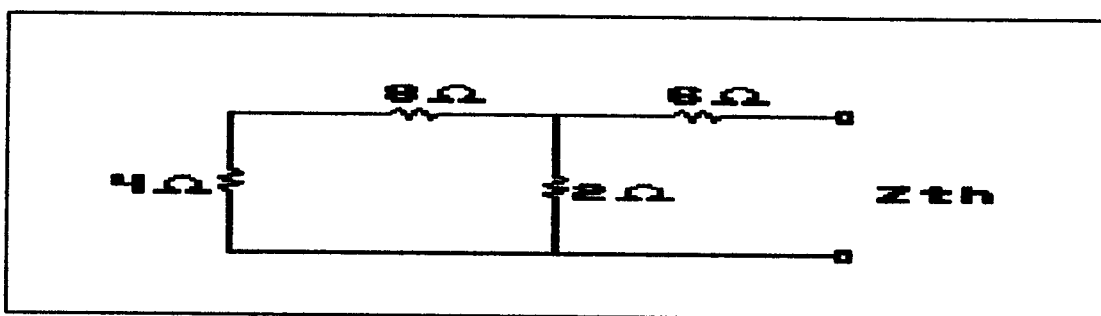


FIGURA 52. EJERCICIO EXPLICATIVO DE CALCULO DE Z_{th}

$$\Rightarrow Z_{th} = [(4 + 8) \parallel 2] + 6 \Rightarrow Z_{th} = 12 \cdot 2 / (12 + 2) + 6$$

$$= (12 + 42) / 7 \Rightarrow Z_{th} = 54 / 7 = 7.71 \Omega$$

El circuito equivalente queda:

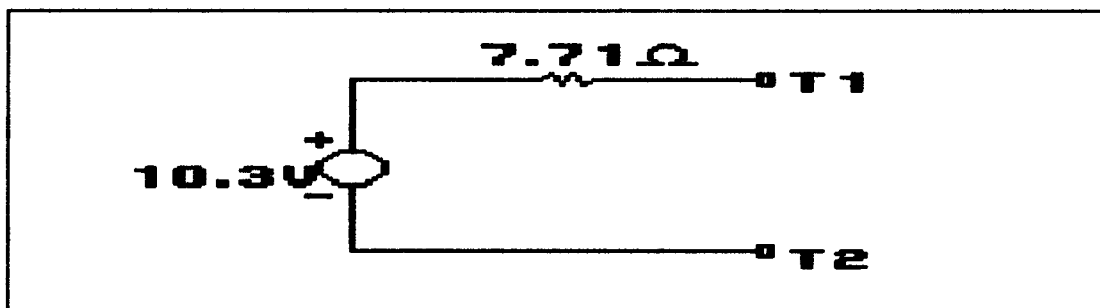


FIGURA 53. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL EJERCICIO EXPLICATIVO

El procedimiento a seguir para hallar el equivalente norton es el siguiente:

Para hallar la corriente norton, se calcula la corriente que alimenta al punto de interés entre sus terminales suponiendo que entre ellos existe un corto.

Para hallar la impedancia norton, se procede igual que para hallar la impedancia thevenin, ya que estas son equivalentes.

Ejemplo:

Calcular el equivalente norton para el circuito del ejemplo anterior.

Solución:

Se convierte la fuente de voltaje a su fuente de corriente equivalente:

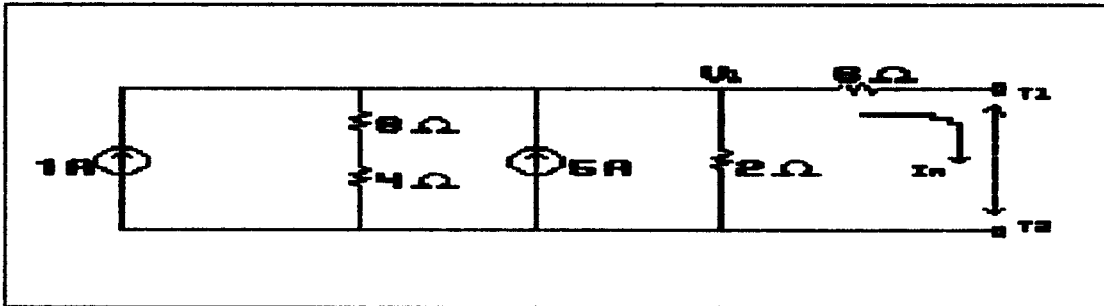


FIGURA 54. EJERCICIO EXPLICATIVO SOBRE TEOREMA NORTON

I_N : Se supone un cortocircuito entre T_1 y T_2 .

$$I_N = \frac{V_1}{6\Omega}$$

$$V_1 \cdot (1/12 + 1/2 + 1/6) = 6A \Rightarrow V_1 = \frac{6}{1/12 + 1/2 + 1/6} = 8$$

$$\Rightarrow I_N = 8/6 = 1.33 \text{ A}$$

Z_N : Calculada igual que Z_{th} ; suponiendo fuentes de corriente abiertas.

$$\Rightarrow Z_N = [(4 + 8) \parallel 2] + 6 = 12 \cdot 2 / (12 + 2) + 6 = (12 + 42) / 7$$

$$\Rightarrow Z_N = 54/7 = 7.71 \Omega$$

y el circuito equivalente norton será:

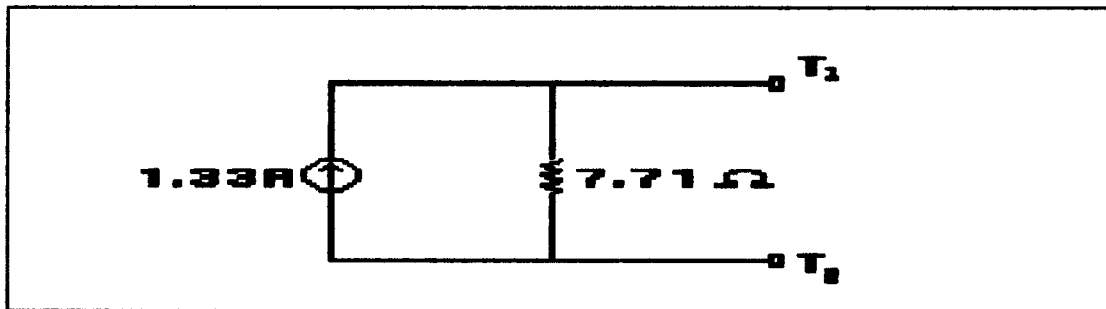


FIGURA 55. CIRCUITO EQUIVALENTE NORTON AL EJERCICIO EXPLICATIVO

Comparando el circuito equivalente thevenin para este ejemplo con el circuito equivalente norton, deben ser iguales por definición y se comprueban entonces sus equivalencias así:

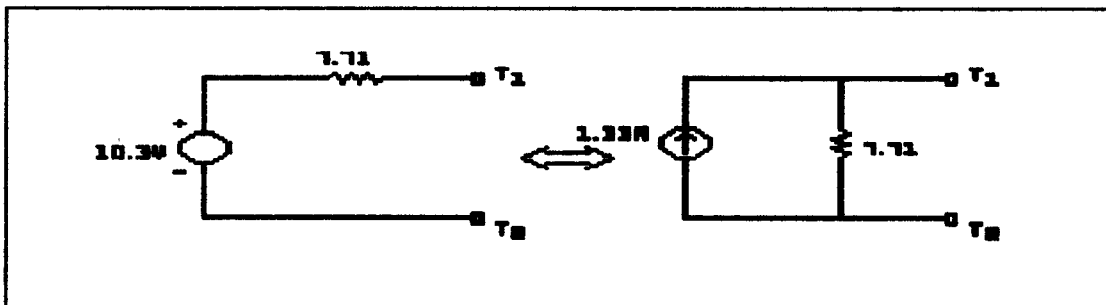


FIGURA 56. EQUIVALENCIA ENTRE CIRCUITO EQUIVALENTE THEVENIN Y NORTON

$$I_N = \frac{V_{th}}{Z_{th}} = \frac{10.3}{7.71} = 1.33 \text{ A}$$

$$Z_N = Z_{th} = 7.71 \text{ } \Omega$$

12. CIRCUITOS POLIFASICOS

12.1 CIRCUITOS BIFASICOS:

Los sistemas bifásicos están formados por dos voltajes sinusoidales de igual magnitud y desfasados 90° , siendo esta su principal característica. Su uso no es muy generalizado y tiene aplicación en refinados sistemas de control para motores bifásicos.

Su representación circuital es la siguiente:

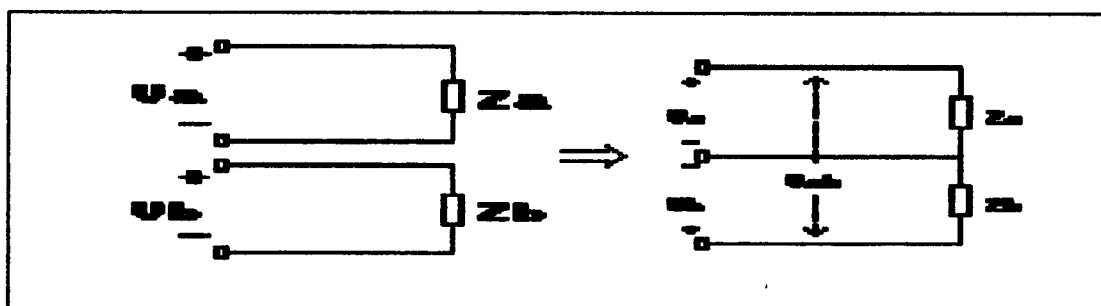


FIGURA 57. REPRESENTACION GRAFICA DE LOS SISTEMAS BIFASICOS

Los diagramas fasorial y de tiempo del sistema bifásico

son:

FIGURA 58. REPRESENTACION GRAFICA DE LOS DIAGRAMAS FASORIAL Y DE TIEMPO DEL SISTEMA BIFASICO

V_a, V_b = Voltaje de fase

V_{ab} = Voltaje de línea

El voltaje de línea está relacionado con los voltajes de fase de la siguiente manera:

$$\bar{V}_{ab}^2 = \bar{V}_a^2 + \bar{V}_b^2 = 2\bar{V}_a^2 = 2\bar{V}_b^2 = 2\bar{V}_f^2$$

$$\bar{V}_{ab} = \sqrt{2} \bar{V}_f \implies \bar{V}_{\text{línea}} = \sqrt{2} \bar{V}_{\text{fase}}$$

Si se dispone de un sistema trifásico es posible obtener un sistema bifásico y viceversa, por medio de una conexión conocida como conexión Scott, que requiere de dos transformadores con relación de vueltas de primario adecuada para obtener el desfase y magnitud requeridas.

12.2. SISTEMAS TRIFASICOS

Los sistemas trifásicos están conformados por tres voltajes sinusoidales de igual magnitud cuyo espaciado físico produce que sus máximos respectivos se presenten con una separación de 60° ; sin embargo, en el uso práctico de un sistema trifásico para transmisión y distribución se invierte la fase C, con el fin de obtener una relación simétrica de desfase de 120° . Por lo tanto, un sistema trifásico generalmente se conoce como tres voltajes de igual magnitud y desfasados entre sí 120° .

Su diagrama fasorial y representación en el tiempo son:

FIGURA 59. REPRESENTACION GRAFICA DEL DIAGRAMA FASORIAL Y DE TIEMPO DEL SISTEMA TRIFASICO

A cada conductor que interviene en el circuito y que presenta entre él y el conductor de neutro cada voltaje del sistema trifásico se conoce como fase. La conexión de las fases se puede hacer de dos disposiciones diferentes: estrella y triángulo. La representación de estas disposiciones es:

FIGURA 60. REPRESENTACION GRAFICA DE CONEXION ESTRELLA EN SISTEMA TRIFASICO

FIGURA 61. REPRESENTACION GRAFICA DE CONEXION TRIANGULO EN SISTEMA TRIFASICO

12.3. TENSIONES EN SISTEMAS TRIFASICOS

La relación entre las tensiones involucradas en los sistemas trifásicos depende de la conexión de fases del sistema.

Para un sistema conectado en estrella, como se observa de la conexión circuital, se presenta una unión común de los puntos a' , b' , c' y los puntos a , b , y c de la fase corresponden con las líneas de salida hacia la carga.

Se presentan para este sistema los siguientes voltajes:

Voltaje de fase: Voltaje entre una línea y el punto común.

Voltaje línea-línea o voltaje de línea: Voltaje entre dos líneas.

Voltajes de fase: $V_{aa'}$, $V_{bb'}$, $V_{cc'}$

Voltajes de línea: V_{ab} , V_{bc} , V_{ca}

La relación que existe entre estos voltajes es:

$$V_{ab} = V_{aa'} + V_{b'b}$$

$$V_{bc} = V_{bb'} + V_{c'c}$$

$$V_{ca} = V_{cc'} + V_{a'a}$$

Si se desarrollan por fasores se tiene:

FIGURA 62. REPRESENTACION FASORIAL ENTRE LOS VOLTAJES DE LINEA Y DE FASE EN UN SISTEMA TRIFASICO

Del diagrama fasorial se observa:

Los voltajes de fase entre sí se encuentran desfasados 120° al igual que los voltajes de línea, pero el conjunto de los fasores de línea está desfasado en 30° con el conjunto de fasores de fase.

La relación entre las magnitudes de los voltajes de línea y los voltajes de fase se puede determinar por la geometría del diagrama fasorial:

$$V_{ab} = \sqrt{3} \cdot V_{aa'} = \sqrt{3} \cdot V_{b'b}$$

$$V_{bc} = \sqrt{3} \cdot V_{bb'} = \sqrt{3} \cdot V_{c'c}$$

$$V_{ca} = \sqrt{3} \cdot V_{cc'} = \sqrt{3} \cdot V_{a'a}$$

Entonces para la conexión estrella:

$$\bar{V}_{\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot \bar{V}_{\text{fase}}$$

Para la conexión delta o triángulo se tiene que las fases están conectadas entre sí uniéndose el terminal a con c', b con a' y c con b' y el punto de conexión de las fases corresponde con las líneas de salida hacia las cargas. Por no existir punto común entre los terminales de las fases en esta disposición no es posible disponer de neutro.

En esta conexión los voltajes de línea y los voltajes de fase son iguales:

$$V_{ab} = V_{aa'}$$

$$V_{bc} = V_{bb'}$$

$$V_{ca} = V_{cc'}$$

y la suma de las tensiones dentro de la malla formada por el triángulo es cero, por lo tanto no puede existir corriente dentro de la malla.

FIGURA 63. DIAGRAMA FASORIAL DE LA CONEXION TRIANGULO

12.4. CARGAS EQUILIBRADAS

Un sistema trifásico presenta cargas equilibradas si las tres ramas de la carga tienen impedancias iguales. Como ejemplo se tiene un motor trifásico.

Las corrientes por cada fase de una carga trifásica balanceada tienen igual magnitud y están desfasadas 120° entre sí; lo mismo que para las corrientes de línea.

Para una carga conectada en triángulo se tiene que:

$$Z_{\text{carga}} = Z/0^\circ$$

$$I_T = \frac{V_T}{Z/0^\circ} \Rightarrow I_{TA} = \frac{V_{AB}}{Z/0^\circ}$$

$$I_{TB} = \frac{V_T/-120^\circ}{Z/0^\circ}$$

$$I_{TC} = \frac{V_T/120^\circ}{Z/0^\circ}$$

$$I_{\text{línea}} \Rightarrow I_a = I_{TA} - I_{TC} = I_{TA}/0^\circ - I_{TC}/120^\circ$$

$$I_b = I_{TB} - I_{TA} = I_{TB}/-120^\circ - I_{TA}/0^\circ$$

$$I_c = I_{TC} - I_{TB} = I_{TC}/120^\circ - I_{TB}/-120^\circ$$

Fasorialmente:

FIGURA 64. DIAGRAMA FASORIAL DE CARGAS EQUILIBRADAS EN TRIANGULO

Concluyéndose geométricamente que la corriente de línea está desfasada con la corriente de fase en 30° y la relación de magnitudes es:

Para una carga equilibrada en triángulo:

$$I_{línea} = \sqrt{3} \cdot I_{fase}$$

Para una carga conectada en estrella es evidente que la corriente que viene por la línea alimenta en su totalidad a la carga:

FIGURA 65. DIAGRAMA FASORIAL PARA CARGAS EQUILIBRADAS EN ESTRELLA

Por lo tanto, para una carga trifásica equilibrada conectada en Y:

$$I_{\text{línea}} = I_{\text{fase}}$$

12.5. CARGAS DESEQUILIBRADAS

Si la impedancia de carga de cada fase de un sistema trifásico es diferente se tiene un sistema de cargas desequilibradas. La corriente que circula por cada fase será diferente y la suma vectorial tanto de los voltajes como de las corrientes de fase entre sí (y de línea) será diferente a cero, contrario a lo que ocurre en las cargas

equilibradas.

Se presentan cargas desequilibradas cuando ocurre alguna falla en el circuito por circuito abierto o cortocircuito en alguna fase.

12.6. POTENCIA TRIFASICA

La característica fundamental de las cargas trifásicas balanceadas es que poseen igual impedancia en cada fase; esto hace que se cumplan relaciones entre los voltajes de línea y los voltajes de fase al igual que entre las corrientes.

Si la carga está conectada en delta, la impedancia de cada devanado es igual a Z . Las relaciones de voltajes y corrientes en una carga balanceada conectada en delta son:

$$V_L = V_{\phi}$$

$$I_L = 3.I_{\phi}$$

Si la carga está conectada en Y, la impedancia de cada devanado es Z_Y y las relaciones de voltajes y corrientes en una carga balanceada son:

$$I_L = I_\varphi$$

$$I_N = 0$$

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_\varphi$$

Las impedancias de cada devanado conectado en estrella o conectado en delta tienen corrientes iguales y la potencia de cada fase es la tercera parte de la potencia total.

Entonces $P_\varphi = V_\varphi \cdot I_\varphi \cdot \cos\theta$ es la potencia por fase y la potencia total es:

$$P_T = 3 \cdot V_\varphi \cdot I_\varphi \cdot \cos\theta.$$

Reemplazando las relaciones de voltaje y de corriente para una carga balanceada conectada en delta, anteriormente dadas, se tiene:

$$V_L = V_\varphi$$

$$I_\varphi = \sqrt{3} \cdot I_L / 3 \quad (\text{para cada fase})$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\theta$$

Igualmente para carga balanceada conectada en Y se tiene:

$$I_L = I_\varphi$$

$$V_\varphi = \sqrt{3} \cdot V_L / 3 \quad (\text{por cada fase})$$

$$P_L = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\theta$$

De donde se concluye que la potencia total es igual para cargas conectadas en estrella o en delta. θ es el ángulo de fase entre el voltaje y corriente, o sea, el factor de potencia de la carga.

Como ya es conocido existen relaciones entre la potencia aparente S_T , la potencia reactiva Q_T y la potencia real P_T , de las cuales se obtienen las siguientes ecuaciones para potencia trifásica en cargas balanceadas:

$$P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$$

$$Q_T = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta$$

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L$$

donde:

P_T : Potencia real total en W.

Q_T : Potencia reactiva total en VAR.

S_T : Potencia aparente total en VA.

V_L : Voltaje de línea en V.

I_L : Corriente de línea en A.

θ : Angulo de fase de la carga.

El triángulo de potencias correspondiente a las potencias de un sistema trifásico balanceado es:

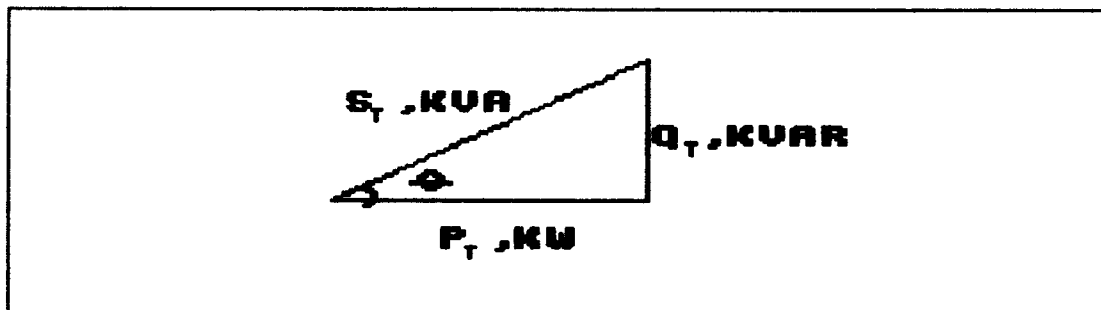


FIGURA 66. TRIANGULO DE POTENCIAS EN SISTEMA TRIFASICO BALANCEADO

13. PROBLEMAS DE CIRCUITOS RESISTIVOS

13.1. SOLUCION POR NODOS

Hallar I_n por nodos:

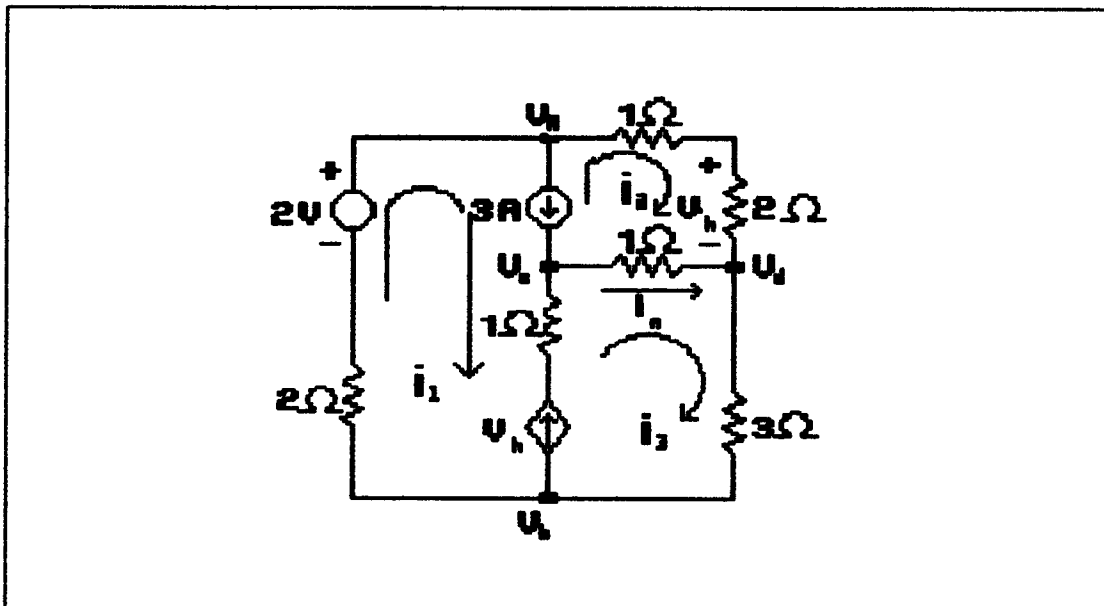


FIGURA 67. PROBLEMA TIPO DE SOLUCION DE UN CIRCUITO POR NODOS

Convirtiendo la fuente de voltaje a fuente de corriente

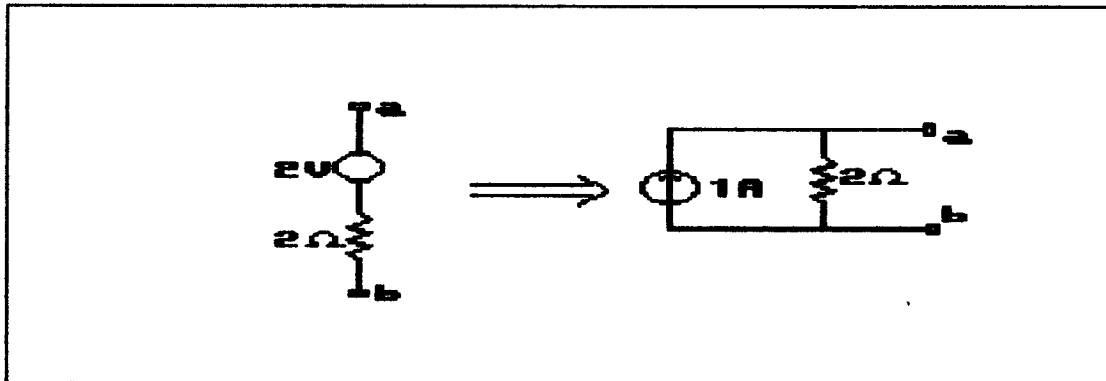


FIGURA 68. CONVERSION DE FUENTE DE VOLTAJE A FUENTE DE CORRIENTE

El circuito resulta:

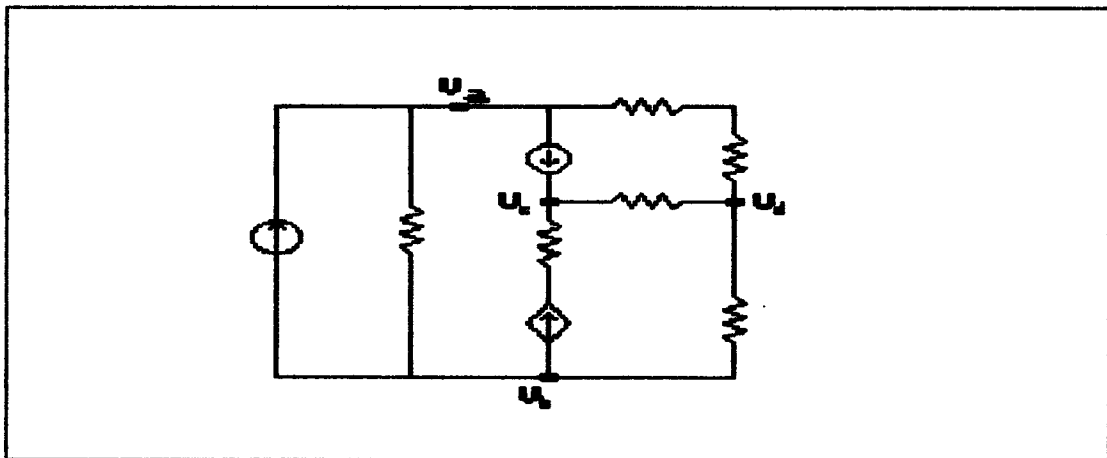


FIGURA 69. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL EJERCICIO

Ecuación en el nodo a:

$$(1/3 + 1/2) V_a - 1/3 V_d = -2$$

Ecuación en el nodo d:

$$-1/3 V_a + (1/3 + 1 + 1/3) V_d - 1 V_c = 0$$

Ecuación en el nodo c:

$$-1 V_d + 1 V_e = 3 + V_h$$

$$V_h = 2 I_x$$

$$I_x = \frac{V_a - V_d}{3}$$

$$V_h = 2 \left(\frac{V_a - V_d}{3} \right) \quad (4)$$

$$5 V_a - 2 V_d = -12 \quad (1)$$

$$- V_a + 5 V_d - 3 V_e = 0 \quad (2)$$

$$- V_d + V_e = 3 + 2/3 (V_a - V_d)$$

$$- 2 V_a - V_d + 3 V_e = 9 \quad (3)$$

$$I_n = V_e - V_d$$

$$V_e = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & -12 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 45 + 2(-9) - 12(1+10)}{5(15-3) + 2(-3-6)} = \frac{75}{42} = \frac{25}{14}$$

$$V_d = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -12 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{42} = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$$

$$I_n = V_e - V_d$$

$$I_n = \frac{25}{14} - \frac{9}{14} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \text{ A}$$

$$I_n = 8/7 \text{ A}$$

13.2. SOLUCION POR MALLAS

Hallar ecuaciones de mallas y el valor de las corrientes de malla.

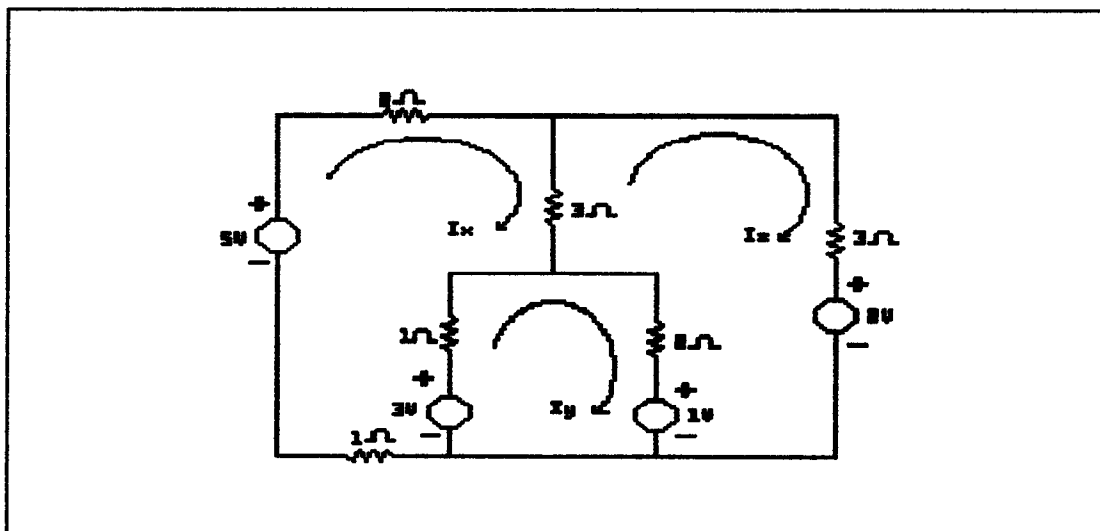


FIGURA 70. PROBLEMA TIPO DE SOLUCION DE CIRCUITOS POR MALLAS

Para aplicar solución por mallas el circuito debe ser plano. El circuito tiene 3 mallas (siempre el número de mallas es igual al número de ecuaciones de malla).

Planteando las ecuaciones de malla:

Para la malla X:

$$7 I_x - 1 I_y - 3 I_z = 5 - 3$$

$$7 I_x - I_y - 3 I_z = 2$$

Para la malla Y:

$$- I_x + 3 I_y - 2 I_z = 3 - 1$$

$$- I_x + 3 I_y - 2 I_z = 2$$

Para la malla Z:

$$- 3 I_x - 2 I_y + 8 I_z = -2 + 1$$

$$- 3 I_x - 2 I_y + 8 I_z = -1$$

El sistema de ecuaciones de malla es:

$$7 I_x - I_y - 3 I_z = 2$$

$$- I_x + 3 I_y - 2 I_z = 2$$

$$- 3 I_x - 2 I_y + 8 I_z = -1$$

Solucionando por determinantes:

El determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 7(24-4) - (-1)(-8-6) + (-3)(2-(-9))$$

$$\Delta = 93$$

$$I_x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(24-4) - (-1)(16-2) + (-3)(-4-(-3))}{93}$$

$$I_x = \frac{40 + 14 + 3}{93} = \frac{57}{93} = 0.61 \text{ A}$$

$$I_y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{7(16-2) - 2(-8-6) + (-3)(1-(-6))}{93}$$

$$I_y = \frac{98 + 28 - 21}{93} = \frac{105}{93} = 1.13 \text{ A}$$

$$I_z = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{7(-3-(-4)) - (-1)(1-(-6)) + 2(2-(-9))}{93}$$

$$I_z = \frac{7 + 7 + 22}{93} = \frac{36}{93} = 0.38 \text{ A}$$

$$I_x = 0.61 \text{ A}$$

$$I_y = 1.13 \text{ A}$$

$$I_z = 0.38 \text{ A}$$

14. CIRCUITOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

14.1. FUNCION DE TRANSFERENCIA

Hallar la función de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

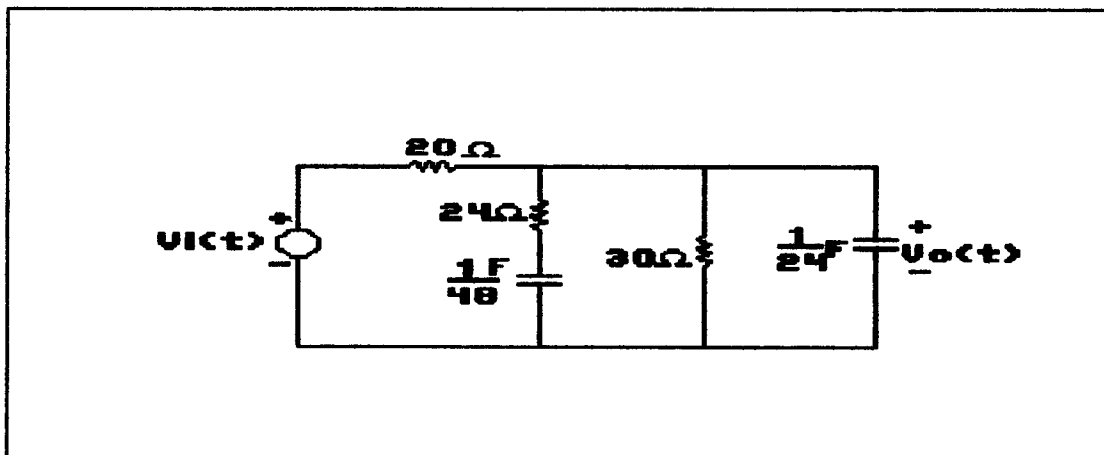


FIGURA 71. EJERCICIO TIPO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA

Para hallar $V_o(s)/V_i(s)$ se encuentra $Z_i(s)$ que es la impedancia de las 3 ramas en paralelo, y luego se aplica

divisor de tensión:

$$Z_1(s) = \frac{1}{\frac{s+1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{24+48/s}} = \frac{120(s+2)}{5s^2+19s+8}$$

$$V_o(s) = \frac{Z_1(s) \cdot V_i(s)}{20 + Z_1} = \frac{6(s+2)}{5s^2+25s+20} \cdot V_i(s)$$

Entonces:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{6(s+2)}{5s^2+25s+20} = \frac{1.2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

$$H(s) = \frac{1.2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

14.2. SOLUCION LIBRE

La respuesta de un circuito es el comportamiento que éste presenta ante una excitación desde $t = (0+)$ a $t \rightarrow \infty$ y está compuesta por una componente transitoria o solución libre y una componente estacionaria o forzada.

La componente transitoria tiene en cuenta el retardo de tiempo producido por el almacenamiento de energía en los circuitos RL, RC y RLC y es un fenómeno de relativamente corta duración, el cual es función de los parámetros del circuito R, L y C y es independiente del tipo y magnitud de la fuente y excitatriz y de las condiciones iniciales, razón por la cual se conoce como respuesta sin fuentes.

EJEMPLO: Un generador de 240 V c.c entrega corriente a un circuito paralelo de una resistencia y una bobina. el sistema está en estado estacionario. Determinar la corriente en la bobina, el voltaje inducido en la bobina y el voltaje a través de la bobina, 1 segundo después de que el interruptor automático se dispara.

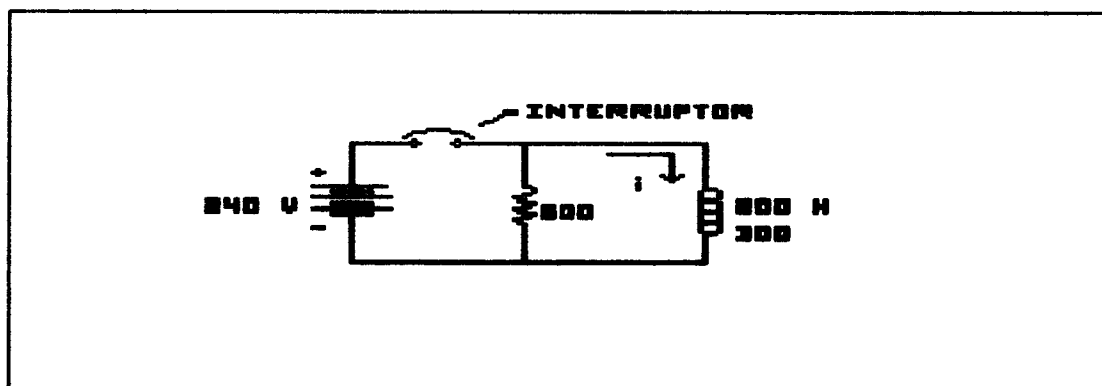


FIGURA 72. CIRCUITO PARALELO CON GENERADOR, RESISTENCIA Y BOBINA

Después de que se abre el interruptor el circuito queda:

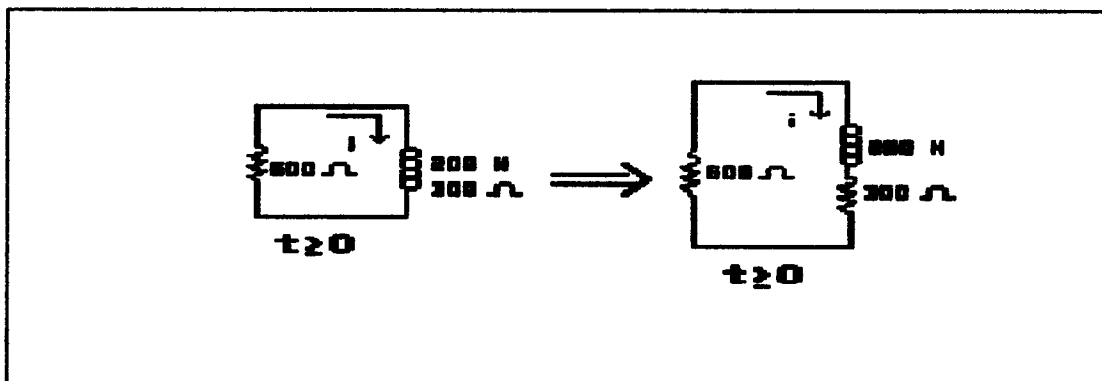


FIGURA 73. CIRCUITO DESPUES DE ABRIR EL INTERRUPTOR

Como la bobina se opone al cambio brusco de la corriente, ésta continúa circulando por el nuevo circuito.

Entonces:

$$i_L \Big|_{t=0+} = i_L \Big|_{t=0-} = \frac{240}{300} = 0.8 \text{ A}$$

Aplicando L.V.K en el circuito sin fuentes se tiene:

$$0 = V_{R1} + V_{R2} + V_L$$

$$0 = i_{R1} + i_{R2} + L \, di/dt$$

$$0 = i (600 + 300) + 200 \, di/dt$$

Convirtiendo di/dt al operador p (conocido de ecuaciones diferenciales)

$$0 = 900 + 200 \, p$$

$$p = -4.5$$

$$i = A e^{-4.5 \, t}$$

Para conocer el valor de A se sustituyen las condiciones iniciales en la solución.

$$i = 0.8$$

$$0.8 = A e^{-4.5(0+)}$$

$$A = 0.8$$

Entonces la solución específica es:

$$i = 0.8 e^{-4.5t}$$

y en $t = 1$ seg

$$i \Big|_{t=1} = 0.8 e^{-4.5(1)} = 0.0089 \text{ A}$$

El voltaje inducido se halla por medio de L.V.K en el circuito sin fuentes:

$$V_{R1} + V_{R2} + V_L = 0$$

$$iR_1 + iR_2 + V_L = 0$$

En $t = 1$ seg

$$0.0089 (600 + 300) + V_L \Big|_{t=1} = 0$$

$$V_L \Big|_{t=1} = -8.01 \text{ V}$$

El voltaje a través de la bobina se aplica L.V.K considerando que la bobina está compuesta por la inductancia de 200 H y la resistencia de 300 Ω como lo muestra la figura:

$$V_{bob} + V_{R1} = 0$$

$$V_{bob} + iR_1 = 0$$

$$t = 1 \text{ seg}$$

$$V_{bob} \Big|_{t=1} + 0.0089 (600) = 0$$

$$V_{bob} \Big|_{t=1} = -5.34 \text{ V}$$

El signo menos indica una caída de voltaje negativo debido a la oposición que ejerce la bobina al cambio de la corriente.

14.3. TRANSITORIO EN CIRCUITOS ESTABLES

Para el circuito de la siguiente figura determinar la corriente 0.1 seg después de cerrar el interruptor.

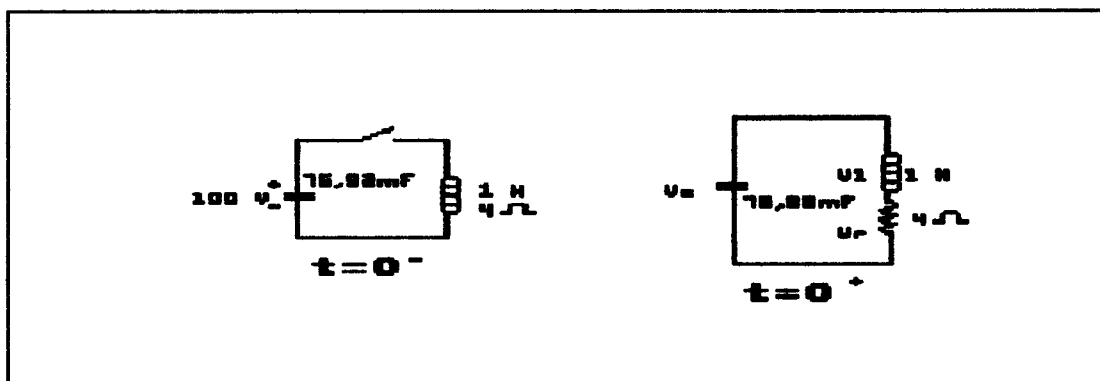


FIGURA 74. CIRCUITO CON INTERRUPTOR ABIERTO Y CERRADO

Las condiciones iniciales del circuito:

- Para el condensador:

$$V_C \Big|_{t=0-} = V_C \Big|_{t=0+} = 100 \text{ V}$$

- Para la bobina:

$$i \Big|_{t=0-} = i \Big|_{t=0+} = 0$$

Después de cerrar el interruptor:

Aplicando L.V.K:

$$V_L + V_R + V_C = 0$$

$$1 \, di/dt + 4i + 1000/76.92 \int i \, dt = 0$$

$$d^2i/dt^2 + 4 \, di/dt + 13i = 0$$

$$p^2 + 4p + 13 = 0$$

$$p = -2 + j3$$

$$p = -2 - j3$$

y la solución correspondiente a estas raíces es:

$$i = e^{-2t} \{B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t\}$$

$$\text{Sustituyendo la condición inicial } i \Big|_{t=0+} = 0$$

$$0 = e^{-2(0+)} \{B_1 \cos 3(0+) + B_2 \sin 3(0+)\}$$

$$\text{Entonces } B_1 = 0$$

O sea:

$$i = e^{-2t} B_2 \sin 3t$$

Sustituyendo la otra condición inicial en la ecuación de voltaje de kirchhoff en $t = 0+$

$$V_L \Big|_{t=0+} + V_R \Big|_{t=0+} + V_C \Big|_{t=0+} = 0$$

$$1 \frac{di}{dt} \Big|_{t=0+} + (0+)(4) + 100 = 0$$

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0+} = -100$$

$$\frac{di}{dt} = B_2 [e^{-2t} (3\cos 3t) + (\sin 3t) (-2e^{-2t})]$$

$$\text{en } t = 0+$$

$$-100 = B_2 \{e^{-2(0+)} [3\cos 3(0+)] + [\sin 3(0+)] (-2e^{-2(0+)})\}$$

$$-100 = B_2 (3 + 0)$$

$$B_2 = -33.33$$

Y la solución específica es:

$$i = -33.33 e^{-2t} \sin 3t$$

La corriente 0.1 seg después de cerrar el interruptor es:

$$i \Big|_{t=0.1} = -33.33 e^{-2(0.1)} \sin[3(0.1)]$$

$$i \Big|_{t=0.1} = -8.06 \text{ A}$$

La solución gráfica es:

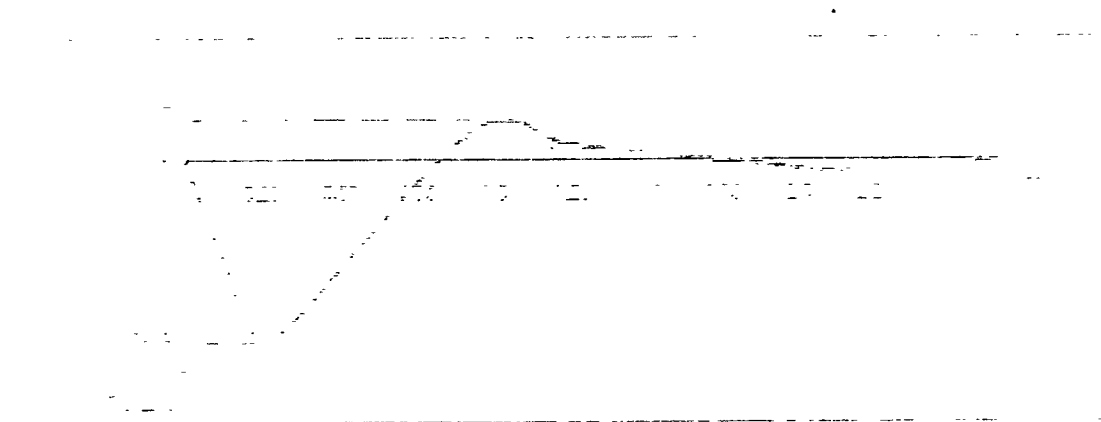


FIGURA 75. REPRESENTACION GRAFICA DE TRANSITORIOS EN CIRCUITOS ESTABLES

14.4. SOLUCION FORZADA

Hallar la parte forzada de la respuesta $i(t)$ para el siguiente circuito

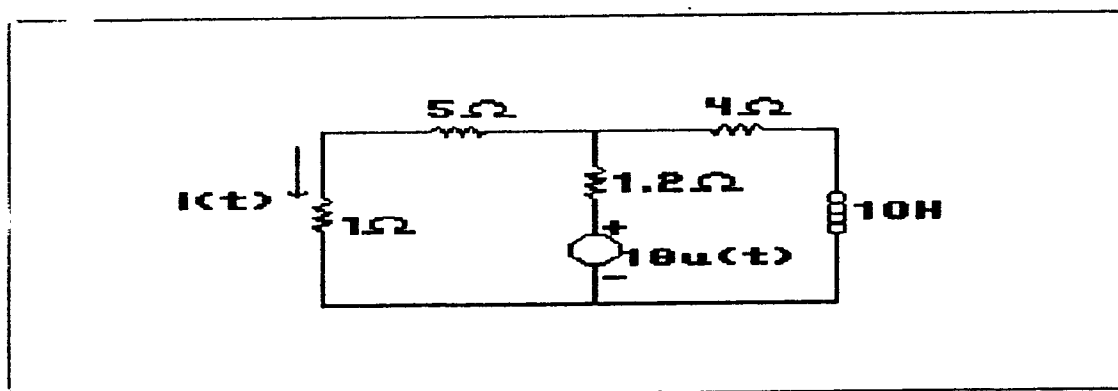


FIGURA 76. EJERCICIO TIPO DE SOLUCION FORZADA

Para hallar la solución forzada del circuito se considera que la bobina actúa como un cortocircuito, entonces el circuito queda,

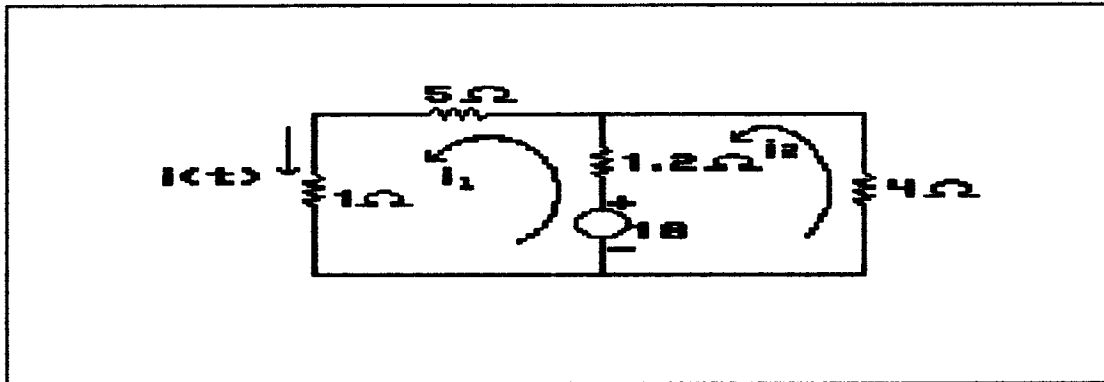


FIGURA 77. CIRCUITO EQUIVALENTE PARA SOLUCION FORZADA

Y haciendo análisis por mallas:

$$7.2 i_1 - 1.2 i_2 = 18$$

$$-1.2 i_1 + 5.2 i_2 = -18$$

$$i(t) = i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & -1.2 \\ -18 & 5.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7.2 & -1.2 \\ -1.2 & 5.2 \end{vmatrix}} = \frac{72}{36} = 2A$$

Entonces la respuesta de estado estacionario o solución forzada es:

$$i(t) = 2A$$

14.5. CONDICIONES INICIALES

14.5.1. EJERCICIO TIPO 1

Encontrar $e_o(t)$ y de_o/dt en $t = 0^+$, si no hay energía inicial almacenada

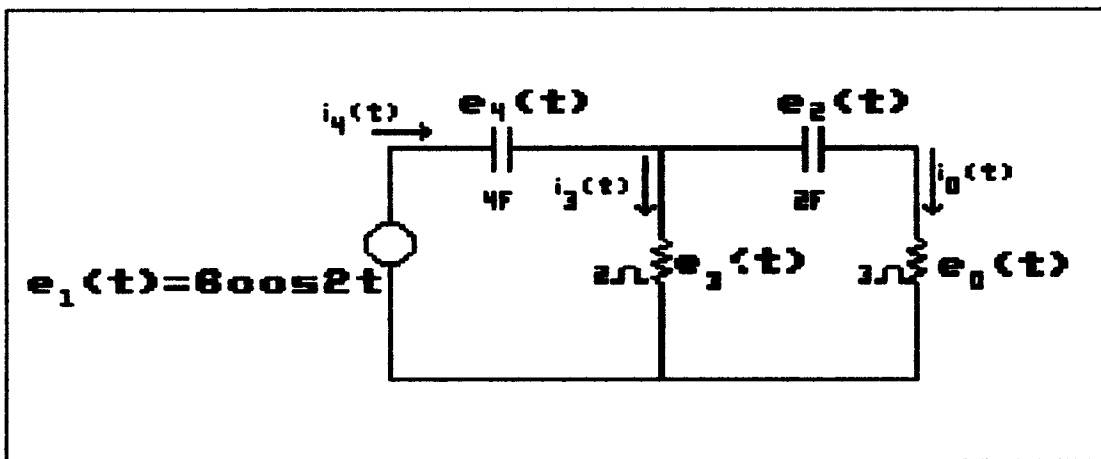


FIGURA 78. EJERCICIO TIPO 1 DE CONDICIONES INICIALES

Puesto que $e_2(0^+) = e_4(0^+) = 0$, el voltaje de la fuente debe aparecer inicialmente a través de las resistencias de 2Ω y 3Ω ; esto es:

$$e_o(0^+) = e_3(0^+) = e_1(0^+) = 6V$$

$$\text{Entonces } i_o(0^+) = 6/3 = 2A$$

$$i_3(0^+) = 6/2 = 3A$$

$$i_4(0^+) = 2 + 3 = 5A$$

La derivada del voltaje en el condensador puede encontrarse de las corrientes iniciales.

Para cualquier valor de t :

$$e_1(t) = e_0(t) + e_2(t) + e_4(t)$$

O sea:

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{de_0}{dt} + \frac{de_2}{dt} + \frac{de_4}{dt}$$

El valor de todas las derivadas en $t = 0^+$, excepto de_0/dt , pueden ser facilmente obtenidos del circuito.

Para $t > 0$:

$$e_1(t) = 6 \cos 2t$$

$$\frac{de_1}{dt} = -12 \operatorname{sen} 2t$$

$$\frac{de_1(0^+)}{dt} = 0$$

Además:

$$\frac{de_2(0^+)}{dt} = \frac{1}{C_2} i_0(0^+) = 1$$

$$\frac{de_4(0^+)}{dt} = \frac{1}{C_4} i_4(0^+) = \frac{5}{4}$$

Así:

$$\frac{de_o(0^+)}{dt} = - \frac{9}{4} \text{ V/s.}$$

14.5.2. EJERCICIO TIPO 2

El siguiente circuito contiene una capacitancia y dos inductancias y es descrito por una ecuación diferencial de tercer orden. Asumir que el circuito no tiene energía inicial almacenada, encontrar los valores de $e_o(t)$, de_o/dt y d^2e_o/dt , los cuales serán necesarios para evaluar las 3 constantes arbitrarias en la solución general.

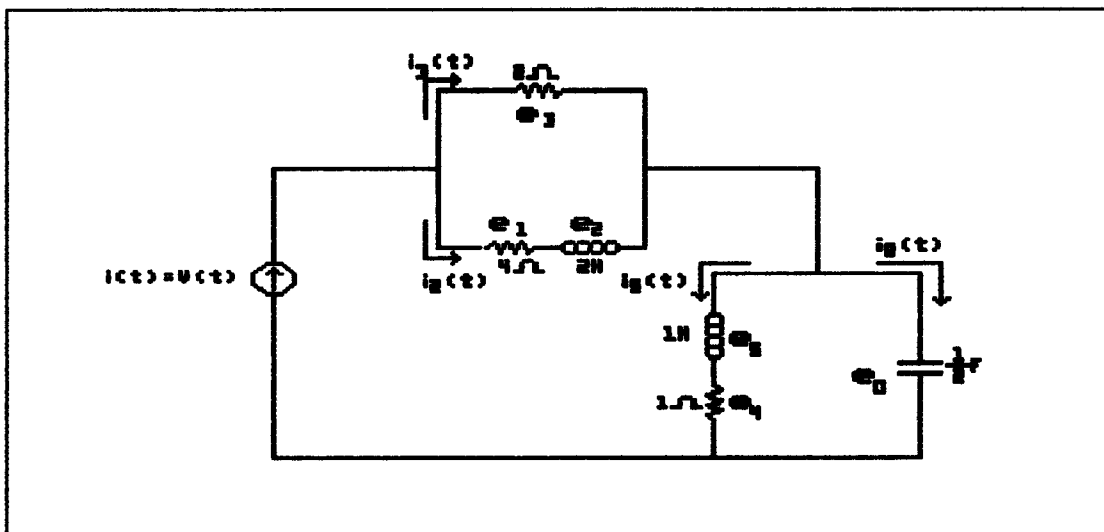


FIGURA 79. EJERCICIO TIPO 2 DE CONDICIONES INICIALES

Del circuito se conocen las siguientes cantidades:

$$i(0^+) = 1A, \quad i_2(0^+) = i_3(0^+) = 0, \quad e_0(0^+) = 0$$

Entonces:

$$i_3(0^+) = 1A$$

$$e_3(0^+) = 2V$$

$$e_1(0^+) = 0$$

$$e_2(0^+) = 2V$$

$$i_0(0^+) = 1A$$

$$e_4(0^+) = 0$$

$$e_5(0^+) = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{de_0(0^+)}{dt} = \frac{1}{C} i_0(0^+) = 2V$$

$$\frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{1}{L_2} e_2(0^+) = 1A$$

$$\frac{di_3(0^+)}{dt} = \frac{1}{L_1} e_3(0^+) = 0$$

Puesto que $di_0/dt = C \cdot d^2e_0/dt^2$, la solución se podrá hallar si se conoce el valor de di_0/dt .

$$i_o(t) = i(t) - i_s(t)$$

$$\frac{di_o}{dt}(0^+) = \frac{di}{dt}(0^+) - \frac{di_s}{dt}(0^+) = 0$$

$$\frac{d^2e_o(0^+)}{dt^2} = 0$$

14.6. SOLUCION COMPLETA

14.6.1. EJERCICIO TIPO 1

Un generador de 250 V cc se utiliza para alimentar un motor de 40 A. El interruptor con inercia despreciable tiene un disparo automático que opera a una corriente de 2000 A. Si ocurre un corto circuito accidental en los terminales del interruptor, cuánto tiempo tomará el interruptor que disparar?

La resistencia del corto es 0.001 Ω . Supóngase que la resistencia e inductancia de los devanados del generador son despreciables comparados con las del corto circuito y los cables de conexión.

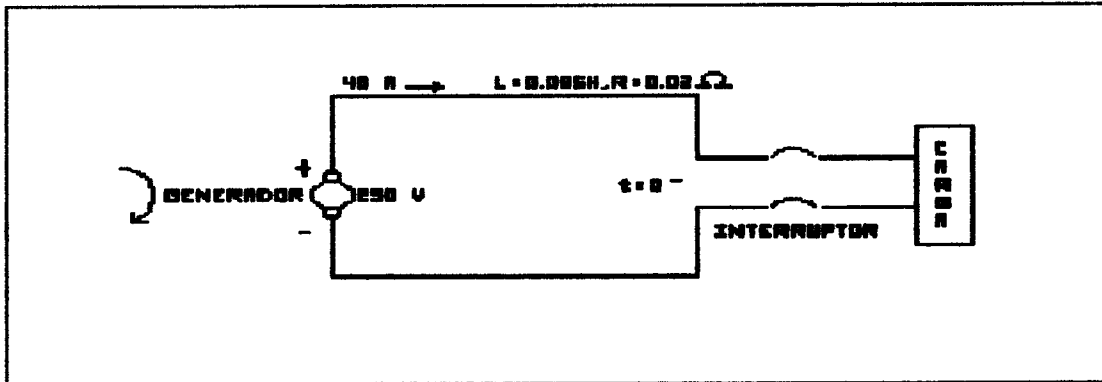


FIGURA 80. EJERCICIO TIPO 1 DE SOLUCION COMPLETA

El circuito equivalente es el siguiente:

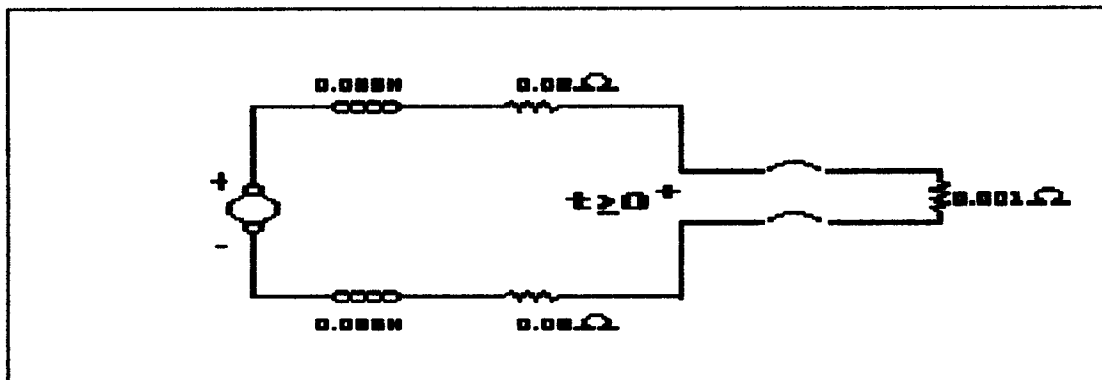


FIGURA 81. CIRCUITO EQUIVALENTE

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff:

$$L_T \frac{di}{dt} + i R_T = 250$$

en donde:

$$L_T = 0.085 + 0.085 = 0.170 \text{ H}$$

$$R_T = 0.02 + 0.001 + 0.02 = 0.041 \, \Omega$$

$$0.170 \, di/dt + 0.041 \, i = 250$$

Obtención de la componente excitada: Como la fuente es una batería, la componente excitada puede determinarse de la ley de Ohm y la impedancia del circuito.

$$Z = R + j \, X_L$$

$$Z = 0.041 + j \, (2\pi)(0)(0.170)$$

$$Z = 0.041 \, \Omega$$

Por lo tanto:

$$i_D = V/Z = 250/0.041 = 6098 \, A$$

$$i_D = 6098 \, A$$

Podría obtenerse una corriente de cortocircuito en estado estacionario de 6098 A si el interruptor no se dispara.

Obtención de la componente sin fuentes: Sustituir por cero la fuente y después obtener la ecuación característica y la respuesta sin fuentes correspondiente,

$$0.170 \, di/dt + 0.041 \, i = 0$$

$$0.170p + 0.041 = 0$$

$$p = -0.2412$$

$$i_{sp} = A e^{-0.2412t}$$

La respuesta completa es:

$$i = i_{sp} + i_D$$

$$i = A e^{-0.2412t} + 6098$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para obtener la respuesta específica,

$$40 = A e^{-0.2412(0+)} + 6098$$

$$A = -6058$$

Así, la respuesta completa para las condiciones iniciales específicas es:

$$i = -6058 e^{-0.2412t} + 6098$$

Para determinar el tiempo transcurrido antes de que se dispare el interruptor, se sustituyen 2000 A y se despeja t.

$$2000 = -6058 e^{-0.2412t} + 6098$$

$$e^{-0.2412t} = 0.676$$

$$\ln(e^{-0.2412t}) = \ln(0.676)$$

$$-0.2412 t = -0.3916$$

$$t = 1.62 \text{ Seg}$$

La sección a trazos representa la continuación del incremento de la corriente que podría ocurrir si no se disparara el interruptor.

14.6.2. EJERCICIO TIPO 2

Un transformador o motor depende, en cuanto al desarrollo de su corriente de magnetización del valor del voltaje de excitación en el instante en que se cierra el interruptor.

Se muestra un circuito equivalente de un transformador con carga conectado a un voltaje de excitación sinusoidal. Se supone que la onda de voltaje está en su valor pico de 2400 V cuando se cierra el interruptor.

Determinar la ecuación para la corriente como una función del tiempo suponiendo que el interruptor está cerrado en el instante en que la onda de voltaje pasa por cero.

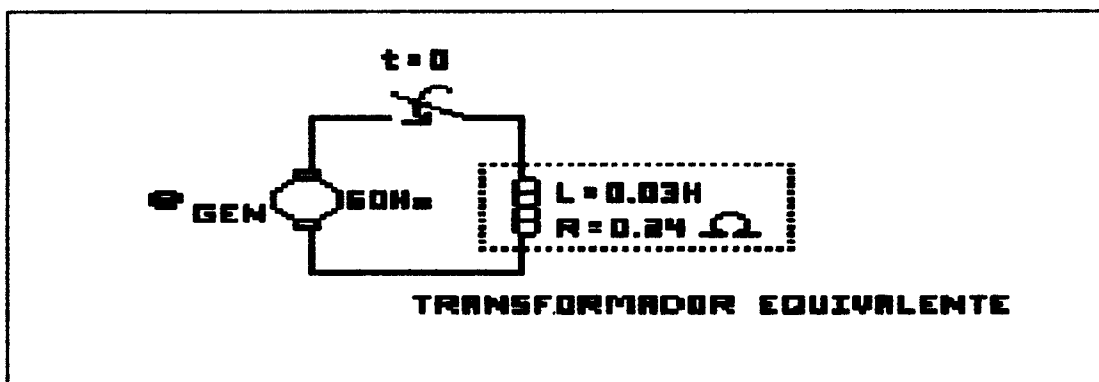


FIGURA 82. EJERCICIO TIPO 2 DE SOLUCION COMPLETA

La corriente fasorial obtenida al cerrarse el interruptor en el instante en que la onda de tensión de excitación pasa a través de cero es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{1697.06 \angle 0^\circ}{11.313 \angle 88.78^\circ}$$

$$I = 150.01 \angle -88.78^\circ \text{ A}$$

$$i_D = 212.2 \text{ sen } (337t - 88.78^\circ)$$

Para obtener la respuesta sin fuentes, se sustituye el excitador por cero y se despeja i_{sr} :

$$0.03 \, di/dt + 0.24 \, i = 0$$

$$0.03 \, p + 0.24 = 0$$

$$p = -8$$

$$i_{sr} = A e^{-8t}$$

$$i = i_D + i_{sr}$$

$$i = 212.2 \text{ sen } (377t - 88.78^\circ) + A e^{-8t}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$0 = 212.2 \text{ sen } [377(0) - 88.78^\circ] + A e^{-8(0)}$$

$$A = 212.15$$

Por lo tanto,

$$i = 212.2 \sin(377t - 88.78^\circ) + 212.15 e^{-\omega t}$$

La siguiente figura muestra la gráfica correspondiente a la solución completa, en una escala apropiada



FIGURA 83. REPRESENTACION GRAFICA DE SOLUCION COMPLETA

Una corriente de magnetización pico de 410.71 A ocurre en 0.0083 segundos después de cerrar el interruptor. Sin embargo el rápido decrecimiento del término transitorio hace que la corriente decrezca a aproximadamente un pico en estado estable de 212.2 A en cinco constantes de tiempo ($5 * 1/8 = 0.625$ seg).

15. RESOLUCION POR FASORES

15.1. SOLUCION POR NODOS

Hallar $i_1(t)$ por nodos:

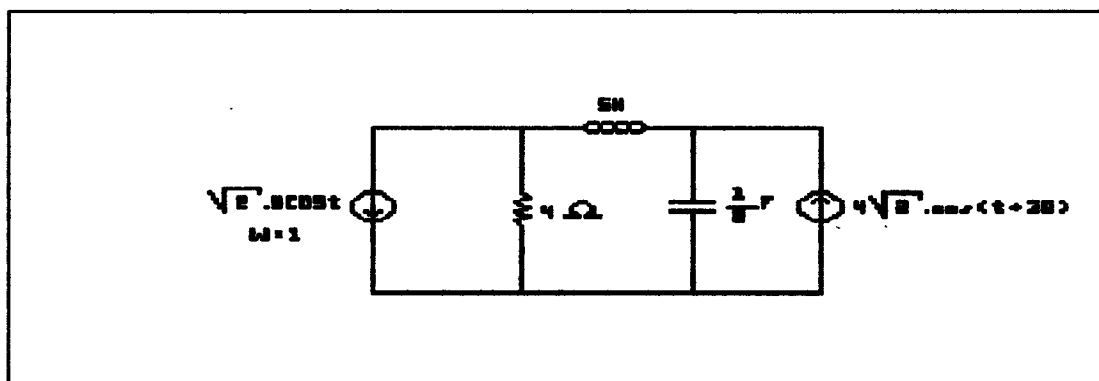


FIGURA 84. CIRCUITO AC ESTACIONARIO

$$I_1 = (V_1 - V_2)/Z_2$$

Nodos: Suma de admitancias. $Y = 1/Z$

Nodo 1:

$$V_1 \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right] - V_2 \left[\frac{1}{Z_2} \right] = -6 \angle 0^\circ$$

$$V_1 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{j5} \right] - V_2 \left[\frac{1}{j5} \right] = -6 \angle 0^\circ$$

Nodo 2:

$$-V_1 \left[\frac{1}{Z_2} \right] + V_2 \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right] = 4 \angle 30^\circ$$

$$-V_1 \left[\frac{1}{j5} \right] + V_2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{j5} \right] = 4 \angle 30^\circ$$

$$V_1 (0.25 - j0.2) + V_2 (j0.2) = -6$$

$$V_1 (0.2) + V_2 [(-j0.2 + j0.5)/j0.3] = 4 \angle 30^\circ$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$j^2 = -1$$

$$\angle \pm 180^\circ = -1$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & j0.2 \\ 4 \angle 30^\circ & j0.3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.25 - j0.2 & j0.2 \\ j0.2 & j0.3 \end{vmatrix}} = \frac{-6(j0.3) - (j0.2)(4 \angle 30^\circ)}{(0.25 - j0.2)(j0.3) - (j0.2)^2}$$

$$V_1 = 21 \angle -117.37^\circ$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.25-j0.2 & -6 \\ j0.2 & 4/30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.25-j0.2 & j0.2 \\ j0.2 & j0.3 \end{vmatrix}} = \frac{(0.25-j0.2)(4/30) + 6(j0.2)}{0.12/36.5}$$

$$V_2 = 13.41 \angle 2.21$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{Z_2} = \frac{21 \angle -117.37 - 13.41 \angle 2.21}{j5}$$

$$I_1 = 5.9 \angle 130$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$V_m = V_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}$$

$$i_1(t) = 5.9 \sqrt{2} \cos(t-230)$$

$$i_1(t) = 5.9 \sqrt{2} \cos(t+130)$$

15.2. SOLUCION POR MALLAS

Determinar la corriente RMS demandada por la impedancia $(1+j2) \Omega$ y la caída de voltaje RMS a través de ella.

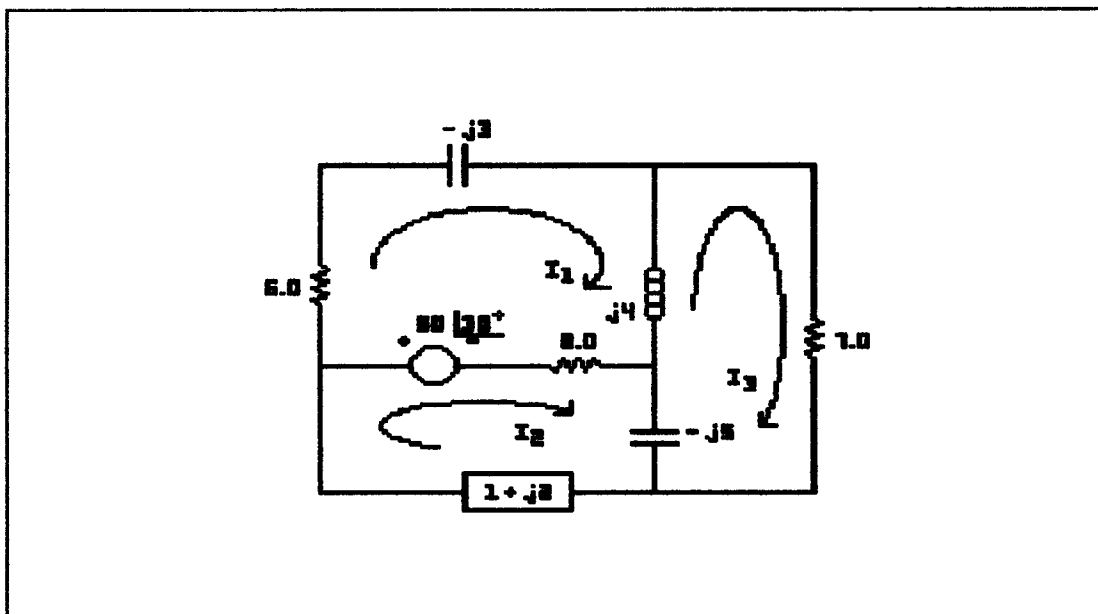


FIGURA 85. EJERCICIO TIPO DE SOLUCION POR MALLAS

Las ecuaciones de malla son:

$$50 \angle 30^\circ = (14+j1)I_1 + (-8)I_2 + (-j4)I_3$$

$$-50 \angle 30^\circ = (-8)I_1 + (9-j3)I_2 + (j5)I_3$$

$$0 = (-j4)I_1 + (j5)I_2 + (7-j1)I_3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 14+j1 & -8 & -j4 \\ -8 & 9-j3 & j5 \\ -j4 & j5 & 7-j1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = (14+j1)[(9-j3)(7-j1)-(j5)(j5)]-(-8)[(-8)(7-j1)-(j5)(-j4)] + (-j4)[(-8)(j5) - (9-j3)(-j4)]$$

$$\underline{I_z} = 676 \underline{-28.16^\circ}$$

La corriente en la impedancia $(1 + j2) \Omega$ es la corriente de malla I_2 .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 14+j1 & 50/30 & -j4 \\ -8 & -50/30 & j5 \\ -j4 & 0 & 7-j1 \end{vmatrix}}{676 \underline{-28.16^\circ}}$$

$$I_2 = \{ (14+j1)[(-50/30)(7-j1)-(0)(j5)] - (-8)[(50/30)(7-j1)-(0)(-j4)] + (-j4)[(50/30)(j5)-(-50/30)(-j4)] \} / 676 \underline{-28.16}$$

$$I_2 = \frac{1950 \underline{-148.53}}{676 \underline{-28.16}}$$

$$I_2 = 2.88 \underline{-120.37^\circ} \text{ A}$$

La corriente RMS es: $I_{2 \text{ RMS}} = 2.88 \text{ A}$

La caída de voltaje a través de la impedancia $(1+j2) \Omega$ es:

$$V = I.Z$$

$$V = 2.88 \underline{-120.37^\circ} (1+j2) = (2.88 \underline{-120.37})(2.236 \underline{63.43})$$

$$V = 6.45 \underline{-56.95^\circ} \text{ V}$$

La caída de voltaje RMS a través de la impedancia es:

$$V_{\text{RMS}} = 6.45 \text{ V.}$$

16. EJERCICIOS DE POTENCIA

16.1. POTENCIA ACTIVA - FACTOR DE POTENCIA

Hallar potencia activa y factor de potencia en cada rama y en el sistema:

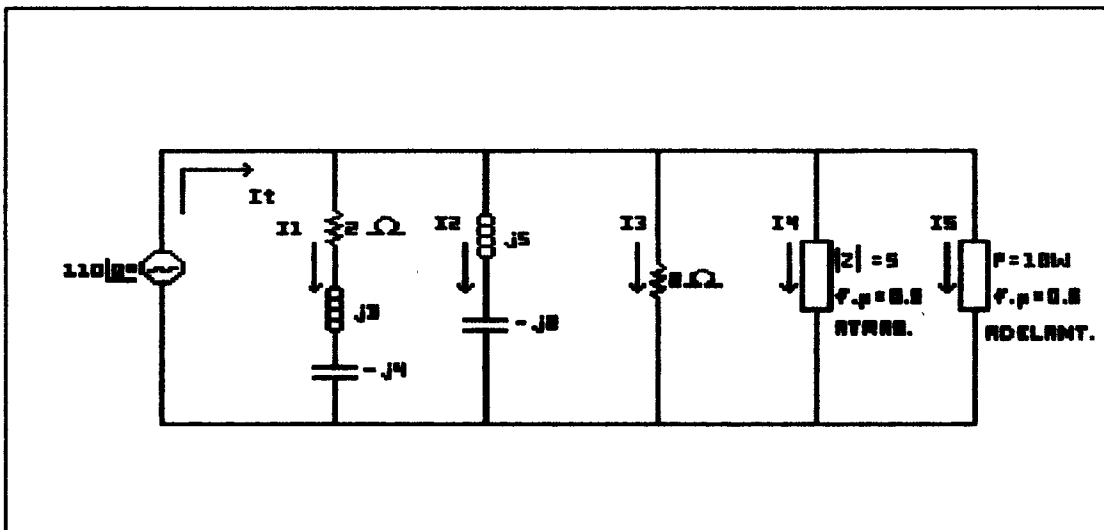


FIGURA 86. CIRCUITO PARA HALLAR EL FACTOR DE POTENCIA

Para a - b

$$P_{ab} = V_{ab} I_1 \cos \theta = I_1^2 R$$

$$V_{ab} = 110 \angle 0^\circ$$

$$I_1 = V_{ab}/Z_{ab} = 110 \angle 0^\circ / 2 - j = 110 \angle 0^\circ / 2.23 \angle -26.56^\circ \\ = 49.38 \angle 26.56^\circ$$

$$P_{ab} = 110 * 49.38 \cos 26.56 = (49.38)^2 * 2$$

$$P_{ab} = 4858.5 \text{ W}$$

$$fp_{ab} = \cos 26.56 \text{ (adelantado)} = 0.89 \text{ adelantado}$$

Para c - d

$$P_{c-d} = I^2 R$$

$$\text{Entonces: } R = 0, \quad P_{cd} = 0$$

$$fp = \cos \angle \frac{V}{I}$$

$$\angle \frac{V}{I} : I_2 = V_{cd}/Z_{cd} = \frac{110 \angle 0^\circ}{j3} = \frac{110 \angle -90^\circ}{3}$$

$$\angle \frac{V}{I} = +90^\circ$$

$$fp = \cos (+90^\circ) = 0$$

$$fp = 0$$

Para e - f:

$$P_{ef} = V_{ab}^2/R = 110^2/2 = 6050$$

$$P_{ef} = 6050 \text{ W y } fp = 1$$

Rama g - h:

$$f_p = 0.9 \text{ atrasado} = \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.9$$

$$\theta = 25.8$$

$$Z = 5 \angle 25.8^\circ$$

$$I_A = (110 \angle 0^\circ / 5 \angle 25.8^\circ) = 22 \angle -25.8^\circ$$

$$P_{gh} = V \cdot I \cdot \cos \theta = 110 \cdot 22 \cdot 0.9$$

$$P_{gh} = 2178 \text{ W}$$

Potencia en el sistema:

$$P_{\text{total}} = P_{ab} + P_{cd} + P_{ef} + P_{gh} + P_{ij}$$

$$P_{\text{total}} = 4858.5 + 0 + 6050 + 2178 + 10$$

$$P_{\text{total}} = 13096 \text{ W}$$

16.2. POTENCIA REACTIVA Y APARENTE

Un circuito paralelo con una resistencia de 3Ω , una reactancia capacitiva de 10Ω , y una inductancia ideal cuya reactancia inductiva es 6Ω , está conectado a una

fuentes de 120 V y 60 Hz. Determine la impedancia del circuito, la corriente que pasa por cada rama, la potencia reactiva total de entrada y la potencia aparente de entrada.

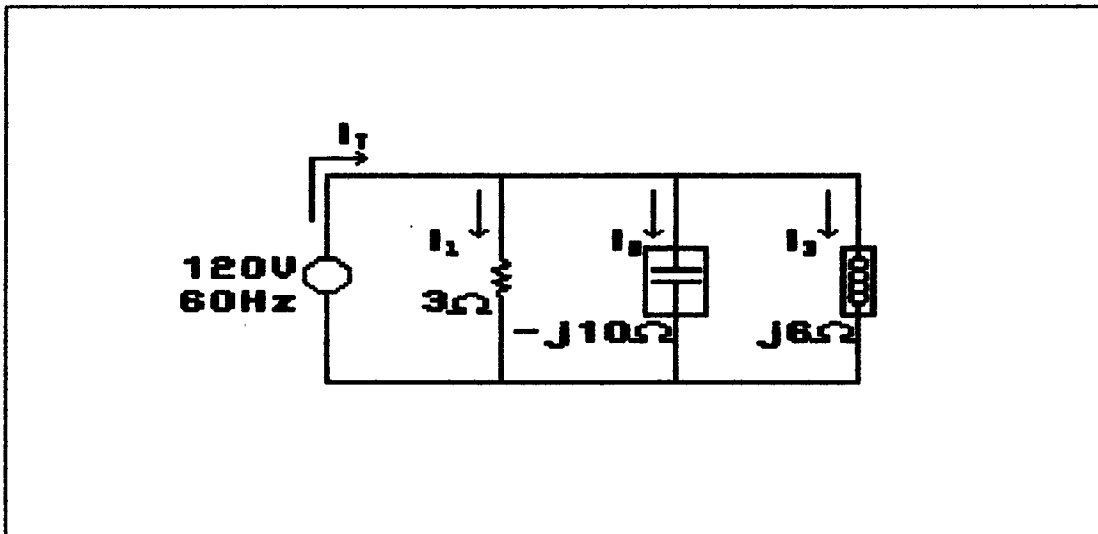


FIGURA 87. CIRCUITO ILUSTRATIVO

$$Z_T = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{j6}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{10/-90} + \frac{1}{6/90}}$$

$$Z_T = \frac{1}{0.33 + 0.1/\underline{90} + 0.166/\underline{-90}} = \frac{1}{0.33 + j0.1 - j0.166}$$

$$Z_T = \frac{1}{0.33 - j0.066} = \frac{1}{0.33 \underline{-11.31}}$$

$$Z_T = 3 \angle 11.31^\circ$$

$$I_1 = \frac{V_T}{R} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_T}{-jX_C} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_T}{jX_L} = \frac{120 \angle 0^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 20 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_T &= I_1 + I_2 + I_3 = 40 + 12 \angle 90^\circ + 20 \angle -90^\circ \\ &= 40 + j12 - j20 = 40 - j8 \end{aligned}$$

$$I_T = 40.8 \angle -11.31^\circ$$

$$Q_T = V_T \cdot I_T \sin \angle \frac{V_T}{I_T} = 120 (40.8) (\sin 11.31^\circ)$$

$$Q_T = 960.2 \text{ VAR}$$

$$S_T = V_T \cdot I_T = 4896 \text{ VA}$$

16.3. CORRECCION DEL FACTOR DE POTENCIA

16.3.1. EJERCICIO TIPO 1

Carga dada como $R + jX = Z$ (Ω)

Una carga trabajando a un $\text{fp} = 0.6$ atrasado y a un voltaje de 220 v, requiere una potencia de 10 KW. Se debe mejorar el fp . a 0.9 atrasado. Calcular el valor del condensador a conectar en la carga. La $Z_L = 0.8 \Omega$.

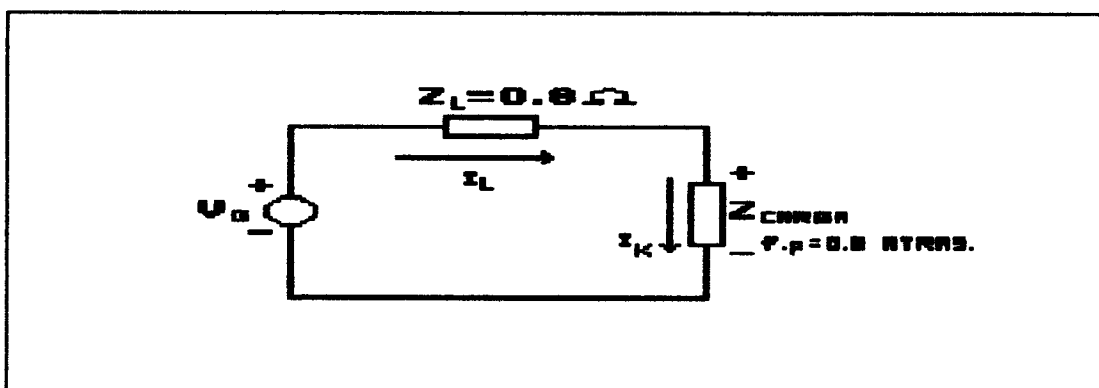


FIGURA 88. CIRCUITO ILUSTRATIVO

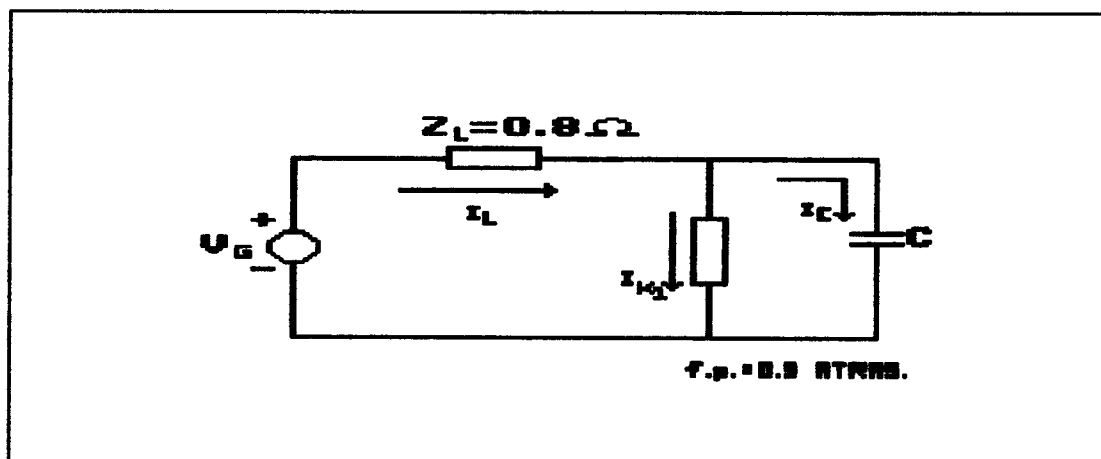


FIGURA 89. SISTEMA FINAL

$$P = 10 \text{ W}$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} 0.6 = 53.13^\circ$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} 0.9 = 25.8^\circ$$

$$Q_1 = P \cdot \tan \theta_1 = 10 \text{ kW} \tan 53.13 = 13.3 \text{ kVAR (inductivo)}$$

$$Q_2 = P \cdot \tan \theta_2 = 10 \text{ kW} \tan 25.8 = 4.8 \text{ kVAR (inductivo)}$$

$$Q_c = (13.3 - 4.8) \text{ KVAR} = 8.5 \text{ kVAR (Capacitivo)}$$

$$\text{Como } Q_c = V^2/X_c$$

$$C = Q_c / (2\pi \cdot f \cdot V^2) = 8.5 \cdot 10^3 / (2\pi \cdot 60 \cdot (220)^2)$$

$$C = 465.8 \text{ } \mu\text{F}$$

16.3.2. EJERCICIO TIPO 2

Carga dada en potencias:

Un motor de inducción monofásico a 220 V, 1.5 HP, 60 Hz consume 7.6 A cuando opera en condiciones nominales. La eficiencia en condiciones nominales es 85 %.

Calcular los kVA de entrada, los kW de entrada, el factor de potencia, la capacitancia de un condensador conectado en paralelo que haga que el sistema opere a un factor de

potencia de la unidad, la corriente entregada por el generador después de instalar el condensador, la corriente en el motor después de instalado el condensador, la corriente en el condensador.

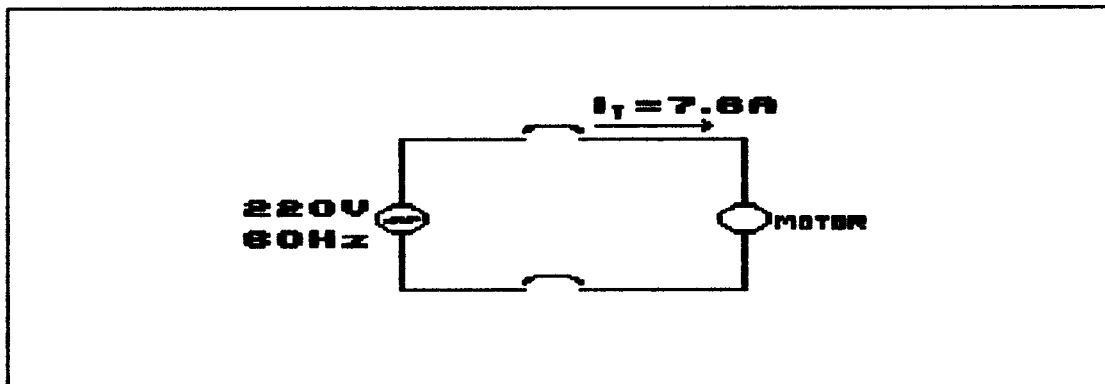


FIGURA 90. SISTEMA INICIAL

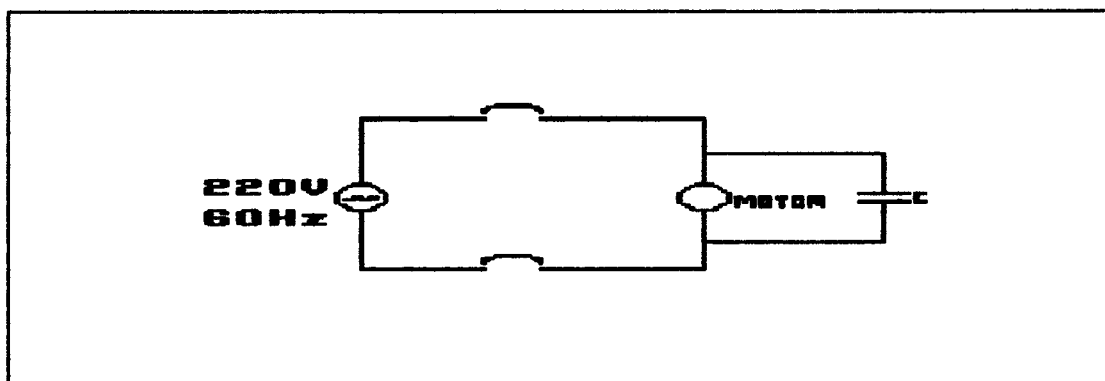


FIGURA 91. SISTEMA FINAL

$$S_T = V_T I_T = 220 \times 7.6 = 1672 \text{ VA}$$

$$S_T = 1.6720 \text{ kVA}$$

$$\text{Eficiencia} = 746 \text{ W*HP/P}_{\text{entrada}}$$

$$0.85 = 1.5 \cdot 746 / P_{\text{entrada}}$$

$$P_{\text{entrada}} = 1316.5 \text{ W}$$

$$f_p = P_T / S_T = 1316.5 / 1672 = 0.787$$

$$\theta_T = \cos^{-1} f_p = \cos^{-1} 0.787 = 38.1$$

$$Q_T = V_T I_T \sin \theta_T = 220 \cdot 7.6 \cdot \sin 38.1$$

$$Q_T = 1030.8 \text{ VAR}$$

Para elevar el factor de potencia a 1, el condensador debe suministrar todos los VARS, por lo tanto:

$$Q_C = 1030.8 \text{ VAR}$$

$$X_C = 220^2 / 1030.8$$

$$X_C = 46.95 \, \Omega$$

$$X_C = 1 / 2\pi f C$$

$$C = 1 / (2\pi \cdot 60 \cdot 46.95)$$

$$C = 56.5 \, \mu\text{F}$$

Después de instalado el condensador el factor de potencia es 1 y la potencia aparente es igual a la potencia activa.

$$S_T = P_T = V_T \cdot I_T$$

$$1316.5 = 220 I_T$$

$$I_T = 5.98 \text{ A}$$

$$I_{\text{MOTOR}} = 7.6 \text{ A}$$

$$I_C = V_T / (-jX_C)$$

$$I_C = 220/0 / 4.69 \angle -90$$

$$I_C = 4.69 \angle 90^\circ$$

16.3.3. EJERCICIO TIPO 3 (METODO GRAFICO)

Un circuito eléctrico demanda una potencia activa de 100 kW a un factor de potencia 0.8 en un atraso de una fuente de 240 V a 60 Hz.

Determine la potencia aparente de entrada, los Kvar de entrada, la capacitancia de un condensador conectado en paralelo necesario para ajustar el fp del sistema al 95%.

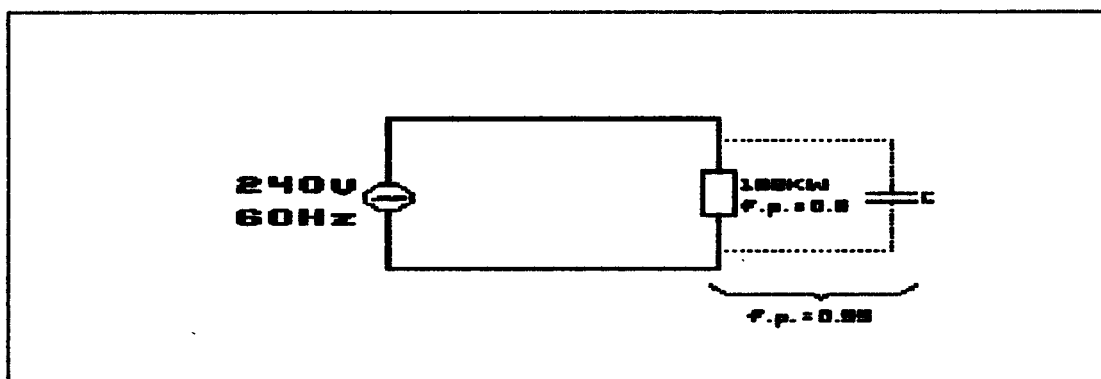


FIGURA 92. CIRCUITO ILUSTRATIVO

$$fp = P_T / S_T$$

$$S_T = P_T / fp$$

Entonces:

$$S_T = 100 \text{ Kw} / 0.8$$

$$S_T = 125 \text{ kVA}$$

$$S_T^2 = P_T^2 + Q_T^2$$

$$Q_T = (S_T^2 - P_T^2)^{1/2}$$

$$Q_T = (125^2 - 100^2)^{1/2}$$

$$Q_T = 75 \text{ kVAR}$$

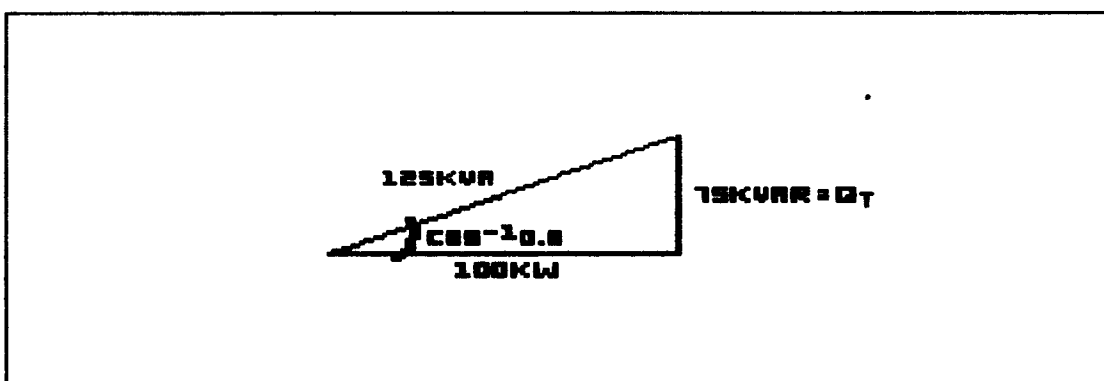


FIGURA 93. TRIANGULO DE POTENCIAS PARA EL SISTEMA INICIAL

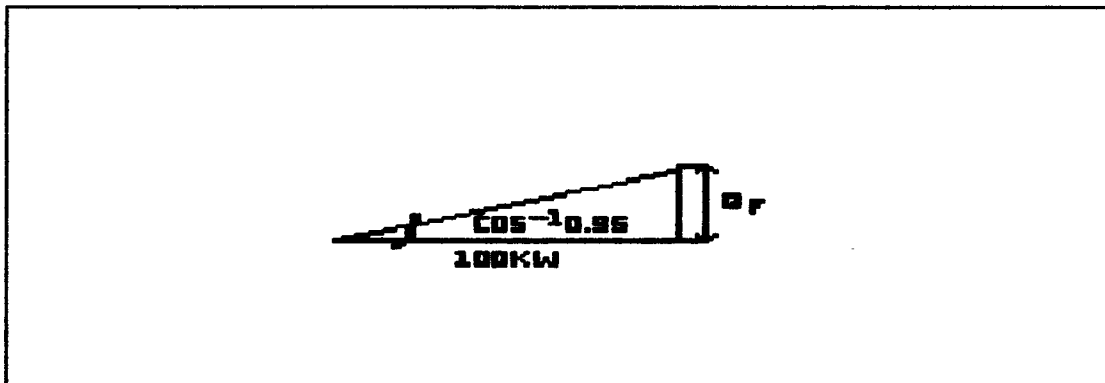


FIGURA 94. TRIANGULO DE POTENCIAS PARA EL SISTEMA FINAL

$$Q_r = 100 \text{ kW} \cdot \tan(\cos^{-1} 0.95)$$

$$Q_r = 32.86 \text{ kVAR}$$

Para hallar C por el método gráfico se unen los triángulos de potencias del sistema inicial y final:

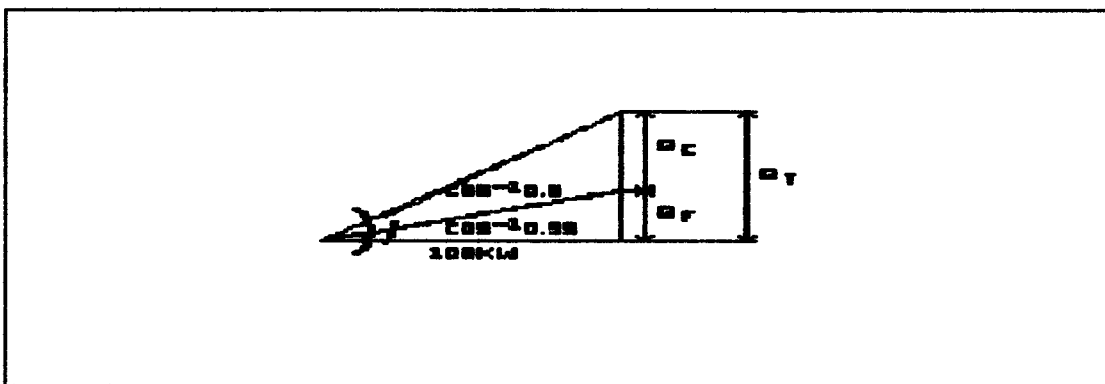


FIGURA 95. TRIANGULO DE POTENCIAS COMPLETO

$$Q_T = Q_C + Q_F$$

$$Q_C = Q_T - Q_F$$

$$Q_C = 75\text{kVAR} - 32.86 \text{ kVAR}$$

$$Q_C = 42.13 \text{ kVAR}$$

$$Q_C = V^2/X_C$$

$$X_C = V^2/Q_C$$

$$X_C = 1/2\pi fC$$

$$C = Q_C/(2\pi fV^2) = 42.13*10^3/(2\pi*60*(240)^2)$$

$$C = 1940 \text{ }\mu\text{F}$$

17. RECOMENDACIONES

- El objetivo básico de este proyecto es de prestar la ayuda didáctica suficiente para que el alumno pueda aprender el curso de Circuitos Eléctricos I, sin mucha ayuda externa, por lo tanto, este proyecto debe perfeccionarse cada día más.
- Se recomienda que en proyectos futuros se trate de obtener otros paquetes tutoriales de diferentes cursos vistos en el programa de Ingeniería Eléctrica.
- Para futuros tutoriales se deben escoger los lenguajes apropiados, que permitan un acople eficiente entre textos, gráficas y problemas.

BIBLIOGRAFIA

**DAWES L., Chester. ELECTRICAL ENGINEERING TEXT.
ALTERNATING CURRENT. Cuarta edición. Vol. II.
New York: McGraw-Hill. 1947.**

**EDMINISTER, Joseph. SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM.
CIRCUITOS ELECTRICOS. México: McGraw-Hill. 1975.**

**GUSSOW, Milton. SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM. FUNDAMENTOS
DE ELECTRICIDAD. Primera Edición. México: McGraw-
Hill. 1986.**

**HAYT, William H. Jr. Kemmerly Jock E. ANALISIS DE
CIRCUITOS EN INGENIERIA. Cuarta Edición. México:
McGraw-Hill. 1987.**

**HUBERT, Charles I. CIRCUITOS ELECTRICOS CA/CC. ENFOQUE
INTEGRADO. Primera Edición. Bogotá: McGraw-Hill
Latinoamericana S.A. 1985.**

**JAMBA, Kris y Nameroff Steven. TURBO PASCAL.
BIBLIOTECAS DE PROGRAMAS. Primera Edición. España:
Osborne/McGraw Hill. 1988.**

**JOYANES A., Luis. PROGRAMACION EN TURBO PASCAL.
VERSIONES 4.5, 5.5. Primera Edición. España: McGraw
Hill. 1990.**

SAND, Paul A. **PASCAL AVANZADO. TECNICAS DE PROGRAMACION.** Primera Edición. España: Osborne/McGraw Hill. 1985.

SKILLING, Hugh Hildreth. **ENCICLOPEDIA C.E.C.S.A. CIRCUITOS EN INGENIERIA ELECTRICA.** México: Continental. 1984.

ANEXOS

ANEXO 1. MENU PRINCIPAL DEL TUTOR DE CIRCUITOS ELECTRICOS

ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS 1

- 1 - TUTOR 1; (Base teorica).
 - 2 - TUTOR 2; (Problemas tipo).
 - S - SALIR del Programa
-

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>

ANEXO 2. MENU DEL TUTOR 1 (PARTE TEORICA)

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

MENU PRINCIPAL

- C. CONVENCIONES UTILIZADAS
- 1. DEFINICIONES Y PARAMETROS
- 2. INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSION SENOIDALES
- 3. NUMEROS COMPLEJOS
- 4. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL
- 5. CIRCUITOS SERIE Y PARALELO
- 6. POTENCIA ELECTRICA Y FACTOR DE POTENCIA
- 7. ANALIS. DE CIRCUITO METD. DE LAS CORRIENTES DE MALLAS
- 8. ANALIS. DE CIRCUITO METD. DE LAS TENSIONES O NODOS
- 9. TEOREMA DE THEVENIN Y NORTON
- 0. CIRCUITOS POLIFASICOS
- S. SALIR DEL TUTOR1

S: Salir del TUTOR1 -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

1. DEFINICIONES Y PARAMETROS DE UN CIRCUITO

- 1 Sistema de unidades
- 2 Ley de Coulomb
- 3 Diferencia de potencial
- 4 Corriente eléctrica
- 5 Potencia, Energía
- 6 Elemento resistivo, bobina y condensador
- 7 Resistencia, autoinducción y capacidad
- 8 Leyes de Kirchhoff

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

2. INTENSIDAD DE CORRIENTE Y TENSION SENOIDALES

1

 Introducción

2

 Intensidad de corriente senoidal

3

 Intensidad de tensión senoidal

4

 Impedancia

5

 Angulo de fase

6

 Circuitos serie y paralelo

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

3. NUMEROS COMPLEJOS

- 1 Números reales, imaginarios y complejos
- 2 Suma y resta de complejos
- 3 Multiplicación y división de complejos

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

4. IMPEDANCIA COMPLEJA Y NOTACION FASORIAL
1 Impedancia compleja y notación fasorial

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

5. CIRCUITOS SERIE Y PARALELO

- 1 Circuito serie
- 2 Circuito paralelo
- 3 Circuito de dos ramas en paralelo

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

6. POTENCIA ELECTRICA Y FACTOR DE POTENCIA
- 1 Potencia activa
 - 2 Potencia aparente
 - 3 Potencia reactiva
 - 4 Triángulo de potencias
 - 5 Potencia compleja
 - 6 Corrección del factor de potencia

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

7. ANALIS CIRCUITO METODO CORRIENTES DE MALLA

- 1 Método de resolución, elección de las mallas,
- 2 Matrices
- 3 Aplicación algebra matricial al analisis de circuitos

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

8. ANALIS. DE CIRCUITO METD. DE LAS TENSIONES O NODOS
1 Método de resolución, número de ecuaciones en los nodos

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

9. TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON

- 1 Teorema Thevenin
- 2 Teorema Norton
- 3 Ciecuitos equivalentes de Thevenin y Norton

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

CIRCUITOS ELECTRICOS I.

10. CIRCUITOS POLIFASICOS

- 1 Sistemas bifásicos
- 2 Sistemas trifásicos
- 3 Tensiones en sistemas trifásicos
- 4 Cargas equilibradas
- 5 Cargas desequilibradas
- 6 Potencia trifásica

ESC ESC: Salir del menu -- Use flechas para seleccionar y <ENTER> para activar.

ANEXO 3. MENU DEL TUTOR 2 (EJEMPLOS Y EJERCICIOS)

MENU PRINCIPAL - TUTOR CIRCUITOS I

1 - OBJETIVOS Y METODOLOGIA

2 - CIRCUITOS RESISTIVOS

3 - CIRCUITOS EN DOMINIO DEL TIEMPO

4 - RESOLUCION POR FASORES

5 - POTENCIA

S - SALIR del Programa

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>

CIRCUITOS RESISTIVOS

- N - Solución por Nodos
 - M - Solución por Mallas
 - P - Menu Principal
-

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>

CIRCUITOS EN DOMINIO DEL TIEMPO

- A - Función de transferencia
 - B - Solución libre
 - C - Transitorio en circuitos estables
 - D - Solución forzada
 - E - Ejemplo 1 de condiciones iniciales
 - F - Ejemplo 2 de condiciones iniciales
 - G - Ejemplo 1 de solución completa
 - H - Ejemplo 2 de solución completa
 - P - Menu Principal
-

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>

SOLUCION POR FASORES CIRCUITO AC-ESTACIONARIO

- N - Solución por Nodos
 - M - Solución por Mallas
 - P - Menu Principal
-

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>

POTENCIA

- A - Potencia activa-Factor de potencia
 - B - Potencia reactiva y aparente
 - C - Ejem. 1 de corrección del factor de potencia
 - D - Ejem. 2 de corrección del factor de potencia
 - E - Ejem. 3 de corrección del factor de potencia
 - P - Menu Principal
-

Pulse su opción o use las teclas de flecha y pulse <ENTER>