Rendez-vous Spatiale

1 Dérivé de Gateau $J'(u, \delta u)$

— Déterminer la dérivé de Gateau de la fonction $x(u)$. En déduire la dérivé de Gateau de J.

$$\begin{aligned}
x'(u, \delta u) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{x(u + \lambda \delta u) - f(u)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{Ax(u + \lambda \delta u, t) + B(u(t) + \lambda \delta u) - Ax(u, t) - Bu(t)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{Ax(u + \lambda \delta u, t) + B\lambda \delta u - Ax(u, t)}{\lambda} \\
&= B\delta u + \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{Ax(u + \lambda \delta u, t) - Ax(u, t)}{\lambda} \\
&= B\delta u + Ax'(u, \delta u)
\end{aligned}$$

On en déduit la dérivé de Gateau de J.

$$\begin{aligned}
J'(u, \delta u) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{J(u + \lambda \delta u) - J(u)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \overbrace{\frac{\int_0^T \frac{\varepsilon}{2}(u(s) + \lambda \delta u)^2 ds - \int_0^T \frac{\varepsilon}{2} u(s)^2 ds}{\lambda}}^{C1} + \overbrace{\frac{\frac{1}{2}x(u + \lambda \delta u, T)^2 - \frac{1}{2}x(u, T)^2}{\lambda}}^{C2}
\end{aligned}$$

On va maintenant calculer C1 et C2.

$$\begin{aligned}
C1 &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\int_0^T \frac{\varepsilon}{2}[(u(s) + \lambda \delta u)^2 - u(s)^2] ds}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\int_0^T \frac{\varepsilon}{2}[2\lambda u(s)\delta u + (\lambda \delta u)^2] ds}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^T \frac{\varepsilon}{2}[2u(s)\delta u + \lambda \delta u^2] ds
\end{aligned}$$

on a $\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda \delta u^2 = 0$, donc

$$C1 = \int_0^T \varepsilon u(s) \delta u ds$$

Au tour de C2.

$$\begin{aligned}
C2 &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{2} \frac{x(u + \lambda \delta u, T)^2 - x(u, T)^2}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{2} \frac{x(u + \lambda \delta u, T) - x(u, T)}{\lambda} (x(u + \lambda \delta u, T) + x(u, T)) \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{2} x'(u, \delta u)(T)(x(u + \lambda \delta u, T) + x(u, T))
\end{aligned}$$

on a $\lim_{\lambda \to 0^+} x(u + \lambda\delta u, T) = x(u, T)$, donc

$$\begin{aligned} C2 =& \frac{1}{2} x'(u, \delta u)(T) 2x(u, T) \\ =& x'(u, \delta u)(T) x(u, T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J'(u, \delta u) =& C1 + C2 \\ =& \int_0^T \varepsilon u(s) \delta u ds + x'(u, \delta u)(T) x(u, T) \end{aligned}$$

— Déterminer la fonction $g(t)$
On a besoin de Taylor.

$$J(u + \lambda\delta u) = J(u) + \lambda(\nabla J(u).\delta u) + o(||\delta u||)$$

On repart de la dérivé de Gateau.

$$\begin{aligned} J'(u, \delta u) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{J(u + \lambda\delta u) - J(u)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{J(u) + \lambda(\nabla J(u).\delta u) + o(||\delta u||) - J(u)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} (\nabla J(u).\delta u) + o(||\delta u||) \\ &= \nabla J(u).\delta u + (||\delta u|| \\ &= \int_0^T \nabla J(u(t)) \delta u dt \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$g(t) = \nabla J(u(t))$$

2 Calcul de ∇J

Montrer que :

$$\nabla J(u) = \varepsilon u + B^T p.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{p}(t) x'(u, \delta u, t) dt &= [x'(u, \delta u, t) p(t)]_0^T - \int_0^T p(t) \dot{x}'(u, \delta u, t) dt \\ &= x'(u, \delta u, T) p(T) - x'(u, \delta u, 0) p(0) - \int_0^T p(t) \dot{x}'(u, \delta u, t) dt \\ &= x'(u, \delta u, T) p(T) - \int_0^T p(t) \dot{x}'(u, \delta u, t) dt \end{aligned}$$

L'équation différencielle rétrograde nous donne :

$$\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= -^t Ap(t) \\
\int_0^T \dot{p}(t)x'(u,\delta u,t)dt &= -\int_0^T {}^t Ap(t)x'(u,\delta u,t)dt \\
x'(u,\delta u,T)p(T) - \int_0^T p(t)\dot{x}'(u,\delta u,t)dt &= -\int_0^T {}^t Ap(t)x'(u,\delta u,t)dt \\
x'(u,\delta u,T)p(T) &= -\int_0^T {}^t Ap(t)x'(u,\delta u,t)dt + \int_0^T p(t)\dot{x}'(u,\delta u,t)dt \\
&= \int_0^T -^t Ap(t)x'(u,\delta u,t) + p(t)[Ax'(u,\delta u,t) + B\delta u]dt \\
&= \int_0^T -^t Ap(t)x'(u,\delta u,t) + p(t)Ax'(u,\delta u,t) + p(t)B\delta udt \\
&= \int_0^T p(t)[(A-A)x'(u,\delta u,t)] + p(t)B\delta udt \\
&= \int_0^T p(t)B\delta udt \\
&= \int_0^T B^t p(t)\delta udt
\end{aligned}$$

On regroupes les résultats précédents (et on utilise la linéaritée des intégrales) :

$$\begin{aligned}
J'(u,\delta u) &= \int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt \\
\int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt &= \int_0^T \varepsilon u(t)\delta udt + x'(u,\delta u)(T)x(u,T) \\
\int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt &= \int_0^T \varepsilon u(t)\delta udt + \int_0^T B^t p(t)\delta udt \\
\int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt &= \int_0^T \varepsilon u(t)\delta u + B^t p(t)\delta udt \\
0 &= \int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt - \int_0^T \varepsilon u(t)\delta u + B^t p(t)\delta udt \\
0 &= \int_0^T \delta u[\nabla J(u(t)) - (\varepsilon u(t) + B^t p(t))]dt
\end{aligned}$$

Comme on a fait l'identification par magie avec

$$\int_0^T \nabla J(u(t))\delta udt = \int_0^T g(t)\delta udt$$

nous donne

$$g(t) = \nabla J(u(t))$$

et comme

$$\nabla J(u).\delta u + o(||\delta u||) = \nabla J(u).\delta u$$

On admet

$$\nabla J(u) = \varepsilon u + B^T p.$$

3 Résolution numérique

Pour la résolution numérique, nous avons mis en place un programme en Python, en utilisant la bibliothèque Numpy, pour la manipulation de matrices. On utilise la méthode du gradient, dont chaque itération se décompose, dans notre cas, en 4 étapes :

- 1) résoudre : $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$
- 2) résoudre : $\begin{cases} \dot{p}(t) = A^t p(t) \\ p(t) = x(t) \end{cases}$
- 3) calculer : $\nabla J(u(t)) = \varepsilon u(t) + B^t p(t)$
- 4) calculer : $\nabla u_{n+1} = u_n - p\nabla J(u_n)$

— Pour résoudre 1, on utilise la méthode d'euler explicite :
On choisit un pas pas, et, pour i allant de 0 à T :

$$\begin{cases} f(0) = x_0 \\ f((i+1).pas) = f(i) + pas.f'(i) \end{cases}$$

— Pour résoudre 2, on utilise la même méthode, mais, en quelques sortes, dans le sens opposé :
On choisit un pas pas, et, pour i allant de T à 0 :

$$\begin{cases} f(T) = x_T \\ f((i-1).pas) = f(i) - pas.f'(i) \end{cases}$$

— L'étape 3 ne pose pas de problème

— L'étape 4 nous donne une nouvelle approximation de $u(t)$, à utiliser pour la prochaine itération, dans l'étape 1.

On itère la méthode du gradient un nombre fixé de fois (pas de condition d'arrêt).

4 Résultat

Donnée pour la $Figure1$
$T = 1$
$pas(méthoded'Euler) = 0.005$
$Nombred'itération$: 500
$x_1(0) = 0.1$
$x_2(0) = 0$

Donnée pour la $Figure2$
$T = 1$
$pas(méthoded'Euler) = 0.005$
$Nombred'itération$: 5000
$x_1(0) = 0.2$
$x_2(0) = 0$

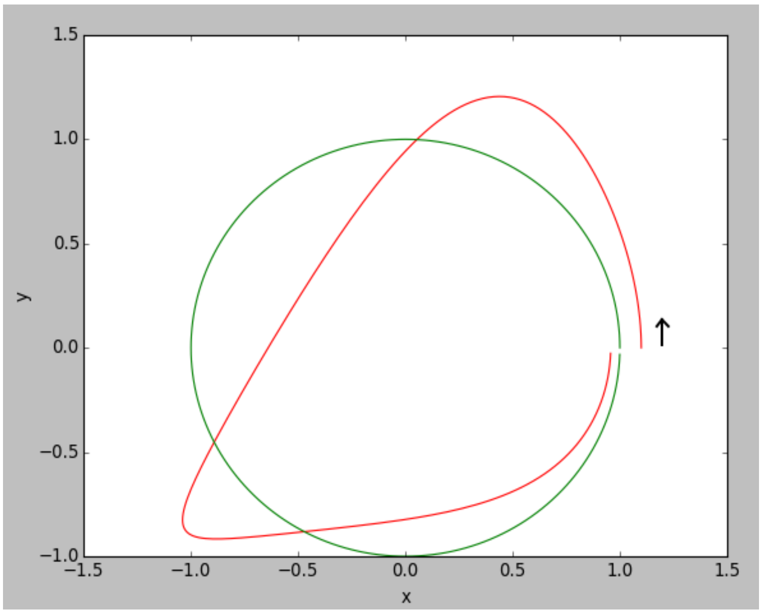

FIGURE 1 – Fusée en rouge – ISS en vert

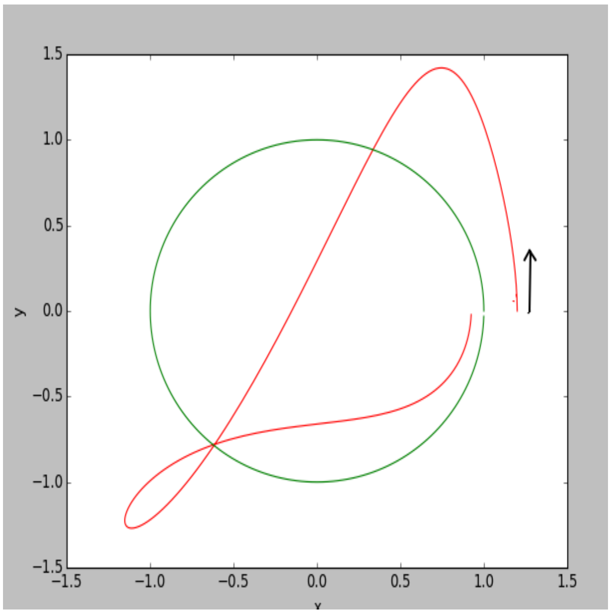

FIGURE 2 – Fusée en rouge – ISS en vert