

# Prosjektoppgave i Matematikkdelen i TDAT3024

Hans J. Rivertz

4. september 2018

## 1 Praktisk

### 1.1 Gruppeinndeling

Gruppesammensetning ordnes i forelesningen.

### 1.2 Innlevering

En zip-fil som inneholder en rapport (pdf-fil) samt alle produserte filer. Rapporten skal fortelle hva dere har gjort og hvordan dere har gjort det. Den skal være bygd opp med (minst) følgende kapitler.

- **Innledning** (Hvilken oppgave skal løses, og hvorfor)
- **Teori /Metode** (Hvordan er oppgaven løst – metode og teorien bak metoden. Her er det naturlig å ta utgangspunkt i læreboka, men bruk gjerne andre kilder også. Men ikke skriv av/oversett det som står, studer det slik at dere forstår det, og tenk dere deretter at dere skal forklare det til en medstudent. Husk referanser – og referanser til vitenskapelige artikler gjør seg ekstra godt.)
- **Resultater** (Gjerne inkludert tabeller og/eller figurer)
- **Diskusjon/Konklusjon** (Hvorfor blir resultatene slik som de blir? Hva ville dere forventet ut fra teorien, og hva skjer i praksis? Hva har dere lært? Har dere forslag til ting som kunne vært undersøkt videre og/eller ting som kunne vært gjort annerledes/bedre?)
- **Referanseliste** (Fullstendig URI (URL og/eller bok/artikkel-henvisning) til de og bare de referansene dere har nevnt tidligere i rapporten.)
- **Vedlegg** (Utskrift av alle programmer dere har laget)

## 2 Innledning

### 2.1 Romfart og numeriske metoder

Den 4 oktober 1957 sendte Sovjetunionen opp den ubemannede satellitten Sputnik. Det var starten på romkappløpet. I denne oppgaven skal dere se på matematikk som trengs for å sende en rakett opp i verdensrommet. Numeriske metoder er helt avgjørende for å gjøre beregninger på rakettbaner. I denne oppgaven skal vi bruke Runge-Kutta-Fehlberg-metoden. Det er en metode der vi har kontroll på feilen i utregningene. Les dere opp på metoden i kapittel 6.5.1 Embedded Runge-Kutta pairs (Sammenvevde Runge-Kutta par.) Les dere frem til eksempel 6.19.

### 2.2 Litt fysikk

#### 2.2.1 Newtons lover

Planetbanene bestemmes av Newtons Fysiske lover. De er gitt ved

- Et legeme som ikke utsettes for krefter vil bevege seg med konstant fart i en rettlinjert bane.

- Akselerasjonen til et legeme med masse  $M$  er proporsjonal med summen av alle krefter som virker på legemet.  $F = ma$
- Kraft er lik motkraft.

### 2.2.2 Kreftene mellom masser

Tyngdekraftene mellom to legemer med masser  $M_1$  og  $M_2$  er gitt ved

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}$$

der  $r_{12}$  er avstanden mellom legemenes massesentre. Kraftenes retninger peker alltid mot den andre massen.

### 2.2.3 Skyvekraft fra rakettmotor

En rakettmotor virker ved at forbrenningsgasser skyves i høy hastighet ut i motsatt retning av retningen til den ønsket skyvekraften. Skyvekraftens størrelse er gitt ved

$$F = -\dot{m} v_e$$

der  $v_e$  er den relative farten til eksosen i forhold til raketten og  $\dot{m}$  er den deriverte til massen til raketten. ( $\dot{m}$  er negativ siden raketten forbruker drivstoff.)

### 2.2.4 Luftmotstand

I verdensrommet er det ikke luft og derfor ingen luftmotstand. I atmosfæren derimot er det luftmotstand. Luftmotstanden er proporsjonal med atmosfærens tetthet ( $\rho_{air}$ ), arealet til snittet til raketten vinkelrett på bevegelsesretningen ( $A$ ), og kvadratet av raketts hastighet.

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho_{air} \cdot A \cdot v^2.$$

Koeffisienten  $C_d$  er avhengig av raketts aerodynamiske egenskaper. For en ball er  $C_d = 1/2$ . Legg merke til at  $C_d$  ikke har noen benevnelse.

### 2.2.5 Atmosfærens tetthet

Vi vil bruke en enkel modell for atmosfærens tetthet [1]. Den kan regnes ut ved hjelp av formelen

$$\rho = \frac{p(h)}{T(h)} \cdot 3.4855 \text{ K s}^2/\text{m}^2.$$

Atmosfæren kan deles opp i 3 deler.

**Troposfæren** Den nedre delen av atmosfæren kalles troposfæren. Den strekker seg opp til ca 11000 meter. Temperaturen er gitt ved

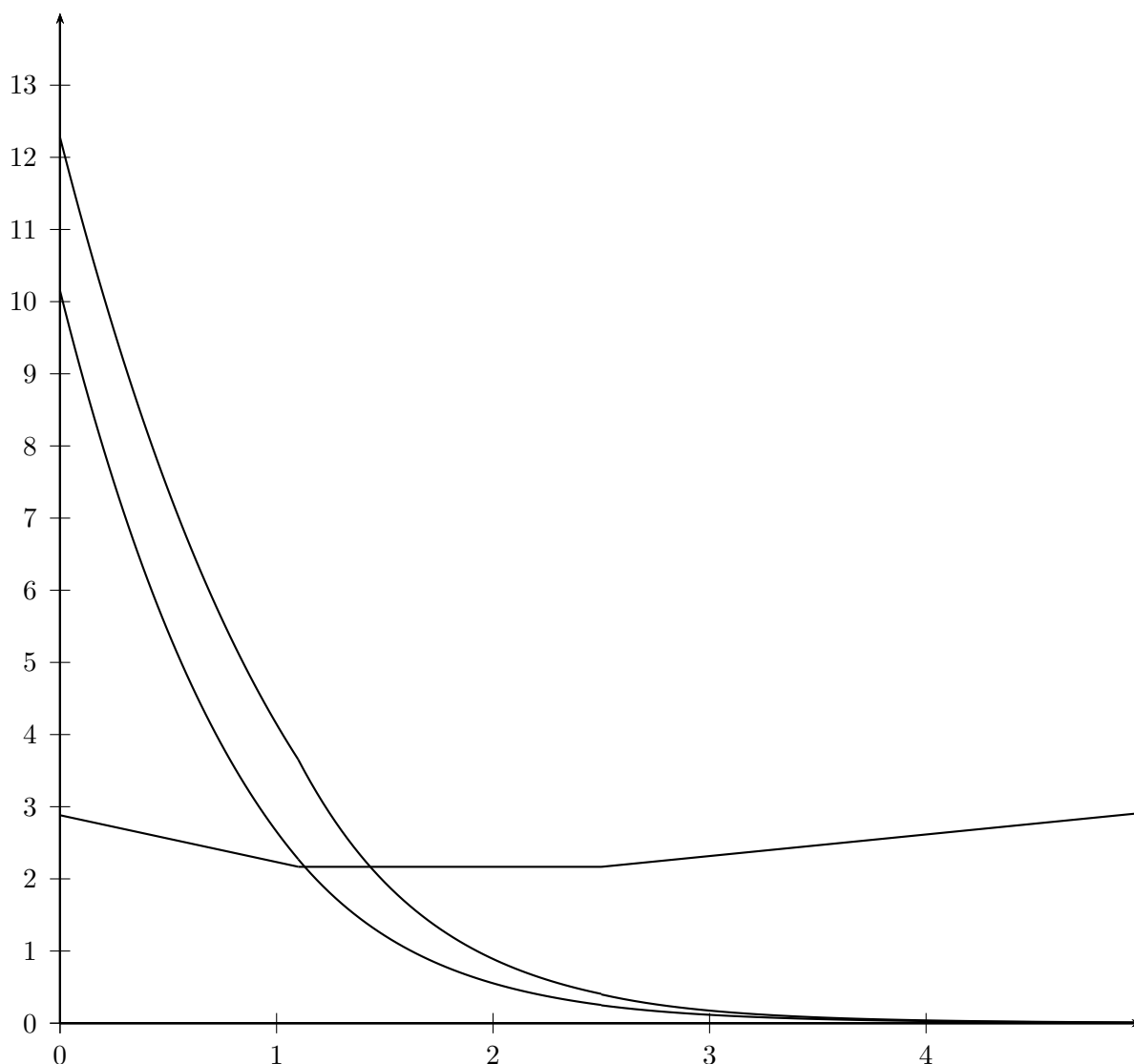
$$T(h) = 288.19 \text{ K} - (0.00649 \text{ K/m})h$$

Trykket i troposfæren er gitt ved

$$p = (101.29 \text{ kPa}) \cdot \left( \frac{T(h)}{288.08 \text{ K}} \right)^{5.256}$$

**Nedre stratosfære** Den midterste delen er den nedre stratosfæren. Den ligger fra ca 11000 meter til 25000 meter over havet. Der er temperaturen  $T = 216.69 \text{ K}$ . Trykket kan estimeres som

$$p = (127.76 \text{ kPa}) e^{-(0.000157 \text{ m}^{-1})h}$$



Figur 1: Figuren viser temperaturen, trykket og tettheten til atmosfæren. Førsteaksen viser antall 10000 meter. Andreaksen viser temperaturen i antall 100 K, trykket i antall 10kPa og tettheten i antall 100 g per kubikkmeter.

**Øvre stratosfære** Den øverste delen er den øvre stratosfæren. Den ligger fra ca 25000 meter over havet. Der er temperaturen

$$T(h) = 141,94 \text{ K} + (0.00299 \text{ K/m})h$$

Trykket kan estimeres som

$$p = (2.488 \text{ kPa}) \cdot \left( \frac{T(h)}{216.6 \text{ K}} \right)^{-11.388}$$

### 3 Oppgaver

**Oppgave 1** Forklar i korte trekk teorien bak Eulers metode. Fortell også hvordan denne kan forbedres i andre metoder.

**Oppgave 2** Test ut Python klassen for **Runge-Kutta-Fehlberg** dere finner i filen i BB på et initialverdisystem med minst 2 likninger dere kjenner eksakt løsning på. Ta for eksempel en oppgave fra boka. Finn global feil og sammenlign med akkumulert relativ lokal feil. Har dere kontroll på feilen?

Bestem forholdet mellom modeltid og bregningstid som en funksjon av toleransen. Hva er optimal toleranse om dere ønsker utregn timer i sanntid?

I resten av oppgaven skal dere bruke **Runge-Kutta-Fehlberg**.

**Oppgave 3** Sett opp bevegelseslikningene for jorden og månen. Bruk Runge-Kutta-Fehlberg til å simulere månens bevegelse rundt jorden. Visualiser bevegelsen der et sekund i modellen tilsvarer en dag. Bruk dataene fra wikisidene i avsnitt 4. Merk at dere kan jobbe med to dimensjoner og ikke en dimensjon.

**Oppgave 4** Les dere opp på Saturn V-raketten på Wikipedia.

- Finn skyvekraften til hvert trinn og midlere forbruk av drivstoff per sekund. Bruk det til å estimere hastigheten til eksos-gassene til hvert trinn. (Hint: Dere kan anta at både skyvekraften og masseendringen er konstant. Finn  $\dot{m}$  ved å dele drivstoffets masse på antall sekunder trinnet skyver raketten.
- Finn også totalmasse til raketten rett før hvert trinn tennes. Husk at de tomme trinnene kobles fra. Lag en funksjon  $m(t)$  i Python som gir massen til raketten ved tiden  $t$  sekunder etter starten på oppskytingen.
- Lag en funksjon i python som gir skyvekraften til raketten ved tiden  $t$  sekunder etter oppskytingen. *(m(t))*

**Oppgave 5** Sett opp likningen for oppskyting av en rakett rett opp fra en planet som er nøyaktig lik (masse, radius og atmosfære) jorden bortsett at ~~jorden ikke~~ *den ikke* roterer. Du kan anta at jordsenteret er i ro. Simuler oppskytingen.

**Oppgave 6** Gjennomfør samme oppgave som 5 men eksperimenter med å la ha forskjellige vinkler mellom skyvekraften og hastigheten til raketten. Bruk bijeksjonsmetoden for vinkelen for å få raketten opp i bane.

**Ekstraoppgave** Land på månen hvis dere har tid. Kom tilbake før eksamen.

## 4 Data for planeter og raketter

- Jorden: [Wikipedia](#)
- Månen: [Wikipedia](#)
- Saturn V: [Wikipedia](#)

## 5 Evaluering

Prosjektet teller 20 %<sup>1</sup> av karakteren, og det er rapporten (både innhold og form) som danner grunnlaget for prosjektkarakteren.

## Referanser

- [1] Glenn Research Center, Earth atmospheric model ,<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>

---

<sup>1</sup>Eksamen i matematikkdelen teller 30%, Eksamen i fysikkdelen teller 50%