

数字图像处理

第五次作业：频域滤波

自动化61 刘昊 2160504016

摘要

频域滤波是在频率域对图像进行处理，修改特定频率分量以改善显示效果或增强所期望的细节的技术。本文利用Matlab软件编程实现了多种频域低通、高通滤波器，并根据其对测试图像的滤波效果，简要阐释了各种滤波器的优缺点，并与对应的空域滤波器进行了对比分析。

1 频域低通滤波器

1.1 实验原理

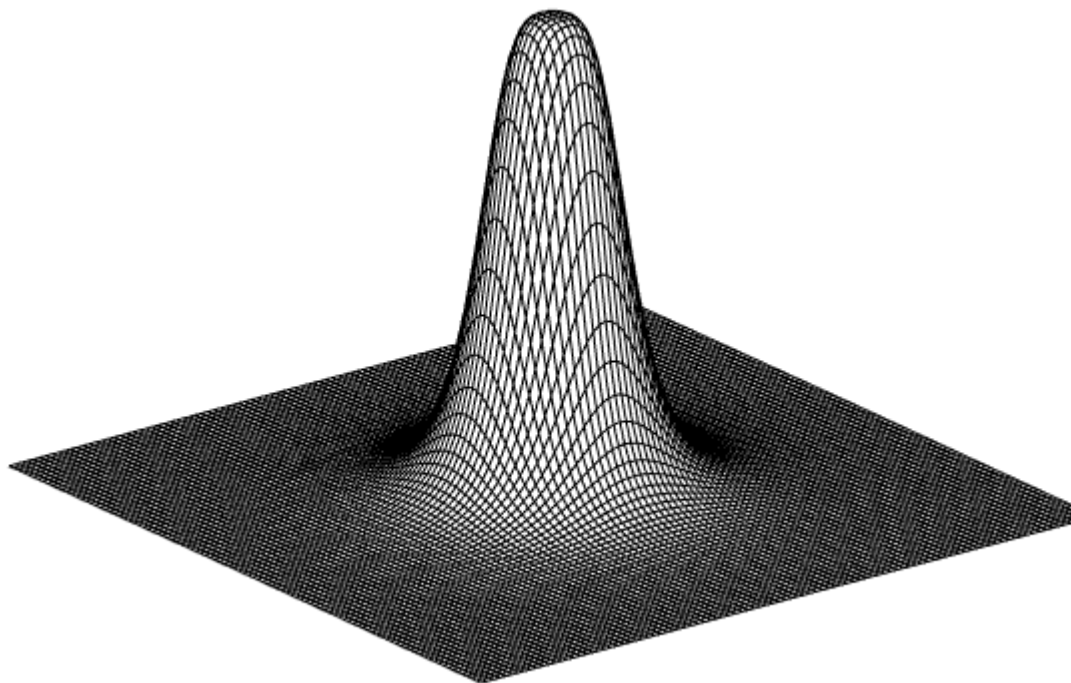
1.1.1 巴特沃斯低通滤波器

截止频率位于距离原点 D_0 处的 n 阶巴特沃斯滤波器的传递函数定义为

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

其中 $D(u, v)$ 为频率域中点 (u, v) 到频率矩形中心的欧式距离。当 $D(u, v) = D_0$ 时，幅值降为最大的50%。

大小为500*500，半径为50的二阶巴特沃斯低通滤波器频域图像为



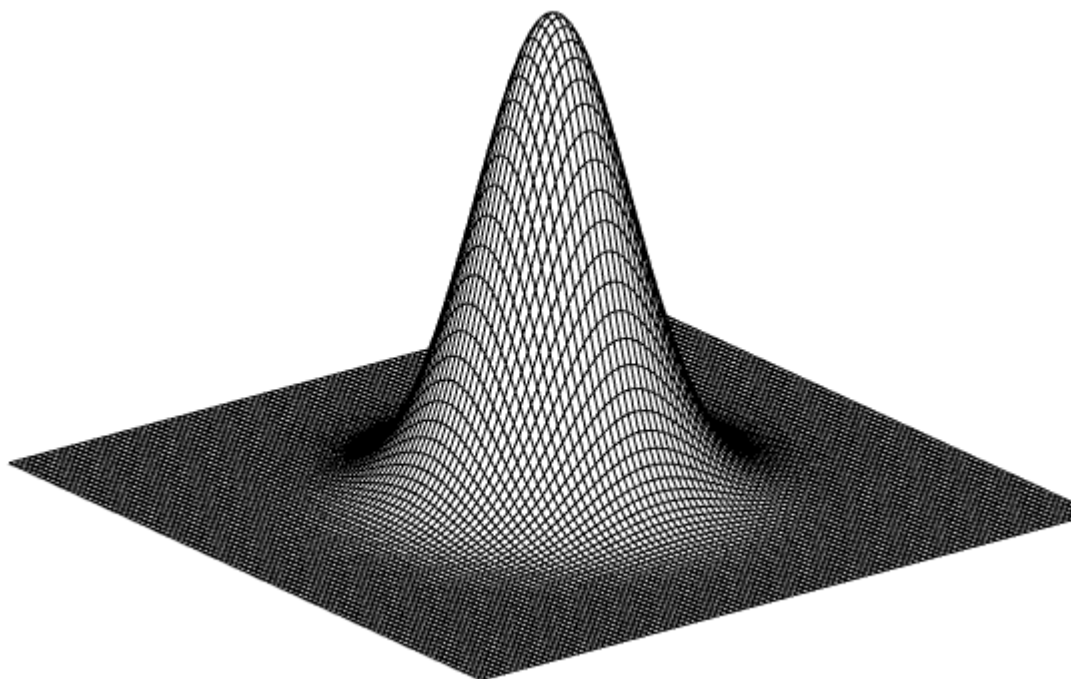
1.1.2 高斯低通滤波器

高斯滤波器传递函数为

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

其中 $D(u, v)$ 同样为频率域中点 (u, v) 到频率矩形中心的欧式距离。当 $D(u, v) = D_0$ 时，幅值降为最大的60.7%。

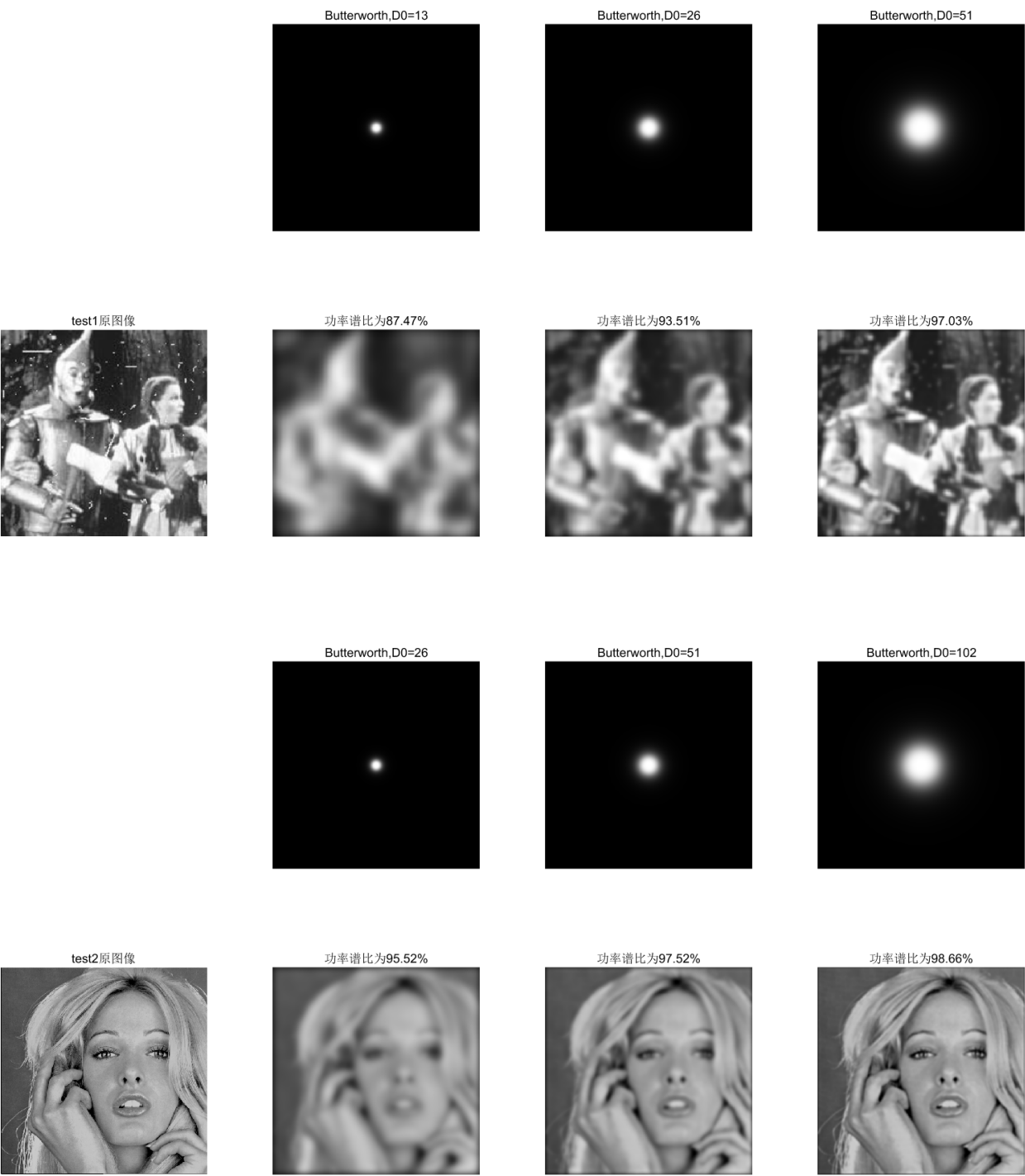
大小为500*500，半径为50的高斯低通滤波器频域图像为



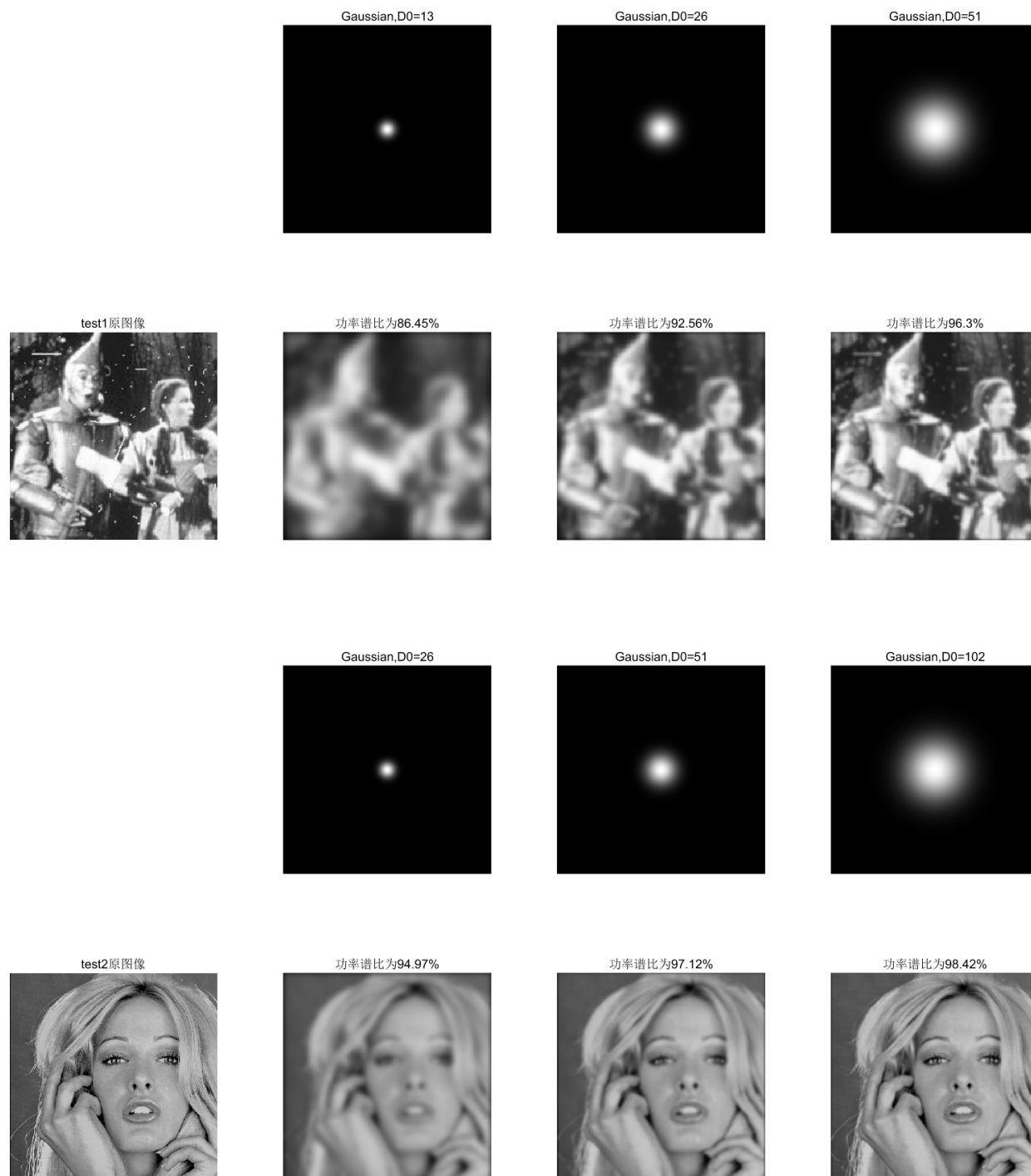
1.2 实验结果

取滤波器半径分别为原图像宽度的5%，10%，20%，利用Matlab编写频域滤波函数分别对测试图像test1和test2进行处理。

使用二阶巴特沃斯滤波器对两幅图片的处理结果以及使用滤波器的傅里叶谱如下图所示，功率谱比标注在处理后图像上方。



使用高斯低通滤波器处理测试图像结果如下图，功率谱比标注在处理后图像上方。



可见，随着半径的增大，图像功率谱比提高，滤波器的平滑效果也随之减弱，保留的图像细节越来越多。对于 test1 图像背景的白色噪点簇，当滤波半径较小（图像宽度的5%）时，可以去除，但图像细节也大量丢失。当半径较大时，虽然保留的细节，但对噪声的滤去作用有限。综合起来，图像宽度的10%是一个较为合适的半径。将两组滤波结果相比较，发现半径相同时，高斯滤波器比二阶巴特沃斯滤波器滤去更多的能量，但后者的平滑效果要略好一些，这是可以理解的。如实验原理中绘制的二者同半径下频域图像，高斯滤波器相比于二阶巴特沃斯滤波器，要更加“宽”一些，虽然保留了更多的能量，但对高频的衰减要略逊于后者。另外两种滤波器均为产生明显的振铃特征，这均归功于二者在低频和高频之间的平滑过渡。

2 频域高通滤波器

2.1 实验原理

若给定低通滤波器的传递函数为 $H_{LP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$ ，则相应的高通滤波器传递函数为

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

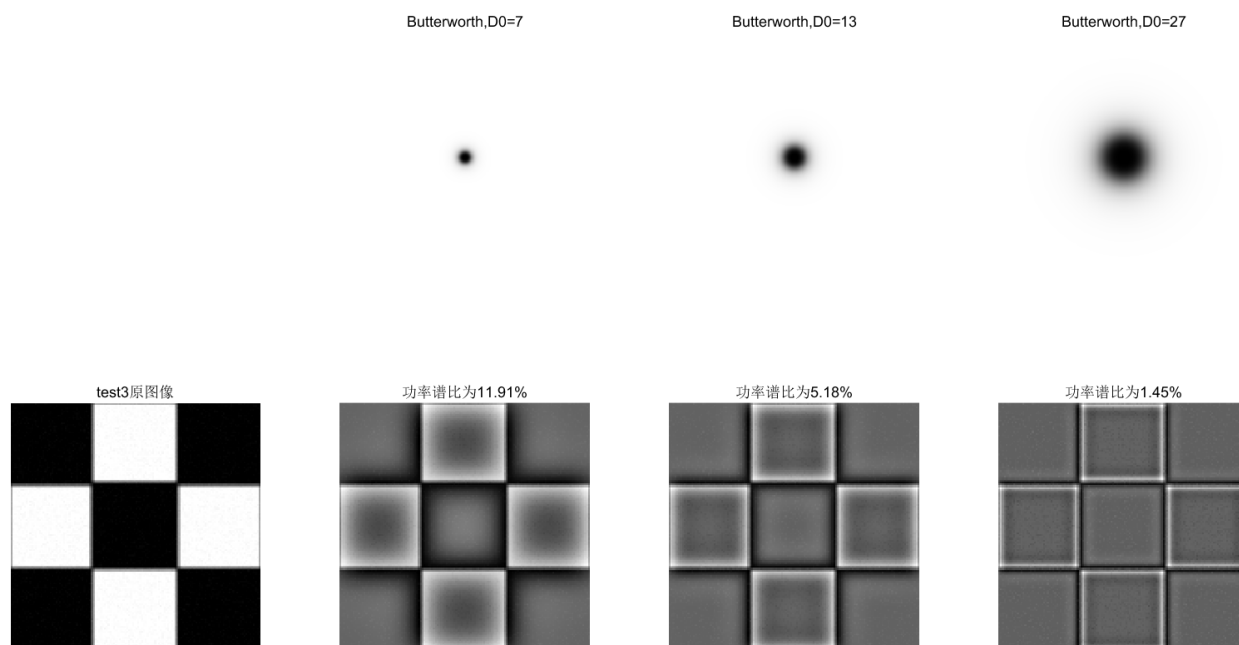
基于此以及上述各低通滤波器，可以得到巴特沃斯高通滤波器和高斯高通滤波器的传递函数。

另外高通滤波处理后图片将丢失大量平滑部分，即可能会出现大面积黑色区域。为了令高频部分显示更明显，可以进行重新标定或阈值处理。本次实验统一将高通滤波后图像依其最大值和最小值重新标定。

2.2 实验结果

同样取滤波器半径分别为原图像宽度的5%，10%，20%，利用Matlab编写频域高通滤波函数分别对测试图像test3和test4进行处理，注意滤波后图像均被重新标定过。

使用二阶巴特沃斯高通滤波器对两幅图片的处理结果以及使用滤波器的傅里叶谱如下图所示，功率谱比标注在处理后的图像上方。



Butterworth,D0=26

Butterworth,D0=51

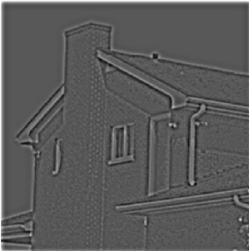
Butterworth,D0=102



test4原图像



功率谱比为3.2%



功率谱比为1.37%



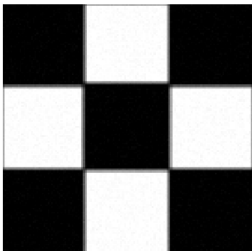
功率谱比为0.51%

使用高斯高通滤波器处理测试图像结果如下图，功率谱比标注在处理后图像上方。

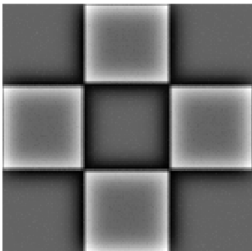
Gaussian,D0=7

Gaussian,D0=13

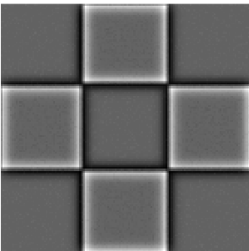
Gaussian,D0=27



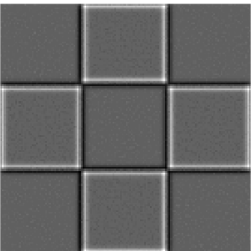
test3原图像



功率谱比为10.24%



功率谱比为4.29%

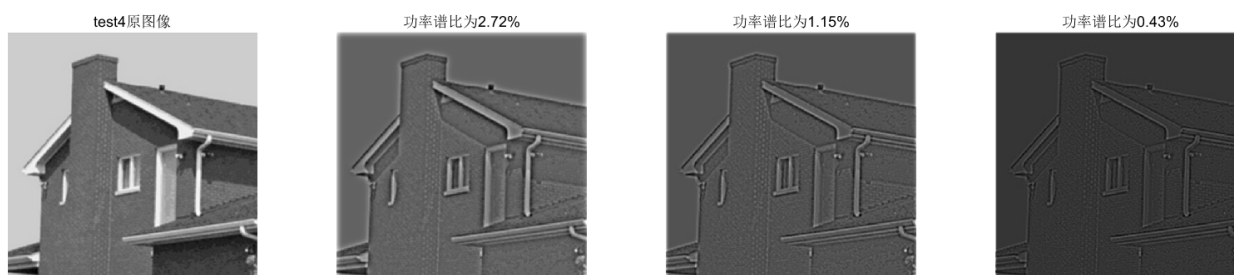


功率谱比为1.16%

Gaussian,D0=26

Gaussian,D0=51

Gaussian,D0=102



可见，随着半径的增大，两种滤波其滤去的功率增多，对平滑的低频部分衰减变强，高频的边缘部分更加凸显出来，具体表现为test3中黑白方块边界以及test4图像房屋边缘线条越来越细。两种滤波器相比较，高斯高通滤波器除去了更多的功率，同时也滤去了更多的低频部分，对高频的边缘线条的锐化作用略强一些。

3 其他高通滤波器

3.1 实验原理

3.1.1 频率域的拉普拉斯算子锐化处理

根据傅里叶变换微分性质可得拉普拉斯算子在频率域的传递函数为

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

考虑到频率矩形中心不在原点的情况，将上式改写成

$$H(u, v) = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

则拉普拉斯图像为

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

类似空域中的拉普拉斯锐化，令

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

注意不同于空域中的拉普拉斯算子，在频域处理中， $\nabla^2 f(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 往往相差若干个量级，故需要进行重新标定。一般可以将二者均除以其最大模值，使其分别归一化到 $[-1, 1]$ 和 $[0, 1]$ 区间，然后再作差。

3.1.2 频率域的非锐化掩蔽

频率域的非锐化掩蔽与空域原理相同，只是计算上采用傅里叶变换替代卷积或相关运算。

设 $H_{LP}(u, v)$ 为所用平滑滤波器，则钝化模板为

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[(1 - H_{LP}(u, v))F(u, v)]$$

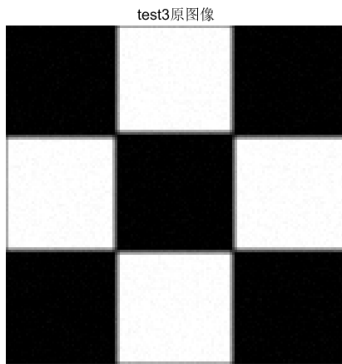
则增强后图像为

$$g(x, y) = f(x, y) + k \cdot g_{mask}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + k(1 - H_{LP}(u, v))]F(u, v)\}$$

当 $k = 1$ 时为非锐化掩蔽，当 $k > 1$ 时为高提升滤波。

3.2 实验结果

分别使用拉普拉斯算子和非锐化掩蔽算法在频域处理测试图像test3和test4，处理结果如下图。



观察图片可以发现，二者均对图像高频的边缘部分起到明显锐化作用。但二者相比较，test3图像中非锐化掩蔽处理后图像方格边界线条要明显细与拉普拉斯算子的处理结果，仔细观察test4图片房屋边缘线条，非锐化掩蔽处理后线条被明显描黑。可见，对测试图像来说，非锐化掩蔽处理后图像在显示效果上更胜一筹。猜想这是由于拉普拉斯算子对高频分量更加敏感所致，即对频谱高频的强调作用更为显著。注意test3图片，两种滤波器处理后均引入了一些噪点，但拉普拉斯算子要明显更多一些，这恰是因为拉普拉斯算子在原图像中找到了更多的细小高频噪声所致。这样也可以理解，拉普拉斯算子在处理两幅测试图像时，由于过度细致地描绘出原图中实际并不连续的线条，而使得锐化后图片的显示效果欠佳。

4 空域滤波器与频域滤波器的关系

从滤波机理上看：

相似的滤波器不论在空域还是在频域均有相同的滤波效果。这是理所当然的，如使用拉普拉斯算子锐化图像时，从时域和从频域计算均无法避免引入大量高频噪点；使用空域和频域的高斯低通滤波器处理test1图像时，除非牺牲大量细节选择较大的空域模板尺寸或较小的频域滤波半径，对于背景的条状噪声簇的滤波效果均不甚理想。注意到由于空域与频域的尺度变换是相反的，在空域低通滤波器模板越大意味着频域滤波时滤去更多的高频，而频域低通滤波器半径越大则平滑效果越差。

从实现方法上看：

第一，理想滤波器、高阶巴特沃斯滤波器等频谱“截断”比较明显的频域滤波器，频域截断导致空域延展使得滤波后图像出现缠绕错误，即“振铃”现象，而空域滤波器没有此类问题。

第二，在计算量上，主要使用快速傅里叶变换(FFT)计算的频域滤波器计算复杂度与模板不相关；而空域滤波器使用卷积或相关计算，计算复杂度随模板的增大而上升。

第三，关于给定空域模板，如何获得对应的频域滤波器。因为一般空域滤波是进行相关运算，而频域滤波是在时域是进行卷积运算，并且为避免频谱混叠需要填充“0”元，所以不能简单的对模板进行傅里叶变换。设目标图像大小为 $M * M$ ，空域模板为 $N * N$ ，填充后图像长宽均为 $L = M + N - 1$ 。对于实空域模板，卷积时需要旋转 180° ，而相关不需要。故首先应将原模板旋转 180° ，考虑到空域滤波时模板中心与目标像素对齐，而频域滤波在时域模板的原点 $(0, 0)$ 对齐目标像素，因此需要将旋转后的空域模板中心点对齐长宽均为 L 矩阵的 $(0, 0)$ ，其他部分按照两轴方向均以 L 为周期循环移位填入矩阵中，其余部分置0. 对此矩阵进行离散傅里叶变换便得到了空域模板对应的频域模板。注意所得模板在边界部分处理上，与零填充的空域模板相对应，至于其他填充方式需要进一步修正。以Sobel模板为例，垂直方向的分量为

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则该模板在空域处理一个 $4*4$ 图像时所对应的卷积模板 $(6*6)$ 为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第四，特别对于拉普拉斯算子。由于在空域通过二阶差分实现，在频域通过二阶偏导数实现，二者在尺度上的标定范围是不同的，后者要明显大于原图像。故在频域使用拉普拉斯算子时需要 $\nabla^2 f(x, y)$ 进行重新标定。

参考文献

- [1] 冈萨雷斯. 数字图像处理(第三版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- [2] 冈萨雷斯. 数字图像处理(MATLAB版)(第二版)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2014.