

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010100.68 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

Аффинные структуры на бутылке Клейна и торе

Работа завершена:

“ ____ ” _____ 2014 г. _____ М. М. Дудорова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

“ ____ ” _____ 2014 г. _____ В. В. Шурыгин

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

“ ____ ” _____ 2014 г. _____ В. В. Шурыгин

Казань — 2014

Содержание

1	Введение	3
2	Псевдогрупповые структуры на многообразии.	5
3	Фундаментальная группа и накрывающее пространство.	8
4	Тор и бутылка Клейна в трехмерном евклидовом пространстве.	13
5	Аффинные многообразия	24
6	Плоский тор и плоская бутылка Клейна.	25
7	Геометрические (прямые) линии и кривые второго порядка на плоском торе и плоской бутылке Клейна.	26
8	Аффинные бутылки Клейна, накрываемые торами Смилли.	39
9	Тор, получаемый склейкой сторон равнобокой трапеции	43

1 Введение

Топологическим многообразием называется топологическое пространство M , локально гомеоморфное пространству \mathbf{R}^n . Таким образом, у каждой точки многообразия существует открытая окрестность U , гомеоморфная открытому подмножеству U^* из \mathbf{R}^n . Гомеоморфизм $h : U \rightarrow U^*$ вводит координаты на окрестности U и называется координатной картой. Множество карт $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha^*$, $\alpha \in A$, области определения которых $\{U_\alpha\}_\alpha$ покрывают все многообразие, называется атласом. Если области определения U и U' двух карт пересекаются, то на пересечении $U \cap U'$ возникает преобразование координат $h' \circ h^{-1}$. Если на многообразии задан атлас такой, что все преобразования координат принадлежат некоторой псевдогруппе \mathcal{G} преобразований пространства \mathbf{R}^n , то говорят, что на этом многообразии задана псевдогрупповая структура. В частности, атлас с преобразованиями координат, принадлежащими псевдогруппе аффинных преобразований пространства \mathbf{R}^n , задает на топологическом многообразии структуру аффинного многообразия.

Структуры аффинных многообразий возникают на слоях канонического слоения на многообразии над алгеброй $\mathbb{D} = \mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел, то есть чисел вида $a + b\varepsilon$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а ε — элемент, удовлетворяющий соотношению $\varepsilon^2 = 0$ (см., например, [12] или [13, 14], где многообразия над алгеброй \mathbb{D} изучались под названием "tangent manifolds").

Среди замкнутых двумерных многообразий [2] аффинные структуры допускают только тор и бутылка Клейна [1].

В статье [11] приведена классификация всех аффинных структур на двумерном торе.

Целью магистерской работы является изучение некото-

рых аспектов геометрии тора и бутылки Клейна, снабженных конкретными аффинными структурами, таких как поведение геодезических линий (прямых) и кривых второго порядка. Изучение геометрии, возникающей на торе со структурой аффинного многообразия моделируется на торе вращения в трехмерном пространстве. Для моделирования геометрии бутылки Клейна с аффинной структурой построено погружение бутылки Клейна в трехмерное пространство.

Во втором параграфе работы приводятся определения псевдогруппы \mathcal{G} преобразований топологического многообразия X и псевдогрупповой структуры на многообразии. Если псевдогруппа преобразований \mathcal{G} порождается группой преобразований G многообразия X , то многообразие с такой псевдогрупповой структурой называется и (G, X) -многообразием. В частности, если G — группа аффинных движений пространства \mathbf{R}^n , то (G, X) -многообразие называется аффинным многообразием, а если G — группа движений евклидова пространства \mathbf{R}^n , то (G, X) -многообразие называется плоским многообразием.

При изучении (G, X) -многообразий важную роль играют их универсальные накрывающие пространства. Поэтому в третьем параграфе рассматриваются понятия фундаментальной группы, накрывающего пространства и универсального накрывающего пространства для топологических многообразий. Универсальным накрывающим пространством и тора и бутылки Клейна является плоскость \mathbf{R}^2 , рассматриваемая как топологическое многообразие. Накрывающее пространство аффинного многообразия также несет на себе структуру аффинного многообразия.

В четвертом параграфе рассматривается тор вращения и строится некоторое погружение бутылки Клейна в трехмер-

ное евклидово пространство \mathbf{R}^3 . На этих поверхностях в последующем изображаются прямые (геодезические) и кривые второго порядка, заданные на аффинных торах и бутылках Клейна.

В пятом и шестом параграфе рассмотрены определения аффинного многообразия, плоского тора и плоской бутылки Клейна.

В седьмом параграфе построены прямые линии (геодезические) и кривые второго порядка на плоском торе и плоской бутылке Клейна.

Восьмой параграф посвящен геометрии аффинного тора и построены примеры аффинных бутылок Клейна, накрываемых торами Смилли.

В девятом параграфе рассмотрены торы, получаемые склейкой равнобокой трапеции и изучено поведение прямых линии (геодезических) и кривых второго порядка.

2 Псевдогрупповые структуры на многообразии.

Определение. *Топологическим многообразием* называется топологическое пространство M , для каждой точки x которого существует содержащее ее открытое подмножество U , гомеоморфное некоторому открытому подмножеству U' пространства \mathbf{R}^n .

Пусть U_1 и U_2 — два таких открытых подмножества в M , гомеоморфных открытым подмножествам в \mathbf{R}^n и

$$h_1 : U_1 \rightarrow U'_1, \quad h_2 : U_2 \rightarrow U'_2 \quad (1)$$

— соответствующие гомеоморфизмы. Предположим, что

$$U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Тогда на открытом подмножестве U_{12} определены два гомеоморфизма

$$h_1 : U_{12} \rightarrow h_1(U_{12}) \subset U'_1, \quad h_2 : U_{12} \rightarrow h_2(U_{12}) \subset U'_2 \quad (2)$$

Композиция $h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_{12}) \rightarrow h_2(U_{12})$ представляет собой гомеоморфизм между открытыми подмножествами из \mathbf{R}^n . Гомеоморфизмы (1) называются *картами* многообразия M , а гомеоморфизмы (2) называются *функциями склейки* многообразия M .

Определение [1]. *Псевдогруппой* на топологическом пространстве X называется множество \mathcal{G} , состоящее из гомеоморфизмов между открытыми подмножествами X такое, что:

1. ограничение элемента $g \in \mathcal{G}$ на любое открытое подмножество X области определения также принадлежит \mathcal{G} ,
2. X покрывают области определения элементов $g \in \mathcal{G}$,
3. обратное отображение g^{-1} принадлежит \mathcal{G} ,
4. композиция двух элементов $g_1 \circ g_2$ из \mathcal{G} принадлежит \mathcal{G} ,

5. если $g : U \rightarrow V$ — гомеоморфизм между открытыми подмножествами X , а $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ (A — некоторое индексное множество) — открытое покрытие U , что все ограничения $g|_{U_\alpha} \in \mathcal{G}$, то $g \in \mathcal{G}$.

Определение [1]. Пусть \mathcal{G} — псевдогруппа на топологическом многообразии X размерности n (в частности, \mathbf{R}^n) и M — некоторое другое топологическое многообразие размерности n . Будем рассматривать карты на M со значениями в многообразии X , то есть гомеоморфизмы $\varphi : U \rightarrow X$ открытых подмножеств $U \subset M$ на их образы в многообразии X . Две карты (U_i, φ_i) , $i = 1, 2$, называются согласованными с псевдогруппой \mathcal{G} , если при непустом пересечении областей

определения карт (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) функции перехода

$$\gamma_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

принадлежат псевдогруппе \mathcal{G} .

Большой псевдогруппой на \mathbf{R}^n является псевдогруппа *Тор*, которая состоит из всех гомеоморфизмов между открытыми подмножествами \mathbf{R}^n .

Определение [1]. Пусть G — группа, действующая на многообразии X . Обозначим через \mathcal{G} псевдогруппу, порожденную ограничениями элементов из G . Тогда каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ локально совпадает с некоторым элементом из G . Такие \mathcal{G} -многообразия называются (G, X) -многообразиями.

G -атласом на M называется набор $(U_i, \varphi_i), i \in I$, где I — индексное множество, состоящий из G -согласованных карт такой, что области определения U_i карт (U_i, φ_i) покрывают многообразие M :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

При всех i и j таких, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$\gamma_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

принадлежит псевдогруппе \mathcal{G} .

\mathcal{G} -многообразием называется топологическое многообразие M , снабженное максимальным \mathcal{G} -атласом, то есть атласом, содержащим все согласованные с ним карты.

Определение [1]. Пусть \mathcal{G} — псевдогруппа на \mathbf{R}^n . \mathcal{G} -многообразием называется топологическое пространство M , снабженное \mathcal{G} -атласом.

Определение. Если G — группа аффинных преобразований \mathbf{R}^n , то (G, \mathbf{R}^n) -многообразие называется *аффинным многообразием*.

Определение [1]. Если G — группа изометрий евклидова пространства \mathbb{E}^n , то (G, \mathbb{E}^n) -многообразие называют *евклидовым*, или *плоским многообразием*.

3 Фундаментальная группа и накрывающее пространство.

Определение [2]. Путем f в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$. При этом $f(0)$ называется началом пути, а $f(1)$ — концом.

Определение [2]. Два пути f_0 и f_1 в X ($f_0(0) = f_1(0)$ и $f_0(1) = f_1(1)$) называются гомотопными, если существует непрерывное отображение $F : I \times I \rightarrow X$, такое, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$. Отображение F называется гомотопией между f_0 и f_1 .

Определение [2]. Два непрерывных отображения топологических пространств $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F : X \times I \rightarrow Y$, такое, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$. Отображение F называется гомотопией между f_0 и f_1 .

Отношение гомотопности путей является отношением эквивалентности. Класс путей, эквивалентных пути f , обозначается следующим образом $[f]$.

Если f и g — пути в X , причем $f(1) = g(0)$, то *произведением путей* f и g называется путь $f * g$, определенный следующими формулами:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Определение [2]. Путь называется *замкнутым* или *петлей* в точке x , если $f(0) = f(1) = x$.

Произведение $f * g$ определено для любой пары замкнутых путей в некоторой точке $x \in X$. Множество классов эквивалентности замкнутых путей в точке $x \in X$ обозначается через $\pi(X, x)$. Это множество наделено умножением: $[f][g] = [f * g]$ при $[f], [g] \in \pi(X, x)$.

Множество классов эквивалентности замкнутых путей $\pi(X, x)$ является группой по отношению к операции умножения путей.

Определение. Группа $\pi(X, x)$ называется *фундаментальной группой* пространства X в точке x .

Определение. Пусть $p : \tilde{X} \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Говорят, что открытое подмножество $U \subset X$ *правильно накрыто* отображением p , если $p^{-1}(U)$ представляет собой дизъюнктное объединение открытых подмножеств в \tilde{X} , каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи отображения p . Непрерывное отображение $p : \tilde{X} \rightarrow X$ называется *накрывающим отображением*, если любая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность, правильно накрытую отображением p . В этом случае $p : \tilde{X} \rightarrow X$ называют *накрытием*, \tilde{X} — накрывающее пространство для X , а X — база накрытия p .

Иными словами, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ *накрытие*, если:

1. p сюръективно,
2. Для любого $x \in X$ найдется открытая окрестность U точки x , такая, что $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} U_i$ для некоторого семейства $\{U_j\}_{j \in J}$ подмножеств \tilde{X} таких, что $U_s \cap U_k = \emptyset$ при $s \neq k$ и $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ гомеоморфизм для любого $j \in J$.

Определение. Топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и $\pi(X, x) = 1$ для некоторой точки $x \in X$.

Определение. Если \tilde{X} односвязно, то $p : \tilde{X} \rightarrow X$ назы-

вается *универсальным накрытием*, а \tilde{X} универсальным накрывающим пространством.

Если универсальное накрытие существует, то оно единственно в следующем смысле. Если $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ и $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ — два универсальных накрывающих пространства, то существует гомеоморфизм $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, удовлетворяющий условию $p_2 \circ \varphi = p_1$, то есть такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Определение [2]. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — сюръективное отображение топологического пространства X на множество Y . *Фактортопологией* на Y относительно f называется совокупность множеств $U_f = \{U : f^{-1}(U) \text{ открыто в } X\}$.

Если взять единичный квадрат

$$X = \{(x, y) : 0 \leq x, \quad y \leq 1\} \quad (4)$$

в \mathbf{R}^2 с индуцированной топологией и определить отношение эквивалентности на нем условием $(0, y) \sim (1, y)$ и $(x, 0) \sim (x, 1)$ (см. рисунок ниже), то факторпространство $T^2 = X / \sim$ представляет собой топологическое многообразие, называемое (двумерным) *тором*.

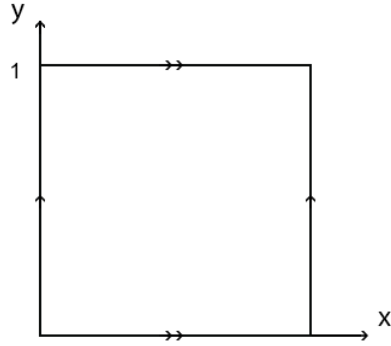


Рис. 1: Тор как факторпространство квадрата.

Тор может нести на себе различные псевдогрупповые структуры. В частности, на торе можно ввести структуру гладкого многообразия, рассматривая его как произведение двух окружностей $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ или как подмногообразие в \mathbf{R}^3 , определяемое следующим уравнением:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Фундаментальная группа окружности \mathbf{S}^1 изоморфна группе \mathbf{Z} целых чисел [2]. Поэтому фундаментальная группа тора изоморфна группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ [2].

Универсальным накрывающим пространством тора, рассматриваемого как топологическое или гладкое многообразие, является плоскость \mathbf{R}^2 , рассматриваемая, соответственно, как топологическое или гладкое многообразие. Для тора, получаемого из квадрата (4), накрытие

$$p : \mathbf{R}^2 \rightarrow T^2$$

может быть задано соотношениями $(x, y) \mapsto (\{x\}, \{y\})$, где $\{x\}$ — дробная часть числа.

Если на квадрате (4) определить отношение эквивалентности условием $(0, y) \sim (1, y)$ и $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ (см. рисунок ниже), то факторпространство $K_2 = X / \sim$ представляет собой топологическое многообразие, называемое *бутылкой Клейна*.

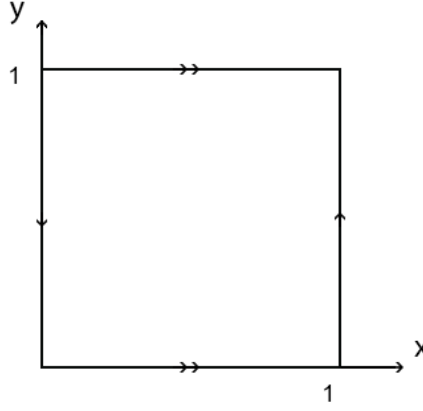


Рис. 2: Бутылка Клейна как факторпространство квадрата.

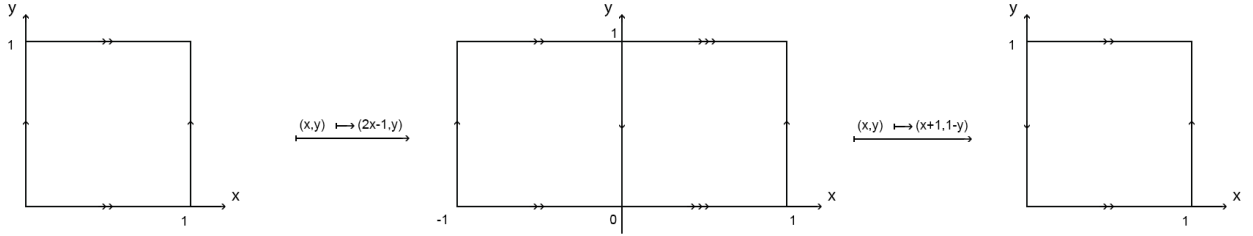
Бутылка Клейна также может нести на себе различные псевдогрупповые структуры. Фундаментальная группа бутылки Клейна изоморфна группе [2]

$$G = \{a^m b^n : m, n \in \mathbf{Z}, ba = a^{-1}b\},$$

то есть группе с двумя образующими a, b и одним соотношением $ba = a^{-1}b$.

Бутылка Клейна двулистно накрывается тором. На рисунке ниже приведен пример такого накрытия. Сначала квадрат $0 \leq x, y \leq 1$, факторизацией которого получается тор, растягивается отображением $(x, y) \mapsto (2x - 1, y)$ в прямоугольник $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, а затем прямоугольник отображается на квадрат, факторизацией которого получается бутылка Клейна, отображением $(x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y), x \leq 0$, $(x, y) \mapsto (x, y), x \geq 0$. В результате отождествляются точки

со следующими координатами: $(0, y) \sim (1, 1 - y) \sim (-1, 1 - y)$.



4 Тор и бутылка Клейна в трехмерном евклидовом пространстве.

В этом параграфе рассматривается тор вращения и строится некоторое погружение бутылки Клейна в трехмерное евклидово пространство \mathbf{R}^3 . На этих поверхностях в последующем будут изображаться прямые (геодезические) и кривые второго порядка, заданные на аффинных торах и бутылках Клейна.

Определение [3]. *Поверхностью вращения* называется поверхность, образованная вращением плоской кривой γ вокруг прямой (*оси вращения*), расположенной в ее плоскости.

Кривая γ называется образующей, а сечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения называются *меридианами*.

Если ось вращения совпадает с осью Oz , а образующая

в плоскости xOz имеет уравнение

$$x = f(t), \quad z = g(t), \quad (5)$$

то уравнение поверхности будет иметь вид

$$r = f(u^1) \mathbf{e}(u^2) + g(u^1) \mathbf{k},$$

где $\mathbf{e}(u^2) = \bar{i} \cos u^2 + \bar{j} \sin u^2$. Если кривая (5) окружность с центром в точке $(R, 0)$, $R > 0$, и радиусом r , $r < R$, то соответствующая поверхность гомеоморфна топологическому тору, определенному выше, и называется *тором вращения*.

Тор вращения с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения R и с радиусом образующей окружности r задается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \cos v (R + r \cos u) \\ y = \sin v (R + r \cos u) \\ z = r \sin u, \end{cases} \quad (6)$$

где $u, v \in [0, 2\pi)$.

При изменении параметров u и v от $-\infty$ до $+\infty$ уравнения (6) будут представлять собой накрытие тора плоскостью с координатами (u, v) .

Ниже приведено построение тора (6) для значений $R = 2$ и $r = 1$ с помощью пакета Wolfram Mathematica. Тор имеет уравнения:

$$\begin{cases} x = \cos v (2 + \cos u) \\ y = \sin v (2 + \cos u) \\ z = \sin u, \end{cases} \quad (7)$$

где $u, v \in [0, 2\pi)$.

Приведем код пакета Wolfram Mathematica:

```
ParametricPlot3D[{Cos[v]*(2 + Cos[u]),
Sin[v]*(2 + Cos[u]),Sin[u]},{u, 0, 2 Pi},{v, 0, 2 Pi}]
```

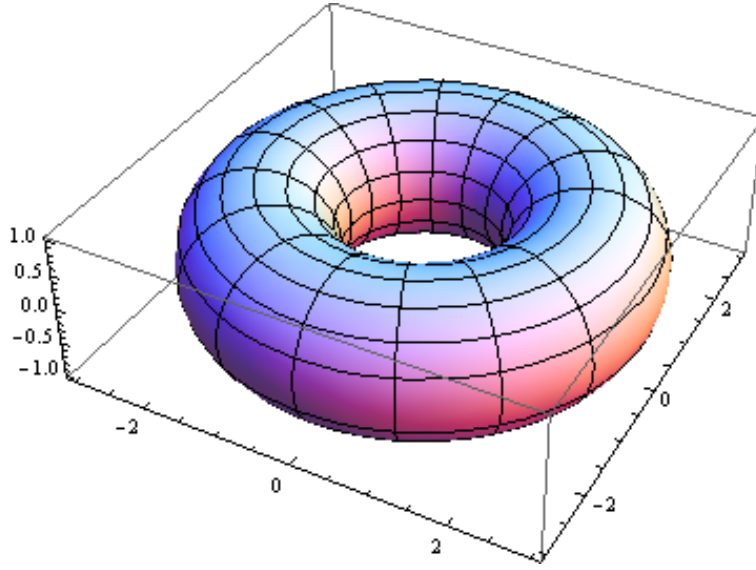


Рис. 3: Тор вращения, где $R = 2$ и $r = 1$.

В дальнейшем тор вращения (7) будет использоваться для иллюстрации геометрии аффинных торов, снабженных структурой аффинного многообразия, изучению которых посвящена настоящая работа.

Для иллюстрации геометрии бутылки Клейна со структурой аффинного многообразия построим подходящее для этой цели погружение бутылки Клейна в евклидово пространство \mathbf{R}^3 .

Представим погружение бутылки Клейна в \mathbf{R}^3 как результат движения окружности переменного радиуса:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + R(u) (\mathbf{m}(u) \cos v + \mathbf{k} \sin v), \quad (8)$$

где \mathbf{k} — направляющий вектор оси Oz , $\mathbf{a}(u)$ — линия, по которой движется центр окружности, $\mathcal{L}\{\mathbf{m}, \mathbf{k}\}$ — направляющее пространство плоскости, в которой расположена переменная окружность, а $R(u)$ — радиус переменной окружности. В качестве линии, по которой движется центр окружности, выбо-

рем замкнутую кривую

$$\begin{cases} x = 6 \cos u (1 + \sin u) \\ y = 16 \sin u \\ z = 0 \end{cases}$$

В точке кривой, соответствующей значениям параметра u , равным $-\pi/2$ и $3\pi/2$, значения производных функций $x = 6 \cos u (1 + \sin u)$ и $y = 16 \sin u$ равны нулю, а торые производные совпадают. Эта точка является на кривой точкой возврата первого рода [16].

Построим кривую центров окружностей в пакете Wolfram Mathematica, строка кода имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]), 16*Sin[u], 0},  
{u, -Pi/2, 3*Pi/2}]
```

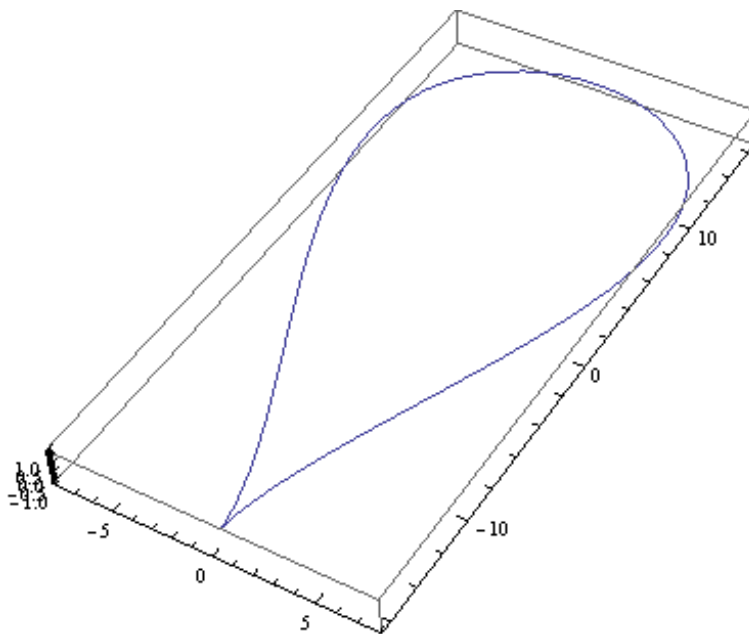


Рис. 4: Кривая центров окружностей при u от $-\pi/2$ до $3\pi/2$.

Вектор $\mathbf{m}(u)$ выберем так, чтобы при изменении параметра $u - \pi/2$ до $3\pi/2$ плоскость $\mathcal{L}\{\mathbf{m}, \mathbf{k}\}$ повернулась на угол π :

$$\mathbf{m}(u) = \mathbf{i} \cos \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \mathbf{j} \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Изменение радиуса переменной окружности зададим следующей функцией $R(u) = 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right)$.

В результате получаем следующие параметрические уравнения бутылки Клейна:

$$\begin{cases} x = 6 \cos u (1 + \sin u) + 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \cos v \cos \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ y = 16 \sin u + 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos v \\ z = 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \sin v \end{cases} \quad (9)$$

При построении бутылки Клейна в пакете Wolfram Mathematica, строка кода имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) + 4*(1-
-Cos[u]/2)**Cos[v]*Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u] +
+4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[u/2+ Pi/4]*Cos[v], 4*(1-
-Cos[u]/2)*Sin[v]}, {u, -Pi/2, 3*Pi/2}, {v, 0, 2*Pi}]
```

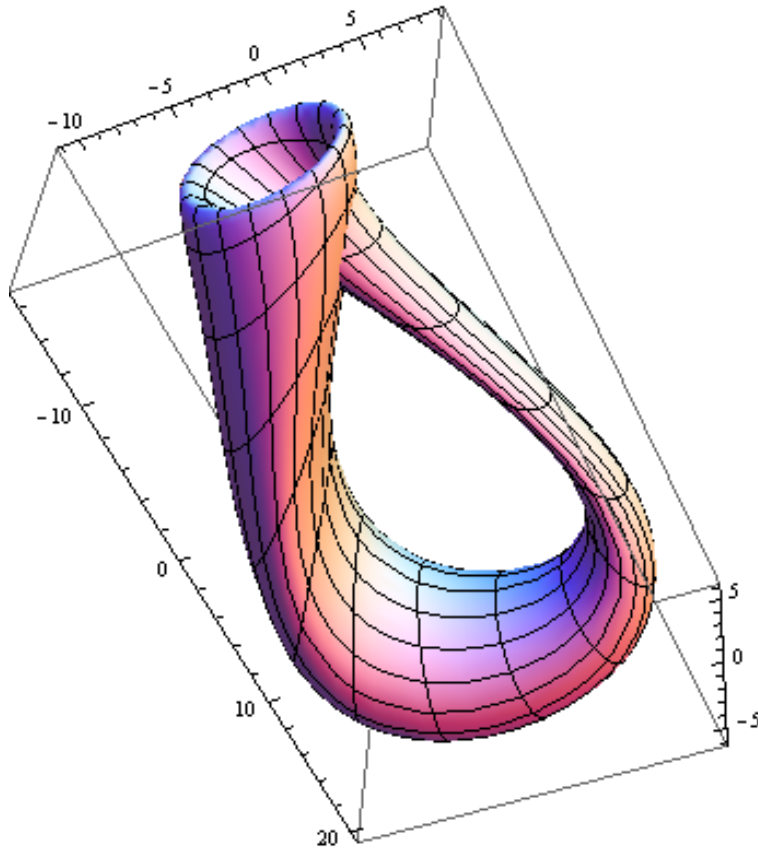


Рис. 5: бутылка Клейна.

Проверим, что уравнениями (9) задается погружение.
Для этого рассмотрим матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

должна иметь ранг 2 при всех значениях параметров u и v . Вычислим компоненты этой матрицы в пакете Wolfram Mathematica. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} = 6 \cos^2 u - 2 \left(1 - \frac{\cos u}{2}\right) \cos v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) + \\ + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cos v \sin u - 6 \sin u (1 + \sin u),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{\cos u}{2}\right) \sin v,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial u} = 16 \cos u + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{\cos u}{2}\right) \cos v + \\ + 2 \cos v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin u,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -4 \left(1 - \frac{\cos u}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2 \sin u \sin v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2}\right) \cos v.$$

Подсчитаем определители матриц

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы (1) равен:

$$\begin{aligned}64 \cos u \cos v - 32 \cos^2 u \cos v + 8 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cos^2 v - \\ - 8 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cos u \cos^2 v + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cos^2 u \cos^2 v + \\ + 8 \cos^2 v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin u - 4 \cos u \cos^2 v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin u + \\ + 8 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin u \sin^2 v - 4 \cos u \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin u \sin^2 v\end{aligned}$$

Определитель матрицы (2) равен:

$$\begin{aligned}
& 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos u \sin v - 32 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos^2 u \sin v + \\
& + 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos v \sin v - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos u \cos v \sin v + \\
& + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos^2 u \cos v \sin v - 24 \cos^2 u \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin v + \\
& + 12 \cos^3 u \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin v + 8 \cos v \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin v - \\
& - 8 \cos u \cos v \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin v + 2 \cos^2 u \cos v \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin v + \\
& + 24 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin u \sin v - 12 \cos u \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin u \sin v + \\
& + 24 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin^2 u \sin v - 12 \cos u \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin^2 u \sin v
\end{aligned}$$

Определитель матрицы (3) равен

$$\begin{aligned}
& 24 \cos^2 u \cos v - 12 \cos^3 u \cos v - 8 \cos^2 v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) + \\
& + 8 \cos u \cos^2 v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) - 2 \cos^2 u \cos^2 v \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) - \\
& - 24 \cos v \sin u + 12 \cos u \cos v \sin u + 8 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos^2 v \sin u - \\
& - 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos u \cos^2 v \sin u - 24 \cos v \sin^2 u + 12 \cos u \cos v \sin^2 u + \\
& + 8 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \sin u \sin^2 v - 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \cos u \sin u \sin^2 v
\end{aligned}$$

Поскольку не представляется возможным найти значения параметров, при которых вычисленные выше миноры обращаются в нуль, установим ранг матрицы Якоби только при некоторых значениях параметров, соответствующих точке возврата кривой и некоторым другим точкам, в которых ранг матрицы Якоби может упасть. Эти точки выбираем, исследуя рисунок бутылки Клейна. В пакете Wolfram Mathematica вычислим значения определителей матриц (1), (2), (3) в критических точках $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Значения определителей матриц (1), (2), (3) в точке $\frac{\pi}{2}$ соответственно равны 0, $10\sqrt{2}$, 0.

Значения определителей матриц (1), (2), (3) в точке $-\frac{\pi}{2}$ соответственно равны 0, $-10\sqrt{2}$, 0.

Значения определителей матриц (1), (2), (3) в точке $\frac{3\pi}{2}$ соответственно равны 0, $-10\sqrt{2}$, 0.

Одновременно все значения определителя не обобщаются в 0, следовательно в окрестностях рассмотренных точек отображение (9) является погружением.

Замечание. Если в уравнениях (9) параметры u и v будут пробегать все значения от $-\infty$ до $+\infty$, то эти уравнения будут задавать накрытие погруженной бутылки Клейна плоскостью. В дальнейшем будем использовать это при построении изображений геодезических и кривых второго порядка на бутылке Клейна с заданной на ней аффинной структурой.

Приведем пример погружения бутылки Клейна, полученной в результате вращения кривой, имеющей форму восьмерки вокруг оси с одновременным поворачиванием кривой в несущей ее плоскости [17]:

$$\begin{cases} x = \left(2 + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v\right) \cos u \\ y = \left(2 + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v\right) \sin u \\ z = \sin \frac{u}{2} \sin 2v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v \end{cases} \quad (10)$$

При этом погружении самопересечение представляет собой окружность радиуса 2 в плоскости Oxy . Параметр u задаёт угол на плоскости Oxy , а v — угол в плоскости, содержащей кривую.

Ниже приведен код построения указанного выше погружения с помощью пакета Wolfram Mathematica:

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[u/2]*Sin[v] - Sin[u/2]*
```

```
*Sin[2*v])*Cos[u], (2 + Cos[u/2]*Sin[v] - Sin[u/2]*
Sin[2*v])*Sin[u], Sin[u/2]*Sin[v] + Cos[u/2]*Sin[2*v]},
{u, -Pi, Pi}}, {v, -Pi, Pi}]
```

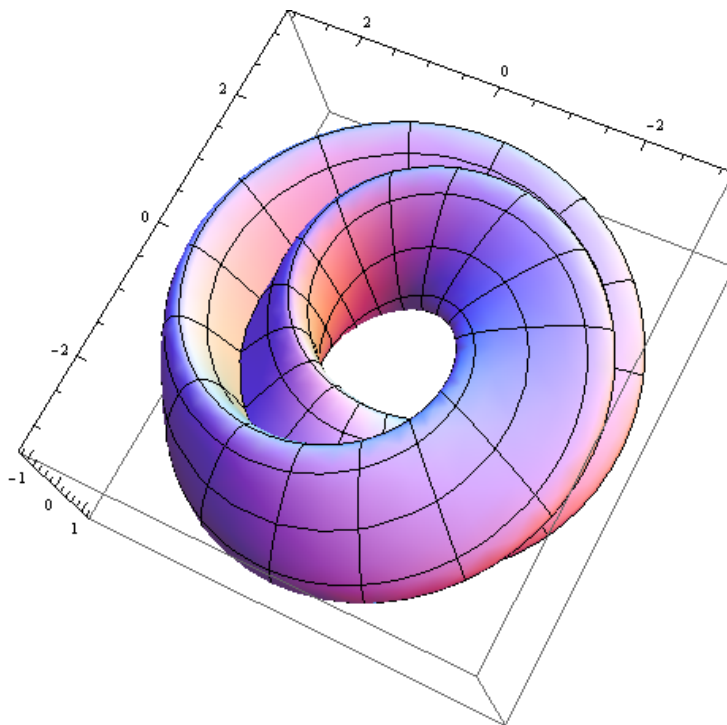


Рис. 6: Бутылка Клейна, полученная движением кривой "восьмерка".

Если перемещать только половину вышеуказанной кривой, имеющей форму восьмерки, при изменении параметра v в пределах $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то получится поверхность, представляющая собой лист Мебиуса.

Код построения с помощью пакета Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[u/2]*Sin[v] -
Sin[u/2]*Sin[2*v])*Cos[u], (2 + Cos[u/2]*Sin[v] -
-Sin[u/2]*Sin[2*v])*Sin[u], Sin[u/2]*Sin[v] +
+Cos[u/2]*Sin[2*v]}, {u, -Pi, \[Pi]},
{v, -Pi/2, Pi/2}]
```

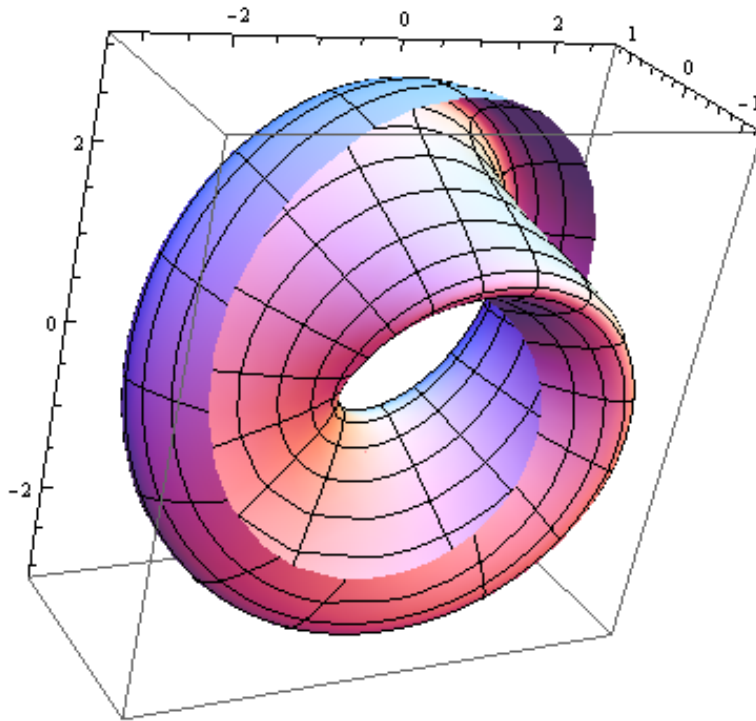


Рис. 7: Лист Мебиуса при $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Аналогично, лист Мебиуса получится при перемещении второй половины рассматриваемой кривой, имеющей форму восьмерки.

Код построения с помощью пакета Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[u/2]*Sin[v] -  
Sin[u/2]*Sin[2*v])*Cos[u], (2 + Cos[u/2]*Sin[v] -  
-Sin[u/2]*Sin[2*v])*Sin[u], Sin[u/2]*Sin[v] +  
+Cos[u/2]*Sin[2*v]}, {u, -Pi, \[Pi]},  
{v, Pi/2, 3*Pi/2}]
```

Это иллюстрирует тот факт, что бутылка Клейна может быть получена склеиванием по границе двух листов Мебиуса [2].

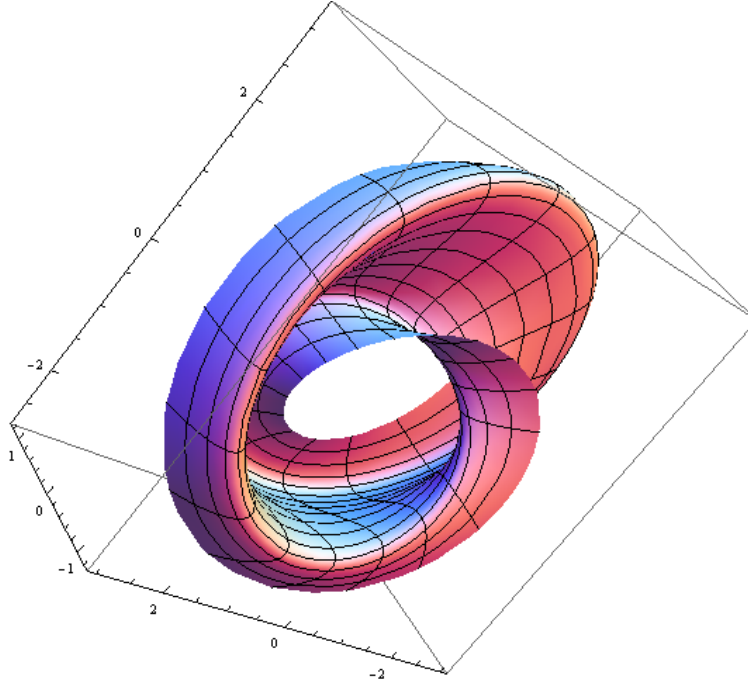


Рис. 8: Лист Мебиуса при $v \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

5 Аффинные многообразия

Аффинное многообразие представляет собой топологическое многообразие с атласом, все преобразования координат которого являются аффинными (см. 7). Будем называть карты этого атласа *аффинными*, а системы координат, определяемые этими картами, будем также называть аффинными. На аффинном многообразии M_n имеется каноническая аффинная связность [8], по отношению к которой параллельно переносимые векторы имеют постоянные координаты по отношению к аффинным картам. Коэффициенты связности этой канонической связности в аффинных координатах являются нулевыми, и уравнения геодезических линий $x^i = x^i(t)$ принимают вид $d^2x^i/dt^2 = 0$. Поэтому геодезические линии имеют в аффинных картах уравнения прямых линий аффинного пространства: $x^i = a^i t + b^i$, где a^i и b^i , $i = 1, \dots, n$.

Поскольку при аффинных преобразованиях координат

сохраняется степень алгебраического уравнения $F(x^i) = 0$, то на аффинном многообразии можно говорить о *кривых второго порядка*, как линиях, уравнения которых имеют степень два по отношению ко всем аффинным системам координат.

6 Плоский тор и плоская бутылка Клейна.

Плоский тор T_{fl} может быть получен путем склейки противоположных сторон квадрата в пространстве \mathbf{R}^2 , рассматриваемого как евклидова плоскость:

$$\begin{cases} u^1 \sim u^1 + 2\pi \\ u^2 \sim u^2 + 2\pi \end{cases} \quad (11)$$

более точно, для того чтобы склейка была гладкой, нужно осуществлять склейку (11) квадрата $(0, 2\pi + \varepsilon) \times (0, 2\pi + \varepsilon)$.

Универсальной накрывающей тора T_{fl} является евклидова плоскость \mathbf{R}^2 . Отображение накрытия $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow T_{fl}$ задается формулой:

$$(u^1 = 2\pi n + \alpha, u^2 = 2\pi k + \beta) \longmapsto (\alpha, \beta),$$

где $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ — координаты на торе.

Плоский тор может быть получен также как факторпространство плоскости \mathbf{R}^2 по подгруппе сдвигов $(\alpha, \beta) \longmapsto (2\pi n + \alpha, 2\pi k + \beta)$ [5].

Плоская бутылка Клейна будет двулистно накрываться некоторым плоским тором.

7 Геодезические (прямые) линии и кривые второго порядка на плоском торе и плоской бутылке Клейна.

Определение [8]. Пусть M^n — гладкое многообразие, снабженное аффинной связностью. Гладкая кривая γ называется *геодезической в данной связности* ∇ , если $\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = 0$, где $\dot{\gamma}$ — векторное поле скорости траектории γ .

Рассмотрим на плоском торе и бутылке Клейна геодезические и кривые второго порядка.

Для получения прямой линии (геодезической) на торе и бутылке Клейна возьмем прямую с уравнениями:

$$u^1 = at + b, u^2 = ct + d \quad (12)$$

на универсальном накрывающем пространстве \mathbf{R}^2 и спроектируем ее на тор и бутылку Клейна.

Рассмотрим прямые, заданные уравнениями:

$$u^1 = at, u^2 = ct. \quad (13)$$

Построим с помощью программы Wolfram Mathematica геодезические на плоском торе и плоской бутылке Клейна, при некоторых значениях параметров a и c . Если отношение a/c является рациональным числом, то геодезические оказываются замкнутыми линиями, а если a/c является иррациональным числом, то геодезические образуют всюду плотное множество.

Пусть $a = 1$ и $c = 1.75$, тогда кривая (13) на плоском торе и плоской бутылке Клейна имеет вид:

$$u^1 = t, u^2 = 1.75t. \quad (14)$$

Код в пакете Wolfram Mathematica:

```
ParametricPlot3D[{Cos[1.75 t1] (2 + Cos[t1]),
Sin[1.75 t1] (2 + Cos[t1]), Sin[t1]}, {t1, 0, 300 Pi}]
```

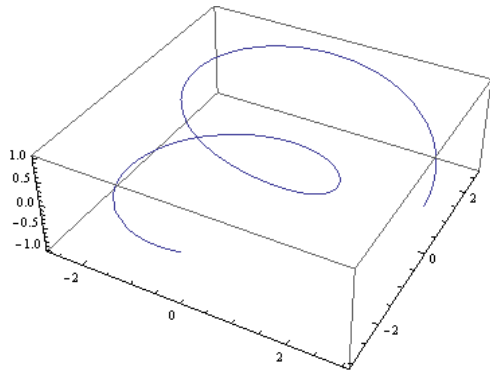


Рис. 9: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 2\pi]$.

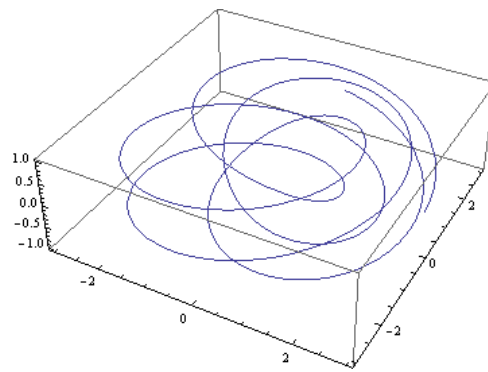


Рис. 10: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 6\pi]$.

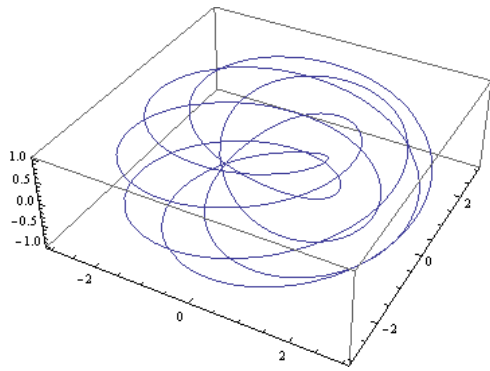


Рис. 11: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 8\pi]$.

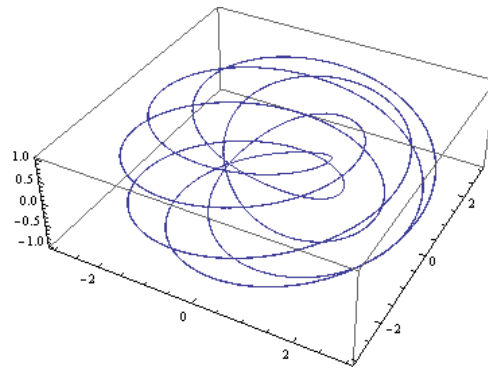


Рис. 12: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 80\pi]$.

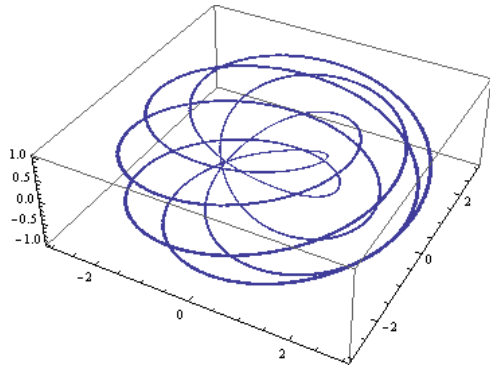


Рис. 13: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 160\pi]$.

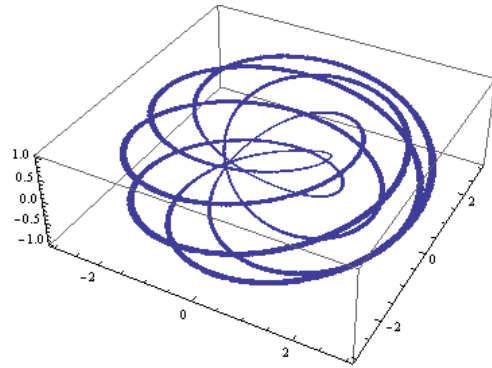


Рис. 14: Кривая (14) на плоском торе при $t \in [0, 240\pi]$.

Код в пакете Wolfram Mathematica для плоского бутылке Клейна:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) + 4*(1 -  
-Cos[u]/2)*Cos[1.75*u]*Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u]+  
+4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[1.75*u],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[1.75*u]}, {u, 0, 300*Pi}]
```

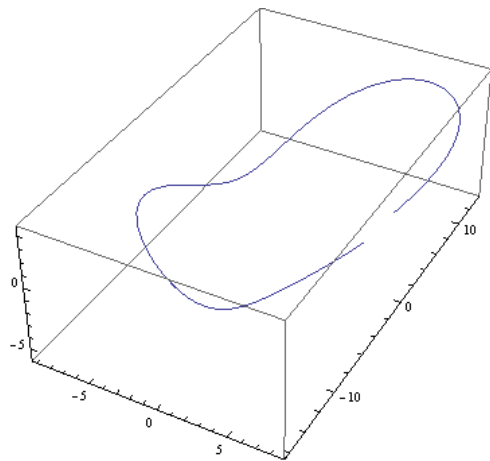


Рис. 15: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 2\pi]$.

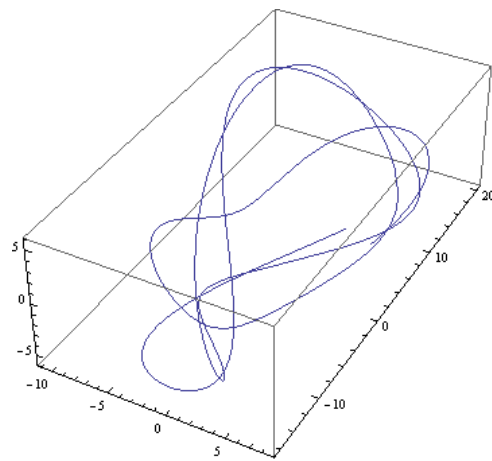


Рис. 16: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 6\pi]$.

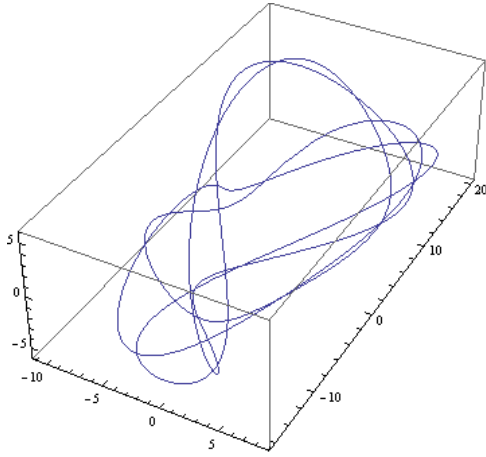


Рис. 17: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 8\pi]$.

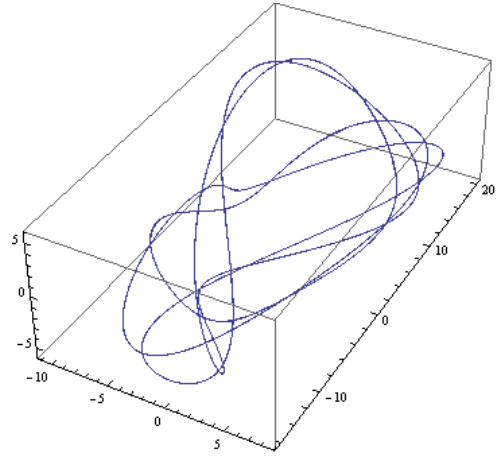


Рис. 18: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 80\pi]$.

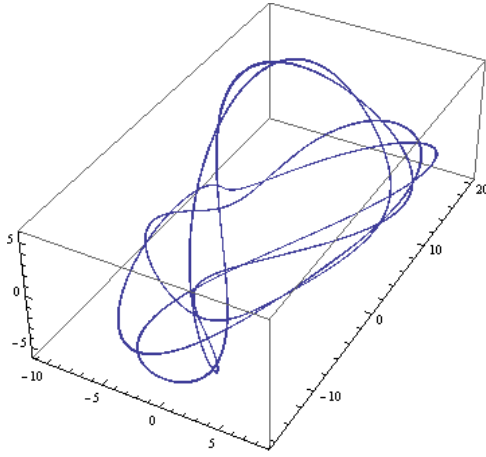


Рис. 19: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 160\pi]$.

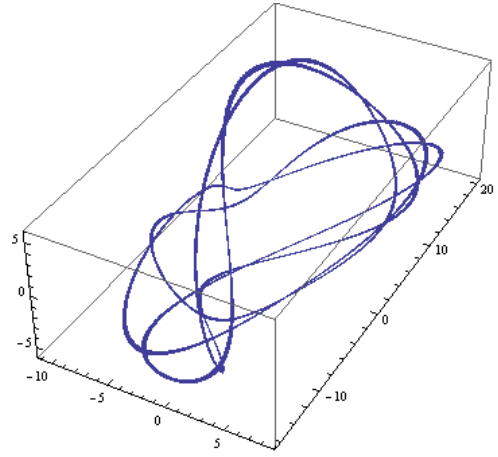


Рис. 20: Кривая (14) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 240\pi]$.

На рисунках видно, что кривая пробегает одно и тоже множество точек 30 раз.

Пусть $a = 1$ и $c = \sqrt{2}$, тогда кривая (13) на плоском торе и плоской бутылке Клейна имеет вид:

$$u^1 = t, u^2 = \sqrt{2}t. \quad (15)$$

Код в пакете Wolfram Mathematica для плоского тора:

```
ParametricPlot3D[{Cos[Sqrt[2] t1] (2 + Cos[t1]),
Sin[Sqrt[2] t1] (2 + Cos[t1]), Sin[t1]}, {t1, 0, 200 Pi}]
```

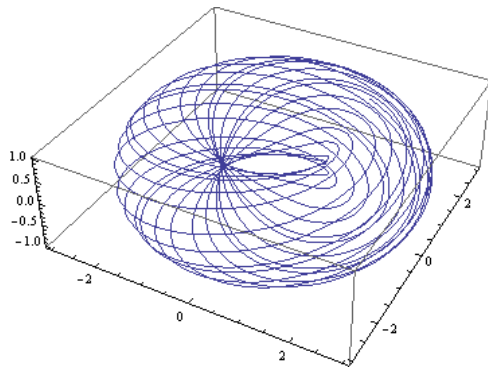


Рис. 21: Кривая (15) на плоском торе при $t \in [0, 30\pi]$.

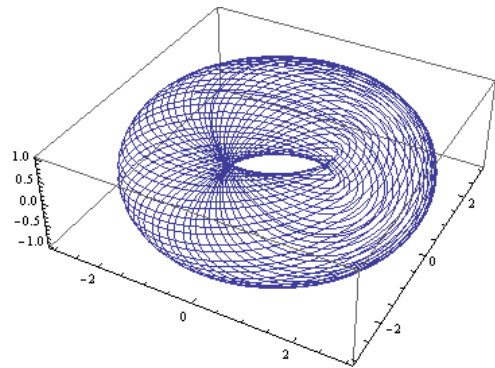


Рис. 22: Кривая (15) на плоском торе при $t \in [0, 60\pi]$.

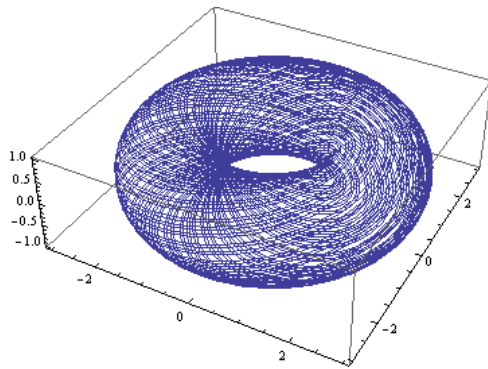


Рис. 23: Кривая (15) на плоском торе при $t \in [0, 120\pi]$.

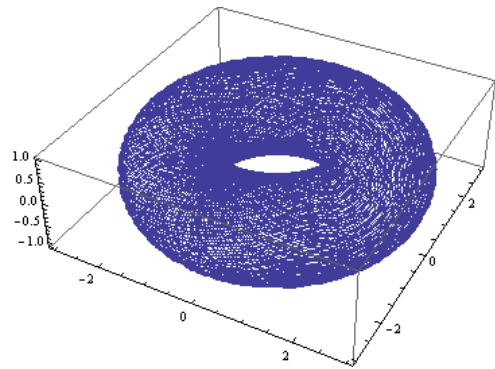


Рис. 24: Кривая (15) на плоском торе при $t \in [0, 240\pi]$.

Код в пакете Wolfram Mathematica для плоской бутылки Клейна:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) + 4*(1 -  
-Cos[u]/2)*Cos[Sqrt[2]*u]*Cos[u/2 + Pi/4],  
16*Sin[u]+4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[Sqrt[2]*u],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[Sqrt[2]*u]}, {u, 0, 200*Pi}]
```

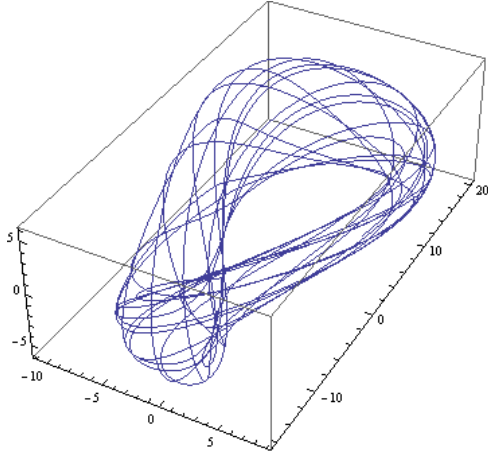


Рис. 25: Кривая (15) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 30\pi]$.

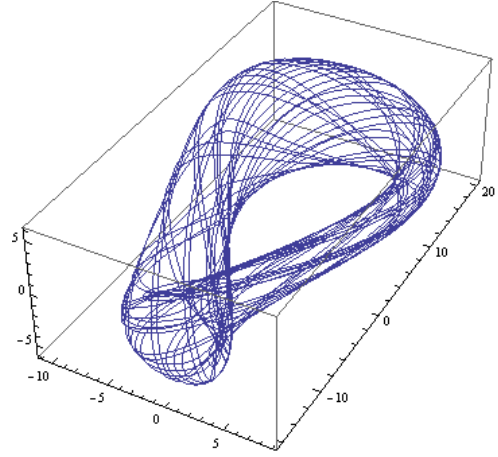


Рис. 26: Кривая (15) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 60\pi]$.

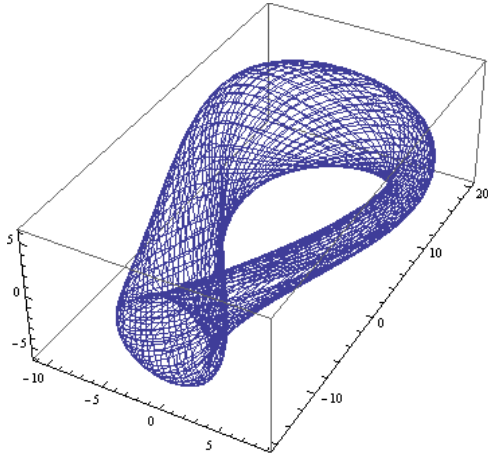


Рис. 27: Кривая (15) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 120\pi]$.

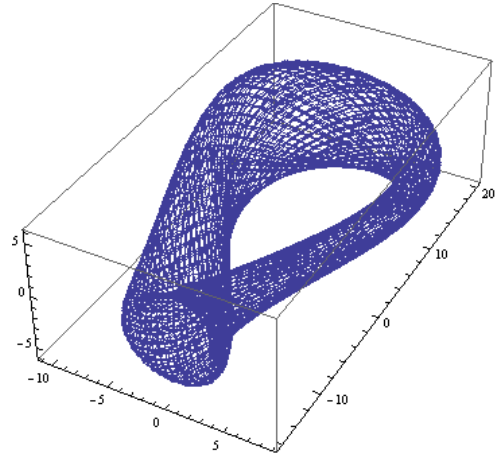


Рис. 28: Кривая (15) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 240\pi]$.

На рисунках видно, что кривая образует на торе и бутылке Клейна всюду плотное множество точек.

Рассмотрим кривые второго порядка на евклидовой плоскости \mathbf{R}^2 , спроектированные на тор и бутылку Клейна.

Пусть

$$u^1 = e \cos t, u^2 = f \sin t \quad (16)$$

— эллипс, где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Рассмотрим кривую (16) эллиптического типа на плоском торе и бутылке Клейна при $e = 5$ и $f = 3$ [9].

При построении кривой эллиптического типа на плоском торе при $e = 5$ и $f = 3$ в пакете Wolfram Mathematica, строка кода имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{Cos[5*Cos[a]] (2 + Cos[3*Sin[a]]),  
Sin[5*Cos[a]] (2 + Cos[3*Sin[a]]), Sin[3*Sin[a]]},  
{a, 0, 2 Pi}]
```

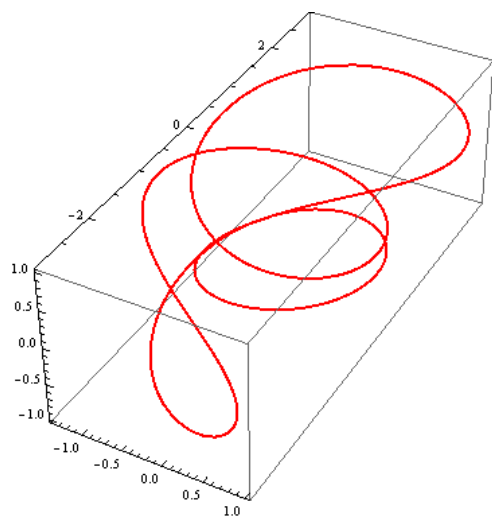


Рис. 29: Кривая (16) эллиптического типа на плоском торе.

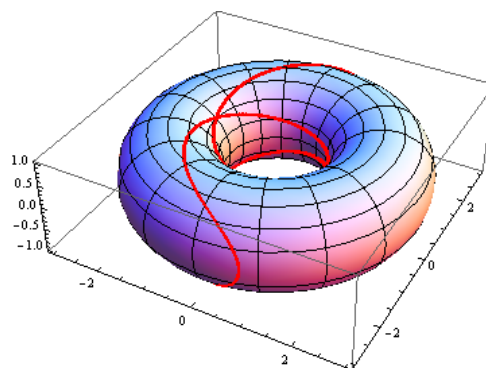


Рис. 30: Кривая эллиптического типа при $e = 5$ и $f = 3$.

Кривая (16) эллиптического типа на плоском торе при $e = 1/2$ и $f = 1/4$.

Строка кода в пакете Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{Cos[1/2*Cos[a]] (2 + Cos[1/4*Sin[a]]),  
Sin[1/2*Cos[a]] (2 + Cos[1/4*Sin[a]]), Sin[1/4*Sin[a]]},  
{a, 0, 2 Pi, 6PlotStyle -> {Red, Thick}}
```

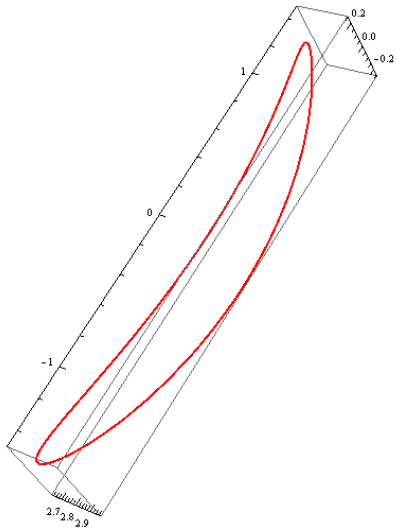



Рис. 31: Кривая (16) эллиптического типа на плоском торе.

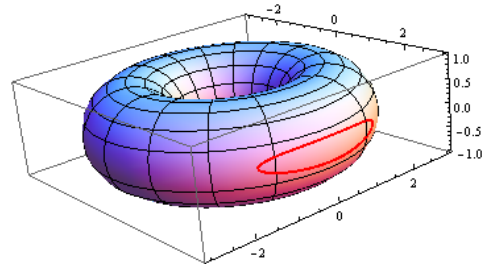


Рис. 32: Кривая эллиптического типа при $e = 1/2$ и $f = 1/4$.

Кривая (16) эллиптического типа на плоской бутылке Клейна при $e = 5$ и $f = 3$.

Строка кода в пакете Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[3*Sin[u]] (1 + Sin[3*Sin[u]]) +
+4*(1 - Cos[3*Sin[u]]/2)*Cos[5*Cos[u]]*Cos[3*Sin[u]/2 +
+Pi/4], 16*Sin[3*Sin[u]] +4*(1 - Cos[3*Sin[u]]/2)*Sin[3*
*Sin[u]/2+Pi/4]*Cos[5*Cos[u]], 4*(1 - Cos[3*Sin[u]]/2)*
*Sin[5*Cos[u]]}, {u, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

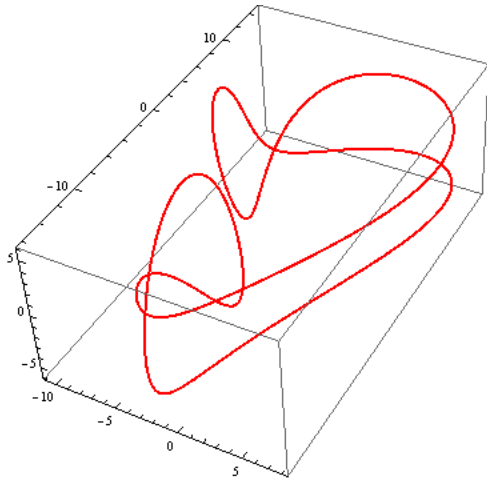


Рис. 33: Кривая (16) эллиптического типа на плоской бутылке Клейна.

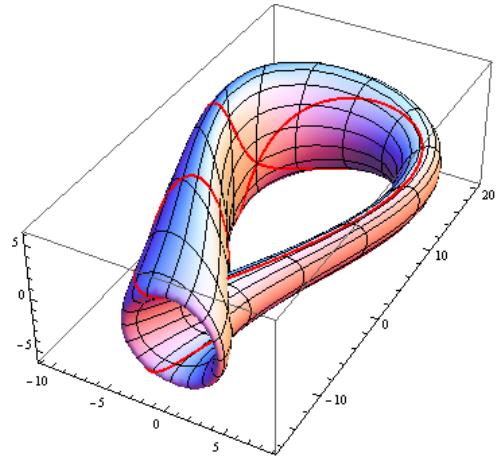


Рис. 34: Кривая эллиптического типа при $e = 5$ и $f = 3$.

Кривая (16) эллиптического типа на плоской бутылке Клейна при $e = 1/2$ и $f = 1/4$.

Строка кода в пакете Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[1/4*Sin[u]] (1 + Sin[1/4*Sin[u]])+
+4*(1-Cos[1/4*Sin[u]]/2)*Cos[1/2*Cos[u]]*Cos[1/4*Sin[u]/2+
+Pi/4],16*Sin[1/4*Sin[u]] + 4*(1 - Cos[1/4*Sin[u]]/2)*
*Sin[1/4*Sin[u]/2+Pi/4]*Cos[1/2*Cos[u]],4*(1-Cos[1/4*
*Sin[u]]/2)*Sin[1/2*Cos[u]]}, {u, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

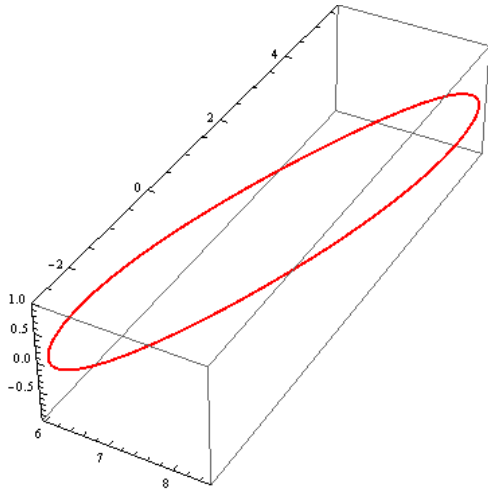


Рис. 35: Кривая (16) эллиптического типа на плоской бутылке Клейна.

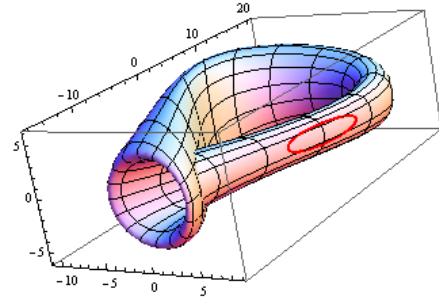


Рис. 36: Кривая эллиптического типа $e = 1/2$ и $f = 1/4$.

Пусть

$$u^1 = t, u^2 = t^2 \quad (17)$$

— парабола. Рассмотрим кривую (17) параболического типа на плоском торе и плоской бутылке Клейна.

При построении параболы на плоском торе в пакете Wolfram Mathematica, строка кода имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{Cos[ u*u] (2 + Cos[u]),  
Sin[u*u] (2 + Cos[u]), Sin[u]}, {u, 0, 8*Pi}]
```

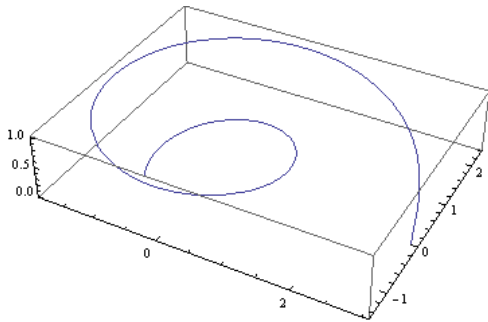


Рис. 37: Кривая (17) параболического типа на плоском торе при $t \in [0, \pi]$.

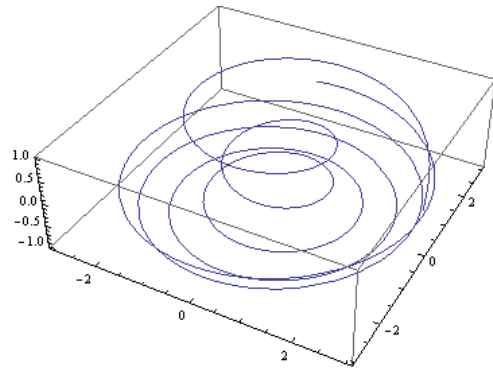


Рис. 38: Кривая (17) параболического типа на плоском торе при $t \in [0, 2\pi]$.

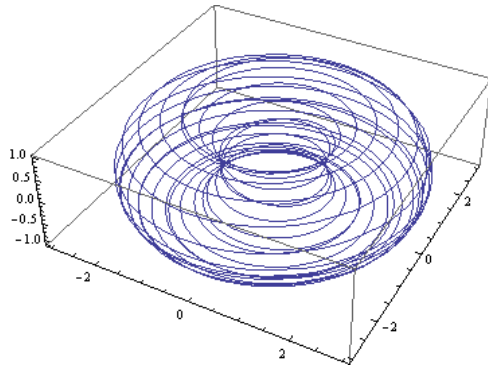


Рис. 39: Кривая (17) параболического типа на плоском торе при $t \in [0, 4\pi]$.

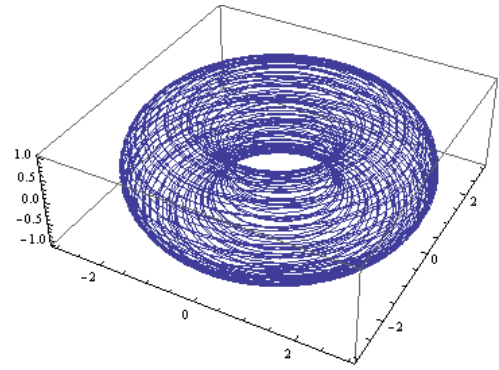


Рис. 40: Кривая (17) параболического типа на плоском торе при $t \in [0, 8\pi]$.

Кривая (17) параболического типа на плоской бутылке Клейна в пакете Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u*u] (1 + Sin[u*u]) +
+4*(1 - Cos[u*u]/2)*Cos[u]*Cos[u*u/2 + Pi/4],
16*Sin[u*u] + 4*(1 - Cos[u*u]/2)*Sin[u*u/2 + Pi/4]*Cos[u],
4*(1 - Cos[u*u]/2)*Sin[u]}, {u, 0, 8*Pi}]
```

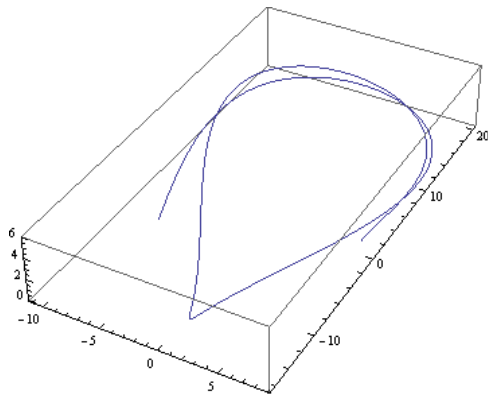


Рис. 41: Кривая (17) параболического типа на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, \pi]$.

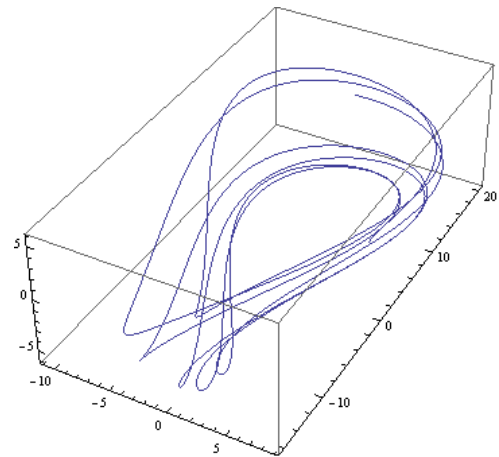


Рис. 42: Кривая (17) параболического типа на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 2\pi]$.

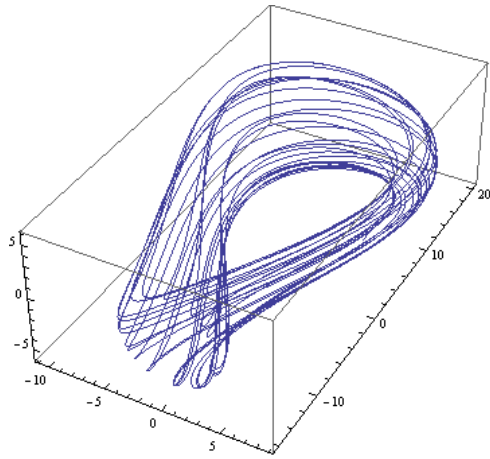


Рис. 43: Кривая (17) параболического типа на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 4\pi]$.

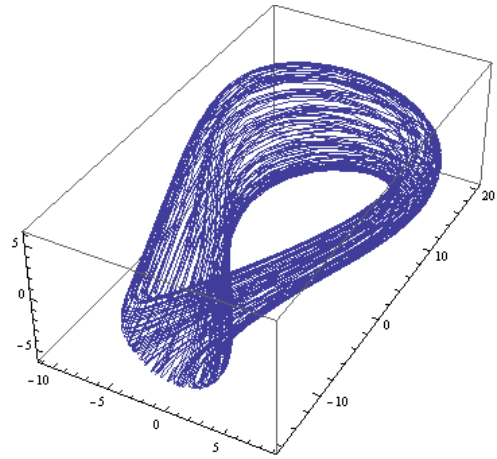


Рис. 44: Кривая (17) параболического типа на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 8\pi]$.

Пусть

$$u^1 = \cosh t, u^2 = \sinh t \quad (18)$$

— ветвь гиперболы. Рассмотрим кривую (18) параболического типа на плоском торе и плоской бутылке Клейна.

При построении параболы на плоском торе в пакете Wolfram Mathematica, строка кода имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{Cos[ Sinh[u]] (2 + Cos[Cosh[u]]),  
Sin[Sinh[u]] (2 + Cos[Cosh[u]]), Sin[Cosh[u]]}, {u, 0, 3}]
```

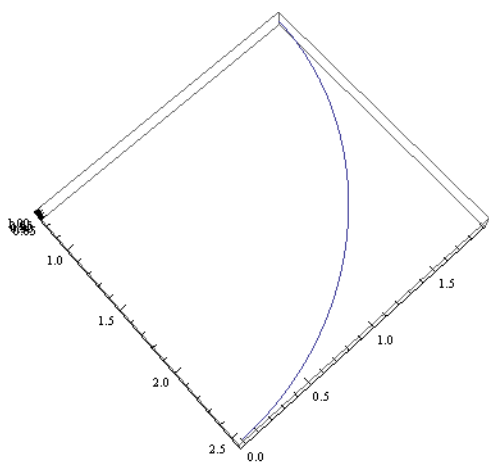


Рис. 45: Ветвь гиперболы (18) на плоском торе при $t \in [0, 1]$.

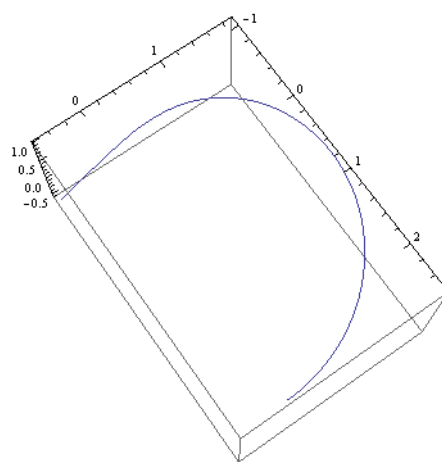


Рис. 46: Ветвь гиперболы (18) на плоском торе при $t \in [0, 2]$.

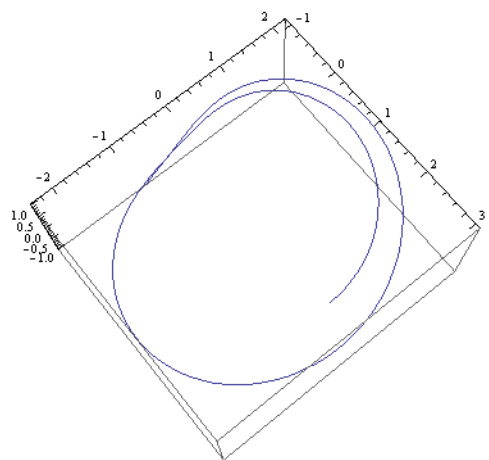


Рис. 47: Ветвь гиперболы (18) на плоском торе при $t \in [0, 3]$.

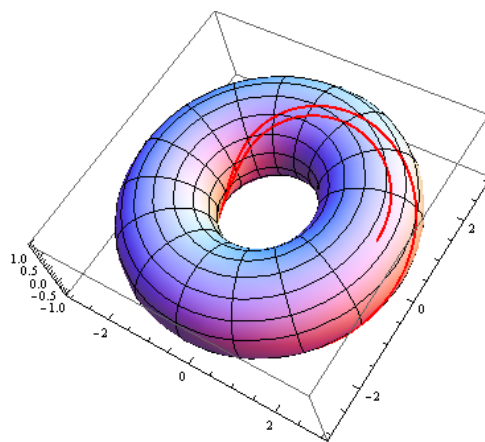


Рис. 48: Ветвь гиперболы (18) при $t \in [0, 3]$.

Кривая (18) гиперболического типа на плоской бутылке Клейна в пакете Wolfram Mathematica имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[Cosh[u]] (1 + Sin[Cosh[u]]) +
+4*(1 - Cos[Cosh[u]]/2)*Cos[Sinh[u]]*Cos[Cosh[u]/2 + Pi/4],
16*Sin[Cosh[u]]+4*(1-Cos[Cosh[u]]/2)*Sin[Cosh[u]/2+Pi/4]*
*Cos[Sinh[u]], 4*(1 - Cos[Cosh[u]]/2)*Sin[Sinh[u]]},
{u, 0, 3}]
```

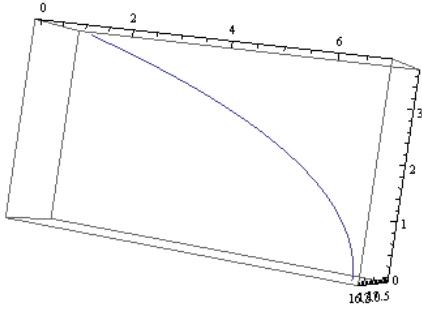


Рис. 49: Ветвь гиперболы (18) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 1]$.

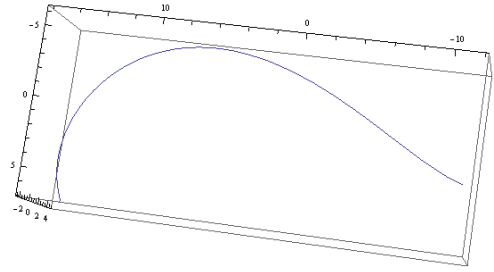


Рис. 50: Ветвь гиперболы (18) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 2]$.

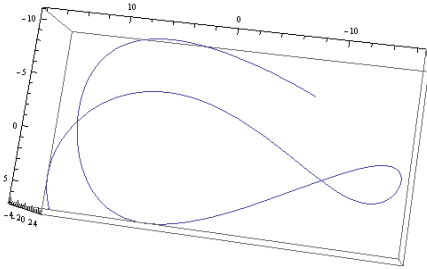


Рис. 51: Ветвь гиперболы (18) на плоской бутылке Клейна при $t \in [0, 3]$.

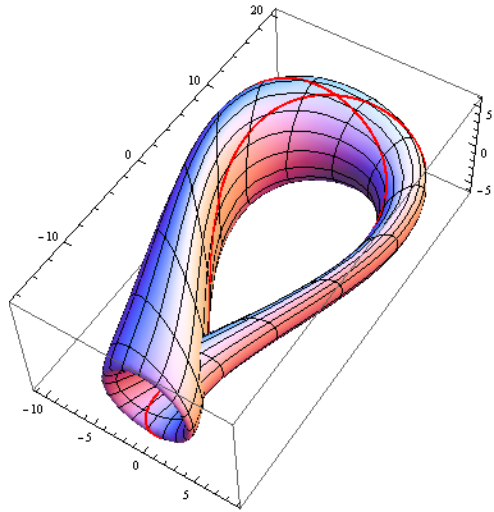


Рис. 52: Ветвь гиперболы (18) при $t \in [0, 3]$.

8 Аффинные бутылки Клейна, накрываемые торами Смилли.

Дж. Смилли были обнаружены аффинные структуры на торе, возникающие при склейке противоположных сторон выпуклого четырехугольника на евклидовой плоскости (отличного от параллелограмма) с помощью преобразований подобия [1]. В дипломной работе М. Гудочкиной [9] для таких аффинных торов были построены изображения на плоскости развертывающего отображения [1], которое можно опреде-

лить как отображение с универсального накрывающего пространства тора (реализованного как множество гомотопических классов путей с фиксированной начальной точкой [2]) на аффинную плоскость \mathbf{R}^2 , получаемое продолжением вдоль путей аффинной системы координат, заданной в окрестности фиксированной точки.

В настоящей работе рассматриваются геодезические линии на некоторых аффинных торах, получаемых методом Дж. Смилли и аффинные структуры на бутылке Клейна, получаемые аналогично склейкой противоположных сторон четырехугольника с помощью преобразований подобия.

Бутылка Клейна двулистно накрывается тором. Если на бутылке Клейна задана структура аффинного многообразия, то она индуцирует структуру аффинного многообразия на торе. Выясним вопрос, имеются ли на бутылке Клейна аффинные структуры, которые индуцируют на торе структуру из примера Дж. Смилли.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (вершины идут по порядку, соответствуя ориентации плоскости), и пусть $K \in AD$ и $L \in BC$. Прямая KL делит четырех угольник на два четырехугольника. Рассмотрим бутылку Клейна получающуюся при отображении подобия четырех угольника $ABLK$ (взятого с указанным порядком вершин) на четырехугольник $KLCD$. При этом отрезки AB , LK и DC отождествляются как направленные отрезки.

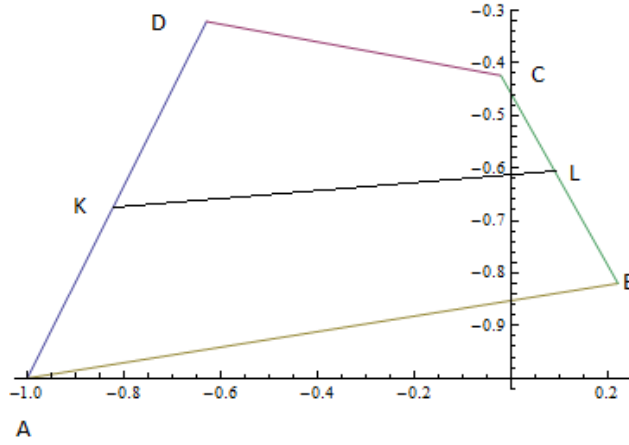


Рис. 53: Четырехугольник $ABCD$.

Из подобия четырехугольников $ABLK$ и $KLCD$ следует, что $\angle DKL = \angle ABL$, $\angle KDC = \angle KLB$, $\angle CLK = \angle KAB$, $\angle DCL = \angle AKL$. Получим, что $\angle DCL + \angle ABL = \angle CDK + \angle KAB = \pi$. AB параллельно DC по сумме внутренних односторонних.

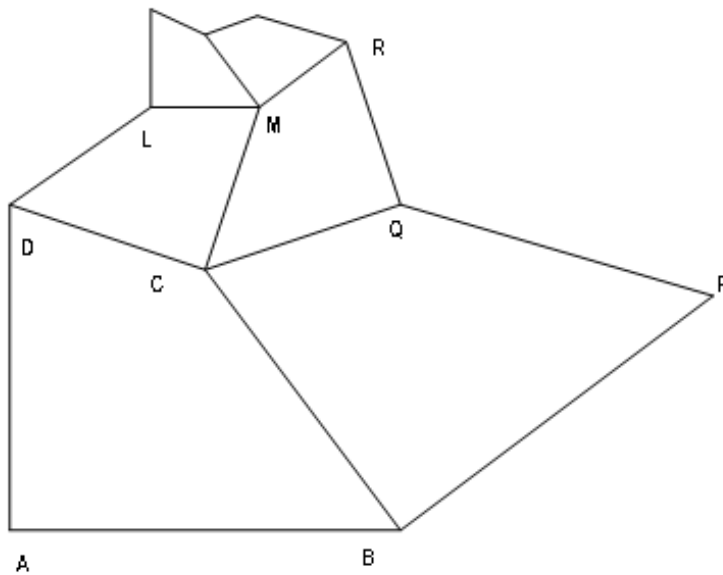
$$\begin{aligned} \frac{DK}{KA} &= \frac{CL}{LB}, & \frac{CL}{DK} &= \frac{KA}{LB} \\ DK \cdot LB &= CL \cdot KA, & CL \cdot LB &= DK \cdot KA \\ \frac{DK}{CL} &= \frac{CL}{DK} \\ DK &= CL, & KA &= LB \end{aligned}$$

Следовательно, четырехугольник — равнобочная трапеция с параллельными сторонами AB и DC и равными сторонами AD и BC .

Выясним теперь вопрос, можно ли получить бутылку Клейна со структурой аффинного многообразия, склеивая противоположные стороны четырехугольника с помощью преобразований подобия как в примере Дж. Смилли.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (вершины идут по порядку, соответствуя ориентации плоскости). Будем предпо-

лагать, что подобные ему четырехугольники $CDLM$, $BPQC$, $QCMR$ (подобие задается соответствием вершин в указанном порядке) в точке C заполняют угол в 360° без наложения. Из соотношений, определяемых подобием, $BC = \lambda AD$, $PQ = \lambda BC$, $MC = \mu AD$, $MC = \mu PQ$ получаем $\lambda = 1$. Таким образом, необходимо, $AD = BC$. С другой стороны, поскольку (это следует опять из подобия четырехугольников) углы α между векторами \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{CD} и β между \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{LM} равны, то $ABML$ — равнобокая трапеция. Полученная равнобокая трапеция при склейке ее сторон преобразованиями подобия будет давать аффинный тор, накрывающий двулистно бутылку Клейна со структурой аффинного многообразия. Отображение накрытия при этом будет согласованным с аффинными структурами, то есть в аффинных картах будет задаваться аффинными отображениями.



Универсальным накрывающим пространством всякого тора, получаемого склейкой сторон некоторой равнобоочной трапеции, является универсальное накрывающее пространство плоскости с выколотой точкой (полярный радиус изменяется от 0 до ∞ , а полярный угол от $-\infty$ до $+\infty$. Если угол между боковыми сторонами равнобоочной трапеции равен $2\pi/n$, где n — целое число, то тор будет накрываться также плоскостью с выколотой точкой и торами, получающимися склейкой окружностей, ограничивающих кольцо.

Исследуем поведение геодезических линий и некоторых кривых второго порядка на торах, получаемых склейкой окружностей, ограничивающих кольцо, и торах, получаемых склейкой сторон равнобоочных трапеций, а также бутылок Клейна, накрываемых вышеуказанными торами.

9 Тор, получаемый склейкой сторон равнобоочной трапеции

Рассмотрим сначала тор, получаемый склейкой кольца

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

при отождествлении точек граничных окружностей

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{и} \quad \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\},$$

координаты которых получаются одни из других умножением на 2. Точнее, нужно взять кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq (2 + 2\varepsilon)^2$ и на нем отождествить точки, координаты которых получаются одни из других умножением на 2. На кольце W имеется структура аффинного многообразия как на подмножестве аффинного пространства \mathbf{R}^2 (картой является тождественное отображение \mathbf{R}^2 на себя, ограниченное на W). Поскольку

отождествление осуществляется с помощью аффинного изоморфизма, на факторпространстве наследуется атлас аффинного многообразия с W . Обозначим его символом T_1 . На рис. 50 зеленым цветом отмечены отождествляемые области кольца W .

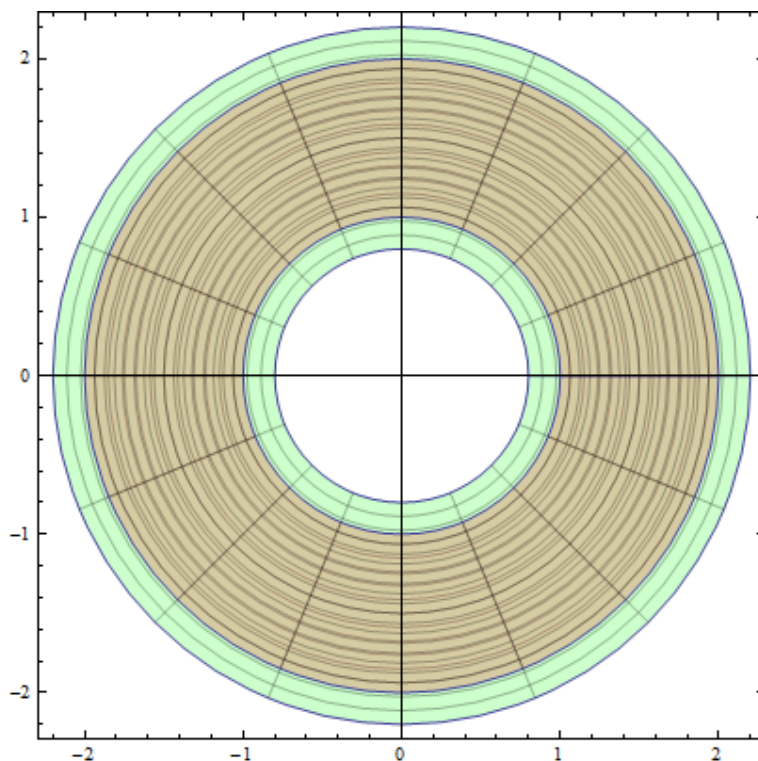


Рис. 54: Кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq (2 + 2\varepsilon)^2$, зеленым цветом выделены склеивающиеся области.

Отообразим аффинный тор T_1 на тор вращения, используя координаты (u^1, u^2) из координатного квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ на торе вращения. Выразим координаты тора вращения через координаты аффинного тора, тем самым получим диффеоморфизм. Рассмотрим на торе T_1 полярную систему координат

$$v^1 \in [0, 2\pi], \quad v^2 \in [1, 2].$$

Тор T_1 шестикратно накрывает тор, получаемый склейкой сторон равнобокой трапеции с углом между боковыми сторонами, равным $\frac{\pi}{3}$ и отношением оснований, равным 2. Обозначим этот тор T_2 . Тор T_2 можно получить из проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с полярной системой координат $\{v^1, v^2\}$ факторизацией

$$\begin{cases} v^1 \sim v^1 + \frac{\pi}{3}k, \\ v^2 \sim 2^n v^2. \end{cases} \quad (19)$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ будет являться накрывающим пространством тора T_2 . $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ является аффинным многообразием с тривиальной голономией [2], так как покрыто только одной картой, но не является односвязным многообразием. Отображение накрытия определяется следующим образом: $v^1 \mapsto 6v_0^1 \in (0, 2\pi)$ такое, что $v - v_0^1 = \frac{\pi}{3}k$ и $v^2 \mapsto v_0^2 \in [1, 2]$ такое, что $v^2 = v_0^2 \cdot 2^n$, ($k \in \mathbb{Z}$). Выражая отсюда n и растягивая отрезок $[1, 2]$ на $[0, 2\pi]$, получим формулы, связывающие координаты $\{u^1, u^2\}$ на торе вращения и координаты v^1 и v^2 на накрывающем пространстве:

$$\begin{cases} u^1 = 6v^1, \\ u^2 = 2\pi \log_2 v^2. \end{cases} \quad (20)$$

Для построения прямой линии (геодезической) на торе T_2 , возьмем прямую на универсальном накрывающем пространстве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и спроектируем ее на тор T_2 . Пусть прямая

на универсальном накрывающем пространстве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ имеет уравнение

$$v^2 = \frac{p}{\cos(v^1 - \alpha)}.$$

на торе T_2 получим

$$\begin{cases} u^1 = 6v^1, \\ u^2 = 2\pi \log_2 \frac{p}{\cos(v^1 - \alpha)}, \end{cases} \quad (21)$$

где u^1 и u^2 - координаты на торе вращения, p — расстояние от полюса (начала координат) до прямой в полярной системе координат, а α — угол между полярной осью и перпендикуляром, опущенным из полюса на прямую.

В пакете Wolfram Mathematica код программы для построения прямых линий на торе при $p = 1.5$ и $\alpha = 0$ имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{Cos[6*v1] (2 + Cos[2 Pi*
*Log[2, 1.5/Cos[v1]]]),
Sin[6*v1] (2 + Cos[2 Pi Log[2, 1.5/Cos[v1]]]),
Sin[2 Pi Log[2, 1.5/Cos[v1]]]}, {v1, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

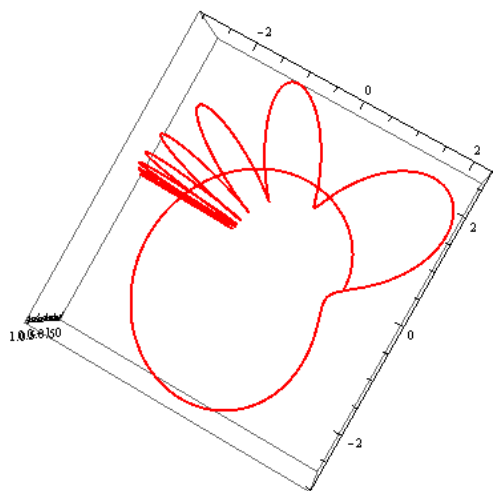


Рис. 55: Отрезок прямой (21) на торе при $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

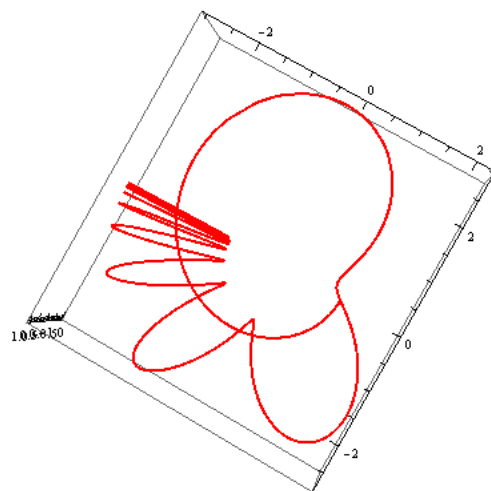


Рис. 56: Отрезок прямой (21) на торе при $v \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

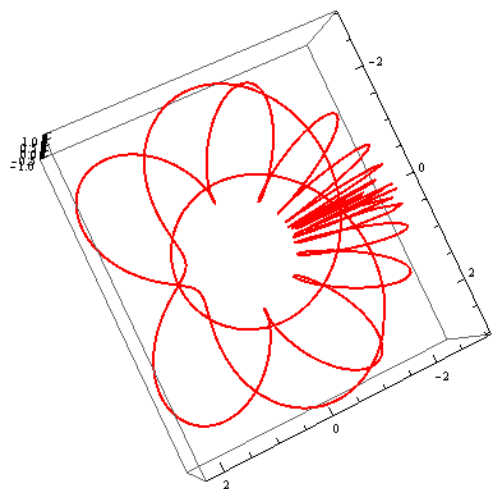


Рис. 57: Отрезок прямой (21) на торе при $v \in [0, 2\pi]$.

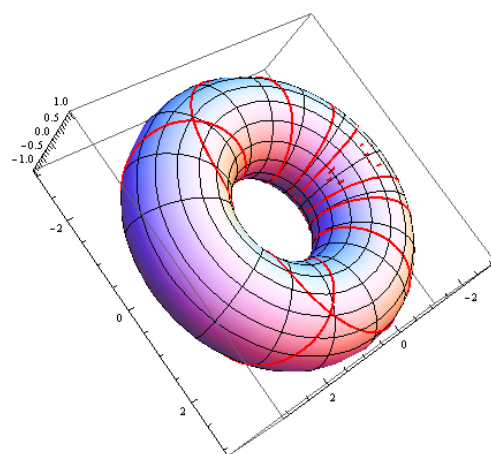


Рис. 58: Полученная прямая (21) на торе при $v \in [0, 2\pi]$.

Построим некоторые кривые второго порядка на торе T_2 , проектируя кривые второго порядка с универсального накрывающего пространства на тор T_2 . Кривые второго порядка будем задавать уравнениями в полярной системе координат.

Будем использовать полярную систему координат, в которой полюс помещаем в фокус параболы, левый фокус эллипса или в правый фокус гиперболы, а в качестве полярной оси берем ось абсцисс канонической системы координат. В этом случае указанные кривые второго порядка задаются следующим уравнением [10]:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad (22)$$

где e — эксцентриситет кривой, а p — фокальный параметр.

1. Рассмотрим эллипс. Для эллипса $e < 1$.

Код программы в пакете Mathematica для построения эллипса при $p = 1.5$ и $e = 0.7$:

```
ParametricPlot3D[{Cos[6*v1] (2 + Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/
/(1 - 0.7*Cos[v1]]))],
Sin[6*v1] (2 + Cos[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 0.7*Cos[v1]]))],
Sin[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 0.7*Cos[v1]])]}, {v1, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

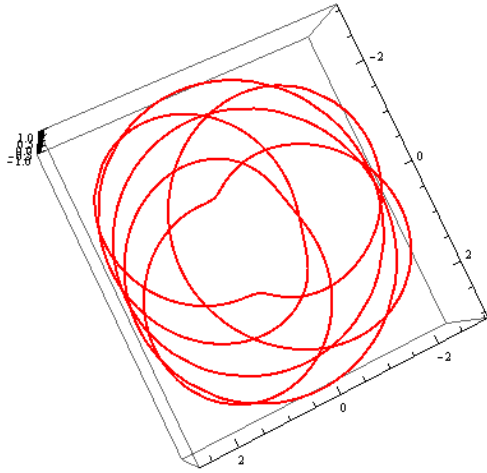



Рис. 59: Эллипс при $p = 1.5$ и $e = 0.7$.

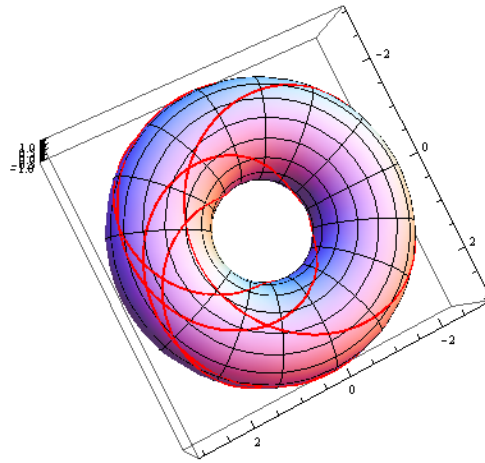


Рис. 60: Полученный эллипс при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

2. Рассмотрим параболу. В этом случае $e = 1$.

Код программы в пакете Mathematica для построения параболы при $p = 1.5$ и $e = 1$:

```
ParametricPlot3D[{Cos[6*v1] (2 + Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/
/(1 - Cos[v1])])],
Sin[6*v1] (2 + Cos[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - Cos[v1])])],
Sin[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - Cos[v1])]]}, {v1, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

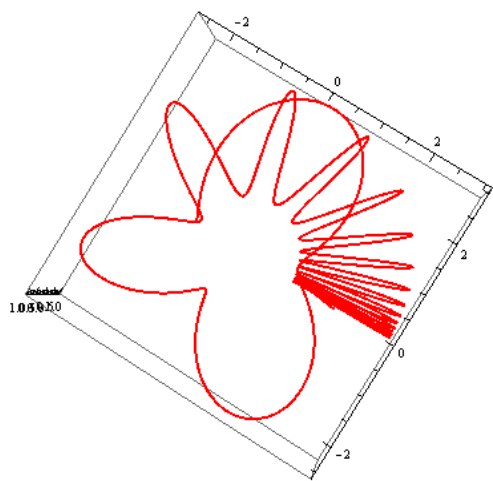


Рис. 61: Полученная парабола при $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

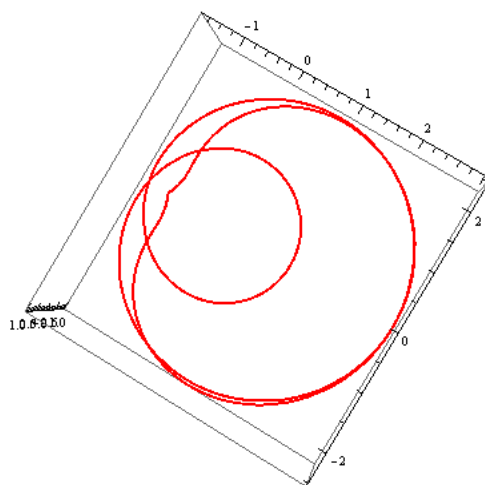


Рис. 62: Полученная парабола при $v \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

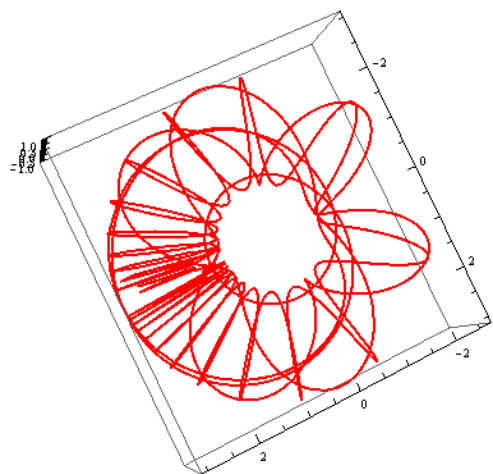


Рис. 63: Полученная парабола при $v \in [0, 2\pi]$.

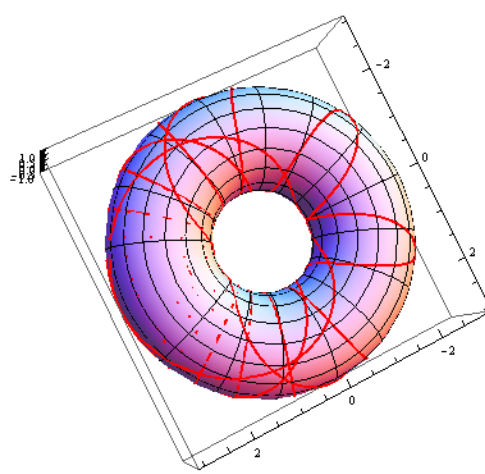


Рис. 64: Полученная парабола при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

3. Рассмотрим ветвь гиперболы. Для гиперболы $e > 1$.

Код программы в пакете Mathematica для построения ветви гиперболы при $p = 1.5$ и $e = 2$:

```
ParametricPlot3D[{Cos[6*v1] (2 + Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/
/(1 - 2*Cos[v1]]))],
Sin[6*v1] (2 + Cos[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[v1]]))],
Sin[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[v1]]]}], {v1, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

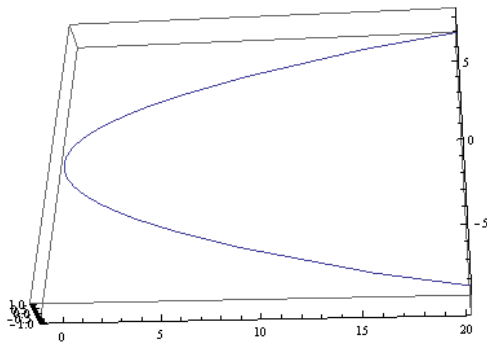


Рис. 65: Ветвь гиперболы на плоскости \mathbf{R}^2 .

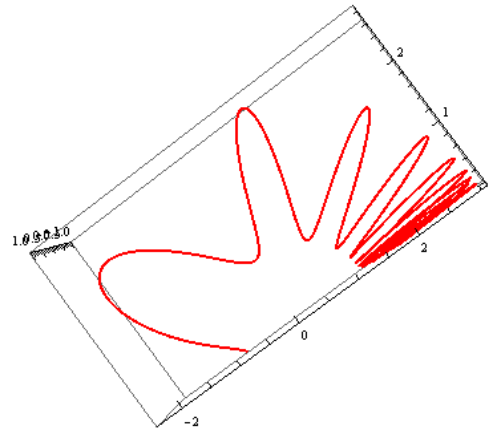


Рис. 66: Полученная ветвь гиперболы при $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

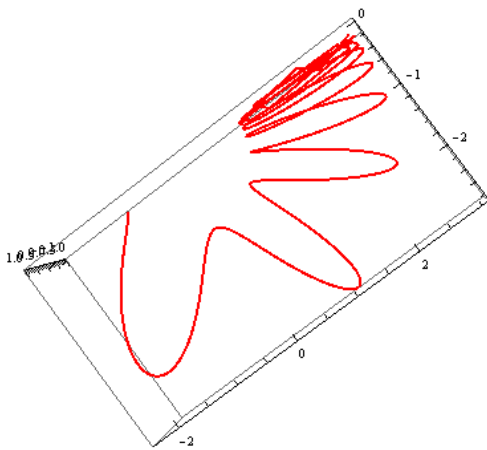


Рис. 67: Полученная ветвь гиперболы при $v \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

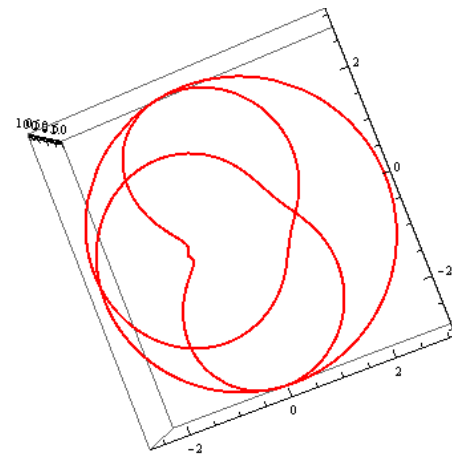


Рис. 68: Полученная ветвь гиперболы при $v \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

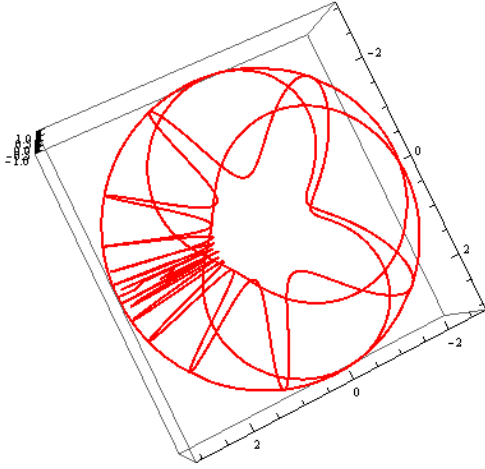


Рис. 69: Ветвь гиперболы при $p = 1.5$ и $e = 2$.

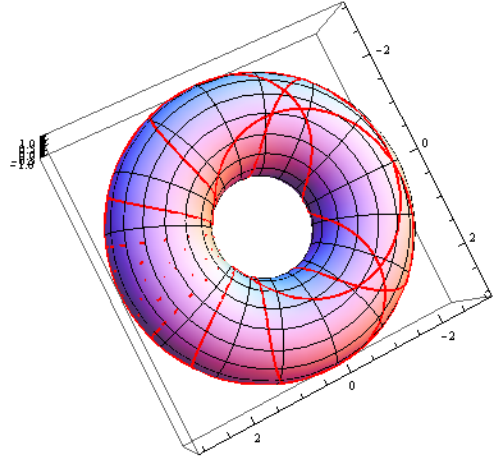


Рис. 70: Полученная ветвь гиперболы при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

Перейдем к рассмотрению аффинной бутылки Клейна, накрываемой двулистно тором Смилли, получаемым склейкой сторон равнобоочной трапеции. Обозначим такую бутылку Клейна K_2 . Для получения изображений на построенной бутылке Клейна в \mathbf{R}^3 используем то, что тор вращения накрывает бутылку Клейна, что соответствует периодичности параметра u на торе с периодом 2π и на бутылке Клейна с периодом π . Поэтому для построения соответствующих изображений подставляет уравнения прямых и кривых второго порядка в параметрические уравнения бутылки Клейна в \mathbf{R}^3 .

В пакете Mathematica код программы для построения прямых линий (21) при $p = 1.5$ и $\alpha = 0$ имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[6*u] (1 + Sin[6*u]) +
4*(1 - Cos[6*u]/2)*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]]*
*Cos[6*u/2 + Pi/4], 16*Sin[6*u] + 4*(1 - Cos[6*u]/2)*
*Sin[6*u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]],
4*(1 - Cos[6*u]/2)*Sin[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]]},
{u, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

Рассмотрим кривые второго порядка на бутылке Клейна.

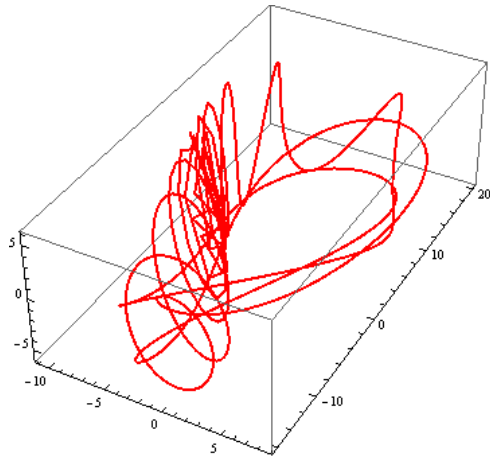


Рис. 71: Отрезок прямой на бутылке Клейна при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

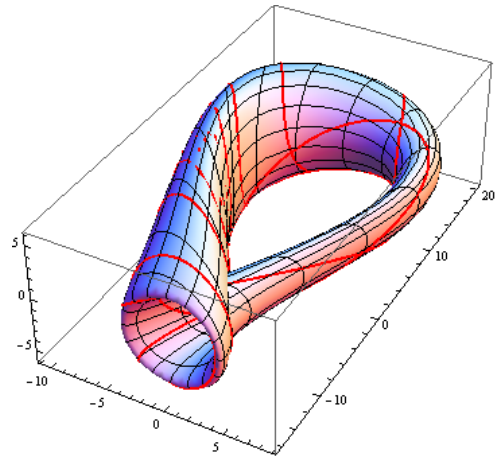


Рис. 72: Отрезок прямой на бутылке Клейна при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

В полярной системе координат уравнения эллипса, параболы и ветви гиперболы имеют вид [6]:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos v^1}. \quad (23)$$

1. Рассмотрим эллипс.

Код программы в пакете Mathematica для построения эллипса при $p = 1.4$ и $e = 0.7$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[6*u] (1 + Sin[6*u]) + 4*(1 - 
-Cos[6*u]/2)*Cos[2 Pi Log[2, 1.4/(1 - 0.7*Cos[u])]]*
Cos[6*u/2 + Pi/4], 16*Sin[6*u] + 4*(1 - Cos[6*u]/2)*
*Sin[6*u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi Log[2, 1.4/(1 - 0.7*
*Cos[u])]]], 4*(1-Cos[6*u]/2)*Sin[2Pi Log[2,1.4/(1-
0.7*Cos[u])]]}],{u, 0,2*Pi},PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

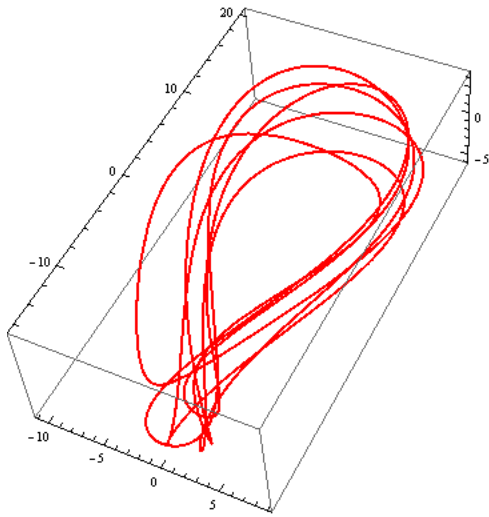


Рис. 73: Эллипс на бутылке Клей-на при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

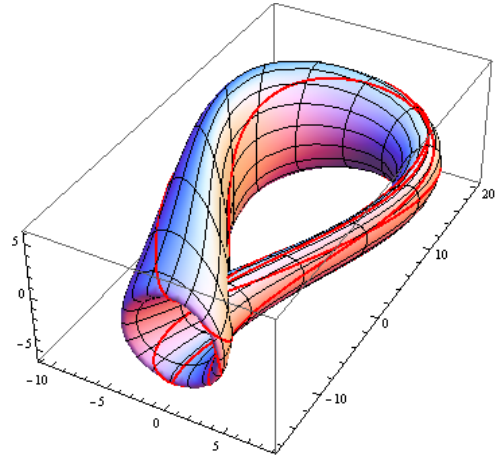


Рис. 74: Эллипс на бутылке Клей-на при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

2. Рассмотрим параболу.

Код программы в пакете Mathematica для построения параболы при $p = 1.4$ и $e = 1$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[6*u] (1 + Sin[6*u]) +  
4*(1 - Cos[6*u]/2)*Cos[2 Pi Log[2, 1.4/(1 - Cos[u])]]*  
Cos[6*u/2 + Pi/4], 16*Sin[6*u] + 4*(1 - Cos[6*u]/2)*Sin[6*u/2 +  
+Pi/4]*Cos[2 Pi Log[2, 1.4/(1 - Cos[u])]]], 4*(1 -  
-Cos[6*u]/2)*Sin[2 Pi Log[2, 1.4/(1 - Cos[u])]]},  
{u, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

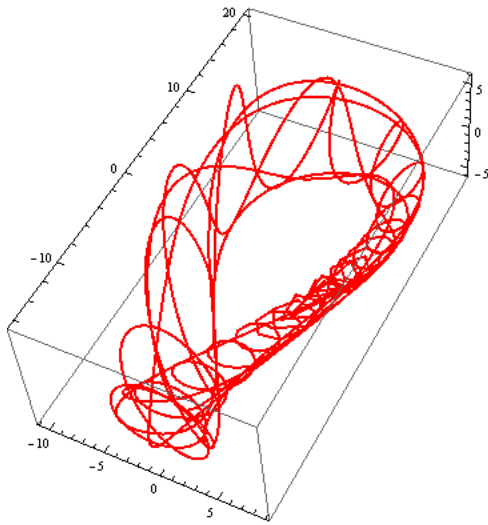


Рис. 75: Парабола на бутылке Клейна при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

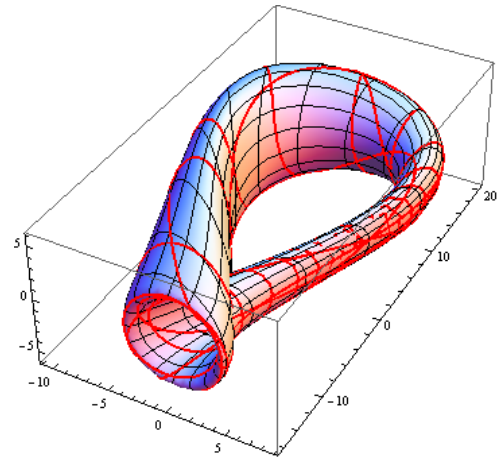
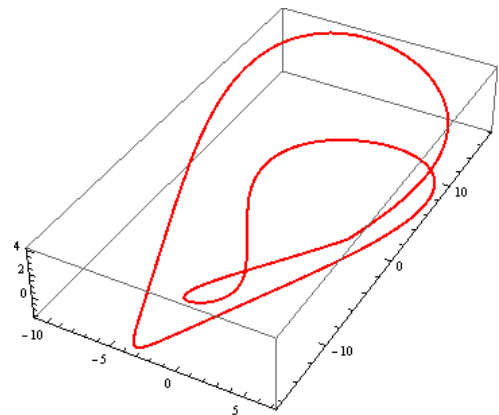
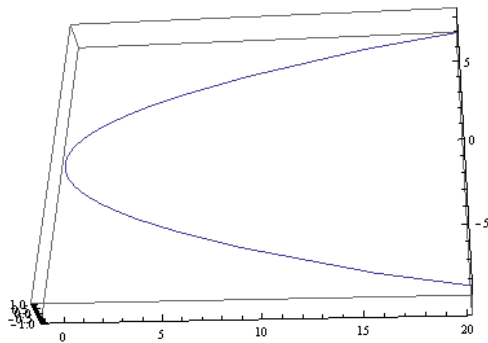


Рис. 76: Парабола на бутылке Клейна при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

3. Рассмотрим ветвь гиперболы.

Код программы в пакете Mathematica для построения ветви гиперболы при $p = 1.5$ и $e = 2$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[6*u] (1 + Sin[6*u]) + 4*(1 - Cos[6*u]/2)*Cos[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]]*Cos[6*u/2 + Pi/4], 16*Sin[6*u] + 4*(1 - Cos[6*u]/2)*Sin[6*u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]]}, 4*(1 - Cos[6*u]/2)*Sin[2 Pi Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]]}, {u, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



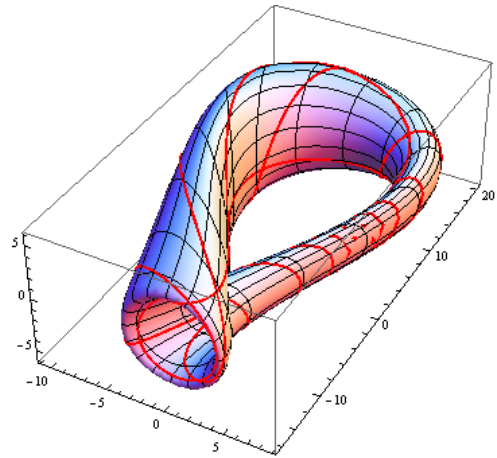
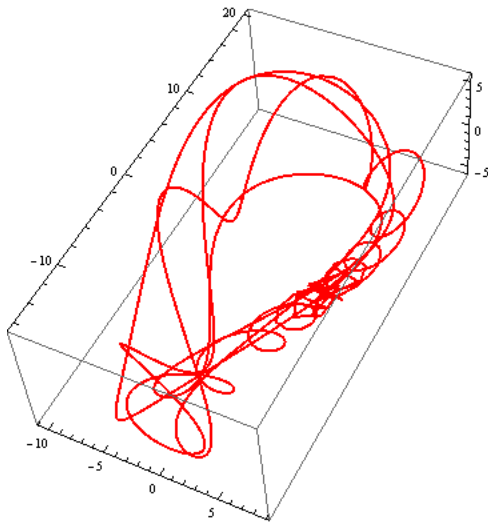


Рис. 77: Ветвь гиперболы на бутылке Клейна при $v^1 \in [0, 2\pi]$.

В заключении рассмотрим аффинные бутылки Клейна, накрываемые двулистно тором, получаемым склейкой кольца по внутреннему и внешнему краю. Обозначим такую бутылку Клейна K_1 .

В пакете Mathematica код программы для построения прямых линий (21) при $p = 1.5$ и $\alpha = 0$ имеет вид:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) +  
4*(1 - Cos[u]/2)*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]]*  
Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u] + 4*(1 - Cos[u]/2)*  
Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[2 Pi*Log[2, 1.5/Cos[u]]]},  
{u, 0, 4*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

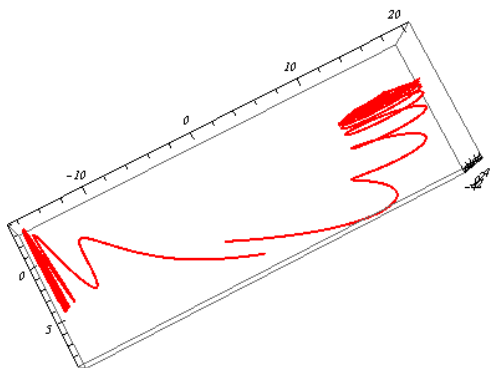



Рис. 78: Отрезок прямой на бутылке Клейна при $u \in [0, 2\pi]$.

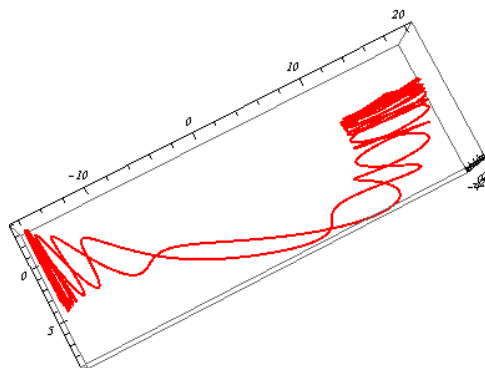


Рис. 79: Отрезок прямой на бутылке Клейна при $u \in [0, 4\pi]$.

Рассмотрим кривые второго порядка на бутылке Клейна в полярной системе координат.

1. Рассмотрим эллипс.

Код программы в пакете Mathematica для построения эллипса при $p = 1.5$ и $e = 0.7$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) +  
4*(1 - Cos[u]/2)*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 0.7*Cos[u])]]*  
Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u] + 4*(1 - Cos[u]/2)*  
Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 0.7*Cos[u])]],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 0.7*Cos[u])]]},  
{u, 0, 4*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

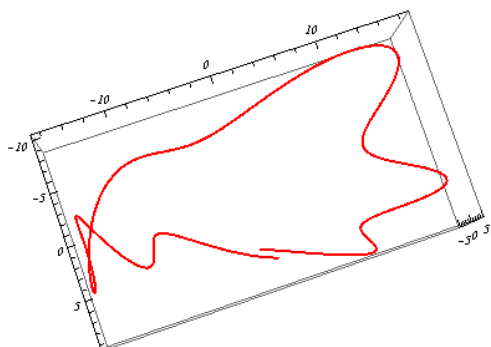


Рис. 80: Эллипс на бутылке Клейна при $u \in [0, 2\pi]$.

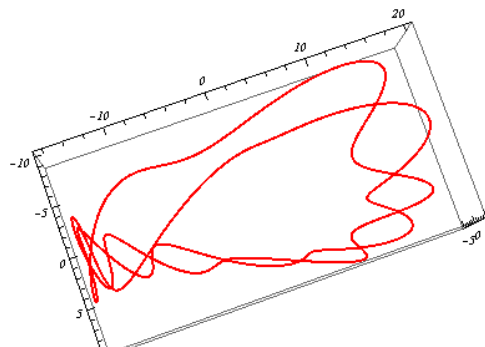


Рис. 81: Эллипс на бутылке Клейна при $u \in [0, 4\pi]$.

2. Рассмотрим параболу.

Код программы в пакете Mathematica для построения параболы при $p = 1.5$ и $e = 1$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) +  
4*(1 - Cos[u]/2)*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - Cos[u])]]*  
Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u] +4*(1 - Cos[u]/2)*  
Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - Cos[u])]],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - Cos[u])]]},  
{u, 0, 4*Pi},PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

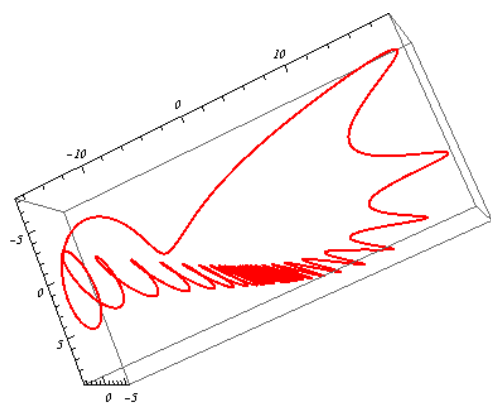


Рис. 82: Парабола на бутылке Клейна при $u \in [0, 2\pi]$.

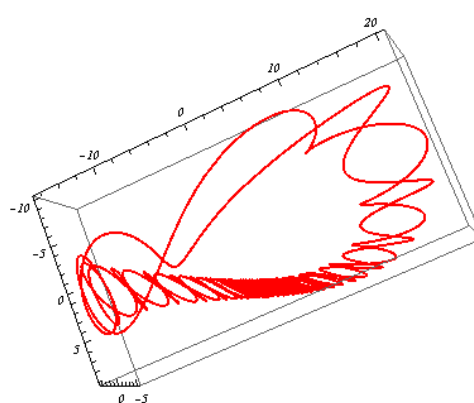


Рис. 83: Парабола на бутылке Клейна при $u \in [0, 4\pi]$.

3. Рассмотрим ветвь гиперболы.

Код программы в пакете Mathematica для построения ветви гиперболы при $p = 1.5$ и $e = 2$:

```
ParametricPlot3D[{6*Cos[u] (1 + Sin[u]) +  
4*(1 - Cos[u]/2)*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]]*  
Cos[u/2 + Pi/4], 16*Sin[u] +4*(1 - Cos[u]/2)*  
Sin[u/2 + Pi/4]*Cos[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]],  
4*(1 - Cos[u]/2)*Sin[2 Pi*Log[2, 1.5/(1 - 2*Cos[u])]]},  
{u, 0, 4*Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}]
```

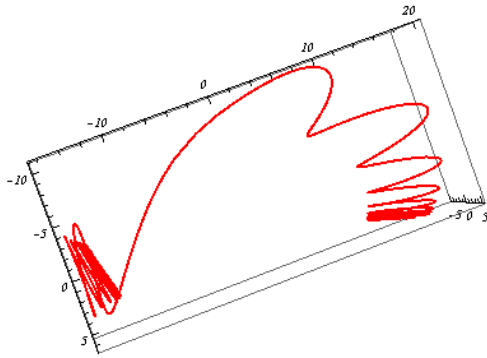


Рис. 84: Ветвь гиперболы на бутылке Клейна при $u \in [0, 2\pi]$.

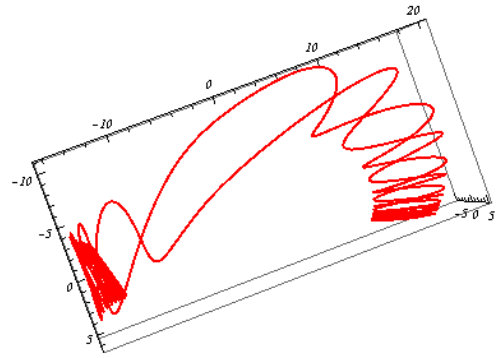


Рис. 85: Ветвь гиперболы на бутылке Клейна при $u \in [0, 4\pi]$.

Список литературы

- [1] Терстон У. *Трёхмерная геометрия и топология*. М, МЦНМО, 2001, 312 с.
- [2] Косневски Ч. *Начальный курс алгебраической топологии* М, 1983, 304 с.
- [3] Норден А.П. *Теория поверхностей*. ГИТТЛ 1956, 260 с.
- [4] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия 2*. Казанский Федеральный Университет, 2012, 118 стр.
- [5] Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны*. М.: Наука, 1982, 480 стр.
- [6] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. СПб, Лань, 2009, 512 с.
- [7] Фукс Д. *Лента Мебиуса. Вариации на старую тему*. "Квант" №1, 1979.
- [8] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии*. М.: Физматлит, 2004, 300 с.

- [9] Гудочкина М.В. *Аффинные структуры на двумерных многообразиях.*, 2013, 47 с.
- [10] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия. Часть 1. Аналитическая геометрия плоскости.* Казанский государственный университет, 2007, 108 с.
- [11] Furness P.M.D., Arrowsmith D.K. *Locally symmetric spaces.* J. London Math. Soc., Vol. 10, № 2, 1975, p. 487–499
- [12] Малюгина А.А, Шурыгин В.В. *Представление голономии одного класса многообразий над алгеброй дуальных чисел.* Изв. Пензинск. Гос. Пед. Ун-та, 2011, № 26, С. 128–136.
- [13] Vaisman I. *Lagrange geometry on tangent manifolds.* Int. J. of Math. and Math. Sci., 51, 2003, p. 3241–3266.
- [14] Vaisman I. *Geometry on big-tangent manifolds.* <http://arxiv.org/abs/1303.0658>, 2013, – 28 p.
- [15] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии. Том 1.* М, Наука, 1981, 344 с.
- [16] Фиников С.П. *Курс дифференциальной геометрии.* КомКнига, 2013, 344 с.
- [17] Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,* 2006, 1016 p.