

鲈鱼质量估计模型

王星晨 20152314026

摘要

本文对鲈鱼质量与身长，胸围的关系进行了建模，得到了两个个鲈鱼质量估计模型。模型一用椭圆柱面近似鲈鱼的形状，模型二用椭球体近似鲈鱼的形状。采用模型一对已给数据进行最小二乘拟合的到质量估计式为 $m = 0.8068lw$ ，拟合优度为 $R^2 = 0.4850$. 对于模型二进行最小二乘拟合得到的质量估计式为 $m = 0.03225lw^2$, 拟合优度 $R^2 = 1.0842$. 其中模型二对数据的拟合较好，可以作为鲈鱼质量估计公式。

一、 问题重述

一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生, 打算按放生的鱼的质量给予奖励, 俱乐部只准备了一把软尺用于测量。要求设计按照测量的长度估计鱼的质量的方法。假定鱼池中只有一种鲈鱼, 并且得到了 8 条鱼的数据如表 1.1(胸围指鱼身的最大周长)

表 1.1: 鲈鱼质量 - 身长 - 胸围数据

身长/cm	36.8	31.8	43.8	36.8	32.1	45.1	35.9	32.1
质量/g	765	482	1162	737	482	1389	652	454
胸围/cm	24.8	21.3	27.9	24.8	21.6	31.8	22.9	21.6

二、 模型假设

- (1) 假设鲈鱼的质量均匀分布
- (2) 忽略测量身长时鱼身的凸起造成的误差, 即认为测出的身长是鱼头到鱼尾的直线距离。
- (3) 鲈鱼形状可用椭圆柱面, 椭球体近似。

三、 符号说明

符号	说明
m	鲈鱼质量 (单位 g)
l	鲈鱼身长 (单位 cm)
w	鲈鱼胸围 (单位 cm)
V	鲈鱼体积 (单位 cm^3)
ρ	鲈鱼密度 (单位 g/cm^3)
$E(k)$	第二类完全椭圆积分
R^2	拟合优度

四、 问题分析

现已知鲈鱼质量 - 身长 - 胸围的 8 组数据, 需要建立鲈鱼质量 m 与鲈鱼身长 l 和胸围 w 的函数关系式

$$m = f(l, w) \quad (4.1)$$

而(4.1)式含有未知参数, 需要通过表 1.1所给的数据拟合来确定。

为了简化模型, 假设鲈鱼的质量是均匀分布的, 密度为 ρ , 体积为 V 。而 $m = \rho V$, 问题就转化为用鲈鱼身长 l , 胸围 w 表示体积 V 。鲈鱼的形状是不规则的, 需要对模型进一步简化。可以用规则的几何体来近似鲈鱼的形状。我们打算用椭圆柱体, 椭球体,

两个椭圆锥面拼接分别近似鲈鱼的形状。分别建立鲈鱼质量公式，通过最小二乘法利用数据表 1.1 拟合出各自的公式，并评价拟合的好坏。

五、 模型建立与求解

5.1 模型 1

5.1.1 模型建立

用椭圆柱体近似鲈鱼形状，设椭圆的长轴为 a ，短轴为 b ，椭圆柱面的高为 d ，如图 5.1 鲈鱼的体积为

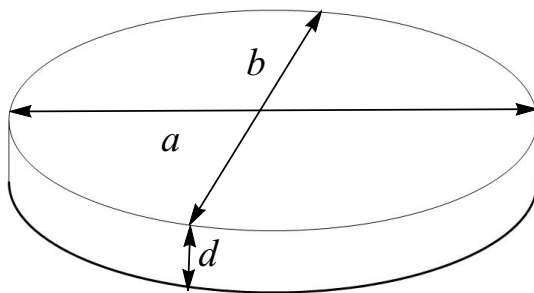


图 5.1: 椭圆柱体

$$V = \pi abd \quad (5.1)$$

鲈鱼的质量为

$$m = \rho V = \pi \rho abd \quad (5.2)$$

设所测出的胸围 w ，身长 l ，根据鲈鱼的实际形状，鲈鱼近似为扁的椭圆柱体，所以鲈鱼的胸围近似为 $w = 2d$ ，身长为 $l = a$ ，再根据式(5.2)，鲈鱼质量可以表示为

$$m = \frac{\pi l w d}{2} \quad (5.3)$$

为了得到式(4.1)，令 $k = \frac{\pi d}{2}$ ，式(5.3)可以写为

$$m = f_1(l, w) = k l w \quad (5.4)$$

通过最小二乘法拟合式(5.4)，即可得出参数 k 。设由表 1.1 给出鲈鱼质量，身长，胸围的 8 组数据为 $(m_i, l_i, w_i), i = 1, 2, \dots, 8$ ，构造函数

$$S_1(k) = \sum_{i=1}^8 (f_1(l_i, w_i) - m_i)^2 \quad (5.5)$$

使 $S_1(k)$ 取最小值的 k 即为所求参数。 k 可以通过解 $\frac{\partial S_1}{\partial k} = 0$ 得到。得到函数关系式(5.4)后，为了评价拟合的好坏，我们定义拟合优度 [3]

$$R^2 = \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}} \quad (5.6)$$

其中

$$SS_{\text{reg}} = \sum_i (f(l_i, w_i) - \bar{m})^2 \quad (5.7)$$

$$SS_{\text{tot}} = \sum_i (m_i - \bar{m})^2 \quad (5.8)$$

\bar{m} 所给鲈鱼质量数据的平均值。显然， R^2 越接近 1 说明拟合得越好。

5.1.2 模型求解

我们用 Mathematica 计算了使式取最小值时的 k , 结果为 $k = 0.8068$. 即根据模型 1 得到鲈鱼质量估计式为

$$m = 0.8068lw \quad (5.9)$$

根据式(5.6)算得拟合优度 $R^2 = 0.4850$ 拟合得到的方程的曲面与原始数据点见图 5.2

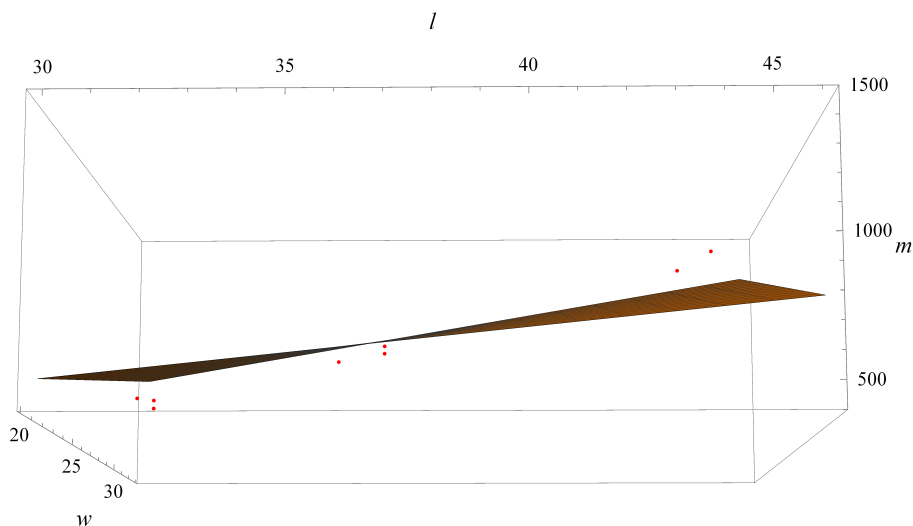


图 5.2: $m = f_1(l, w)$ 拟合结果

5.2 模型 2

5.2.1 模型建立

用椭球体近似鲈鱼的形状。设椭球的三轴长分别为 a, b, c 其中 $a > b > c$ 如图 5.3 鲈鱼质量可以表示为

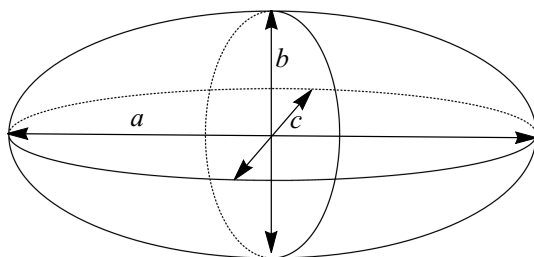


图 5.3: 椭球体

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho abc \quad (5.10)$$

而鲈鱼胸围是长轴为 b , 短轴为 c 的椭圆的周长。该椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} \sin \theta \\ y = \frac{c}{2} \cos \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5.11)$$

现计算鲈鱼的胸围

$$\begin{aligned}
 w &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{b}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{c}{2} \sin \theta\right)^2} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 2bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{c^2}(1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{b^2} \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 2bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \theta\right)} d\theta \\
 &= 2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 2bE\left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \tag{5.13}$$

称为第二类椭圆积分. 现令 $c = kb$, 则

$$w = 2bE(\sqrt{1 - k^2}) \tag{5.14}$$

由模型假设 (2) 认为鲈鱼的身长 $l = a$, 再由式(5.10),(5.14)鲈鱼质量可以表示为

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho l k b^2 = \frac{4}{3}\pi k \rho l \left(\frac{w}{2E(\sqrt{1 - k^2})}\right)^2 = \frac{k\pi\rho}{3E(\sqrt{1 - k^2})^2} l w^2 \tag{5.15}$$

令

$$A = \frac{k\pi\rho}{3E(\sqrt{1 - k^2})^2} \tag{5.16}$$

则

$$m = f_2(l, w) = Alw^2 \tag{5.17}$$

用最小二乘法拟合出参数 A 的值. 作函数

$$S_2(A) = \sum_{i=1}^8 (f_2(l_i, w_i) - m_i)^2 \tag{5.18}$$

参数 A 可以通过解关于 A 的一次方程 $\frac{\partial S_2}{\partial A} = 0$ 得到.

5.2.2 模型求解

用 Mathematica 求使式(5.18)取最小值时的 A , 求出 $A = 0.03225$. 即

$$m = 0.03225lw^2 \tag{5.19}$$

用式(5.6)计算出拟合优度 $R^2 = 1.0842$. R^2 与 1 很接近, 说明拟合得很好. 拟合曲面见图 5.4

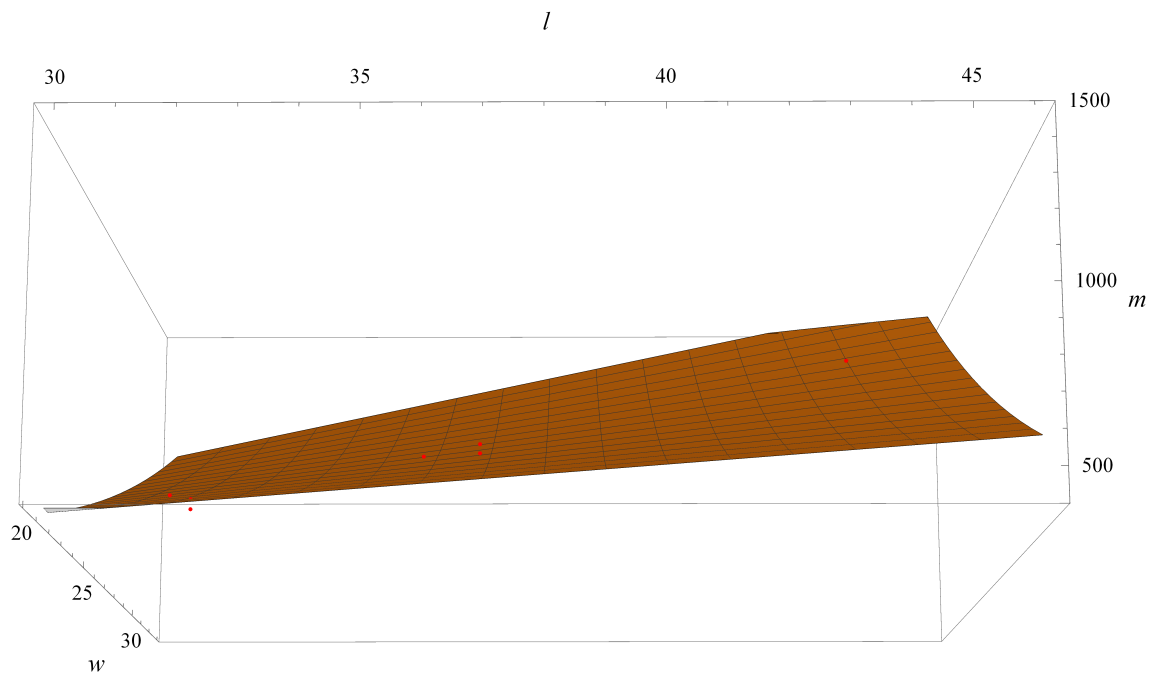


图 5.4: $m = f_2(l, w)$ 拟合结果

六、 检验与评价

由模型一得到的鲈鱼质量估计式(5.9)，其拟合优度 $R^2 = 0.4850$ ，该模型对所给数据拟合得并不是很理想。模型二得到的鲈鱼质量估计式(5.19)，其拟合优度 $R^2 = 1.0842$ ，拟合的较好。可以作为鲈鱼质量估计公式使用。

参考文献

- [1] 姜启源，谢金星.《数学模型》北京: 高等教育出版社，2011.1
- [2] 李汉龙，韩婷，缪淑贤等译.《Mathematica 基础及其在数学建模中的应用》北京: 国防工业出版社. 2013.03.01
- [3] Coefficient of determination, https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination

附录

Mathematica 代码

```
In[1]:= l={36.8,31.8,43.8,36.8,32.1,45.1,35.9,32.1};
m={765,482,1162,737,482,1389,652,454};
w={24.8,21.3,27.9,24.8,21.6,31.8,22.9,21.6};
data=Thread[List[l,w,m]];
In[5]:= f1[l_,w_]:=k l w;
k=k/.Minimize[Sum[(f1[data[[i,1]],data[[i,2]]]-data[[i,3]])
^2,{i,1,8}],k][[2]]
Out[6]= 0.8608
In[7]:= Rsquare[f_,y_]:=Total[(f-Mean[y])^2]/Total[(y-Mean[y])
^2]
```

```

In[8]:= Rsquare[f1@@#&/@data[[A11,1;;2]],data[[A11,3]]]
Out[8]= 0.484952
In[9]:= Clear[A]
In[10]:= f2[l_,w_]:=A l w^2;
In[11]:= A=A/.Minimize[Sum[(f2[data[[i,1]],data[[i,2]]]-data[[
  i,3]])^2,{i,1,8}],A][[2]]
Out[11]= 0.0322477
In[12]:= Rsquare[f2@@#&/@data[[A11,1;;2]],data[[A11,3]]]
Out[12]= 1.08423

```