鲈鱼质量估计模型

王星晨　20152314026
张宇　20152314038
赵倪飞　20152314039

摘要

本文对鲈鱼质量与身长，胸围的关系进行了建模，得到了两个个鲈鱼质量估计模型。模型一用椭圆柱面近似鲈鱼的形状，模型二用椭球体近似鲈鱼的形状。采用模型一对已给数据进行最小二乘拟合的到质量估计式为 $m = 0.8068lw$，拟合优度为 $R^2 = 0.4850$. 对于模型二进行最小二乘拟合得到的质量估计式为 $m = 0.03225lw^2$, 拟合优度 $R^2 = 1.0842$. 其中模型二对数据的拟合较好，可以作为鲈鱼质量估计公式。

一、 问题重述

一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生，打算按放生的鱼的质量给予奖励，俱乐部只准备了一把软尺用于测量。要求设计按照测量的长度估计鱼的质量的方法。假定鱼池中只有一种鲈鱼，并且得到了 8 条鱼的数据如表 1.1(胸围指鱼身的最大周长)

表 1.1: 鲈鱼质量 -身长 -胸围数据

身长/cm	36.8	31.8	43.8	36.8	32.1	45.1	35.9	32.1
质量/g	765	482	1162	737	482	1389	652	454
胸围/cm	24.8	21.3	27.9	24.8	21.6	31.8	22.9	21.6

二、 模型假设

(1) 假设鲈鱼的质量均匀分布

(2) 忽略测量身长时鱼身的凸起造成的误差，即认为测出的身长是鱼头到鱼尾的直线距离。

(3) 鲈鱼形状可用椭圆柱面, 椭球体近似。

三、 符号说明

符号	说明
m	鲈鱼质量 (单位 g)
l	鲈鱼身长 (单位 cm)
w	鲈鱼胸围 (单位 cm)
V	鲈鱼体积 (单位 cm^3)
ρ	鲈鱼密度 (单位 g/cm^3)
$E(k)$	第二类完全椭圆积分
R^2	拟合优度

四、 问题分析

现已知鲈鱼质量 -身长 -胸围的 8 组数据，需要建立鲈鱼质量 m 与鲈鱼身长 l 和胸围 w 的函数关系式

$$m = f(l, w) \tag{4.1}$$

而(4.1)式含有未知参数，需要通过表 1.1所给的数据拟合来确定。

为了简化模型，假设鲈鱼的质量是均匀分布的，密度为 ρ，体积为 V。而 $m = \rho V$，问题就转化为用鲈鱼身长 l，胸围 w 表示体积 V. 鲈鱼的形状是不规则的，需要对模型进一步简化。可以用规则的几何体来近似鲈鱼的形状。我们打算用椭圆柱体，椭球体，

两个椭圆锥面拼接分别近似鲈鱼的形状。分别建立鲈鱼质量公式，通过最小二乘法利用数据表 1.1拟合出各自的公式，并评价拟合的好坏。

五、 模型建立与求解

5.1 模型 1

5.1.1 模型建立

用椭圆柱体近似鲈鱼形状，设椭圆的长轴为 a, 短轴为 b, 椭圆柱面的高为 d, 如图 5.1 鲈鱼的体积为

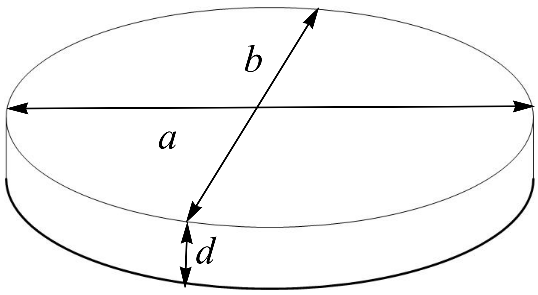

图 5.1: 椭圆柱体

$$V = \pi abd \tag{5.1}$$

鲈鱼的质量为

$$m = \rho V = \pi\rho abd \tag{5.2}$$

设所测出的胸围 w, 身长 l, 根据鲈鱼的实际形状，鲈鱼近似为扁的椭圆柱体，所以鲈鱼的胸围近似为 $w = 2d$, 身长为 $l = a$, 再根据式(5.2), 鲈鱼质量可以表示为

$$m = \frac{\pi lwd}{2} \tag{5.3}$$

为了得到式(4.1), 令 $k = \frac{\pi d}{2}$, 式(5.3)可以写为

$$m = f_1(l, w) = klw \tag{5.4}$$

通过最小二乘法拟合式(5.4), 即可得出参数 k. 设由表 1.1给出鲈鱼质量，身长，胸围的 8 组数据为 $(m_i, l_i, w_i), i = 1, 2 \cdots, 8$, 构造函数

$$S_1(k) = \sum_{i=1}^{8} (f_1(l_i, w_i) - m_i)^2 \tag{5.5}$$

使 $S_1(k)$ 取最小值的 k 即为所求参数。k 可以通过解 $\frac{\partial S_1}{\partial k} = 0$ 得到。得到函数关系式(5.4)后，为了评价拟合的好坏，我们定义拟合优度 [3]

$$R^2 = \frac{SS_{\text{reg}}}{SS_{\text{tot}}} \tag{5.6}$$

其中

$$SS_{\text{reg}} = \sum_i (f(l_i, w_i) - \overline{m})^2 \tag{5.7}$$

$$SS_{\text{tot}} = \sum_i (m_i - \overline{m})^2 \tag{5.8}$$

$\overline{m}$ 所给鲈鱼质量数据的平均值。显然，R^2 越接近 1 说明拟合得越好。

5.1.2 模型求解

我们用 Mathematica 计算了使式取最小值时的 k, 结果为 $k = 0.8068$. 即根据模型 1 得到鲈鱼质量估计式为

$$m = 0.8068lw \tag{5.9}$$

根据式(5.6)算得拟合优度 $R^2 = 0.4850$ 拟合得到的方程的曲面与原始数据点见图 5.2

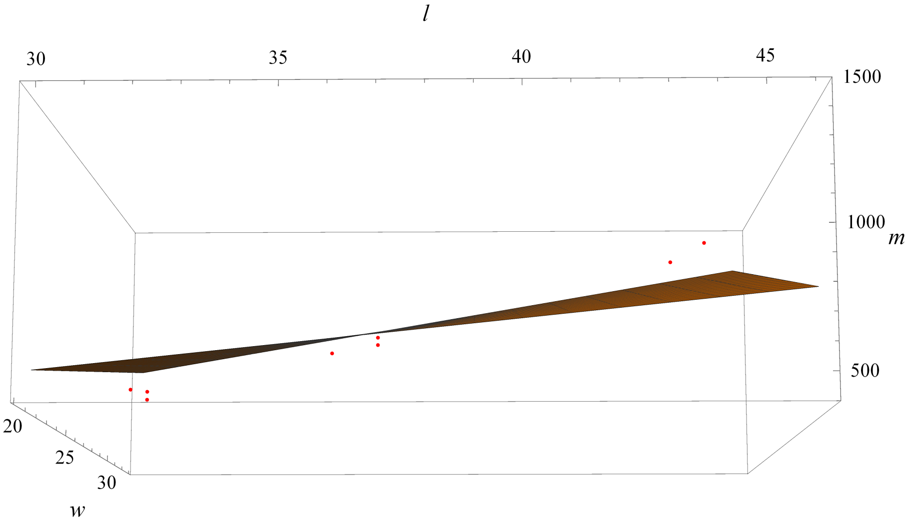

图 5.2: $m = f_1(l, w)$ 拟合结果

5.2 模型 2

5.2.1 模型建立

用椭球体近似鲈鱼的形状。设椭球的三轴长分别为 a, b, c 其中 $a > b > c$ 如图 5.3 鲈鱼质量可以表示为

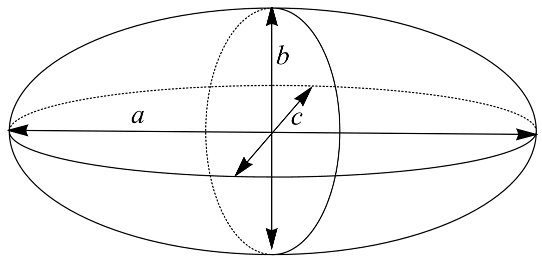

图 5.3: 椭球体

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho abc \tag{5.10}$$

而鲈鱼胸围是长轴为 b, 短轴为 c 的椭圆的周长。该椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2}\sin\theta \\ y = \frac{c}{2}\cos\theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{5.11}$$

现计算鲈鱼的胸围

$$\begin{aligned}
w &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{c}{2}\sin\theta\right)^2}\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta d\theta} \\
&= 2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{c^2}(1-\sin^2\theta)+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\,d\theta} \\
&= 2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(1-\sin^2\theta+\frac{c^2}{b^2}\sin^2\theta\right)d\theta} \\
&= 2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(1-\frac{c^2}{b^2})\sin^2\theta\,d\theta} \\
&= 2bE\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}\right)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{5.13}$$

称为第二类椭圆积分. 现令 $c=kb$, 则

$$w=2bE(\sqrt{1-k^2}) \tag{5.14}$$

由模型假设 (2) 认为鲈鱼的身长 $l=a$, 再由式(5.10),(5.14)鲈鱼质量可以表示为

$$m=\frac{4}{3}\pi\rho lkb^2=\frac{4}{3}\pi k\rho l\left(\frac{w}{2E(\sqrt{1-k^2})}\right)^2=\frac{k\pi\rho}{3E(\sqrt{1-k^2})^2}lw^2 \tag{5.15}$$

令

$$A=\frac{k\pi\rho}{3E(\sqrt{1-k^2})^2} \tag{5.16}$$

则

$$m=f_2(l,w)=Alw^2 \tag{5.17}$$

用最小二乘法拟合出参数 A 的值。作函数

$$S_2(A)=\sum_{i=1}^{8}(f_2(l_i,w_i)-m_i)^2 \tag{5.18}$$

参数 A 可以通过解关于 A 的一次方程 $\frac{\partial S_2}{\partial A}=0$ 得到.

5.2.2 模型求解

用 Mathematica 求使式(5.18)取最小值时的 A, 求出 $A=0.03225$。即

$$m=0.03225lw^2 \tag{5.19}$$

用式(5.6)计算出拟合优度 $R^2=1.0842.R^2$ 与 1 很接近，说明拟合得很好。拟合曲面见图 5.4

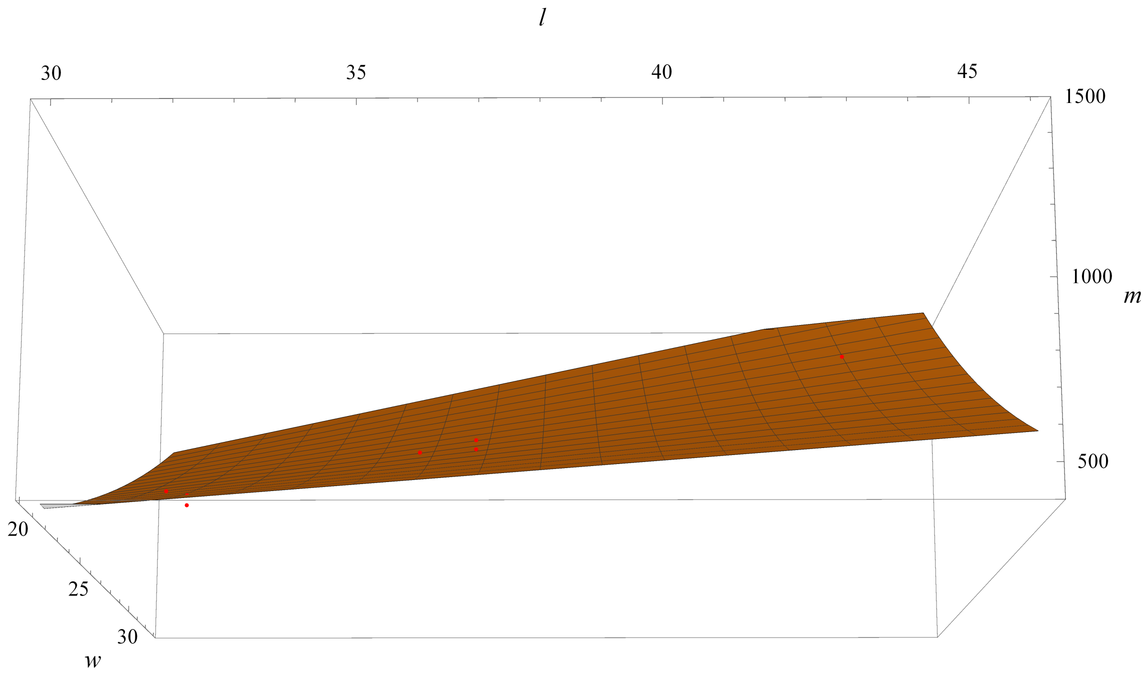

图 5.4: $m = f_2(l, w)$ 拟合结果

六、 检验与评价

由模型一得到的鲈鱼质量估计式(5.9)，其拟合优度 $R^2 = 0.4850$，该模型对所给数据拟合得并不是很理想。模型二得到的鲈鱼质量估计式(5.19)，其拟合优度 $R^2 = 1.0842$，拟合的较好。可以作为鲈鱼质量估计公式使用。

参考文献

[1] 姜启源，谢金星.《数学模型》北京: 高等教育出版社，2011.1

[2] 李汉龙，韩婷，缪淑贤等译. 《Mathematica 基础及其在数学建模中的应用》北京: 国防工业出版社. 2013.03.01

[3] Coefficient of determination,https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination

附录

Mathematica 代码

```
In[1]:= l={36.8,31.8,43.8,36.8,32.1,45.1,35.9,32.1};
m={765,482,1162,737,482,1389,652,454};
w={24.8,21.3,27.9,24.8,21.6,31.8,22.9,21.6};
data=Thread[List[l,w,m]];
In[5]:= f1[l_,w_]:=k l w;
k=k/.Minimize[Sum[(f1[data[[i,1]],data[[i,2]]]-data[[i,3]])
   ^2,{i,1,8}],k][[2]]
Out[6]= 0.8608
In[7]:= Rsquare[f_,y_]:=Total[(f-Mean[y])^2]/Total[(y-Mean[y])
   ^2]
```

```
In[8]:= Rsquare[f1@@#&/@data[[All,1;;2]],data[[All,3]]]
Out[8]= 0.484952
In[9]:= Clear[A]
In[10]:= f2[l_,w_]:=A l w^2;
In[11]:= A=A/.Minimize[Sum[(f2[data[[i,1]],data[[i,2]]]−data[[
   i,3]])^2,{i,1,8}],A][[2]]
Out[11]= 0.0322477
In[12]:= Rsquare[f2@@#&/@data[[All,1;;2]],data[[All,3]]]
Out[12]= 1.08423
```