DGF 简介 Singulet31258

Dirichlet Convolution,DC

$$h=f*g\iff h(n)=\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})$$

h 是 f,g 的狄利克雷卷积 DC 。

$$f*g=g*f$$
$$(f*g)*h=f*(g*h)$$
$$(f+g)*h=f*h+g*h$$
$$f*g\iff f*h=g*h,h(1)\neq 0$$

$MF=\text{Multiplicative Function}$ ，积性函数。

$$f^{a+b}=f^a*f^b,f^0=\varepsilon$$
$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1,n=1\\0,n\neq 1\end{cases}$$
$$f=MF,g=MF\Rightarrow f*g=MF$$
$$f=MF\iff f^{-1}=MF$$

记 $DGF(f)$ 表示数论函数 f 的 DGF ，默认以 x 为自变量，$\mathbb{P}$ 表示全体质数的集合。

$$DGF(f)DGF(g)=DGF(f*g)$$
$$DGF(f)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f(i)}{i^x}$$
$$f=MF\iff DGF(f)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f(p^i)}{p^{ix}}$$

记 φ 表示欧拉函数，ζ 表示黎曼函数，μ 表示莫比乌斯函数。

$$I_k(n)=n^k,\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k=(I_k*1)(n)$$
$$DGF(I_k)=\zeta(x-k)$$
$$DGF(\varphi)=\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

$$DGF(\mu) = \frac{1}{\zeta(x)}$$
$$DGF(\sigma_k) = \zeta(x-k)\zeta(x)$$
$$\varphi(n) = (I_1 * \mu)(n) = \sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d})$$

DC 的应用

Mobius Inversion,MI

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(\frac{n}{d})$$

其中 f, g 为数论函数。 f 是 g 的莫比乌斯变换 MT ， g 是 f 的莫比乌斯反演 MI 。显然， $f = g * 1$ ， $g = f * \mu$ 。

MI 的其他形式（设 t 是一个完全积性函数且 $t(1) = 1$ ）：

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d) \iff g(n) = \sum_{n|d} f(d)\mu(\frac{d}{n})$$
$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} t(i)g(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor) \iff g(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)t(i)f(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$$

杜教筛

给定数论函数 f ，求 $s(f,n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$ 。

$$s(f*g,n) = \sum_{i=1}^{n} g(i)s(f,\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$$
$$g(1)s(f,n) = s(f*g,n) - \sum_{i=2}^{n} g(i)s(f,\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)$$

其中 g 是数论函数。设 $T(f,n)$ 表示计算 $s(f,n)$ 所需时间，设集合 $\mathbb{A}(n) = \{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor \mid 2 \le k \le n, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

$$T(f,n) = T(f*g,n) + O(\sqrt{n})T(g,n) + \sum_{i\in\mathbb{A}(n)} T(f,i)$$

显然，若 $T(f*g,n),T(g,n)$ 很小（一般为 $O(1)$ ），那么 $T(f,n)$ 也会比较小（一般为 $o(n)$ ，即小于 $\Theta(n)$ ）。当 $T(f*g,n)=T(g,n)=O(1)$ 时，有:

$$T(f,n)=O(\sqrt{n})+\sum_{i\in\mathbb{A}(n)}T(f,i)$$

注意到 $\forall k\in\mathbb{A}(n),\mathbb{A}(k)\subset\mathbb{A}(n)$ ，因此我们可以按 i 从小到大的顺序依次计算出所有的 $s(f,i),i\in\mathbb{A}(n)$ ，这样，我们就有:

$$T(n)=O(\sqrt{n}+\mid\mathbb{A}(n)\mid)=O(\sqrt{n})$$

显然， $\mid\mathbb{A}(n)\mid<2\sqrt{n}$ 。那么总时间复杂度就是:

$$\begin{aligned}O(\sqrt{n}+\sum_{i\in\mathbb{A}(n)}\sqrt{i})&=O(\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{i}})\\&=O(\int_0^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{x}}\mathrm{d}x)\\&=O(\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x)\\&=O(n^{\frac{3}{4}})\end{aligned}$$

第一个等号是将 $\mathbb{A}(n)$ 中最大的 $\sqrt{n}$ 个元素提取出来求和，由于 $\mathbb{A}(n)$ 总共只有不超过 $2\sqrt{n}$ 个元素，因此 $\sum_{i\in\mathbb{A}(n)}\sqrt{i}<2\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{i}}$ （即把剩下的不超过 $\sqrt{n}$ 个元素放缩成最大的 $\sqrt{n}$ 个元素）。第二个等号则是把求和式转化成 $\sqrt{n}$ 个宽度为 1 的矩形的面积和，然后放缩成积分形式，这个积分的值实际上比求和式的值要大，具体原因可以通过画图像来感知。最后求出这个积分的值为 $O(n^{\frac{3}{4}})$ ，故得出结论：当 $f*g,g$ 的前缀和都能 $O(1)$ 求时，用杜教筛求 f 的前缀和的总时间复杂度也为 $O(n^{\frac{3}{4}})$ ，这比至少 $O(n)$ 的常规暴力算法要优许多。

当然，杜教筛还可以进一步优化。若用线性筛预处理前 m 项，那么我们将只需求解 $\mathbb{A}(n)$ 中大于 m 的那些项。即 $2\leq k<\lfloor\frac{n}{m}\rfloor$ 的部分。此时的总时间复杂度为:

$$\begin{aligned}O(m+\sum_{i=1}^{\frac{n}{m}}\sqrt{\frac{n}{i}})&=O(m+\int_0^{\frac{n}{m}}\sqrt{\frac{n}{x}}\mathrm{d}x)\\&=O(m+\frac{n}{\sqrt{m}})\end{aligned}$$

当 $m=O(n^{\frac{2}{3}})$ 时，总时间复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 。

那么如何找到一个合适的 g ，使得 $f*g,g$ 的前缀和均能快速求解呢？这个时候，你就可以考虑使用 DGF 或者 MI 进行变换。比如：

> $\alpha.$ 求 $s(\mu,n)$ 的值， $n<2^{31}$

解：由于 $DGF(\mu)=\frac{1}{\zeta(x)},DGF(1)=\zeta(x),DGF(\varepsilon)=1$ ，故构造 $g=1$ 可得 $f*g=\varepsilon$ ，这 2 个函数的前缀和都可以 $O(1)$ 求出。于是我们可以用杜教筛在 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 的时间内解决本题。

> $\beta.$ 设数论函数 $f(n)=n^2\varphi(n)$ ，求 $s(f,n)$ 的值， $n\le 10^{10}$

解：显然， $f(n)$ 是一个积性函数，那么有：

$$
\begin{aligned}
DGF(f)&=\prod_{p\in\mathbb{P}}(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p^{3i}-p^{3i-1}}{p^{ix}})\\
&=\prod_{p\in\mathbb{P}}(p^{-1}+(1-p^{-1})\sum_{i=0}^{\infty}p^{(3-x)i})\\
&=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1-p^{2-x}}{1-p^{3-x}}=\frac{\zeta(x-3)}{\zeta(x-2)}
\end{aligned}
$$

于是构造 $g=I_2$ ，那么 $DGF(g)=\zeta(x-2),DGF(f*g)=\zeta(x-3)=DGF(I_3)$ ，可得 $f*g=I_3$ 。而 $I_2(n)=n^2,I_3(n)=n^3$ ，这 2 个函数的前缀和都可以 $O(1)$ 求出。于是我们可以用杜教筛在 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 的时间内解决本题。

实际上， $DGF(n^k\varphi(n))=\frac{\zeta(x-k-1)}{\zeta(x-k)}$ ，这里取 $k=2$ 。

实战演练

> $\gamma.$ 给定 $n,m,k;1\le n,m\le 10^9;2\le k\le 2000;n,m,k\in\mathbb{Z}$ ，求有多少对 (x,y) ，满足 $x\perp y;y\perp k;1\le x\le n;1\le y\le m;x,y\in\mathbb{Z}$ 。我们把满足这些条件的有序数对 (x,y) 称为“美的数对”。
> 例如，当 $n=2,m=6,k=10$ 时，有 4 对“美的数对”： $(1,1);(1,3);(2,1);(2,3)$ 。
> 传送门

解：本题的答案为 $f(n,m,k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon(\gcd(i,j))\varepsilon(\gcd(j,k))$ ，接下来给它做一些变换：

$$
\begin{aligned}
f(n,m,k) &= \sum_{j=1}^{m}\varepsilon(\gcd(j,k))\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,j)) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\varepsilon(\gcd(j,k))\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i,d|j}\mu(d) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\varepsilon(\gcd(j,k))\sum_{d|j}^{n}\mu(d)\frac{n}{d} \\
&= \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\frac{n}{d}\varepsilon(\gcd(d,k))\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\varepsilon(\gcd(j,k)) \\
&= \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\frac{n}{d}\varepsilon(\gcd(d,k))g(\lfloor\frac{m}{d}\rfloor,k)
\end{aligned}
$$

$$
g(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k)) = \lfloor\frac{n}{k}\rfloor\varphi(k) + g(n \bmod k, k)
$$

$$
\begin{aligned}
h(n,k) &= \sum_{i=1}^{n}\mu(i)\varepsilon(\gcd(i,k)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k) - \sum_{i=2}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)\varepsilon(\gcd(j,k)) - \sum_{i=2}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\mu(j)\varepsilon(\gcd(ij,k)) - \sum_{i=2}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))\varepsilon(i) - \sum_{i=2}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k) \\
&= 1 - \sum_{i=2}^{n}\varepsilon(\gcd(i,k))h(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor,k)
\end{aligned}
$$

然后我们用 $\frac{n}{d},\frac{m}{d}$ 进行 2 维数论分块，对于每一个块（假定块的左右边界分别为 l,r ），求出 $h(r,k)-h(l-1,k)$ 即可。对于 $h(n,k)$ ，用杜教筛求即可。注意到 $l-1,r$ 要么属于 $\mathbb{A}(n)$ ，要么属于 $\mathbb{A}(m)$ ，因此只需杜教筛求 $h(n,k),h(m,k)$ 即可。时间复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+k\log k)$（预处理 $g(n,k),0\le n<k$ 以及 $\varphi(k)$ 需要 $O(k\log k)$ 的时间）。

> δ. 给定 $n,p;n\le 10^{10};5\times 10^{8}<p<1.1\times 10^{9};p\in\mathbb{P};n\in\mathbb{Z}$ ，设数论函数 f 满足:

> $$f(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\gcd(i,j)$$
>
> 求 $f(n) \bmod p$ 的值。
> 传送门

解：枚举 $d = \gcd(i,j)$ ，显然， $1 \le d \le n$ ，于是有：

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} ijd^3[i \perp j] \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^3 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} i \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} j[i \perp j] \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^3 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} i \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} j \sum_{k|i,k|j} \mu(k) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^3 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} i \sum_{j|i} j\mu(j) A_1(\lfloor \frac{n}{dj} \rfloor) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^3 B(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)
\end{aligned}$$

$$A_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i) i^2 A_3(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

$$A_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 B(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

$$B(n) = A_3(n) - \sum_{i=2}^{n} i^2 B(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

容易发现，上述式子中的最后一个等式与杜教筛的标准形式非常相似。实际上， A_k 就是 I_k 的前缀和，因此若把该式看作杜教筛的标准形式，那么这里的 $f * g = I_3, g = I_2$。那么 f 是什么呢？如果你有仔细阅读本篇 PDF 的话，你会发现，这里的 f 其实就是 β. 所提到的那个数论函数 f ！因此， $B(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2\varphi(i)$ ，可以用杜教筛在 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 的时间内求出。

A_3 关于 B 的表达式是通过 MI 得到的，这里完美体现了 MI 的强大之处。

对于 $f(n)$ ，我们用 $\frac{n}{d}$ 进行 1 维数论分块，对于每个块，都要计算一次 $A_3(r) - A_3(l-1)$ 与 $B(k)$ ，其中 $k \in \mathbb{A}(n)$ 。由于我们在杜教筛计算 $B(n)$ 的同时已经计算出了所有的 $B(k), k \in \mathbb{A}(n)$ ，故我们可以在 $O(\sqrt{n})$ 的时间内求出 $f(n)$ 的值。

总时间复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$ ，注意到本题的模数 p 在输入以后就不会再变了，故我们可以模仿编译器用 BR 等技术优化取模操作，可显著降低本题常数。

习题

动态几何问题

Misaka Network 与求和

幽灵乐团

简单的最大公约数

Stupid GCD

Stupid Product

性能优化 I