[POJ2409]Let it Bead

Tag: Burnside Lemma, Polya Theorem

首先，我们约定：
X：没有任何限制的选择方案集合
G：由旋转置换与翻转置换共同组成的群
接下来我们分别考虑旋转置换与翻转置换。
旋转置换：
显然一共有s个置换，分别记作$A_0, A_1, ..., A_{s-1}$。其中A_i表示每个珠子都向逆时针方向移动i格的置换。
考虑这些置换的稳定点。显然，对于A_i的稳定点，有$col_j = col_{j+i} = col_{j+2i} = ... = col_{j-i}$。于是有：

$$col_k = col_j \Leftrightarrow k = il + j (l \in \mathbb{Z})$$

而il在模s意义下显然有$\frac{s}{\gcd(s,i)}$个不同取值。
因此A_i的稳定点数量显然就是$c^{\gcd(s,i)}$。
翻转置换：
当s为奇数时，翻转轴必定恰好过一个点。于是以这s个点分别为翻转轴所过的点，就能产生s个置换。对于这一类的置换，稳定点满足除翻转轴所过的点以外每两个点的颜色均相同，那么数量就是$c^{\frac{s+1}{2}}$，总数就再乘上s即可。
当s为偶数时，翻转轴可能不过点也可能过两个点。不过点时稳定点总数为$\frac{sc^{\frac{s}{2}}}{2}$，过两个点时稳定点总数为$\frac{sc^{\frac{s}{2}+1}}{2}$。
故旋转置换和翻转置换的稳定点总数为：

$$\sum_{i=0}^{s-1} c^{\gcd(s,i)} + \begin{cases} sc^{\frac{s+1}{2}} & s \bmod 2 = 1 \\ \frac{sc^{\frac{s}{2}}(c+1)}{2} & s \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

其中求和式可进一步化简为：

$$\sum_{d|s} c^d \varphi(\frac{s}{d})$$

显然，$|G| = 2s$，因为旋转置换有s个，翻转置换在s为奇数时有s个，在s为偶数时不过点与过两点置换各有$\frac{s}{2}$个，总共仍然是s个。
故本题的答案为：

$$|X/G| = \frac{\sum_{d|s} c^d \varphi(\frac{s}{d}) + \begin{cases} sc^{\frac{s+1}{2}} & s \bmod 2 = 1 \\ \frac{sc^{\frac{s}{2}}(c+1)}{2} & s \bmod 2 = 0 \end{cases}}{2s}$$

时间复杂度$O(\sqrt{s})$