FFT与NTT的原理简要解释（by Singulet31258）

给定两个多项式 $F(x), G(x)$，求 $F(x)G(x)$。
假定 $F(x), G(x)$ 均为 $n-1$ 次多项式（n 是 2 的幂），它们的系数分别为 $\{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}, \{b_0, b_1, ..., b_{n-1}\}$。
现在，我们需要将 $F(x)$ 用 n 个点表示出来（因为 n 个点可以唯一确定一个 $n-1$ 次多项式）。
设 $\omega_n = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$，然后，将 $F(x)$ 的系数进行分组：

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}x^{2i} + x\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}x^{2i}$$

可以讲它改写成：

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}x^{i}$$
$$Q(x) = x\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}x^{i}$$
$$F(x) = P(x^2) + xQ(x^2)$$

设 $0 \le k < \frac{n}{2}$，将 ω_n^k 与 $\omega_n^{k+\frac{n}{2}}$ 分别代入上式，可得：

$$F(\omega_n^k) = P(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k Q(\omega_{\frac{n}{2}}^k)$$
$$F(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) = P(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k Q(\omega_{\frac{n}{2}}^k)$$

因此，我们只要知道了 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的点值表示，就能知道 $F(x)$ 的点值表示。于是分治求解 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 即可。
时间复杂度分析：设 $T(n)$ 表示处理 $n-1$ 次多项式所需时间。
$P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为 $\frac{n}{2}-1$ 次多项式，因此分治求解的时间为 $2T(\frac{n}{2})$，最后 $O(n)$ 枚举 k，得到 $F(x)$。故 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$，由主定理可知，$T(n) = O(n\log n)$
这就是著名的“快速傅里叶变换（FFT）”算法！
在用 FFT 求出 $F(x), G(x)$ 的点值表示后，将它们的点值直接乘起来即可，最后再还原成系数表示。
点值还原成系数同样可以用 FFT 完成，只需要在上述算法流程结束以后，把每个系数都除以 n，最后

再把后 $n-1$ 个系数 reverse 一遍即可。其正确性可用线性代数的矩阵知识证明，详见快速傅里叶变换 - OI Wiki

至此，我们成功在 $O(n \log n)$ 的时间内求出了 $F(x)G(x)$。

参考代码见 GitHub 的 Luogu/P3803.cpp

注：上述流程会进行 3 次 FFT，实际上我们只需要 2 次 FFT 即可完成任务。

令多项式 $H(x)=F(x)+G(x)i$，对它做一次 FFT。我们发现，$H^2(x)=F^2(x)-G^2(x)+2F(x)G(x)i$，因此可以直接把点值表示的 $H(x)$ 平方之后再 FFT 得到系数表示，此时 $F(x)G(x)$ 就是 $H^2(x)$ 的虚部的 $\frac{1}{2}$。这样做可以使常数缩小 30%！

NTT 就是把 FFT 中的 ω_n 换成了 $g^{\frac{2^m q}{n}}$。在模 p 意义下，有 $g^{2^m q} \equiv 1$，其中 g 是模 p 意义下的原根（这意味着 p 必须是质数），$2^m q = p-1$，且 q 为奇数。m 必须保证一定比 $\log_2 n$ 大，该算法的正确性才会有保证。

以下为 NTT 的一些可用的模数：

$p = 1004535809 = 479 \times 2^{21}+1, q = 479, m = 21, g = 3$

$p = 998244353 = 119 \times 2^{23}+1, q = 119, m = 23, g = 3$

注：$10^9+7, 10^9+9$ 等数虽然是质数，但 m 太小，因此不能用作 NTT 的模数！

附赠一些趣味知识：早期 998244353 这个模数基本只会出现在 NTT 的题目当中，而常规的题目基本都用 10^9+7 这种数当模数，这导致 998244353 当时能给很多高水平选手一个提示：“这道题的正解很可能是 NTT！”后来为了消除 998244353 这个数的提示性，一些常规题目也开始用这个数当模数，如今 998244353 已经变得与 10^9+7 等模数一样常见。