拉格朗日插值简要介绍 by Singulet

拉格朗日插值 Lagrange Interpolation，简称 LI 。
已知 n 次多项式 A 的 $n+1$ 个点的取值 $(x_i,y_i)(0\le i\le n)$ ，求 A 的表达式。
解：设函数 $f(x,y)$ 满足：

$$f(x,y)=\begin{cases}1,x=y\\0,x\ne y\end{cases}(x,y\in D)$$

其中 $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ 。那么有：

$$A(x_k)=\sum_{i=0}^{n}y_if(x_k,x_i)=y_k(0\le k\le n)$$

显然，函数 $f(x,y)$ 在这里起到筛选点值的作用，现在我们尝试把 $f(x,y)$ 写成关于 x 的多项式，并取消 x,y 的取值范围限制。
注意到 $x-y$ 与 $f(x,y)$ 有一些相似之处，只是 $x-y$ 仅在两者相等时取 0 ，与 $f(x,y)$ 刚好相反，如果我们把 D 中除 y 以外的所有值 x_i 都枚举一遍，那么 $x-x_i$ 仅在 $x=y$ 时不存在 0 值，把这些值乘起来，得到的值仅在 $x=y$ 时不取 0 值，这样就能和 $f(x,y)$ 对应起来了。
于是，我们考虑 $g(x,x_k)=\prod\limits_{i\ne k}(x-x_i)$ ，显然，当 $x\ne x_k$ 且 $x\in D$ 时有 $g(x,x_k)=0$ ，当 $x=x_k$ 时有 $g(x,x_k)\ne 0$ ，这恰好对应了 $f(x,x_k)$ 仅在 $x=x_k$ 时不为 0 。但是， $f(x,x)=1$ ，而 $g(x,x)$ 不一定为 1 。因此，我们还要想办法保证 $g(x,x)=1$ 。
注意到此时的 $g(x_k,x_k)=\prod\limits_{i\ne k}(x_k-x_i)$ ，我们设 $B(k)=g(x_k,x_k)$ ，再令 $h(x,x_k)=\frac{g(x,x_k)}{B(k)}$ ，此时 $h(x_k,x_k)$ 就必定取 1 ， $h(x_i,x_j)(i\ne j)$ 就必定取 0 ，这样就能和 $f(x,y)$ 完全对应了。
于是有：

$$A(x_k)=\sum_{i=0}^{n}y_ih(x_k,x_i)=y_k(0\le k\le n)$$

$$A(x)=\sum_{i=0}^{n}y_ih(x,x_i)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{\prod\limits_{j\ne i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\ne i}(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{j\ne i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

即

$$A(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{j\ne i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

在连乘式中， $0 \sim n$ 除去 i 后共有 n 个数，故一共会乘 n 次，每次都会乘上一个关于 x 的一次多项式，故最终结果为 n 次多项式，求和式则是 $n+1$ 个 n 次多项式相加，结果仍是 n 次多项式。
这样，我们就能在 $O(n^2)$ 的时间内计算出 $A(x)$ 的各项系数，从而得到它的表达式。
如果题目只要求 $A(k)$ 的值，其中 k 是一个常数，那么我们只需要把上述公式中的 x 替换成 k 即可。
注意： $x_i, y_i (0 \le i \le n)$ 都是常数，是已知量。
如果 $x_i = ai + b$ ，其中 a, b 是一个常数，那么我们可以在 $O(n)$ 的时间内求出 $A(k)$ 的值。考虑多项式 $B(x) = A(ax+b)$ ，那么 $A(x_i) = B(i)$ ，即我们已知 $B(0), B(1), ..., B(n)$ 的值，接下来要求 $B(m)$ ，其中 $k = am + b$ 。
我们从式子入手，做一些转化：

$$B(m) = \sum_{i=0}^{n} B(i) \prod_{j \neq i} \frac{m-j}{i-j}$$

$$C_k = \prod_{i=0}^{k} (m-i), D_k = \prod_{i=k}^{n} (m-i)$$

$$B(m) = \sum_{i=0}^{n} B(i) \frac{C_{i-1} D_{i+1}}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!}$$

$O(n)$ 预处理 C, D 以及阶乘，然后我们就可以 $O(1)$ 计算求和式的每一项，从而做到 $O(n)$ 求 $B(m)$ 的值。

习题：
【模板】拉格朗日插值
The Sum of the k-th Powers
涂色（T2，题目见下发的包）