

Теория Вероятностей и Математическая
Статистика
Домашняя работа №1

Куприянов Кирилл
Вариант 13

1 Задача

Условие: В урне один белый и пять черных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар и возвращают его обратно, после чего шары в урне перемешиваются. Выигрывает тот, кто первый извлекает белый шар. Какова вероятность того, что выиграет игрок, начинающий игру?

Решение: $A = \{\text{Выиграл первый игрок}\}$

Исходы, при которых первый игрок выигрывает это:

(Первый игрок вытащил белый шар) ИЛИ (первый игрок вытащил черный шар И потом второй игрок вытащил черный шар И потом первый игрок вытащил белый шар) ИЛИ (и т. д.)

События эти несовместны, поэтому имеет место быть объединение (сумма) событий. Внутри скобок события независимы, поэтому вероятность произведения равна произведению вероятностей.

Пусть [Белый - Б, Черный - Ч]

Тогда наглядно выглядеть это будет так:

$$B \cup ЧЧБ \cup ЧЧЧЧБ \cup \dots \cup \underbrace{Ч \dots Ч}_{2n} Б$$

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \times \frac{1}{6}$$

Вынесем $\frac{1}{6}$ за скобку.

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \right]$$

В квадратных скобках (не считая 1) получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, где

$$b_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^2, \text{ а } q = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Поскольку $|q| \leq 1$ и $n \rightarrow \infty$, запишем сумму S_n прогрессии как

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{(5/6)^2}{1 - (5/6)^2} = \frac{25}{11}$$

Получаем $P(A) = 1/6 \times (1 + 25/11) = 6/11 \approx 0.54$

Ответ: 0.54.

2 Задача

Условие: По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,8 и 0,2. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) равна 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Спрашивается, какая команда была передана?

Решение: Событие, которое мы рассматриваем - это A .

$$A = \{\text{Принято } 10110\}$$

Могла быть передана одна из двух комбинаций: 00000 или 11111. Поскольку других не дано и сумма их вероятностей (следует из условия) равна $0,2 + 0,8 = 1 \Rightarrow$ они образуют полную группу, а значит, могут быть рассмотрены в качестве гипотез.

Гипотезы:

$$H_1 = \{\text{Была передана последовательность } 00000\}. P(H_1) \stackrel{\text{априор.}}{=} 0,2$$

$$H_2 = \{\text{Была передана последовательность } 11111\}. P(H_2) \stackrel{\text{априор.}}{=} 0,8$$

Условная вероятность приема 10110 вместо 00000 равна

$$P(A/H_1) = 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = \frac{4^3 \times 6^2}{100000} = 0,02304$$

Условная вероятность приема 10110 вместо 11111 равна

$$P(A/H_2) = 0,6 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,4 = \frac{4^2 \times 6^3}{100000} = 0,03456$$

По формуле Байеса, найдем апостериорные вероятности:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \times P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \times 0,02304}{P(A)} = \frac{0,004608}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \times P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,8 \times 0,03456}{P(A)} = \frac{0,027648}{P(A)}$$

Теперь нам надо сравнить $P(H_1/A)$ с $P(H_2/A)$. Поскольку знаменатели одинаковы, можем сравнить только числители. $0,027648 > 0,004608 \Rightarrow P(H_2/A)$ наиболее вероятно, чем $P(H_1/A)$. Следовательно, было передано сообщение «11111».

Ответ: 11111.

3 Задача

Условие: На окружность радиуса R брошено две точки. Считая, что длина хорды – случайная величина с равномерным распределением, найти плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.

Решение: Длина хорды H имеет равномерное распределение от 0 до $2R$. Плотность распределения случайной величины H :

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2R}, & x \in [0, 2R] \\ 0, & x \notin [0, 2R] \end{cases}$$

Найдём уравнение связи между длиной дуги L и длиной хорды H :

$$\begin{aligned} L = \alpha R &\Rightarrow \alpha = \frac{L}{R} \\ H = 2R \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ H = 2R \times \sin\left(\frac{L}{2R}\right) \end{aligned}$$

Плотность её распределения определяется по формуле:

$$f_L(y) = f_H(g^{-1}(y)) \cdot |[g^{-1}(y)]'|$$

Где $g^{-1}(y)$ – функция обратная функции, связывающей L и H .

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) &= 2R \times \sin\left(\frac{y}{2R}\right) \\ |[g^{-1}(y)]'| &= \cos\left(\frac{y}{2R}\right) \end{aligned}$$

Длина дуги кривой может варьироваться от 0 до πR . В данном диапазоне y значение $\cos\left(\frac{y}{2R}\right)$ будет всегда положительным.

$$f_L(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, \pi R] \\ \frac{1}{2R} \cos\left(\frac{y}{2R}\right), & y \in [0, \pi R] \end{cases}$$

4 Задача

Условие: Каждая повторная передача сигнала по каналу связи увеличивает вероятность искажения сигнала на 0,1%. При передаче первого сигнала эта вероятность равна 0,05. Передано 100 сигналов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов.

Решение: Пусть случайная величина X - число переданных без искажения сигналов. Вероятность того, что искажён i -ый сигнал:

$$p(A_i) = 0.05 \times 1.001^{i-1}$$

Вероятность искажения последнего сигнала:

$$p(A_{100}) = 0.05 \times 1.001^{99} \approx 0.0552$$

Поскольку вероятности отличаются незначительно, будем приближенно считать случайную величину X - количество исказившихся сигналов - распределенной по биномиальному закону. Поскольку число испытаний велико, то можно воспользоваться интегральной теоремой Лапласа, т.е. считать случайную величину распределенной нормально с математическим ожиданием $np = 5$ и средним квадратическим отклонением $\sqrt{npq} = \sqrt{4.75}$

Границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов:

$$P(|X - \alpha| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{4.75}}\right) = 0.45$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4.75}} = 1.645 \Rightarrow \varepsilon = 1.645 \times \sqrt{4.75} = 3.585$$

Таким образом, количество искаженных сигналов из числа всех переданных с доверительной вероятностью 0.9 лежит в интервале

$$\begin{aligned} np - 3.585 < X < np + 3.585 \\ 1.415 < X < 8.585 \end{aligned}$$

Поскольку число передаваемых сигналов может быть только целым числом, то окончательно получаем доверительный интервал для числа сигналов $Y = 100 - X$, переданных без искажения:

$$92 \leq Y \leq 98$$