

Разработка и исследование ресурсно-эффективных алгоритмов для метрической задачи коммивояжера.

Resource-Efficient Algorithms for Metric TSP: Research and Development

Береснева Екатерина Николаевна
4 курс, НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
профессор ПИ ФКН, к.т.н.
Авдошин Сергей Михайлович



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



Содержание

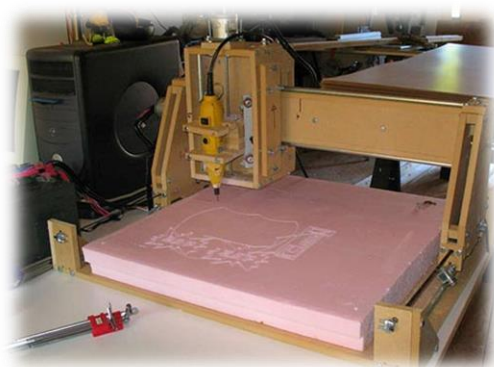
- Введение
- Математическая постановка задачи коммивояжёра
- Цель и задачи работы
- Описание алгоритмов
- Тестовые данные
- Результаты

Задача коммивояжера (ЗК)

Найти гамильтонов цикл
минимальной длины.



i-programmer.info



cxem.net



rostov-logist.ru



semiwiki.com

Математическая постановка евклидовой 3К

Дан полный взвешенный неориентированный граф $G = (V, V^2)$, содержащий $N = |V|$ вершин. Пусть $I = \{1, 2, \dots, N\}$. На множестве вершин графа зададим индексацию $\text{index} = V \rightarrow I, (\forall v_i \in V)(\forall v_j \in V) v_i \neq v_j \Rightarrow i \neq j$. Здесь $i = \text{index}(v_i)$.

Расстояние между двумя вершинами v_i и v_j рассчитывается с помощью функции $d(v_i, v_j)$. Данная функция возвращает вещественное значение и удовлетворяет следующим свойствам:

- $d(v_i, v_j) \geq 0$ (аксиома неотрицательности).
- $d(v_i, v_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_i = v_j$ (аксиома тождества).
- $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ (аксиома симметрии).
- $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)$ (аксиома неравенства треугольника).

Обозначим через $S = \{ p: V \rightarrow V \mid (p(1) = 1 \ \& \ (\forall i \in V)(\forall j \in V)(p(i) = p(j) \Rightarrow i = j)) \}$ — множество кодов всех гамильтоновых циклов $v = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ графа G .

Математическая постановка евклидовой 3К

Вес гамильтонова цикла $s \in S$ по формуле $f(s) = d(p_1, p_N) + \sum_{i=1}^{N-1} d(p_i, p_{i+1})$

Пусть множество точек V задано своими целочисленными координатами в евклидовой плоскости R^2 . Тогда расстояние определяется по формуле:

$$d(v, w) = \left\lceil \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2} + 0.5 \right\rceil$$

Для заданной метрики d найти s_0 : $f(s_0) = \min_{s \in S} f(s)$

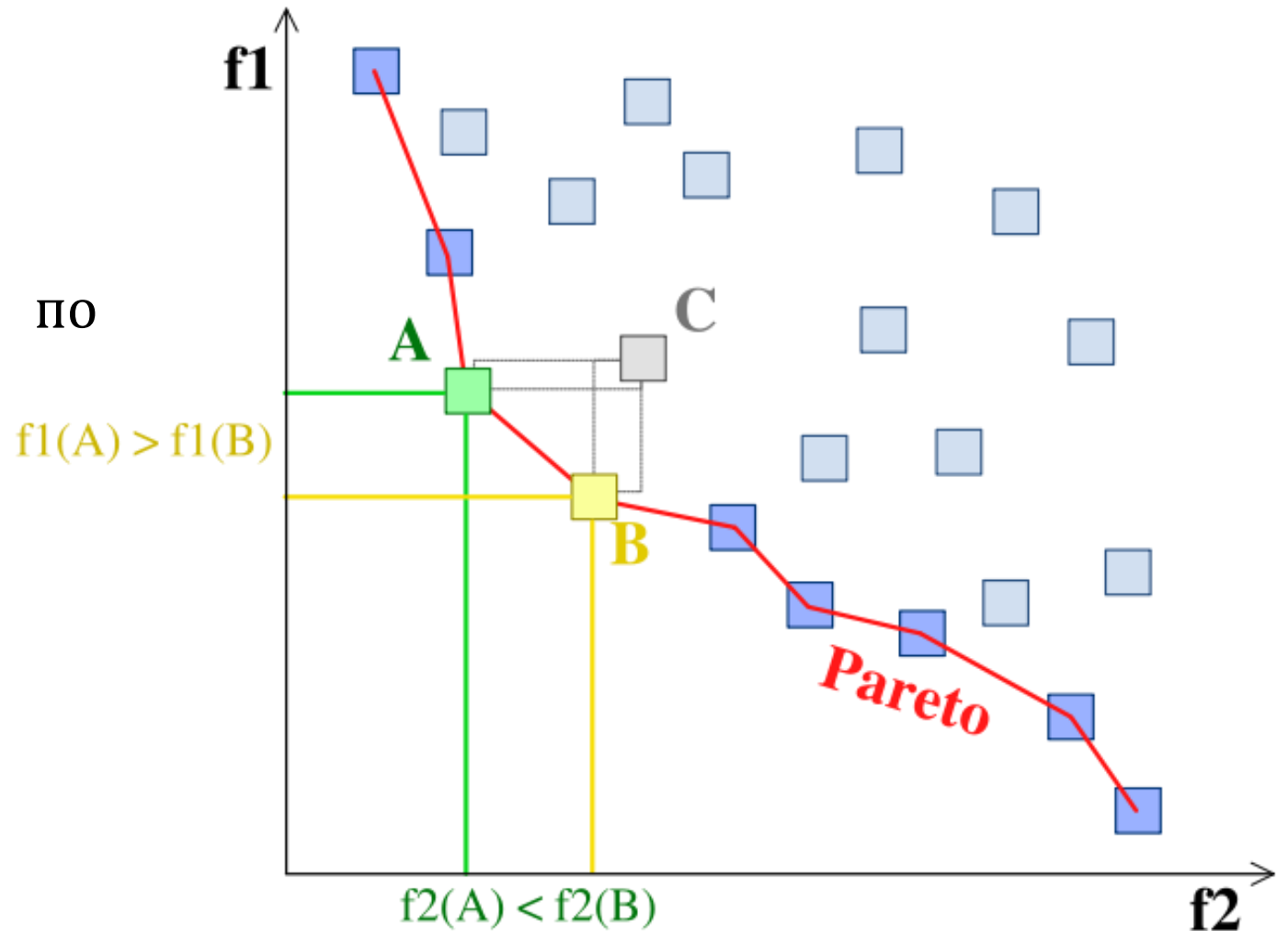
$$f(\varepsilon) = \frac{|f(s) - f(s_0)|}{f(s_0)} * 100\%$$

Определение эффективности по Парето

$$\min_{m \in M} \{f_\varepsilon(m), f_C(m)\}$$

m^1 является оптимальным по Парето относительно m^2 , если:

1. $f_i(m^1) \leq f_i(m^2)$
для всех $i \in \{\varepsilon, C\}$.
2. $f_j(m^1) < f_j(m^2)$
для хотя бы одного $j \in \{\varepsilon, C\}$.



Цель работы

Определить группу Парето-оптимальных эвристических алгоритмов для метрической задачи коммивояжера по следующим параметрам:

- время (с)
- отклонение (%)

Задачи

- **реализация** существующих эвристических алгоритмов решения метрической задачи коммивояжера;
- **разработка методики** оценки качества алгоритмов;
- **модификация** эвристических алгоритмов решения метрической задачи коммивояжера для получения реализации с лучшими оценками качества;
- **экспериментальная оценка** качества реализованных алгоритмов.

Алгоритмы

1. Nearest Addition (NA)
2. Nearest Insertion (NI)
3. Cheapest Insertion (CI)
4. Nearest Segment Insertion (NSI)
5. Double Minimal Spanning Tree (DMST)
6. Christofides (CHR)
7. Nearest Neighbor (NN)
8. Double Ended NN (DENN)
9. Greedy (GRD)
10. Moore Curve (MC)
11. Sierpinski Curve (SC)

Алгоритмы построения маршрута

12. 2-Opt
13. Lin and Kernighan Heuristic (LKH)
14. Combinatorial Artificial Bee Colony (qCABC)

Алгоритмы улучшения маршрута

Априорные оценки точности

Algorithms	Upper-bound estimate
Nearest Addition Nearest Insertion Cheapest Insertion Nearest Segment Insertion	$2 - \frac{2}{N}$
Double Minimal Spanning Tree	$2 - \frac{2}{N}$
Christofides	$\frac{3}{2}$
Nearest Neighbor, Double Ended NN	$0.5[\log_2 N + 1]$
Greedy	$0.5[\log_2 N + 1]$
Moore Curve, Sierpinski Curve	$\log N$
2-Opt	≈ 2
Lin and Kernighan Heuristic	≈ 2
qCABC	?

Асимптотическая временная сложность

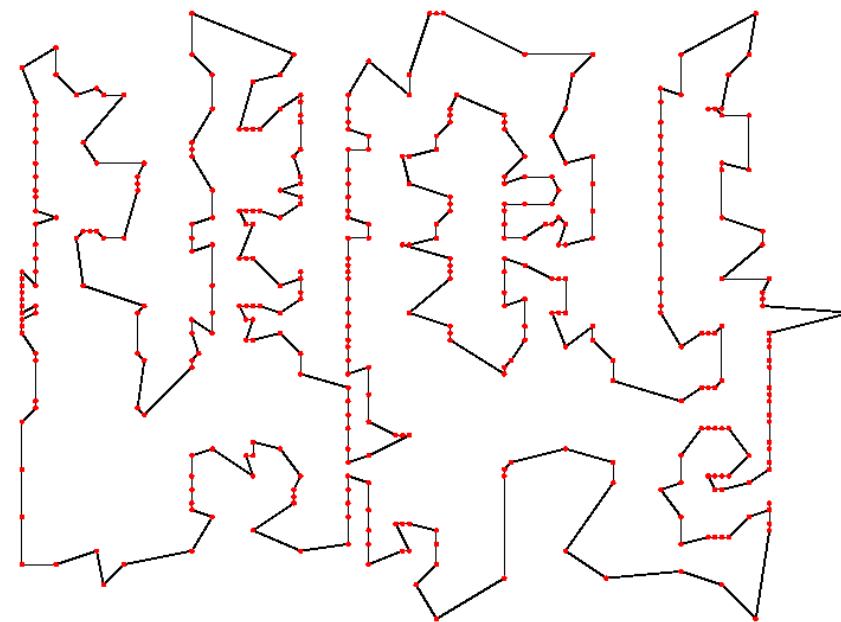
Algorithms	Upper-bound estimate
Nearest Addition Nearest Insertion Cheapest Insertion Nearest Segment Insertion	$O(N^2)$
Double Minimal Spanning Tree	$O(N^2)$
Christofides	$O(N^3)$
Nearest Neighbor, Double Ended NN	$O(N^2)$
Greedy	$O(N^2 \log N)$
Moore Curve, Sierpinski Curve	$O(N \log N)$
2-Opt	$O(N^2)$
Lin and Kernighan Heuristic	$\approx O(N^{2,2})$
qCABC	$O(N^3)$

Тестовые данные VLSI Data Sets

102 набора данных
N = [131; 744 710]

$$d_1(v, w) = \left\lceil \sqrt{|x(v) - x(w)|^2 + |y(v) - y(w)|^2} + 0.5 \right\rceil$$

```
NAME : xqf131
COMMENT : Bonn VLSI data set with 131 points
COMMENT : Uni Bonn, Research Institute for Discrete Math
COMMENT : Contributed by Andre Rohe
TYPE : TSP
DIMENSION : 131
EDGE_WEIGHT_TYPE : EUC_2D
NODE_COORD_SECTION
1 0 13
2 0 26
3 0 27
4 0 39
5 2 0
6 5 13
```

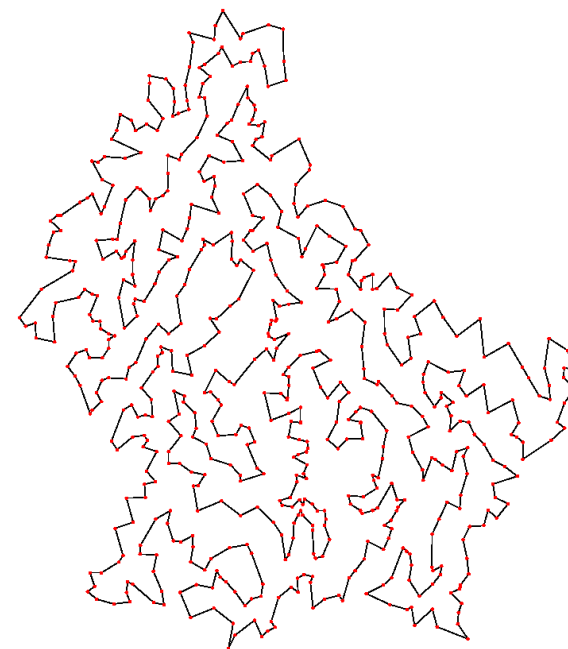


Тестовые данные National TSPs

25 наборов данных
N = [29; 71 009]

$$d_1(v, w) = \left\lfloor \sqrt{|x(v) - x(w)|^2 + |y(v) - y(w)|^2} + 0.5 \right\rfloor$$

```
NAME : 1u980
COMMENT : 980 locations in Luxembourg
COMMENT : Derived from National Imagery and Mapping Agency data
TYPE : TSP
DIMENSION : 980
EDGE_WEIGHT_TYPE : EUC_2D
NODE_COORD_SECTION
1 49525.5556 5940.5556
2 49525.5556 5940.5556
3 49738.8889 6345.0000
4 49608.3333 6405.8333
5 49796.6667 6155.5556
6 49828.6111 5764.7222
```



foreach tour construction algorithm m
 foreach data set N in range [1...102]
 for i in range [1...11]

$$f_{\varepsilon_i}(m, N) = \frac{f_i(m, N) - f_{opt}(m, N)}{f_{opt}(m, N)} * 100\%$$

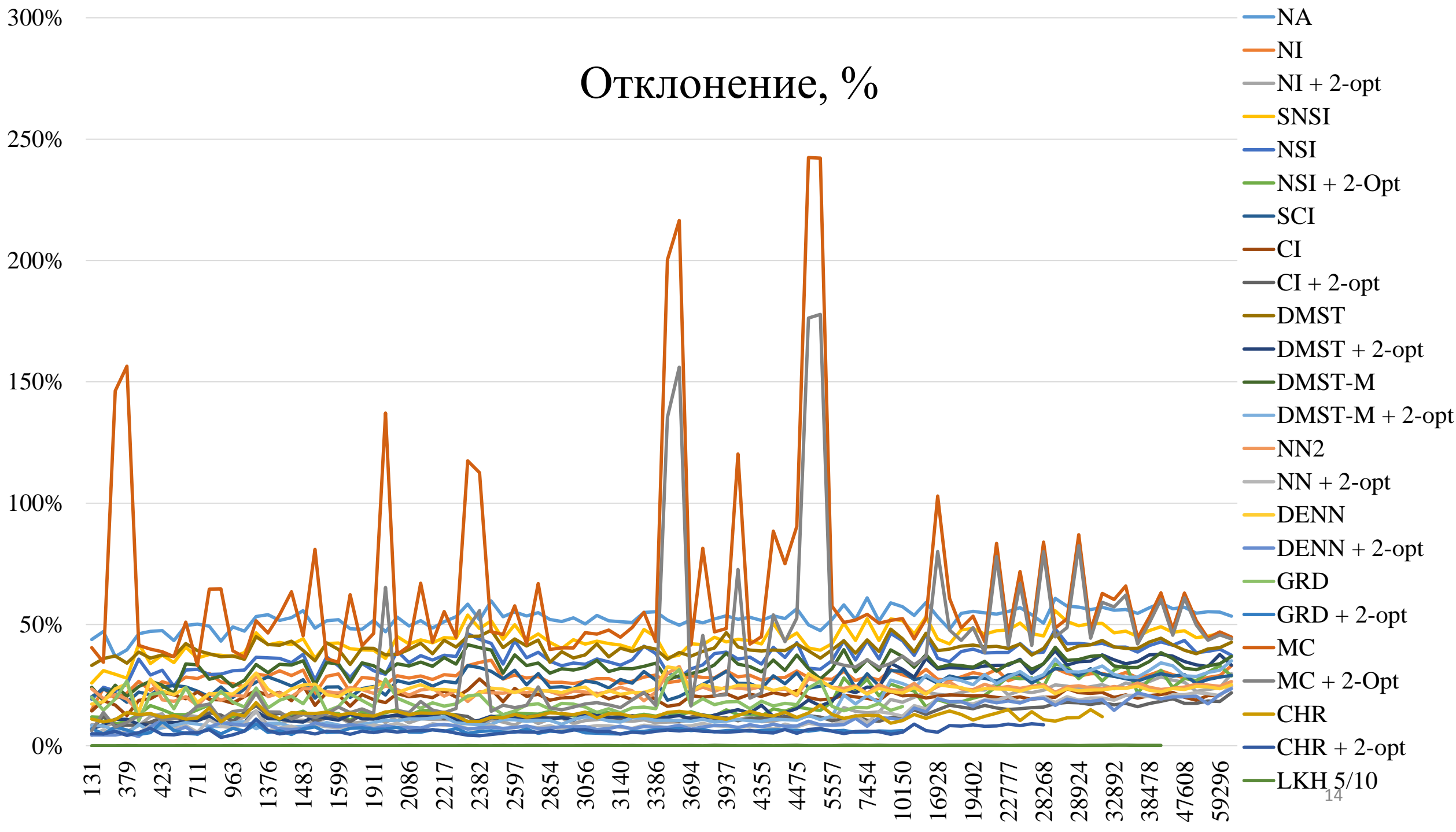
 $f_{t_i}(m, N) - ?$
 if $i > 1$ then
 $f_{\varepsilon_{min}}(m, N)$ запоминается
 $f_{t_{sum}}(m, N)$ вычисляется

$$f_{t_{avg}}(m, N) = \frac{f_{t_{sum}}(m, N)}{10}$$

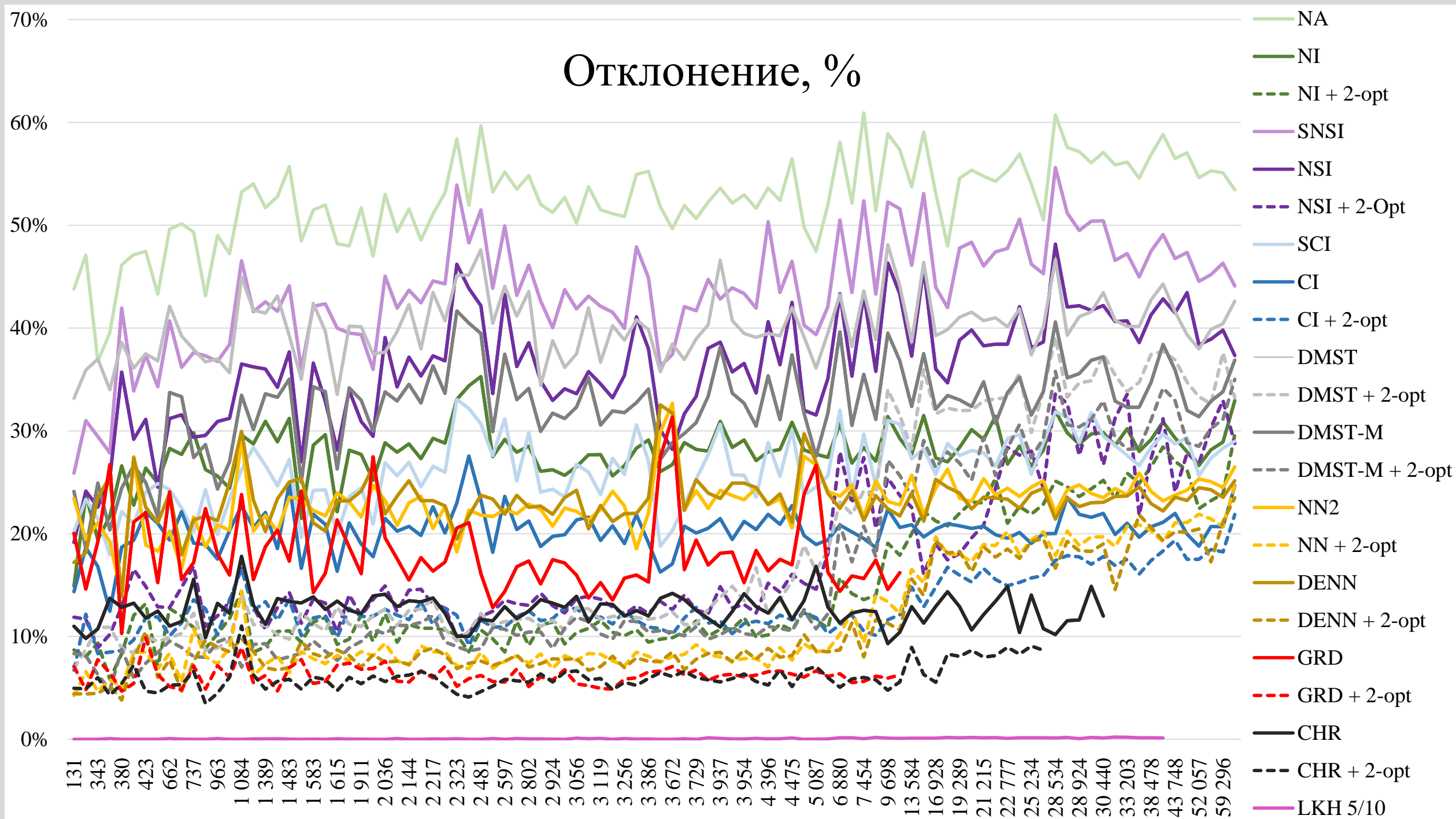
 // Improving stage
 foreach tour improving algorithm m'
 $f_{\varepsilon}(m + m', N), f_t(m + m', N) - ?$
 $E(f_{\varepsilon_{min}}(m, N)), \sigma(f_{\varepsilon_{min}}(m, N))$ for all $N - ?$
 $\max(f_{\varepsilon_{min}}(m, N)), \min(f_{\varepsilon_{min}}(m, N))$ for all $N - ?$

Название	E(ε)	σ(ε)	max ε	min ε
LKH 5/10	0,07%	0,05%	0,23%	0,00%
CHR + 2-Opt	5,77%	0,68%	11,02%	3,47%
GRD + 2-opt	6,22%	0,70%	9,89%	4,69%
DENN + 2-opt	10,95%	4,42%	23,51%	3,82%
NN + 2-opt	11,44%	1,87%	24,77%	4,26%
CHR	12,61%	1,08%	17,79%	9,31%
CI + 2-opt	13,05%	2,29%	21,86%	6,74%
NI + 2-opt	14,60%	5,53%	29,66%	5,86%
DMST-M + 2-opt	16,08%	8,39%	40,61%	4,80%
NSIM + 2-opt	17,63%	5,82%	33,65%	8,92%
GRD	18,12%	2,91%	31,34%	10,30%
DMST + 2-opt	19,08%	9,54%	39,12%	6,91%
CI	20,31%	1,44%	27,54%	12,46%
DENN	23,28%	1,62%	32,53%	13,88%
NN	23,94%	1,64%	30,97%	12,94%
SCI	26,25%	2,70%	33,05%	17,94%
NI	27,98%	1,89%	35,29%	14,89%
DMST-M	32,41%	3,15%	41,68%	18,55%
MC + 2-opt	32,41%	22,54%	177,83%	6,21%
NSI	36,23%	4,23%	48,17%	19,15%
DMST	40,09%	2,34%	48,88%	33,16%
SNSI	43,55%	5,64%	55,61%	25,89%
SNI	52,46%	3,19%	60,94%	36,77%
MC	63,93%	25,58%	242,41%	33,07%

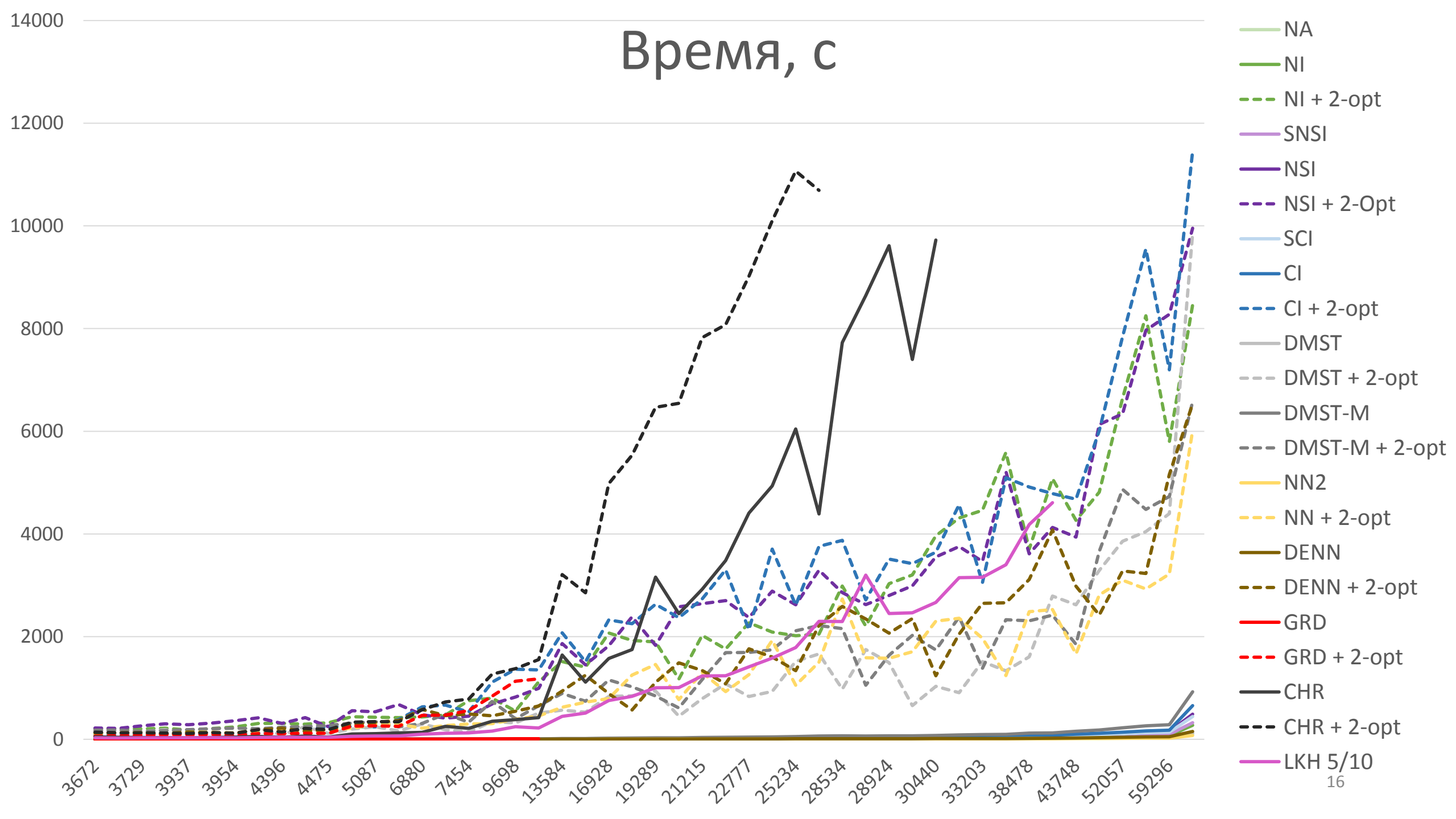
Отклонение, %



Отклонение, %

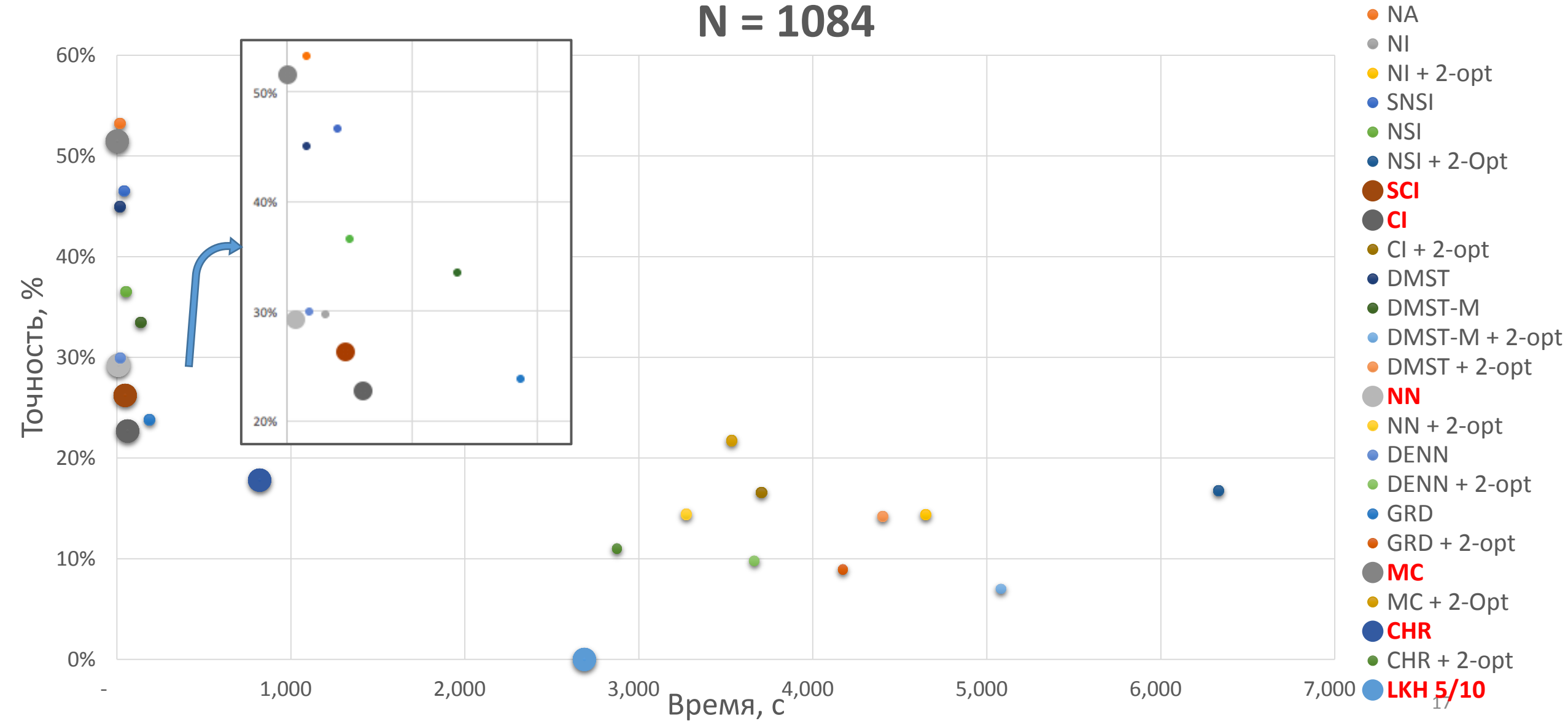


Время, с



Ожидаемые результаты

N = 1084



Парето-оптимальные алгоритмы

N = 1084	N = 5087	N = 10150	N = 30440	N = 52057	N = 104814
SCI	SCI				
CI	CI	CI	CI	CI	CI
				CI + 2-opt	CI + 2-opt
NN	NN	NN	NN	NN	NN
		DENN	DENN	DENN	DENN
			DENN + 2-opt		DENN + 2-opt
		GRD			
MC	MC	MC	MC	MC	MC
CHR				-	-
LKH	LKH	LKH	LKH	-	-

Список использованных источников

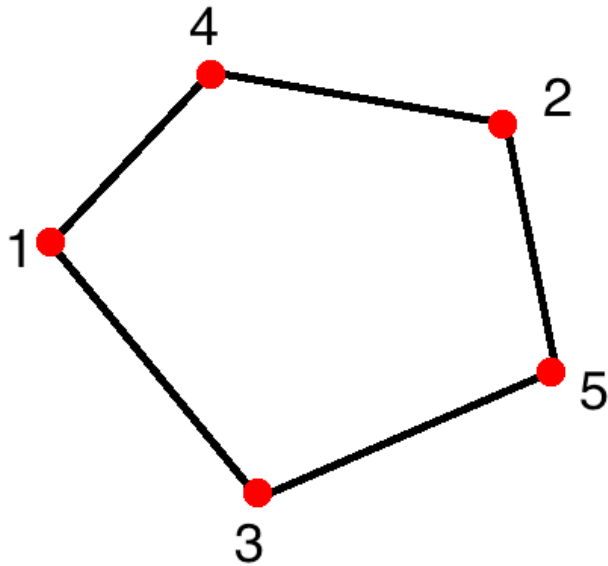
1. Applegate D.L., Bixby, R.E., Chvatal, V., Cook, W.J. The Traveling Salesman Problem. [Статья] // University Press, Princeton. - Princeton : [б.н.], 2006 г.
2. Buchin K Space-Filling Curves, Delaunay Tessellations of Random Point Sets, and Flow Complexes [Раздел книги] // Organizing Points Sets. - 2007. - Т. 2.
3. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical report of the graduate school of industrial administration [Статья] // Carnegie-Melcon university Press. - Pittsburgh, Pa., : [б.н.], 1976 г..
4. Croes G.A. A method for solving traveling salesman problems [Статья] // Operations Research. - 1958 г.. - 6:791-812.
5. Croes G.A. The traveling salesman problem [Статья] // Operations Research. - 1956 г.. - 4:61-75.
6. Filip E., Otakar, M. The Travelling Salesman Problem and its Application in Logistic Practice [Статья] // WSEAS Transactions on Business and Economics. - 2011 г.. - 8. - 4. - стр. 163-173.
7. Flood M. M. The traveling-salesman problem [Статья] // Operations Research. - 1956 г.. - стр. 61-75.
8. Glover F. Punnen A. The traveling salesman problem: new solvable cases and linkages with the development of approximation algorithms [Статья] // J. Oper. Res. Soc. - 1997 г.. - 48. - стр. 502-510.
9. Johnson D.S., McGeoch, L.A. Experimental Analysis of Heuristics for the STSP [Статья]. - 1997 г..
10. Lenstra J. K. Local Search in Combinatorial Optimisation [Статья] // John Wiley and Sons Ltd. - London : [б.н.]. - стр. 215-310.
11. Sebo A. Eight-Fifth Approximation for TSP Paths [Статья] // Springer Berlin Heidelberg. - 2013 г. - стр. 362-374.
12. Авдошин С.М., Белов В.В. Обобщенный метод «волны» для решения экстремальных задач на графах // ЖВМиМФ, 1979, 19, №3. – с. 739-755.
13. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Сердюков А.И. Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ // Сибирский журнал исследования операций, 1994, №2, Т.1, с. 8-17.
14. Жихарев С. А., Костюк Ю. Л. Локальный поиск в метрической задаче коммивояжера // Геоинформатика. Теория и практика. Вып.1 - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1998, с.84-95

Спасибо за внимание!

kate-c@bk.ru
enchirkova@edu.hse.ru

Волновая функция

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3



wave и *std::vector<T>* как структуры данных

