

Exercices Mathématiques pour l'informatique II : Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, diagonalisez la matrice A . Justifiez votre démarche.

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, diagonalisez la matrice A . Justifiez votre démarche.

3. Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, diagonalisez la matrice A . Justifiez votre démarche.

4. Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, diagonalisez la matrice A . Justifiez votre démarche.

5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m la matrice A est-elle diagonalisable ?
(b) Pour chaque valeur trouvée, diagonalisez la matrice A . Justifiez votre démarche.

6. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouvez les valeurs propres de f .
- (b) Déterminez les vecteurs propres de f .
- (c) Cette matrice est-elle diagonalisable ?
- (d) Soit \vec{u} le vecteur propre de f associé à la plus petite valeur propre trouvée précédemment. Trouvez les vecteurs \vec{v} et \vec{w} tels que $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$ et $f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}$.