Relations binaires – Théorie

1 Relations binaires : Les bases

Vidéo 1. *Une vidéo qui présente les concepts de bases des relations binaires :* `https://www.youtube.com/watch?v=W7cHO6qOImM`

Définition 2 (Relation binaire entre deux ensembles)**.** *Soient A et B deux ensembles. Une* ***relation binaire*** *entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$.*

Soit $R \subseteq A \times B$ une relation binaire entre A et B. Soient $a \in A$ et $b \in B$. Si $(a, b) \in R$, on dira que a ***est en relation avec*** *b* ***(pour la relation*** *R***)***, dans ce cas, on notera aRb. Si $(a, b) \notin R$, on dira que a* ***n'est pas en relation avec*** *b* ***(pour la relation*** *R***)***, dans ce cas, on notera $a \not R b$.*

Exercice 3. *Donnez des exemples de relations binaires entre deux ensembles A et B, avec $A \neq B$.*

Définition 4 (Relation binaire sur un ensemble)**.** *Soit A un ensemble. Une* ***relation binaire sur*** *A est un sous-ensemble de $A \times A$.*

Exercice 5. *Donnez des exemples de relations binaires sur un ensemble.*

Définition 6 (Relation réflexive)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. On dit que R est* ***réflexive*** *ssi*

$$\forall a \in A \quad aRa.$$

Exercice 7. *Donnez des exemples et des contre-exemples de relations binaires réflexives.*

Définition 8 (Relation symétrique)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. On dit que R est* ***symétrique*** *ssi*

$$\forall a \in A \ \forall b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa.$$

Exercice 9. *Donnez des exemples et des contre-exemples de relations binaires symétriques.*

Exercice 10. *Prouvez que $R \subseteq A \times A$ est une relation symétrique ssi*

$$\forall a \in A \ \forall b \in A \quad aRb \Leftrightarrow bRa.$$

Définition 11 (Relation transitive)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. On dit que R est **transitive** ssi*

$$\forall a \in A \ \forall b \in A \ \forall c \in A \quad (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc.$$

Exercice 12. *Donnez des exemples et des contre-exemples de relations binaires transitives.*

Définition 13 (Relation antisymétrique)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. On dit que R est **antisymétrique** ssi*

$$\forall a \in A \ \forall b \in A \quad (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b.$$

Exercice 14. *Donnez des exemples et des contre-exemples de relations binaires antisymétriques.*

Vidéo 15. *Vidéo avec deux exemples et un contre-exemple de relation antisymétrique :* `https://www.youtube.com/watch?v=jXdOuHW3qgQ&feature=youtu.be`

Définition 16 (Relation inverse)**.** *Soit $R \subseteq A \times B$ une relation binaire. La **relation inverse**, notée R^{-1}, est définie par*

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}.$$

Exercice 17. *Montrer que $R \subseteq A \times A$ est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$.*

Définition 18 (Composition de relations)**.** *Soient $R_1 \subseteq A \times B$ et $R_2 \subseteq B \times C$. La **composition des relations** R_1 **et** R_2, notée $R_2 \circ R_1$, est défnie par*

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \ aR_1b \wedge bR_2c\}.$$

Vidéo 19. *Une vidéo qui illustre la composition de relations :* `https://youtu.be/LTgKAVw4wmw`

Exercice 20. *Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ et $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. On définit deux relations binaires $R_1 \subseteq A \times B$ et $R_2 \subseteq B \times C$ comme suit*

$$R_1 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\} \ ; \ R_2 = \{(x, \alpha), (x, \beta), (x, \gamma), (y, \gamma), (y, \beta)\}.$$

Calculez $R_1 \circ R_2$ et $R_2 \circ R_1$. Comparez les résultats obtenus.

Définition 21 (Composition d'une relation avec elle-même)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. Soit $n \in \mathbb{N}_0$, on définit (par induction sur n) R^n de la façon suivante. $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.*

Exercice 22. *Soit $R \subseteq A \times A$. Prouver que les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *R est transitive.*
2. *$R^2 \subseteq R$.*
3. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $R^n \subseteq R$.*

2 Les relations d'équivalence

Vidéo 23. *Une vidéo qui présente le concept de relation d'équivalence et son lien avec les partitions :* `https://www.youtube.com/watch?v=0qoX6sNm2Jc`
Vous remarquerez que dans la vidéo, la classe d'équivalence d'un élément a (pour la relation R) est notée $\dot{a}$*, alors que nous la notons* $[a]_R$ *(voir Définition 26).*

Définition 24 (Relation d'équivalence)**.** *Soit* $R \subseteq A \times A$*. On dit que* R *est une* ***relation d'équivalence*** *ssi* R *est réflexive, symétrique et transitive.*

Exercice 25. *Parmi les relations binaires déjà rencontrées, identifier celles qui sont des relations d'équivalence.*

Définition 26 (Classe d'équivalence)**.** *Soit* $R \subseteq A \times A$ *une relation d'équivalence. Soit* $a \in A$*. La* ***classe d'équivalence de*** a ***(pour la relation R)****, notée* $[a]_R$*, est définie par*

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Théorème 27. *Soit* $R \subseteq A \times A$ *une relation d'équivalence sur* A*. Soient* $a \in A$ *et* $b \in A$*. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

$$(i)\ aRb \quad (ii)\ [a]_R = [b]_R \quad (iii)\ [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset.$$

Exercice 28. *Prouver le Théorème 27.*

Définition 29 (Partition d'un ensemble)**.** *Soit* A *un ensemble. Soit* $\mathcal{P} = \{A_i \mid A_i \subseteq A\}$ *un ensemble de sous-ensembles de* A*. On dit que* $\mathcal{P}$ *est une* ***partition de l'ensemble*** A *ssi les deux proporiétés ci-dessous sont satisfaites*

$$(1) \cup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i = A \quad (2) \forall A_i \in \mathcal{P}\ \forall A_j \in \mathcal{P} \quad A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Exercice 30. *Donner si possible*

1. *Une partition de l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *contenant un seul élément.*
2. *Une partition de l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *contenant deux éléments.*
3. *Une partition de l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *contenant trois éléments.*
4. *Une partition de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *contenant un seul élément.*
5. *Une partition de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *contenant une infinité d'éléments.*

Définition 31 (Quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence)**.** *Soit R une relation d'équivalence sur l'ensemble A. Le **quotient de** A **par** R, noté A/R, est l'ensemble des classes d'équivalences induites par R sur A. Formellement :*

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

Vidéo 32. *Une vidéo qui illustre le concept de quotient sur un exemple :* `https://youtu.be/bZIhHaDQQ4U`

Exercice 33. *Soit R une relation d'équivalence sur l'ensemble A. Montrer, à l'aide du Théorème 27 que A/R est une partition de A.*

3 Les relations d'ordre

Vidéo 34. *Une vidéo qui présente le concept de relation d'ordre :* `https://www.youtube.com/watch?v=g8Tczd1QhJU`

Définition 35 (Relation d'ordre)**.** *Soit $R \subseteq A \times A$. On dit que R est une **relation d'ordre** ssi R est réflexive, antisymétrique et transitive.*
*Etant donné A un ensemble et R une relation d'ordre sur A, la paire (A, R) est appelée **ensemble ordonné**.*

Exercice 36. *Parmi les relations binaires déjà rencontrées, identifier celles qui sont des relations d'ordre.*

Définition 37 (Ensemble des parties)**.** *Soit A un ensemble, on note 2^A (ou parfois $\mathcal{P}(A)$) l'**ensemble des parties de** A défini ci-dessous.*

$$2^A \;=\; \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Vidéo 38. *Vidéo qui illustre le concept de l'ensemble des parties :* `https://youtu.be/9YipD2KSXis`

Définition 39 (Eléments comparables)**.** *Soit (A, R) un ensemble ordonné. Soient $a, b \in A$. On dit que les éléments a et b sont **comparables (pour l'ordre** R**)** ssi aRb ou bRa ; sinon a et b sont **incomparables (pour l'ordre** R**)**.*

Exercice 40. *Donnez (si possible) deux éléments comparables et deux éléments incomparables dans les ensembles ordonnés suivants.*

$$(i)\ (\mathbb{Z}, \leq) \quad ; \quad (ii)\ (\mathbb{N}_0, |) \quad ; \quad (iii)\ (2^{\mathbb{Z}}, \subseteq).$$

Définition 41 (Ensemble totalement ordonné)**.** *Soit (A, R) un ensemble ordonné. On dit que (A, R) est **totalement** ordonné ssi toute paire d'éléments de A est comparable, i.e.*

$$\forall a \in A\ \forall b \in A \quad aRb \vee bRa.$$

Exercice 42. *Parmi les ensembles ordonnés déjà rencontrés, identifier ceux qui sont des ensembles totalement ordonnés.*

Définition 43 (Ordre strict)**.** *Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit $\prec$, l'**ordre strict associé à** $\preceq$ de la façon suivante : quel que soient $a \in A$ et $b \in A$*

$$a \prec b \quad \Leftrightarrow \quad a \preceq b \wedge a \neq b.$$

Définition 44 (Successeur immédiat)**.** *Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soient $a \in A$ et $b \in A$. On dit que b **est un successeur immédiat de** a (ou que a est un précesseur immédiat de b) ssi*

$$a \prec b \ \wedge \ \neg(\exists c \in A\ a \prec c \prec b).$$

Exercice 45. *Dans chacun des cas suivants, donner si possible, un ensemble ordonné (A, R), un élément $a \in A$ tels que*

1. *a possède une unique successeur immédiat dans (A, R).*
2. *a possède plusieurs successeurs immédiats dans (A, R).*
3. *a ne possède pas de successeurs immédiats dans (A, R).*

Définition 46 (Diagramme de Hasse)**.** *Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné fini. Un diagramme de Hasse associé à $(A, \preceq)$ est une représentation de $(A, \preceq)$ sous la forme d'un graphe où*

1. *on trace un segments (sans flèche) entre deux éléments a et b de A si et seulement si b est un successeur immédiat de a,*
2. *quel que soient a, $b \in A$, si $a \prec b$ alors a est placé "plus bas que" b dans le diagramme,*
3. *on veille autant que possible à ne pas croiser les segments.*

Par exemple, un diagramme de Hasse associé à l'ensemble ordonné $(\{1, 2, 3\}, \leq)$ est représenté sur la Figure 1.

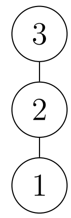

FIGURE 1 – Diagramme de Hasse de $(\{1,2,3\}, \leq)$.

Exercice 47. *Tracer le diagramme de Hasse des ensembles ordonnés suivants.*

$$(i)\ (\{1,2,3,4,5,6\}, \leq) \quad ; \quad (ii)\ (\{1,2,3,4,6,8,12\}, |) \quad ; \quad (iii)\ (2^{\{1,2,3\}}, \subseteq).$$

Définition 48 (Maximum, minimum, maximal, minimal)**.**
Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $a \in A$.

1. *On dit que $a \in A$ est **le maximum dans** $(A, \preceq)$ ssi $\forall b \in A\ b \preceq a$.*
2. *On dit que $a \in A$ est **le minimum dans** $(A, \preceq)$ ssi $\forall b \in A\ a \preceq b$.*
3. *On dit que $a \in A$ est **maximal dans** $(A, \preceq)$ ssi $\neg(\exists b \in A\ a \prec b)$.*
4. *On dit que $a \in A$ est **minimal dans** $(A, \preceq)$ ssi $\neg(\exists b \in A\ b \prec a)$.*

Exercice 49. *Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $a \in A$. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.*

1. *Si a est un élément maximal, alors c'est le maximum.*
2. *Si a est le maximum, alors c'est un élément maximal.*

Exercice 50. *Prouver que si $(A, \preceq)$ possède un maximum (resp. un minimum), alors il est unique.*

Exercice 51. *Dans chacun des cas suivants, donner si possible un ensemble ordonné $(A, \preceq)$ tel que*

1. *$(A, \preceq)$ possède un maximum et pas de minimum.*
2. *$(A, \preceq)$ possède deux éléments maximaux et un unique élément minimal.*
3. *$(A, \preceq)$ possède trois éléments maximaux et deux éléments minimaux.*

Définition 52 (borne supérieure/inférieure)**.**
Soit $(A, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $X \subseteq A$. Soit $a \in A$.

1. *On dit que a est une **borne supérieure de X pour** $(A, \preceq)$ ssi $\forall b \in X\ b \preceq a$.*
2. *On dit que a est une **borne inférieure de X pour** $(A, \preceq)$ ssi $\forall b \in X\ a \preceq b$.*

Définition 53 (supremum/infimum)**.** *Soit* $(A, \preceq)$ *un ensemble ordonné. Soit* $X \subseteq A$*. Soit* $a \in A$*.*

1. *On dit que* a *est le* ***supremum de*** X ***pour*** $(A, \preceq)$ *ssi* a *est le minimum de l'ensemble des bornes supérieures de* X *pour* $(A, \preceq)$*.*
2. *On dit que* a *est l'****infimum de*** X ***pour*** $(A, \preceq)$ *ssi* a *est le maximum de l'ensemble des bornes inférieures de* X *pour* $(A, \preceq)$*.*

Exercice 54. *Prouver que si* X *possède un supremum (resp. un infimum) pour* $(A, \preceq)$*, alors il est unique.*

Exercice 55. *Dans chacun des cas suivants, donner si possible un ensemble ordonné* $(A, \preceq)$ *et un ensemble* X *tels que*

1. X *possède un supremum et pas de minimum pour* $(A, \preceq)$*.*
2. X *possède trois bornes supérieres mais pas de supremum.*
3. X *possède un supremum et pas de bornes inférieures pour* $(A, \preceq)$*.*

Définition 56 (Treillis)**.** *Soit* $(A, \preceq)$ *un ensemble ordonné. On dit que* $(A, \preceq)$ *est un treilli ssi toute paire d'éléments* $\{a, b\} \subseteq A$ *possède un infimum et un supremum.*

Exercice 57. *Donner un exemple d'ensemble ordonné qui est un treillis. Donner un exemple d'ensemble ordonné qui n'est pas un treillis.*

Exercice 58. *Prouver que* $(\mathbb{N}_0, |)$ *est un treillis.*

Exercice 59. *Prouver que* $(2^A, \subseteq)$ *est un treillis, quel que soit* A*.*

Définition 60 (Ensemble bien ordonné)**.** *Soit* $(A, \preceq)$ *un ensemble totalement ordonné. On dit que* $(A, \preceq)$ *est* ***bien ordonné*** *ssi tout sous-ensemble non vide de* A *admet un minimum.*

Exercice 61. *Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné qui est bien ordonné. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné qui n'est pas bien ordonné.*

Définition 62 (Ordres compatibles)**.** *Soit* (A, R) *un ensemble ordonné. Soit* $\preceq \subseteq A \times A$ *un ordre total sur* A*. On dit que* $\preceq$ *est compatible avec* R *ssi*

$$\forall a \in A \; \forall b \in A \quad aRb \Rightarrow a \preceq b.$$