Exercices Mathématiques pour l'informatique I : Systèmes linéaires

1. Résolvez, par la méthode de l'échelonnement, le système $Ax = 0$ où $x \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq 4, 1\leq j\leq 4}$ est définie par $a_{ij} = j - i$.

2. Soient les vecteurs $v_1 = (-2,9,6)$, $v_2 = (-3,2,1)$ et $v_3 = (1,7,5)$. Existe-t-il des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \text{ ?}$$
Si oui, donnez les tous. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

3. Soient les systèmes (S) et (S') définis par
$$(S)\begin{cases} x + 2\pi^{-1}y + 3z = 0 \\ \pi x + \mathrm{e}y + \pi z = 0 \end{cases} \qquad (S')\begin{cases} -x - 2\pi^{-1}y - 3z = 0 \\ (\mathrm{e}-2)y - 2\pi z = 0 \end{cases}$$
Sans les résoudre, montrez que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.

4. Pour quelle(s) valeur(s) des paramètres $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1,2,3,4)$ est-il solution du système
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ 2ax_1 + bx_2 - 3dx_4 = 0 \\ -3ax_1 - 2bx_2 + 5cx_3 - dx_4 = 0. \end{cases}$$
Expliquez votre démarche.

5. Soient les systèmes suivants, notés respectivement (S) et (S') :
$$(S)\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S')\begin{cases} -3a_1x - 3a_2y = -3a_3 \\ (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)y = a_3 + b_3 \end{cases}$$
où, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Montrez que si (α, β) est solution du système (S'), alors (α, β) est aussi solution du système (S).

6. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ où a,b,c sont des paramètres réels. Pour quelle(s) valeur(s) de a,b,c le graphe de f passe-t-il par les points $(1,4)$, $(2,15)$ et $(3,40)$? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

7. Résolvez le système suivant
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

8. Résolvez le système suivant
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.

   (a) Calculez le déterminant de A.

   (b) Soit le système
$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice A est nul. Expliquez la méthode que vous utilisez et détaillez vos calculs.

10. Montrez qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 3, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ tel que $p(1) = 1$, $p(2) = 15$, $p(3) = 51$ et $\partial_x p(-1) = 11$.