

Mathématiques pour l'informatique : exercices de logique

1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ le domaine des prédicats de l'exercice. Dites si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

$$\begin{aligned} \exists x, x + 3 = 5; \quad \exists x, x + 1 = 15; \quad \forall x, x < 4; \quad \forall x, x + 10 < 25; \\ \forall x, (x > 6 \Rightarrow x < 2); \quad \exists x, ((x^2 = 121) \wedge (x > 0)). \end{aligned}$$

2. Les formules suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

- (a) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}_0, \frac{1}{x} \leq x$
- (d) $\forall n \in \mathbb{N}_0, \frac{1}{n} \leq n$
- (e) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > \pi$
- (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$
- (g) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$
- (h) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$
- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > \frac{x}{2}$
- (j) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$
- (k) $\forall x \in [0, 1[, \exists y \in [0, 1[, y > x$

3. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ les deux prédicats de domaine \mathbb{N} définis par :

$$P(x) \equiv \text{« } x \text{ est un multiple de 2 » et } Q(x) \equiv \text{« } x \text{ est un multiple de 4 »}.$$

Dites si les formules ci-dessous sont vraies. Justifiez votre réponse.

- (a) $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$
- (b) $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$
- (c) $\forall x, Q(x) \Rightarrow P(x)$
- (d) $\neg(\forall x, P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

4. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ les deux prédicats de domaine \mathbb{R}^2 définis par :

$$P(x, y) \equiv xy = 0 \text{ et } Q(x, y) \equiv x^2 + y^2 > 0.$$

Dites si les formules ci-dessous sont vraies. Justifiez votre réponse.

- (a) $\forall x, \forall y, P(x, y)$
- (b) $\forall x, \exists y, P(x, y)$
- (c) $\exists x, \forall y, P(x, y)$
- (d) $\exists x, \exists y, \neg(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$
- (e) $\forall x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists x, \forall y, P(x, y)$
- (f) $\neg(\forall x, \forall y, P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$

5. (a) Soient les formules $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ et $\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$. Ces deux formules sont-elles équivalentes ?
 (b) Soient les formules $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ et $\exists y \in \mathbb{R}, y > 0$. Ces deux formules sont-elles équivalentes ?
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les formules $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon' > 0, |x| < \frac{\varepsilon'}{2}$. Ces deux formules sont-elles équivalentes ?
7. Soient les formules $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$. Ces deux formules sont-elles équivalentes ?
8. Soient les formules $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x > y$. Ces deux formules sont-elles équivalentes ?