Algèbre linéaire

Définition 1 (Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$)**.** *Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que V est un **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites.*

1. $V \neq \emptyset$;
2. $\forall v_1 \in V,\ \forall v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V \quad \lambda \times v \in V$.

Exercice 2. *Déterminez sur si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Justifiez votre réponse.*

1. $\mathbb{R}^2$
2. $\{(0,0)\}$
3. $\mathbb{Z}^2$
4. $\{(1,1)\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$
7. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$
8. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice 3. *Déterminez tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Même question pour $\mathbb{R}^3$.*

Définition 4 (Combinaison linéaire)**.** *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_k \in V$. On dit que $v \in V$ est une **combinaison linéaire de** $v_1, \ldots, v_k$ si et seulement si*

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \ \ldots \ \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots \lambda_k \cdot v_k.$$

Exercice 5. *Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.*

1. *Le vecteur $v = (2,3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$.*
2. *Le vecteur $v = (4,4)$ est une combinaison linéaire du vecteur $(2,2)$.*
3. *Le vecteur $v = (1,0)$ est une combinaison linéaire du vecteur $(1,2)$.*
4. *Le vecteur $v = (1,1)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,2)$ et $(2,1)$.*
5. *Le vecteur $v = (1,1)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(3,3)$, $(1,2)$ et $(2,1)$.*

Définition 6 (Espace vectoriel engendré)**.** *Soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. **L'espace vectoriel engendré par** $v_1, \ldots, v_k$, noté $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$. On a donc :*

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \ \ldots \ \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots \lambda_k \cdot v_k\}.$$

Exercice 7. *Montrez que, quel que soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, on a bien que $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 8. *Décrire géométriquement les sous-espaces vectoriels engendrés définis ci-dessous.*

1. $\langle (0,0) \rangle$
2. $\langle (1,0) \rangle$
3. $\langle (1,1) \rangle$
4. $\langle (1,2),(2,3) \rangle$
5. $\langle (0,0,0) \rangle$
6. $\langle (1,0,0) \rangle$
7. $\langle (1,1,1) \rangle$
8. $\langle (1,0,0),(1,0,1) \rangle$
9. $\langle (0,1),(1,2),(2,3),(3,4) \rangle$
10. $\langle (1,0,0),(0,1,0),(1,1,1) \rangle$
11. $\langle (1,0,0),(2,1,0),(3,2,0) \rangle$
12. $\langle (1,0,0),(2,0,0),(3,0,0) \rangle$

Définition 9 (Famille génératrice)**.** *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_k \in V$. On dit que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une **famille génératrice de** V **(ou partie génératrice de** V**)** ssi*

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Exercice 10. *Donnez une famille génératrice pour chacun des espaces vectoriels ci-dessous.*

1. $\mathbb{R}^2$
2. $\mathbb{R}^4$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge y = z\}$
6. $\{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid w = x \wedge y = z\}$

Définition 11 (Dépendance linéaire)**.** *Soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. On dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k = 0$. Il est important de noter que dans la dernière égalité, 0 représente $(0, \ldots, 0)$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite de ce texte, nous utiliserons la notation 0 à la fois pour le nombre $0 \in \mathbb{R}$, ainsi que pour le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 12 (Indépendance linéaire - Famille libre)**.** *Soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. On dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si il ne sont pas linéairement dépendants. Dans ce cas, on dit également que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une **famille libre (ou partie libre)**. En particulier, si les vecteurs $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, il satisfont la formule ci-dessous.*

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R} \ \cdots \forall \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k = 0) \ \Rightarrow \ (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0).$$

Exercice 13. *Parmi les ensembles de vecteurs ci-dessous, déterminez ceux qui sont des familles libres.*

1. $\{(1,1)\}$
2. $\{(0,0)\}$
3. $\{(2,2),(1,1)\}$
4. $\{(1,2),(2,1)\}$
5. $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
6. $\{(1,2,3),(2,1,3)\}$
7. $\{(1,2,3),(2,1,3),(3,3,6)\}$
8. $\{(1,2,3),(2,1,3),(3,2,1)\}$

Définition 14 (Base)**.** *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_k \in V$. On dit que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est **une base de** V ssi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est à la fois une famille génératrice de V et une famille libre.*

Exercice 15. *Donnez une base à chacun des sous-espaces vectoriels ci-dessous.*

1. $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$
2. $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
3. $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\}$
4. $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$
5. $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0 \wedge x + z = 0\}$
6. $V_6 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w + x + y + z = 0\}$

Théorème 16. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si B_1 et B_2 sont deux bases de V, on a nécéssairement que $|B_1| = |B_2|$.*

Définition 17 (Dimension)**.** *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit B une base de V constituée de k éléments. On dira que l'espace vectoriel V est de **dimension** k. On notera* $\dim(V) = k$.

Théorème 18. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors V possède toujours une base.*

Proposition 19. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $B : \{v_1, \ldots, v_k\}$ une base de V. Soit $v \in V$. Si $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots \lambda_k \cdot v_k = \mu_1 \cdot v_1 + \cdots \mu_k \cdot v_k$, alors $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k$.*

Définition 20 (Coordonnées)**.** *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $B : \{v_1, \ldots, v_k\}$ une base de V. Soit $v \in V$ tel que $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots \lambda_k \cdot v_k$. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sont **les coordonnées de** v **dans la base** B.*

Exercice 21. *On considère les deux bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes : $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et $B_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Donnez les coordonnées des vecteurs ci-dessous dans les deux bases B_1 et B_2.*

1. $v_1 = (1, 0)$
2. $v_2 = (1, 2)$
3. $v_3 = (0, 0)$
4. $v_4 = (1, 1)$
5. $v_5 = (2, 3)$

Définition 22 (Injectivité)**.** *Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **injective** ssi*

$$\forall a_1 \in A \; \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Définition 23 (Surjectivité)**.** *Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **surjective** ssi*

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \quad f(a) = b.$$

Définition 24 (Bijectivité)**.** *Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **bijective** ssi f est à la fois injective et surjective.*

Exercice 25. *Dans chacun des cas ci-dessous, donner (si possible) un exemple d'application[1] qui remplit les conditions demandées.*

1. Soit $f : A \to B$, on dit que f est une application si et seulement si le domaine de f est égal à A.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bijective.*
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non injective et non surjective.*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *injective et non surjective.*
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non injective et surjective.*
5. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ *bijective.*
6. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ *non injective et non surjective.*
7. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ *injective et non surjective.*
8. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ *non injective et surjective.*

Proposition 26 (Principe des tiroirs - Pigeon Hole Principle)**.** *Soit A un ensemble* ***fini****. Soit $f : A \to A$ une application. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) f est injective (2) f est surjective (3) f est bijective.

Définition 27. *Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On dit que $L : V_1 \to V_2$ est une* ***application linéaire*** *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

1. $\forall u \in V_1\ \forall v \in V_1 \quad L(u+v) = L(u) + L(v)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall v \in V_1 \quad L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v)$.

Exercice 28. *Déterminez si les fonctions ci-dessous sont des applications linéaires.*

1. $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_1(x) = x$.
2. $L_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_1(x) = x^2$.
3. $L_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_3(x) = x + 1$.
4. $L_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_4(x) = e^x$.
5. $L_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_5(x,y) = x - y$.
6. $L_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $L_6(x) = (x, 3x)$.
7. $L_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $L_7(x,y) = (y,x)$.
8. $L_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $L_8(x,y) = (1,0)$.

Exercice 29. *Dans chacun des cas ci-dessous, donner (si possible) un exemple d'application* ***linéaire*** *qui remplit les conditions demandées.*

1. $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bijective.*
2. $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non injective et non surjective.*
3. $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *injective et non surjective.*
4. $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non injective et surjective.*

Définition 30 (Noyau d'une application linéaire)**.** *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Le* ***noyau de*** *L, noté $Ker(L)$, est défini par*

$$Ker(L) = \{v \in V_1 \mid L(v) = 0\}.$$

Définition 31 (Image d'une application linéaire)**.** *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire. L'**image de** L, noté Im(L), est défini par*

$$Im(L) = \{v_2 \in V_2 \mid \exists v_1 \in V_1 \ L(v_1) = v_2\}.$$

Exercice 32. *Calculez le noyau et l'image de toutes les applications linéaires que vous avez identifiées dans l'Exercice 28.*

Proposition 33. *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire.*

1. *Ker(L) est un sous-espace vectoriel de V_1.*
2. *Im(L) est un sous-espace vectoriel de V_2.*

Théorème 34. *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que $Ker(L) = \{0\}$. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre dans V_1, alors $\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$ est une famille libre dans V_2.*

Exercice 35. *Prouvez le Théorème 34. Montrez enuiste, à l'aide d'un contre-exemple, que l'hypothèse "$Ker(L) = \{0\}$" est nécessaire.*

Exercice 36. *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Montrez que L est injective si et seulement si $Ker(L) = \{0\}$.*

Théorème 37 (Théorème du rang)**.** *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire.*

$$\dim(V_1) \ = \ \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L)).$$

Définition 38 (Ensemble de matrices)**.** *On note $\mathbb{R}^{n\times m}$ l'ensemble des matrices n lignes et m colonnes à coefficients réels. Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sera donc de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Définition 39 (Application linéaire associée à une matrice)**.** *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$. **L'appliction linéaire associée à** M, notée L_M, est une application linaire $L_M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ définie par*

$$L_M(v) = M \cdot v, \ \textit{quel que soit } v \in \mathbb{R}^m.$$

Vidéo 40. *Vidéo avec un exemple permettant de construire l'application linéaire associée à une matrice donnée :* `https://youtu.be/rYDWgbdOEyk`

Exercice 41. *Verifiez que l'application L_M est effectivement une application linéaire.*

Exercice 42. *Pour chacune des matrices ci-dessous, donnez explicitement l'application linéaire associée.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 43 (Matrice associée à une application linéaire)**.** *Soit $L : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Soient B_1 une base de V_1 et B_2 une base de V_2.* ***La matrice associée à** L, notée $M_L^{B_1 \to B_2}$, est une matrice M telle que*

$$L(v) = M_L^{B_1 \to B_2} \cdot v, \text{ quel que soit } v \in V_1,$$

où v est exprimé dans la base B_1 et $L(v)$ est exprimé dans la base B_2.

Vidéo 44. *Vidéo avec un exemple permettant de construire la matrice associée à une application linéaire dans les bases naturelles (canoniques) :* `https://www.youtube.com/watch?v=_169kFvTOSk&t=0s`

Exercice 45. *Pour chacune des applications linéaires ci-dessous, calculez la matrice naturellement associée, en utilisant les bases naturelles de $\mathbb{R}^n$.*

1. $L_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_1(x) = x$.
2. $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $L_2(x, y) = (x, 2y, 3x + 5y)$.
3. $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $L_3(x, y, z) = (2x + 3y, 5x + y + 7z)$.

Vidéo 46. *Vidéo avec un exemple permettant de construire la matrice associée à une application linéaire dans des bases choisies :* `https://youtu.be/d9S4K-yYWMw`

Exercice 47. *Pour chacune des applications linéaires ci-dessous, choisissez une base B_1 pour V_1, choisissez une base B_2 pour V_2, et calculez la matrice naturellement associée, en utilisant les bases que vous aurez choisies.*

1. $L_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ *avec* $L_1(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. $L_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ *avec* $L_2(x, y, z) = (x, 0, x)$.

Proposition 48. *Soient $L_1 : V_1 \to V_2$ et $L_2 : V_2 \to V_3$ deux applications linéaires. La composée $L_2 \circ L_1 : V_1 \to V_3$ est une application linéaire. De plus, on a que $M_{L_2 \circ L_1} = M_{L_2} \cdot M_{L_1}$.*

Définition 49 (Valeurs propres et vecteurs propres). *Soit V un sous-espace vectoriel. Soit $L : V \to V$ une application linéaire. Soit $v \in V$, on dit que v est un* ***vecteur propre*** *de L si et seulement si*

1. *$v \neq 0$;*
2. *il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $L(v) = \lambda \cdot v$.*

On dit que λ est la ***valeur propre associée à*** *v. Si M_L est une matrice associée à L, on parlera également des valeurs propres et vecteurs propres de M_L.*

Définition 50 (Matrice diagonale). *Une matrice* ***diagonale*** *est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On note a_{ij} l'élément de M situé en $i$ème ligne, $j$ème colonne. On a que M est diagonale si et seulement si*

$$\forall i \; \forall j \; (i \neq j) \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Définition 51 (Application linéaire diagonalisable). *Soit V un sous-espace vectoriel. Soit $L : V \to V$ une application linéaire. On dit que L est* ***diagonalisable*** *si et seulement si il existe une base B de V telle que $M_L^{B\to B}$ est une matrice diagonale.*

Exercice 52. *Soit V un sous-espace vectoriel. Soit B une base de V. Soit $L : V \to V$ une application linéaire diagonalisable telle que $M_L^{B\to B}$ est une matrice diagonale. Montrez que chaque élément de B est un vecteur propre de L.*

Exercice 53. *Donnez un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, différente de l'identité et différente de l'application nulle, qui est diagonalisable.*

Exercice 54. *Donnez un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas diagonalisable.*

Définition 55 (Multiplicité d'une racine d'un polynôme). *Soit $p(x)$ un polynôme. Si $p(x) = (x-a)^n \cdot q(x)$ où $q(a) \neq 0$, alors on dit que a est une* ***racine de*** *$p(x)$* ***de multiplicité*** *n.*

Exercice 56. *Dans chacun des cas suivants, donnez un polynôme*

1. *$p_1(x)$ tel que 1 est une racine de $p_1(x)$ de multiplicité 1.*
2. *$p_2(x)$ tel que 3 est une racine de $p_1(x)$ de multiplicité 5.*
3. *$p_3(x)$ tel que 2 est une racine de $p_3(x)$ de multiplicité 4 et 7 est une racine de $p_3(x)$ de multiplicité 5.*

Définition 57 (Polynôme caractéristique)**.** *Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Le* ***polynôme caractéristique de*** *M, noté $p_M(\lambda)$ est le polynôme défini ci-dessous.*

$$p_M(\lambda) = det(\lambda \cdot Id_n - M),$$

où $Id_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice identité.

Exercice 58. *Pour chacune des matrices ci-dessous, calculez le polynôme caractéristique.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 59. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Les valeurs propres de M sont exactement les racines du polynôme caractéristique de M.*

Exercice 60. *Pour chacune des matrices de l'Exercice 58, calculez les valeurs propres associées.*

Définition 61 (Espace propre associé à une valeur propre)**.** *Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Soit λ_0 une valeur propre de M. L'espace propre associé à λ_0, noté E_{λ_0}, est le sous-espace vectoriel constitué de tous les vecteurs propre associée à λ_0.*

Proposition 62. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Soit λ_0 une valeur propre de M.*

$$E_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda_0 \cdot Id_n - M) \cdot v = 0\}.$$

Exercice 63. *Pour chacune des matrices de l'Exercice 58, calculez les espace propres associées aux valeurs propres que vous avez trouvée dans l'exercice 60.*

Exercice 64. *En utilisant la procédure ci-dessous, diagonalisez (si possible) les matrices de l'Exercice 58.*

Diagonalisation d'une matrice M

1. ***Calcul des valeurs propres.***
   (a) *Calculer le polynôme caractéristique de* M : $p_M(\lambda) = det(\lambda \cdot Id_n - M)$.
   (b) *Identifier les racines* $p_M(\lambda)$ *: ce sont les valeurs propres de* M.
   (c) *Pour chaque racine* λ_i *de* p_M ***faire***
   - ***Si*** $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, ***alors STOP*** M *n'est pas diagonalisable*[2] *dans* $\mathbb{R}$.
   - ***Si*** $\lambda_i \in \mathbb{R}$, ***alors*** *calculez sa multiplicité, que l'on notera* k_i.
2. ***Calcul des espaces propres.***
   (a) *Pour chaque valeur propre* λ_i *(de multiplicité* k_i*)* ***faire***
      i. *Calculer l'espace propre associé* E_{λ_i}.
      ii. *Calculer la dimension de* E_{λ_i}.
      - ***Si*** $dim(E_{\lambda_i}) < k_i$, ***alors STOP*** M *n'est pas diagonalisable dans* $\mathbb{R}$.
      - ***Si*** $dim(E_{\lambda_i}) = k_i$, ***alors*** *poursuivre.*
3. *Calcul de matrice diagonale.*
   (a) *Retourner la matrice diagonale dont la ligne de diagonale est composée des valeurs propres* λ_i, *chacune répétée* k_i *fois.*

2. Elle est potentiellement diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Dans le cadre de ce sours nous nous focaliserons sur les matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$.