Exercices Mathématiques pour l'informatique II :
Algèbre linéaire - base d'un espace vectoriel et applications linéaires

1. Dans chacun des cas suivants déterminez si les vecteurs de l'ensemble S sont linéairement dépendants :
   (a) $S = \{(1, 1), (2, 3)\}$.
   (b) $S = \{(1, -1), (-1, 1)\}$.
   (c) $S = \{(5, 1), (2, 3)\}$.
   (d) $S = \{(17, 131), (421, 37), (42, 13)\}$.
   (e) $S = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$.
   (f) $S = \{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}$.
   (g) $S = \{(1, 11, 1), (213, 3, 4), (2, 1, 3), (5, 5, 5)\}$.
   (h) $S = \{(1, 2, 3, 4, 5), (5, 5, 5, 5, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$.

2. Donnez (si possible) une base de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur $(1, 1, 1)$.

3. Donnez (si possible) une base de $\mathbb{R}^4$ qui contient les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 2)$.

4. Donnez (si possible) une base de $\mathbb{R}^4$ qui contient les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$ et $(2, 2, 2, 5)$.

5. Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $W = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$.
   (a) Montrer que $((1, 1, 1), (0, 0, 1))$ est une base de W.
   (b) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Montrer que $((0, 1, 1), (1, 2, 0))$ est une base de V.
   (d) Montrer que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.
   (e) Déterminer une base de $V \cap W$.
   (f) Montrer que $\mathbb{R}^3 = V + W$.

6. Soient $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$, et $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.
   (a) Montrer que U, V, et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de U, une base de V, et une base de W.

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u et v deux éléments de E. Prouver que si u et v sont linéairement indépendants, alors $u + v$ et $u - v$ sont linéairement indépendants.

8. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ay + z = 0\}$.
   (a) Montrer que V_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $((1, 0, -1), (a, -1, 0))$ est une base de V_a.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Montrer que $((1, 0, -1))$ est une base de $V_a \cap V_b$.
   (d) Montrer que $V_a + V_b = \mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq b$.

9. Soit $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
   (b) Les polynômes $x^2 + x + 1$ et $x + 1$ sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez votre réponse.
   (c) Les polynômes 5 et 17 sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez votre réponse.
   (d) Les polynômes $x^2 + 1$, $x^2 + 2$ et x^2 sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez votre réponse.
   (e) Donnez une base de V.

10. Parmi les applications ci-dessous, determinez celles qui sont linéaires.
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$.
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x, x)$.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$.
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$.
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, x + 2y)$.
   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$.
   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x, y, x^2)$.
   (h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x, y, y)$.
   (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.
   (j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 1)$.
   (k) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par $f(p) = p'$.

11. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.
   (a) Prouvez que $f(0) = 0$.
   (b) Prouvez que $f(-v) = -f(v)$, quel que soit $v \in E_1$.
   (c) Prouvez que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E_1.
   (d) Prouvez que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E_2.

12. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.
   (a) Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Soient u , $v \in E_1$ si u et v sont linéairement indépendants (dans E_1) alors $f(u)$ et $f(v)$ sont linéairement indépendants (dans E_2).
   (b) Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Soient u , $v \in E_1$ si u et v sont linéairement dépendants (dans E_1) alors $f(u)$ et $f(v)$ sont linéairement dépendants (dans E_2).
   (c) Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire **injective**. Soient u , $v \in E_1$ si u et v sont linéairement indépendants (dans E_1) alors $f(u)$ et $f(v)$ sont linéairement indépendants (dans E_2).
   (d) Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Si f est injective alors f est surjective.

13. Calculez le noyau et l'image de toutes les applications linéaires de l'exercice 10.

14. Pour chaque application linéaire de l'exercice 10 dont la dimension de l'image est finie, donnez la matrice associée à l'application linéaire.

15. Soient E_1, E_2 et E_3 trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f : E_1 \to E_2$ et $g : E_2 \to E_3$ deux applications linéaires. Prouvez que $g \circ f : E_1 \to E_3$ est une application linéaire.

16. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Sous l'hypothèse que l'application f admette une application inverse $g : E_2 \to E_1$, prouvez que g est une application linéaire.

17. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Prouvez que si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\dim(E_1) = \dim(E_2)$ alors $\mathrm{Im}(f) = E_2$.

18. Dans chacun des cas suivants, donnez si possible une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui satisfait la condition donnée.
   (a) f est injective et surjective.
   (b) f est injective et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
   (c) f est surjective et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   (d) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$.
   (e) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
   (f) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
   (g) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

19. Soient $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$.
   (a) Prouvez que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donnez une base de E_1 et de E_2.
   (c) Donnez (si possible) une application linéaire $L : E_1 \to E_2$ telle que $\mathrm{Im}(L) = E_2$. Calculez le noyau et l'image de L et donnez une représentation matricielle de L pour les bases que vous avez définies au point (b).
   (d) Donnez (si possible) une application linéaire $L : E_1 \to E_2$ telle que $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$. Calculez le noyau et l'image de L et donnez une représentation matricielle de L pour les bases que vous avez définies au point (b).

20. Soient les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ données par $f((x, y, z)) = (2x - y + z, x + y - z, x + 2y - z)$ et $g((x, y, z)) = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y, -y + z, \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soient $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $W = \{f(v)\,;\, v \in V\}$.
   (a) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
   (b) Montrer que $w \in W$ si et seulement si $g(w) \in V$.
   (c) Montrer que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 7y + 6z = 0\}$.

21. Pour $a \in \mathbb{R}$ soit l'application

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + ay + a^2 z,\ x + a^2 y + az). \end{aligned}$$

   (a) Montrer que f_a est une application linéaire.
   (b) Donnez la matrice associée à f_a.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$ et une base de $\mathrm{Im}(f_a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.