

Initiation à la théorie des graphes

Définition 1 (Graphe non-orienté). Un **graphe non-orienté**, noté $G = (S, A)$, est la donnée d'un ensemble de sommets (noté S) et d'un ensemble d'arêtes (noté A). Une arête est une paire des sommets, i.e. chaque arête est la donnée de deux sommets (dont l'ordre n'a pas d'importance).

Les graphes peuvent être utilisés pour représenter des réseaux sociaux. Dans ce cas l'ensemble des sommets S représente l'ensemble des membres du réseau. Une arête entre deux sommets s_1 et s_2 signifiera que s_1 et s_2 sont amis. On notera cela avec un prédicat binaire $\text{AMI}(s_1, s_2)$.

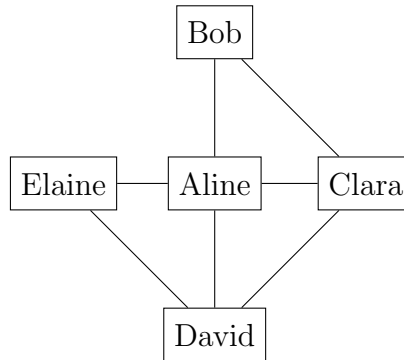


FIGURE 1 – Un exemple de graphe non-orienté.

Exercice 2. On considère le réseau social décrit par le graphe non-orienté de la Figure 1. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Bob et Clara sont amis.
2. Bob et Elaine sont amis.
3. La formule $\text{AMI}(\text{Elaine}, \text{David})$ est vraie.
4. La formule $\exists s \in S \text{ AMI}(s, \text{Bob})$ est vraie.
5. La formule $\forall s \in S \text{ AMI}(s, \text{Clara})$ est vraie.

Exercice 3. Dans un réseau social, on dit qu'un individu est un influenceur s'il est ami avec tout le monde. Soit $G = (S, A)$ le graphe non-orienté d'un réseau social. Soit $s \in S$.

1. Donne une formule qui décrit le fait que s est un influenceur.
2. Est-ce que le réseau social de la Figure 1 possède un influenceur ? Si oui, de qui s'agit-il ?
3. Donne, si possible, un exemple de réseau social, avec zéro influenceur.
4. Donne, si possible, un exemple de réseau social, avec deux influenceurs.
5. Donne une formule qui affirme que s'il existe deux influenceurs différents dans un réseau social, ils sont forcément amis. Détermine si cette formule est vraie (ou fausse) et prouve ta réponse.

Exercice 4. On connaît tous le vieil adage qui dit « les amis de mes amis sont mes amis ».

1. Traduis en formule ce vieil adage.
2. Donne (si possible) un exemple de réseau social où le vieil adage est vérifié.
3. Donne (si possible) un exemple de réseau social où le vieil adage n'est pas vérifié.

Définition 5 (Graphe orienté). Un **graphe orienté**, aussi noté $G = (S, F)$, est la donnée d'un ensemble de sommets (noté S) et d'un ensemble de flèches (noté F). Une flèche est un couple des sommets, i.e. chaque flèche est la donnée de deux sommets ordonnés.

Les graphes peuvent être utilisés pour représenter des réseaux sociaux d'un autre type. Dans ce cas l'ensemble des sommets S représente l'ensemble des membres du réseau. Une flèche entre deux sommets s_1 et s_2 signifiera que s_1 est un *follower* s_2 (ou encore que s_1 *follow* s_2). On notera cela avec un prédicat binaire $\text{FOLLOW}(s_1, s_2)$.

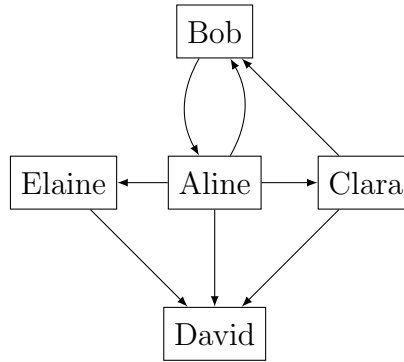


FIGURE 2 – Un exemple de graphe orienté.

Exercice 6. On considère le réseau social décrit par le graphe non-orienté de la Figure 2. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Bob follow Elaine.
2. Bob follow Aline.
3. Bob follow Clara.
4. La formule $\text{FOLLOW}(\text{Elaine}, \text{David})$ est vraie.
5. La formule $\exists s \in S \text{ FOLLOW}(s, \text{Bob})$ est vraie.
6. La formule $\forall s \in S \text{ FOLLOW}(s, \text{Clara})$ est vraie.
7. La formule $\forall s_1 \in S \exists s_2 \in S \text{ FOLLOW}(s_1, s_2)$ est vraie.

Exercice 7. Soit $G = (S, F)$ le graphe orienté d'un réseau social. Soit $s \in S$.

1. Comment traduirais-tu en français la formule ci-dessous.

$$\varphi_1 \equiv \forall s_1 \in S \forall s_2 \in S \text{ FOLLOW}(s_1, s_2) \Rightarrow \text{FOLLOW}(s_2, s_1)$$

2. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_1 est satisfaite.
3. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_1 n'est pas satisfaite.

Exercice 8. Soit $G = (S, F)$ le graphe orienté d'un réseau social. Soit $s \in S$.

1. Comment traduirais-tu en français la formule ci-dessous.

$$\varphi_2 \equiv \exists s_1 \in S \forall s_2 \in S \text{ FOLLOW}(s_1, s_2)$$

2. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_2 est satisfaite.
3. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_2 n'est pas satisfaite.

Exercice 9. Soit $G = (S, F)$ le graphe orienté d'un réseau social. Soit $s \in S$.

1. Comment traduirais-tu en français la formule ci-dessous.

$$\varphi_3 \equiv \forall s_1 \in S \exists s_2 \in S \text{ FOLLOW}(s_1, s_2)$$

2. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_3 est satisfaite.
3. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_3 n'est pas satisfaite.

Exercice 10. Soit $G = (S, F)$ le graphe orienté d'un réseau social. Soit $s \in S$.

1. Comment traduirais-tu en français la formule ci-dessous.

$$\varphi_4 \equiv \exists s_1 \in S \forall s_2 \in S (\text{FOLLOW}(s_1, s_2) \Rightarrow (\exists s_3 \in S s_1 \neq s_3 \wedge \text{FOLLOW}(s_3, s_2)))$$

2. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_4 est satisfaite.
3. Donne, si possible, un exemple de réseau social où φ_4 n'est pas satisfaite.