Exercices Mathématiques pour l'informatique II : Relations binaires

Relations binaires

Rb1 Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5\}$ deux ensembles. Ecrire explicitement les couples $(a, b) \in R_i$ dans les cas suivants :

(a) aR_1b si et seulement si $a = b$.

(b) aR_2b si et seulement si $a + b = 4$.

(c) aR_3b si et seulement si $a < b$.

(d) aR_4b si et seulement si $pgcd(a, b) = 1$.

(e) aR_5b si et seulement si $ppcm(a, b) = 2$.

(f) aR_6b si et seulement si $a|b$.

Rb2 Soient $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$ deux ensembles. Représenter graphiquement les relations $R_i \subseteq A \times B$ dans les cas suivants :

(a) aR_1b si et seulement si $a = b$.

(b) aR_2b si et seulement si $a - b = 1$.

(c) aR_3b si et seulement si $a \geq b$.

(d) aR_4b si et seulement si $a \equiv_2 b$.

(e) aR_5b si et seulement si $a \equiv_3 b$.

Rb3 Soient $A = \{0, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$ deux ensembles. Représenter graphiquement les relations $R_i \subseteq A \times B$ dans les cas suivants :

(a) aR_1b si et seulement si $a = b$.

(b) aR_2b si et seulement si $a - b = 1$.

(c) aR_3b si et seulement si $a \geq b$.

(d) aR_4b si et seulement si $a \equiv_2 b$.

(e) aR_5b si et seulement si $a \equiv_3 b$.

(f) aR_6b si et seulement si $a \neq b$.

(g) aR_7b si et seulement si $a \not\equiv_2 b$.

Rb4 Représenter graphiquement les relations $R_i \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

(a) aR_1b si et seulement si $a = b$.

(b) aR_2b si et seulement si $a - b = 2$.

(c) aR_3b si et seulement si $a \geq b$.

(d) aR_4b si et seulement si $a < b$.

(e) aR_5b si et seulement si $a \equiv_2 b$.

(f) aR_6b si et seulement si $a \neq b$.

Rb5 Déterminer si les relations suivantes, définies sur un ensemble de personnes, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a, b) \in R_1$ ssi a est plus grand que b.

(b) $(a, b) \in R_2$ ssi a et b sont nés le même jour.

(c) $(a, b) \in R_3$ ssi a a le même prénom que b.

(d) $(a, b) \in R_4$ ssi a et b ont un grand-parent commun.

Rb6 Déterminer si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a, b) \in R_1$ ssi $a + b = 0$.

(b) $(a, b) \in R_2$ ssi $a - b \in \mathbb{Q}$.

(c) $(a, b) \in R_3$ ssi $a \cdot b \geq 0$.

(d) $(a, b) \in R_4$ ssi $(a = 1) \vee (b = 1)$.

Rb7 Déterminer si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{Z}$, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a, b) \in R_1$ ssi $a = b^2$.

(b) $(a, b) \in R_2$ ssi $a \equiv_7 b$.

(c) $(a, b) \in R_3$ ssi $a + 1 = b$.

(d) $(a, b) \in R_4$ ssi $a \cdot b = 0$.

Rb8 Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ un ensemble et $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ une relation sur A. Calculer R^2, R^3, R^4 et R^5. En déduire R^n, pour $n \geq 1$. Représenter R, R^2 par un graphe et R^3 par une matrice.

Rb9 Prouver que si R est une relation réflexive (resp. symétrique), alors R^n $(n \geq 1)$ est également réflexive (resp. symétrique).

Rb10 Soit A un ensemble et $R \subseteq A^2$ une relation binaire sur A. On dit que R est *irréflexive* si et seulement si pour tout élément $a \in A$, a n'est pas en relation avec lui-même.

(a) Donner un exemple de relation irréflexive sur $\mathbb{Z}$.

(b) Toute relation non réflexive est-elle irréflexive ? Justifier.

(c) Si R est irréflexive, R^{-1} est-elle irréflexive ? Justifier.

(d) Si R est irréflexive, R^n est-elle irréflexive quel que soit $n \geq 1$? Justifier.

Rb11 Soit $2^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ et R_1 la relation binaire définie par :

$$R_1 = \{(X,Y) \in 2^{\mathbb{Z}} \times 2^{\mathbb{Z}} \mid \text{ il existe } f : X \to Y \text{ injective et telle que } \mathrm{dom}(f) = X\}\,.$$

(a) Soit $X_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_3 1\}$, trouvez $Y_1 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_1 \neq X_1$ et $(Y_1, X_1) \in R_1$.

(b) Soit $X_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_5 2\}$, trouvez $Y_2 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_2 \neq X_2$ et $(X_2, Y_2) \in R_1$.

(c) La relation R_1 est-elle (*i*) réflexive ? (*ii*) transitive ? (*iii*) symétrique ? (*iv*) anti-symétrique ?

Rb12 Soit A un ensemble avec un seul élément. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse !

(a) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ est transitive.

(b) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ est réflexive.

(c) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ est symétrique.

Rb13 Soit A un ensemble avec deux éléments. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse !

(a) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ est transitive.

(b) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ qui est réflexive est transitive.

(c) Toute relation binaire $R \subseteq A \times A$ qui est symétrique est transitive.

Rb14 Soit A un ensemble avec trois éléments. Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) un exemple :

(a) d'une relation binaire sur A transitive et symétrique.

(b) d'une relation binaire sur A transitive et non symétrique.

(c) d'une relation binaire sur A non transitive et symétrique.

(d) d'une relation binaire sur A non transitive et non symétrique.

Rb15 On considère les relations sur $\mathbb{N}$ définies ci-dessous :

$$R_= = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = b\}\ ;\ R_{\neq} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \neq b\}\ ;\ R_< = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}\ ;$$
$$R_> = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}\ ;\ R_\leq = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}\ ;\ R_\geq = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \geq b\}.$$

Calculez les relations suivantes :

(a) $R_< \circ R_\geq$ (b) $R_< \circ R_\leq$ (c) $R_\leq \circ R_<$ (d) $R_\geq \circ R_>$ (e) $R_\leq \circ R_=$ (f) $R_= \circ R_<$
(g) $R_\geq \circ R_\leq$ (h) $R_\leq \circ R_\geq$ (i) $R_\leq \circ R_>$ (j) $R_\leq \circ R_{\neq}$ (k) $R_> \circ R_<$ (l) $R_< \circ R_>$
(m) $R_= \circ R_=$ (n) $R_{\neq} \circ R_{\neq}$ (o) $R_< \circ R_<$ (p) $R_\leq \circ R_\leq$ (q) $R_> \circ R_>$ (r) $R_\geq \circ R_\geq$
(m) $R_=^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$ (n) $R_<^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$
(o) $R_\leq^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$

Rb16 Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on considère la relation $R_k \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie ci-dessous :

$$R_k = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv_k b\}.$$

(a) Quel que soient k_1 et k_2, la relation $R_{k_1} \circ R_{k_2}$ est-elle réflexive ?

(b) Donnez si possible un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \neq b$ et $(a, b) \in R_2 \circ R_3$.

Rb17 Soit V un ensemble de villes du monde. On considère les différentes relations binaires sur V définies ci-dessous :

$(v_1, v_2) \in R_A$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en avion.
$(v_1, v_2) \in R_B$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en bateau.
$(v_1, v_2) \in R_T$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en train.
$(v_1, v_2) \in R_1$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en moins d'une heure, en utilisant tous les moyens de transports possibles.
$(v_1, v_2) \in R_2$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en moins de deux heures, en utilisant tous les moyens de transports possibles.

A partir des relations ci-dessus, construisez les relations suivantes :

(a) $S_1 \subseteq V^2$ telle que $(v_1, v_2) \in S_1$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en moins d'une heure en n'utilisant que le train.

(b) $S_1 \subseteq V^2$ telle que $(v_1, v_2) \in S_1$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en n'utilisant pas l'avion.

(c) $S_1 \subseteq V^2$ telle que $(v_1, v_2) \in S_1$ si et seulement si la ville v_2 est accessible de la ville v_1 en moins de deux heures en n'utilisant pas le bateau.

A votre avis, les affirmations suivantes sont-elles toujours vraies (quel que soit V). Justifiez votre réponse.

(d) R_A est une relation symétrique.

(e) R_A est une relation transitive.

(f) R_1 est une relation symétrique.

(g) R_1 est une relation transitive.

(h) $R_1 \subseteq R_2$.

Dans le cas où $V = \{\text{Moscou}, \text{New York}, \text{Flat island}\}$, et où Flat island est une petite île déserte (sans aéroport) proche de l'île Maurice.

(i) En faisant appel à votre bon sens, représentez sur un même graphe les relations R_A, R_B et R_T.

Rb18 Soit A un ensemble et $R \subseteq A \times A$ une relation binaire sur A, est-il toujours vrai que $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$? Justifiez votre réponse.

Relations fonctionnelles

Rf1 Parmi les relations suivantes, lesquelles sont fonctionnelles ?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$.
(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$.
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2\}$.
(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = x^3\}$.
(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$.
(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 7\}$.
(j) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = |x|\}$.
(k) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$.
(l) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = |y|\}$.
(m) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y^2 = x^2\}$.
(n) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y^2 = x\}$.

Rf2 En fonction des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminez quand la relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ est fonctionnelle, où $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$.

Rf3 Donner un exemple de relation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ qui est réflexive.

Rf4 Donner un exemple de relation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ qui est symétrique.

Rf5 Soit A un ensemble avec deux éléments.

(a) Combien y-a-t-il de relations binaires différentes sur A ?
(b) Donnez toutes les relations fonctionnelles sur A.
(c) Donnez toutes les relations fonctionnelles sur A qui sont symétriques.
(d) Donnez toutes les relations fonctionnelles sur A qui sont réflexives.

Rf6 Prouvez que la composition de deux relations fonctionnelles est une relation fonctionnelle.

Rf7 Donnez si possible un exemple d'ensemble A, de relations R_1 et R_2 telles que ni R_1, ni R_2 n'est fonctionnelle, mais $R_1 \circ R_2$ est fonctionnelle.

Rf8 Soit A un ensemble, $f : A \to A$ une fonction injective. On sait que la relation $R_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ est une relation fonctionnelle (vous ne devez pas le montrer).

(a) Prouvez que R_f^{-1} est également une relation fonctionnelle.
(b) La relation R_f^{-1} reste-t-elle fonctionnelle si f n'est pas injective ?

Relations d'équivalence

Re1 Parmi les relations suivantes sur $\{1, 2, 3\}$, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

(a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

(b) $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

(c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

(d) $R_4 = \{(1, 1), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$.

(e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.

Re2 Parmi les relations binaires sur un ensemble de personnes de l'exercice **Rb**5, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re3 Parmi les relations binaires sur $\mathbb{R}$ de l'exercice **Rb**6, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re4 Parmi les relations binaires sur $\mathbb{Z}$ de l'exercice **Rb**7, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re5 Décrire la partition engendrée par la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ définie par $R = \{(a, b) \mid a \equiv_5 b\}$.

Re6 Prouver que si R est une relation d'équivalence, c'est aussi le cas de R^{-1}.

Re7 *Représentation des rationnels.* Pour éviter de représenter le rationnel $\frac{1}{3}$ par $0.3333\ldots$, on peut l'encoder via le couple $(1, 3)$. Cependant, cette représentation comporte un inconvénient. En effet, par exemple, les couples $(1, 3)$ et $(2, 6)$ représentent le même rationnel ($\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$). Donner une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ qui permet de régler ce problème. Que représente alors le quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ par cette relation d'équivalence ?

Re8 Soit $A = \mathbb{Z}^2$ et R la relation binaire sur $\mathbb{Z}^2$ définie par :

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}.$$

(a) Prouver que R est une relation d'équivalence.

(b) Représenter la classe d'équivalence de $(1, 1)$.

(c) Calculer le quotient de $\mathbb{Z}^2$ par R.

Re9 Soit $A = \mathbb{R}^2$ et R la relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}.$$

(a) Prouver que R est une relation d'équivalence.

(b) Représenter la classe d'équivalence de $(0, 0)$.

(c) Représenter la classe d'équivalence de $(1, 1)$.

(d) Calculer le quotient de $\mathbb{R}^2$ par R.

Re10 Soit $A = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, défini par :

$$\mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 0 \leq i \leq n\}.$$

(a) On considère la relation binaire R_1 sur $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$R_1 = \{(p_1, p_2) \mid p_1(0) = p_2(0)\}.$$

i. Prouver que R_1 est une relation d'équivalence.

ii. Calculer le quotient de $\mathbb{R}[x]$ par R_1.

(b) On considère la relation binaire R_2 sur $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$R_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_1(i) = p_2(i), \text{ où } i^2 = -1\}.$$

i. Prouver que R_2 est une relation d'équivalence.

ii. Calculer le quotient de $\mathbb{R}[x]$ par R_2.

Re11 On considère la relation binaire $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $(a, b) \in R$ si et seulement si $a^2 = b^2$.

(a) Prouver que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(b) Calculer la classe d'équivalence de 0 pour R.

(c) Calculer la classe d'équivalence de 2 pour R.

(d) Calculer le quotient de $\mathbb{Z}$ par R.

Re12 La relation $R = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq \mathbb{N} \text{ et } X \cap Y \neq \emptyset\}$ est-elle une relation d'équivalence sur les parties non-vides de $\mathbb{N}$?

Re13 La relation $R_2 = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq \mathbb{N} \text{ et } X \cup Y \neq \emptyset\}$ est-elle une relation d'équivalence sur les parties non-vides de $\mathbb{N}$?

Re14 Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$. Pour tout f, $g \in F$, on définit la relation binaire $\sim$ sur F de la façon suivante :

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| > A \Rightarrow f(x) = g(x)).$$

(a) Donnez deux fonctions $f, g \in F$ telles que $f \neq g$ et $f \sim g$.

(b) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur F ?

Re15 Décidez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.
La relation binaire $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel qu'il existe p premier où $p|a$ et $p|b\}$ est une relation d'équivalence.

Re16 On considère la relation $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \text{ est pair}\}$.

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence.

(b) Décrivez les classes d'équivalences de R.

Re17 Soit S l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, i.e. $S = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}\}$. Et $R_2 \subseteq S^2$ la relation binaire définie par :

$$(f, g) \in R_2 \quad \text{si et seulement si} \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ est fini.}$$

(a) Donnez deux fonctions $f \neq g \in S$ telles que $(f, g) \in R_2$.

(b) Prouvez que R_2 est une relation d'équivalence sur S.

(c) Soit f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. On note $[f_0]$ la classe d'équivalence de f_0 pour R_2. Prouvez qu'il existe une fonction injective $F : \mathbb{Z} \to [f_0]$.

Relations d'ordre

Ro1 Parmi les relations suivantes sur $\{1, 2, 3\}$, lesquelles sont des relations d'ordre ?

(a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

(b) $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}$.

(c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$.

(d) $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

(e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

Ro2 Soit (A, R) est un ensemble ordonné, prouver que (A, R^{-1}) est un ensemble ordonné.

Ro3 Trouver deux éléments comparables et deux éléments incomparables dans les deux ensembles partiellement ordonnés ci-dessous :

$$(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq) \quad ; \quad (\{1, 2, 4, 6, 8\}, |).$$

Ro4 Soit R une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2) \wedge (b_1 \leq b_2).$$

Prouver que R est un relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. Cette relation d'ordre est-elle totale ? Justifier. Représenter l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a, b)R(3, 4)$, ainsi que l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(3, 4)R(a, b)$.

Ro5 A chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, on peut associer son écriture en base 2 (par exemple $5 = (101)_2$). On suppose $0 < 1$, classer selon l'ordre lexicographique les éléments suivants :

$$0,\ 01,\ 101,\ 1101,\ 1011,\ 1001,\ 1000,\ 1010.$$

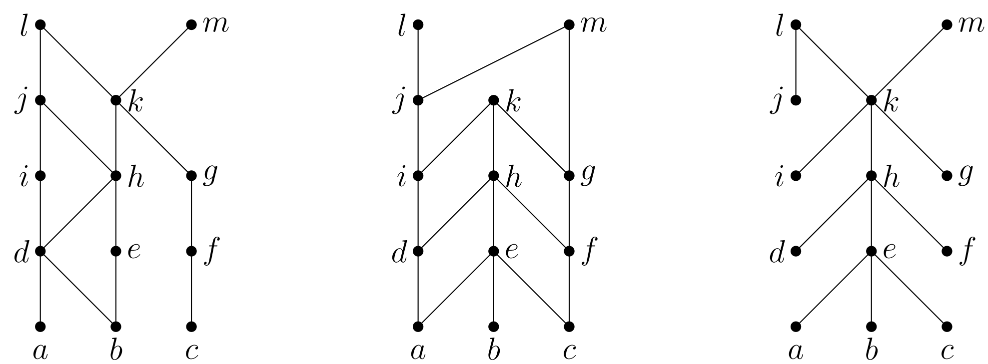
Associer à chaque élément ci-dessus le naturel qu'il représente en base 2. Comparer l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ et l'ordre lexicographique sur les représentations en base 2 des naturels.

Ro6 Tracer les diagrammes de Hasse des ensembles ordonnés ci-dessous :

$$(\{1,2,3,4,5,6\},|)\ ;\ (\{2,3,5,7,11\},|)\ ;\ (\{1,2,4,8,16\},|)\ ;\ (\{1,3,5,7,15,30,35\},|).$$

Ro7 Répondre aux questions suivantes pour chacun des ordres partiels représentés par les diagrammes ci-dessous :

1. Trouver les éléments maximaux.
2. Trouver les éléments minimaux.
3. Existe-t-il un maximum ?
4. Existe-t-il un minimum ?
5. Trouver les bornes sup. de $\{a,b,c\}$.
6. Trouver le supremum de $\{a,b,c\}$.
7. Trouver les bornes inf. de $\{f,g,h\}$.
8. Trouver l'infimum de $\{f,g,h\}$.
9. Trouver les bornes sup. de $\{f,g,h\}$.
10. Trouver le supremum de $\{f,g,h\}$.



Ro8 Donner un ensemble ordonné avec un maximum mais pas de minimum.

Ro9 Déterminer si $(\mathbb{N}_0,|)$ a un maximum ? un minimum ?

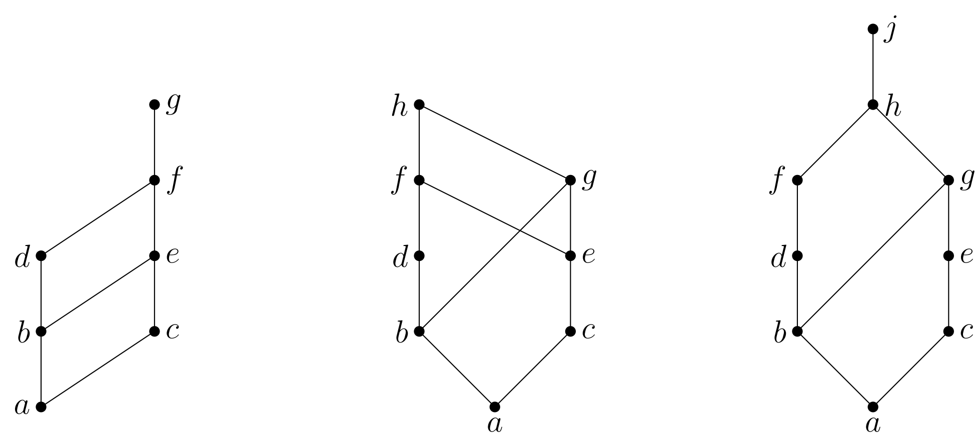
Ro10 Déterminer si les ensembles ordonnés suivants sont des treillis :

$$(\{1,3,6,9,12\},|)\ ;\ (\{1,5,25,125\},|)\ ;\ (\mathbb{Z},\leq).$$

Ro11 Prouver que tout sous-ensemble fini non vide d'un treillis a un infimum et un supremum.

Ro12 Prouver que tout ordre total est un treillis.

Ro13 Déterminer si les diagrammes de Hasse ci-dessous représentent un treillis.



Ro14 Prouver que si (A, R) est un treillis, alors (A, R^{-1}) est aussi un treillis.

Ro15 Prouver que tout treillis fini a un maximum et un minimum.

Ro16 Donner un exemple de treillis infini sans maximum, ni minimum.

Ro17 Donner un exemple de treillis infini avec un maximum et sans minimum.

Ro18 Donner un exemple de treillis infini sans maximum mais un minimum.

Ro19 Donner un exemple de treillis infini avec un maximum et un minimum.

Ro20 Vérifier que $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre lexicographique forme un ensemble bien ordonné.

Ro21 Trouver un ordre total compatible avec l'ordre de division sur $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$.

Ro22 Trouver un ordre total compatible avec les ordres donnés par les diagrammes de Hasse de la question **Ro**13.

Ro23 Soit A un ensemble et $\preccurlyeq \subseteq A^2$ une relation binaire sur A. On dit que $\preccurlyeq$ est un *pré-ordre* sur A si elle est réflexive et transitive.

(a) Donner un exemple de pré-ordre qui n'est pas un ordre.

(b) Soit A un ensemble et $\preccurlyeq$ un pré-ordre sur A. Prouver que la relation binaire $\sim$ définie ci-dessous est une relation d'équivalence sur A :

$$\sim = \{(a, b) \mid (a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq a)\}.$$

(c) On définit la relation binaire $\leq$ sur le quotient de A par $\sim$ de la façon suivante :

$$[a] \leq [b] \qquad \text{si et seulement si} \qquad a \preccurlyeq b.$$

Prouver que $\leq$ est bien définie (i.e. $\forall x \in [a],\ \forall y \in [b]\ ([a] \leq [b]) \Rightarrow (x \preccurlyeq y)$).

(d) Prouver que $\leq$ est une relation d'ordre sur le quotient de A par $\sim$.

Ro24 Représenter le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné fini qui possède un minimum mais pas de maximum et qui possède trois éléments $a_1,\ a_2,\ a_3$ tels que $\sup\{a_1, a_2, a_3\}$ n'existe pas. Un tel ensemble peut-il être un treillis ?

Ro25 Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R la relation binaire définie par :

$$R = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)\}.$$

(a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R$.

(b) Prouver que R est une relation d'ordre sur C.

(c) R est-elle une relation d'ordre totale ?

Ro26 Tracer le diagramme de Hasse de $(2^{\{2,3,5\}}, \subseteq)$.

Ro27 Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R_2 la relation binaire définie par :

$$R_2 = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) \leq g(x)\}.$$

(a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R_2$.

(b) R_2 est-elle une relation d'ordre sur C ?

Ro28 Déterminer si la relation binaire $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ définie ci-dessous est une relation d'ordre :

$$(a_1, b_1) R_3 (a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2) \text{ ou } (b_1 \leq b_2).$$

Ro29 Décider si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier.
Soit A un ensemble, un pré-ordre sur A est une relation binaire réflexive et transitive. Tout pré-ordre sur A est aussi un ordre sur A.

Ro30 La relation $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ définit-elle un ordre sur $\mathbb{R}$?

Ro31 Soit $E = \{0, 1\}^3$ et R_3 une relation binaire sur E définie par :

$$(a_1, b_1, c_1) R_3 (a_2, b_2, c_2) \ \text{ si et seulement si } \ a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \text{ et } c_1 \leq c_2.$$

(a) Prouver que R_3 est un ordre sur E et tracer le diagramme de Hasse de (E, R_3).

(b) L'ensemble ordonné (E, R_3) possède-t-il un maximum ?

Ro32 Si $X \neq \emptyset$ est un ensemble fini, on note 2^X l'ensemble des parties de X. Etant donné $A \in 2^X$, on note $|A|$ le nombre d'éléments de A. Soit $R_X \subseteq 2^X \times 2^X$ la relation binaire définie par :

$$(A, B) \in R_X \ \text{ si et seulement si } \ |A| \leq |B|, \quad \text{où } A, B \in 2^X.$$

Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X est une relation d'ordre.

(b) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'ordre.

(c) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'équivalence.

Ro33 Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$, on munit E^2 de la relation binaire R_2 définie par :

$$R_2 = \left\{ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \in E^2 \times E^2 \mid a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \right\}.$$

(a) Prouvez que la relation R_2 est une relation d'ordre sur E^2.

(b) Tracez le diagramme de Hasse de (E^2, R_2).

Ro34 Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Un mot fini de longueur n sur Σ est une fonction $w : \{0, \ldots, n-1\} \to \Sigma$. Dans ce cas, on note $Dom(w)$ l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ et Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ. Un mot infini sur Σ est une fonction $w : \mathbb{N} \to \Sigma$. Dans ce cas, on note $Dom(w)$ l'ensemble $\mathbb{N}$ et Σ^ω l'ensemble des mots infinis sur Σ. On dira qu'un mot w_1 (fini ou infini) est un *sous-mot* d'un mot w_2 (fini ou infini) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $Dom(w_1) \subseteq Dom(w_2)$;
- il existe $F : Dom(w_1) \to Dom(w_2)$ telle que F est strictement croissante [1] et $w_1(n) = w_2(F(n))$, pour tout $n \in Dom(w_1)$.

On note $w_1 \preceq w_2$ si w_1 est un sous-mot de w_2.

(a) On considère les mots finis $w_1 : \{0, \ldots, 3\} \to \Sigma$ et $w_2 : \{0, \ldots, 5\} \to \Sigma$ définis ci-dessous.

$$w_1(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0, 1 \\ b & \text{si } n = 2, 3 \end{cases} \quad ; \quad w_2(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0, 2, 4 \\ b & \text{si } n = 1, 3, 5 \end{cases}$$

Le mot w_1 peut être représenté par la suite $w_1(0) \ldots w_1(3) = aabb$ et le mot w_2 par la suite $w_2(0) \ldots w_2(5) = ababab$. Montrer que w_1 est un sous-mot de w_2 (i.e., $w_1 \preceq w_2$).

(b) Donner (si possible) un mot fini $w_1 \in \Sigma^*$ et un mot infini $w_2 \in \Sigma^\omega$ tels que $w_1 \preceq w_2$.

(c) Donner (si possible) un mot infini $w_1 \in \Sigma^\omega$ et un mot fini $w_2 \in \Sigma^*$ tels que $w_1 \preceq w_2$.

(d) La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur Σ^* ?
- Si oui, s'agit-il d'un ordre total ?
- Si non, trouver un sous-ensemble infini de Σ^* totalement ordonné par $\preceq$.

(e) La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur Σ^ω ?
- Si oui, s'agit-il d'un ordre total ?
- Si non, trouver un sous-ensemble infini de Σ^ω totalement ordonné par $\preceq$.

(f) On note a^ω (resp. b^ω) le mot infini $w : \mathbb{N} \to \Sigma$ tel que $w(n) = a$ (resp. b) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $(ab)^\omega$ le mot infini $w : \mathbb{N} \to \Sigma$ tel que $w(n) = a$ si n est pair et $w(n) = b$ si n est impair. La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur l'ensemble $X = \{a, b, a^\omega, b^\omega, (ab)^\omega\}$?
- Si oui, tracer le diagramme de Hasse associé à $(X, \preceq)$.
- Si non, donner un sous-ensemble de X, contenant 3 éléments, sur lequel $\preceq$ est un ordre.

On note $w_1 \sim w_2$ si et seulement si $w_1 \preceq w_2$ et $w_2 \preceq w_1$.

(g) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur Σ^* ?
- Si oui, calculer la classe d'équivalence du mot $aabb$.
- Si non, donner un sous-ensemble infini de Σ^* sur lequel $\sim$ est une relation d'équivalence.

(h) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur Σ^ω ?
- Si oui, déterminer si la classe d'équivalence du mot a^ω est finie ou infinie.
- Si non, donner un sous-ensemble infini de Σ^ω sur lequel $\sim$ est une relation d'équivalence.

1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{N} \;\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Ro35 On fixe $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$) comme espace universel (aussi appelé espace ambiant). On définit les quatre ensembles suivants :

$$\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{N} \text{ tq } \exists n \in \mathbb{N}\ |X| \le n\} \quad , \quad \mathcal{B} = \mathcal{A}^c \quad ,$$
$$\mathcal{C} = \{X \subseteq \mathbb{N} \text{ tq } X^c \in \mathcal{A}\} \quad , \quad \mathcal{D} = \{\{x \in \mathbb{N} \text{ tq } \ 0 \le x \le n\} \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}.$$

On définit également deux relations binaires $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$:

$$X\mathcal{R}_1Y \text{ ssi il existe une injection } f : X \to Y \text{ (avec dom}(f) = X),$$
$$X\mathcal{R}_2Y \text{ ssi il existe une bijection } f : X \to Y \text{ (avec dom}(f) = X).$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) L'ensemble $\mathcal{B}$ est inclus à l'ensemble $\mathcal{C}$.

(b) L'ensemble $\mathcal{C}$ est inclus à l'ensemble $\mathcal{B}$.

(c) La formule $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall X \in \mathcal{C}\ x \in X$ est une tautologie.

(d) Il existe une fonction injective $F_1 : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ (avec $\text{dom}(F_1) = \mathbb{N}$).

(e) Il existe une fonction injective $F_2 : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ (avec $\text{dom}(F_2) = \mathbb{N}$).

(f) $\mathcal{R}_1$ est une relation réflexive et transitive sur $\mathcal{U}$.

(g) $\mathcal{R}_2$ est une relation réflexive et transitive sur $\mathcal{U}$.

(h) $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

(i) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$.

(j) $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{D}$.

(k) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}$.

(l) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{B}$.

Ro36 Soit $\mathcal{S} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\}$, l'ensemble des suites réelles. On définit quatre relations binaires $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ sur $\mathcal{S}$ de la façon suivante :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}_1\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ssi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le y_n\,;$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}_2\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ssi} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x_n \le y_n\,;$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}_3\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ssi} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 \quad x_n \le y_n\,;$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}_4\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ssi} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 \quad x_n = y_n\,.$$

Les relations $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ sont-elles (i) réflexives ? (ii) transitives ? (iii) symétriques ? (iv) antisymétriques ?

Ro37 Soit $\mathcal{Q} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}\}$, l'ensemble des suites rationnelles. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{Q}$ de la façon suivante :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ssi} \quad \text{la suite } (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\,.$$

(a) Donnez deux suites rationnelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x_n \ne y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle (i) un ordre sur $\mathcal{Q}$? (ii) une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}$?