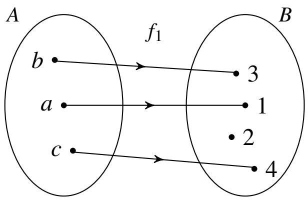
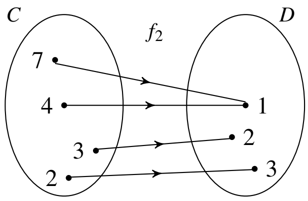
Exercices Mathématiques pour l'informatique I : Injectivité, surjectivité et bijectivité

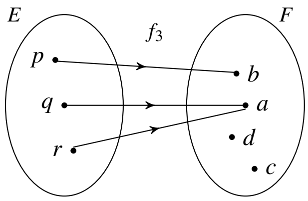
1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?



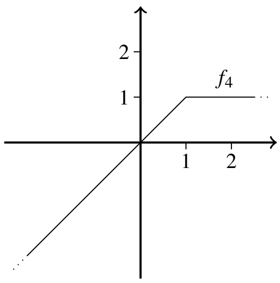
$f_1 : A \to B$



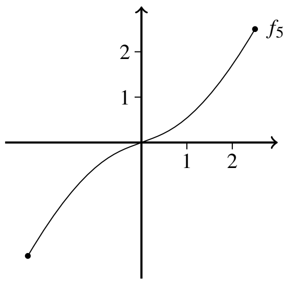
$f_2 : C \to D$



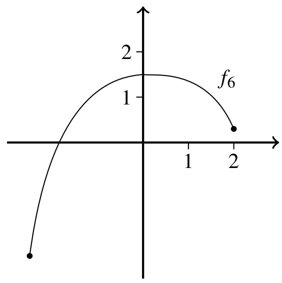
$f_3 : E \to F$



$f_4 : \mathbb{R} \to]-\infty, 1]$



$f_5 : [-2.5, 2.5] \to \mathbb{R}$



$f_6 : [-2.5, 2] \to \mathbb{R}$

$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$; $f_8 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$; $f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$

$f_{10} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ où $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$; $f_{11} : \mathbb{N} \to \{42\} : x \mapsto 42$

$f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$; $f_{13} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto x^3$; $f_{14} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x-2|$

$f_{15} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$; $f_{16} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x+1}{4x+1}$; $f_{17} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

$f_{18} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \text{ pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$; $f_{19} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} x+2 & \text{si } x \text{ pair} \\ x+4 & \text{sinon} \end{cases}$

2. Soient deux fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$. La composée de f par g, notée $g \circ f$, est la fonction $g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$. Montrez les affirmations suivantes.
   (a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
   (b) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
   (c) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   (d) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3. Soit A un ensemble. On note $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. Si $A = \{0, 1\}$, calculez $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$.

4. On pose : $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = \{7\}$. Calculez : $A \times B$, $\mathscr{P}(A \times C)$, $\mathscr{P}(A) \times C$.

5. Soient A et B deux ensembles. Etablissez les relations d'inclusion entre :
   (a) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(A \cup B)$,

(b) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(A \cap B)$.

6. Parmi les fonctions suivantes, déterminez celle qui est injective. Justifiez votre réponse.
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4$.
   (b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + 3x + 1$.
   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = |x^2 - 1|$.
   (d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $k(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{sinon.} \end{cases}$
   (e) Aucune des affirmations n'est vraie.

7. Parmi les fonctions suivantes, déterminez celle qui est surjective. Justifiez votre réponse.
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4$.
   (b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2 + 3x + 1$.
   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = |x^2 - 1|$.
   (d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $k(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{sinon.} \end{cases}$.
   (e) Aucune des affirmations n'est vraie.

8. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + x + 2$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui est correcte. Justifiez votre réponse.
   ☐ La fonction f est bijective.
   ☐ La fonction f est injective, mais n'est pas surjective.
   ☐ La fonction f est surjective, mais n'est pas injective.
   ☐ La fonction f n'est ni injective, ni surjective.

9. On considère la fonction $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ définie par $g(A, B) = \overline{A \cap B}$. Parmi les affirmations suivantes, cochez celle qui est correcte. Justifiez votre réponse.
   ☐ La fonction g est bijective.
   ☐ La fonction g est injective, mais n'est pas surjective.
   ☐ La fonction g est surjective, mais n'est pas injective.
   ☐ La fonction g n'est ni injective, ni surjective.

10. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
    (a) La fonction f est-elle injective ? Justifiez votre réponse.
    (b) La fonction f est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.
    (c) La fonction $g : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

11. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_a(x) = ax$. Déterminez l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est une fonction surjective.

12. Soit A un ensemble tel que $|A| = 1$ et $f : A \to \mathbb{R}$. La fonction f est-elle nécessairement injective ? Justifiez votre réponse.

13. Soit une fonction $f : A \to B$. On sait que f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = B$.
    (a) Montrez que f est surjective si et seulement si la formule suivante est vérifiée :

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \qquad f(x) = y\,.$$

(b) Donnez une formule qui traduit le fait que f n'est pas surjective.

14. Soit A et B deux ensembles finis tels que $|A| = |B|$ et f une fonction de A vers B. Prouvez que f est une bijection si et seulement si f est une injection si et seulement si f est une surjection.

15. On considère la fonction $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ définie ci-dessous.

$$g(X,Y) = X \cap Y^c.$$

(a) Donnez $g(\{1,2,3\},\{3,4,5\})$.

(b) La fonction g est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

(c) La fonction g est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.