Exercices Mathématiques pour l'informatique II : Droites et plans dans l'espace

1. Donnez une équation cartésienne et une équation paramétrique des trois plans OXY, OXZ et OYZ. Expliquez votre démarche.

2. (a) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1,-1,2)$ et parallèle au plan OYZ.

   (b) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-1,2,3)$ et parallèle à la droite $D' \equiv (x,y,z) = (\lambda+2,-4,5\lambda+1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-5,-1,2)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x-3z=4$.

   (d) Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point $(0,2,4)$ et parallèle au plan γ d'équation $3x-2y+5z=7$.

3. Résolvez les systèmes suivants en fonction du paramètre réel λ. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-3y+z &=& 0 \\ \lambda x &=& \lambda(y+z) \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x-4y+5z &=& 1 \\ \lambda x+\lambda y+\lambda z &=& 0 \end{array}\right.$

4. Soient le point $p=(1,2,-3)$, la droite $D \equiv x-1 = \frac{y}{2}-1 = \frac{-1-z}{3}$ et le plan $\alpha \equiv y+z=3$. Écrivez une équation cartésienne du plan π contenant p, parallèle à D et perpendiculaire à α. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

5. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1,0,-4)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=-7$.

6. (a) Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1,x_2,x_3) qui sont orthogonaux au vecteur $(2,1,3)$. Décrivez géométriquement cet ensemble.

   (b) Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1,x_2,x_3) qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(2,1,3)$ et $(-1,0,5)$. Décrivez géométriquement cet ensemble.

7. Soient le plan $\beta \equiv 4x+2y-z=1$ et le point $p=(0,-2,3)$. Donnez une équation paramétrique de la droite D passant par p et perpendiculaire à β. Déterminez ensuite, s'il existe, le point d'intersection de D avec β.

8. Soient les ensembles

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \text{ est un vecteur qui est simultanément orthogonal aux vecteurs}$$
$$(1,-2,3) \text{ et } (4,-1,-1)\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\right\}$$

   (a) A-t-on $(0,0,0) \in A$?
   (b) A-t-on $(-3,0,1) \in A$?
   (c) A-t-on $(\frac{-5\pi}{13}, -\pi, \frac{-7\pi}{13}) \in B$?
   (d) A-t-on $(1,2,3) \in B$?
   (e) A-t-on $A \subseteq B$?
   (f) A-t-on $B \subseteq A$?

9. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$.

10. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(0,-4,1)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $x+y+2z=-1$ et $3x+2y+3z=5$.

11. Soient le point $p=(4,-2,1)$, la droite $D \equiv -x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ et le plan $\beta \equiv x-z=2$. Donnez une équation cartésienne du plan γ passant par le point p, parallèle à D et perpendiculaire à β.

12. Soient les droites

$$D_1 \equiv (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(-2,1,3)$$
$$D_2 \equiv (x,y,z) = (0,3,4) + \mu(-1,0,5)$$

    où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Recherchez, s'il existe, le point d'intersection de ces deux droites.

13. Soient le plan $\alpha \equiv x-2y+3z=\sqrt{2}$ et la droite D dont un système d'équations cartésiennes est $1+x=2y+1=\frac{z}{\lambda^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}_0$. Pour quelles valeurs de λ la droite D est-elle parallèle au plan α ?