

Wykład 5: Prawa potęgowe - gdzie można je znaleźć i co oznaczają?

Fizyka komputerowa 2005
Katarzyna Weron,
kweron@ift.uni.wroc.pl

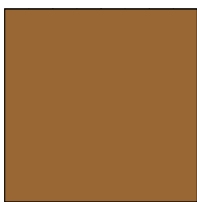
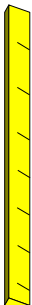
Plan

- Co już wiemy?
- Gdzie można znaleźć prawa potęgowe?
- Powszechne Prawo Zipfa.
- Co oznaczają prawa potęgowe
 - ◆ Skalowanie
 - ◆ Zjawiska krytyczne
 - ◆ Samoorganizująca się krytyczność



(c) 2003 K. Weron

Co to jest wymiar?



skala s	liczba n
1/8	64=4^4
1/4	16=4^2
1/2	4=4^1
1	1=4^0

$$n = s^{-D} \Rightarrow 4^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-kD} \Rightarrow 4 = 2^D \Rightarrow D = 2$$

(c) 2003 K. Weron

Skala podwójnie logarytmiczna (log-log scale)

$$y = a \cdot x^b$$

$$\log y = \log a + b \log x$$

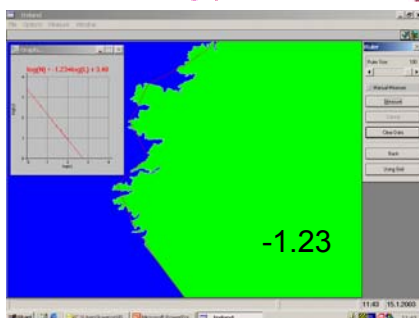
$$y' = \log y, x' = \log x$$

$$y' = \log a + bx'$$

nachylenie prostej

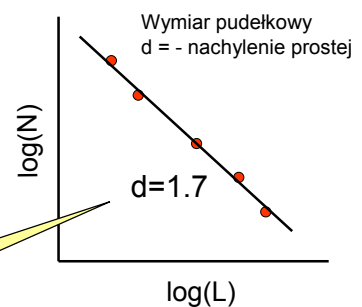
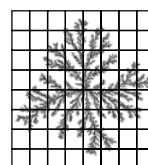
(c) 2003 K. Weron

Irlandia w log-log



(c) 2003 K. Weron

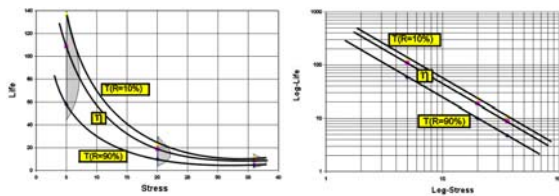
Narysuj to w log-log'u



Fraktal !

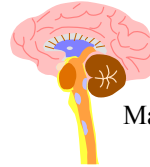
(c) 2003 K. Weron

Długość życia zależy od stresu - jaka to zależność?



(c) 2003 K. Weron

Skalowanie allometryczne



Rozmiar mózgu

Małpy

$$0.025 M^{0.66}$$

Małpy
człokształtne
Człowiek

$$0.035 M^{0.66}$$

$$0.085 M^{0.66}$$

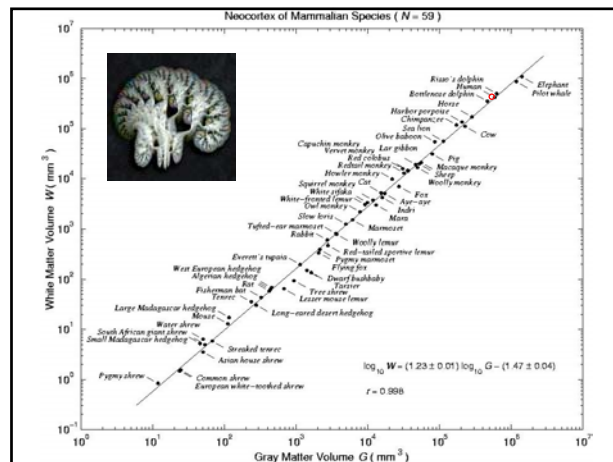
(c) 2003 K. Weron

Co się jeszcze skaluje u zwierząt?

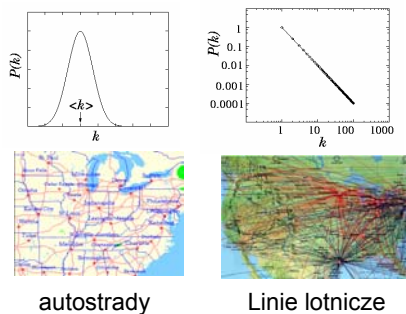
- Zależność tempa metabolizmu od masy ciała (u ssaków $b=0.74$)
- Masa jaja od masy ciała ptaków ($b=0.77$)
- Czas inkubacji od masy ciała ($b=0.165$)
- Długość życia ssaków w niewoli od masy ciała ($b=0.2$)
- Długość życia od wielkości mózgu



(c) 2003 K. Weron

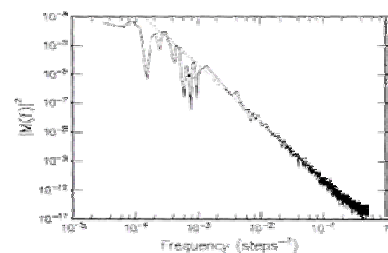
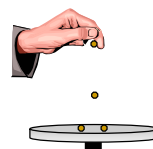


Rozkład Poissona i Potęgowy



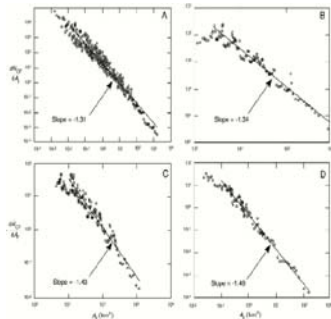
(c) 2003 K. Weron

Rozkład lawin



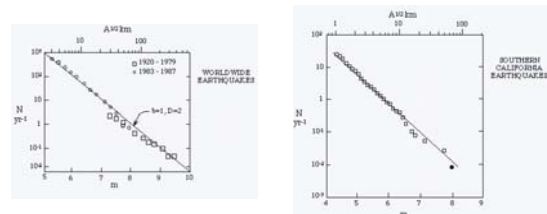
(c) 2003 K. Weron

Rozkład pożarów lasów



(c) 2003 K. Weron

Rozkład trzęsień Ziemi



(c) 2003 K. Weron

Prawo Zipfa

Profesor lingwistyki (germanistyki) na Harvardzie George Kingsley Zipf (1902-1950), rozkład słów:

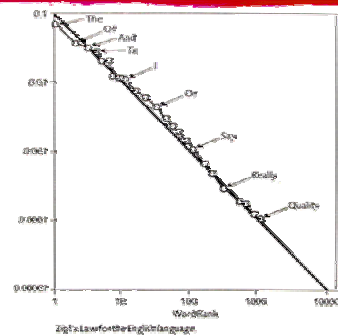
$$P_i \approx i^{-a}, a \approx 1$$

Przykład: 423 artykułów z TIME (245,412 słów):

- 1) "the" – 15861 (częstość 9%)
- 2) "of" – 7239
- 3) "to" – 6331

(c) 2003 K. Weron

Prawo Zipfa dla języka angielskiego



(c) 2003 K. Weron

Diagnozowanie schizofrenii

- Halucynacje, urojenia, trudności w komunikacji
- Apatia, nieuwaga, otępienie
- Ubóstwo mowy
- Wykładnik w analizie Zipfa $a < 0.7$

$$P_i \approx i^{-a}, a \approx 1$$

(c) 2003 K. Weron

Wyniki Brylinga i Fishera 2004

- Wszystkie książki Tolkienu $a=1.47895$
- Książki Sapkowskiego: Czas pogardy, Ostatnie życzenie & Miecz $a=0.92197$
- Program: Model Zipf.exe

(c) 2003 K. Weron

Wszegobecne prawo Zipfa

- Liczba ludności w miastach
- Częstość nazwisk w książce telefonicznej
- Dochody przedsiębiorstw
- Liczba spółek w państwach
- Rozkład trzęsień Ziemi
- Rozkład wielkich wymiarów

$$P_i \approx i^{-a}$$

(c) 2003 K. Weron

Prawo Zipfa w muzyce

Częstość interwału o długości i półtonów:

1. Toccata fis-moll Bacha $b=1.34$
2. Sonata F-dur Mozarta $b=1.73$
3. Invention nr 1 C-dur Bacha $b=2.42$
4. Stockhausena (współczesna) - nie ma Zipfa



(c) 2003 K. Weron

Poprawione prawo Zipfa (Mandelbrot)

$$s_R = P(R + \rho)^{-1/t}$$

ranga

J.J. Ramsden, G. Kiss-Haypal, Physica A 277 (2000) 220: Rozkład wielkości firm w 20 różnych Państwach (1994)

(c) 2003 K. Weron

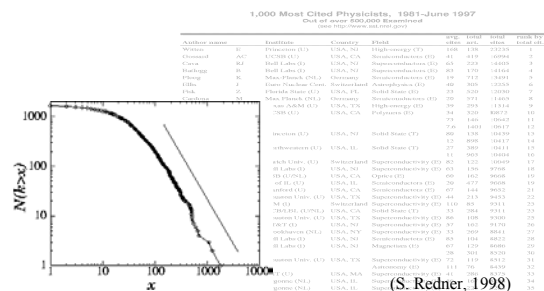
Kondycja ekonomiczna Państw na podstawie wykładnika t

Węgry	1.40
Stany Zjednoczone	1.25
Chiny	1.20
Francja	1.06
Austria	1.04
Hiszpania	0.98
Norwegia	0.97
Niemcy	0.96
Belgia	0.91
Szwajcaria	0.91
Dania	0.88
Brazylia	0.86
Izrael	0.85
Japonia	0.85
Włochy	0.85
Wielka Brytania	0.83
Szwecja	0.79
Kanada	0.75
Holandia	0.65

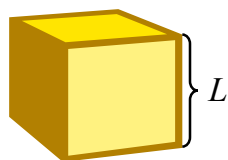


(c) 2003 K. Weron

Rozkład cytowań prac naukowych z fizyki



Wiemy nawet więcej ...



$$S = 6 \times L^2 \approx L^2$$

$$V = L^3$$

$$S \approx V^{2/3}$$

Skalowanie ułatwia życie!

(c) 2003 K. Weron

Skalowanie w architekturze



mocniejsze
fundamenty,
grubsze ściany



(c) 2003 K. Weron

Pamiętacie skalowanie allometryczne?

- Zależność tempa metabolizmu od masy ciała (u ssaków $b=0.74$)
- Masa jaja od masy ciała ptaków ($b=0.77$)
- Czas inkubacji od masy ciała ($b=0.165$)
- Długość życia ssaków w niewoli od masy ciała ($b=0.2$)
- Długość życia od wielkości mózgu



(c) 2003 K. Weron

Niezależność od skali

$$f\left(\frac{x}{a_0}\right) = \left(\frac{x}{a_0}\right)^b, a_1 = na_0 (1m = 100cm)$$

$$f\left(\frac{x}{a_1}\right) = \left(\frac{x}{a_1}\right)^b = \left(\frac{x}{na_0}\right)^b = n^{-b} \left(\frac{x}{a_0}\right)^b$$



$$V(cm) = 3^3$$

$$V(m) = (0.03)^3 = 0.01 \times 3^3 = 0.01 \times V(cm)$$

(c) 2003 K. Weron

Eksponenta też się często zdarza ...

$$f\left(\frac{x}{a_0}\right) = \exp\left(\frac{x}{a_0}\right), a_1 = na_0 (1m = 100cm)$$

$$f\left(\frac{x}{a_1}\right) = \exp\left(\frac{x}{a_1}\right) = \exp\left(\frac{x}{na_0}\right)$$

(c) 2003 K. Weron

Jakie są różnice?

- Zarobki ludzi – prawo potęgowe
- Wzrost ludzi – eksponenta



Prawo potęgowe



eksponenta

(c) 2003 K. Weron

Co ma prawo potęgowe do krytyczności?

Funkcja korelacyjna

$$G(r) = \langle S_i S_{i+r} \rangle = \frac{\exp(-r/\xi)}{r^a}$$

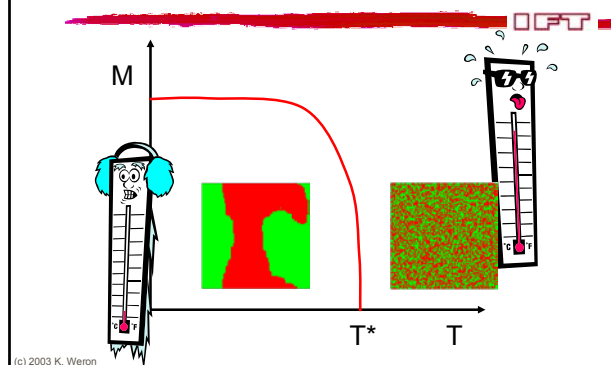
promień korelacji

$$T = T_c \Rightarrow \xi = \infty \Rightarrow G(r) \approx r^{-a}$$

Temperatura krytyczna

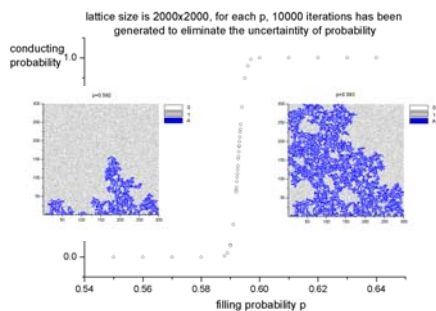
(c) 2003 K. Weron

Przykład krytyczności: przejście ferro-paramagnetyk



(c) 2003 K. Weron

Przykład krytyczności: próg perkolacji



(c) 2003 K. Weron

Krytyczność i prawo potęgowe

- Punkt Curie (ferro-paramagnetyk): funkcja korelacyjna spin-spin
- Perkolacja: funkcja korelacyjna gęstości, rozkład wielkości klastrow
- Samoorganizująca się krytyczność: rozkład wielkości lawin, trzęsień ziemi, wielkich wymiarów

(c) 2003 K. Weron

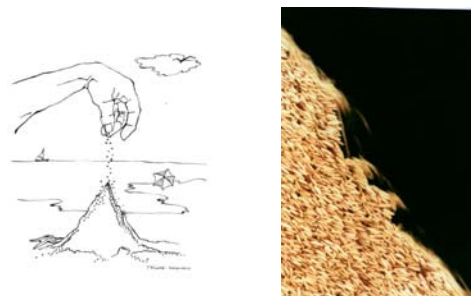
Przykład krytyczności: samoorganizująca się krytyczność



- Istnieje graniczny kąt = krytyczny
- Dla krytycznego kąta rozkład lawin jest potęgowy
- Prawo Gutenberga-Richtera (1945) dla rozkładu trzęsień Ziemi ($t=3/2$)
- Wielkie wymierania (Raup, Science 1986)

(c) 2003 K. Weron

Lawiny i Samoorganizująca się krytyczność SOC



(c) 2003 K. Weron

Dlaczego samoorganizująca się krytyczność (SOC)?

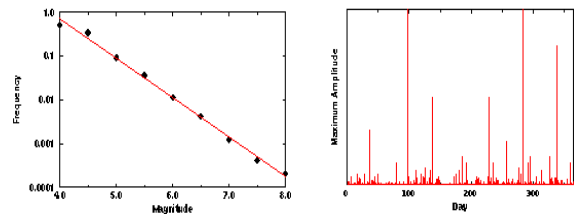


Pryzma piasku samoistnie ewoluje do stanu krytycznego, w którym minimalne zaburzenie może spowodować katastrofę.

Rozkład lawin jest potęgowy

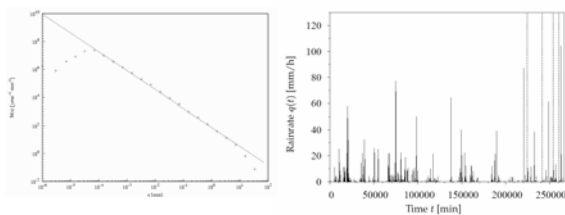
(c) 2003 K. Weron

Jak na to patrzeć? - trzęsienia Ziemi



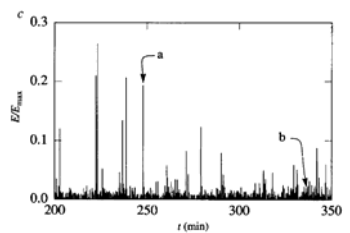
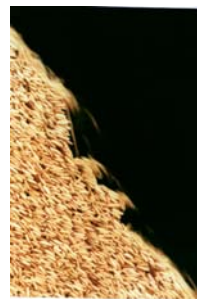
(c) 2003 K. Weron

Jak na to patrzeć? - deszcze



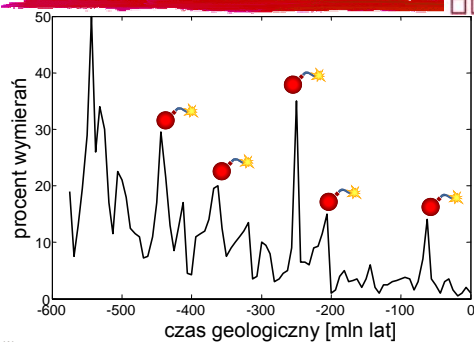
(c) 2003 K. Weron

Stos ryżu (Rice piles)



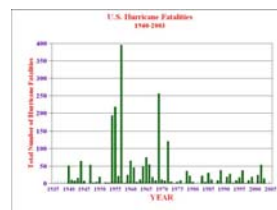
(c) 2003 K. Weron

Wymierania gatunków morskich - przykład SOC?



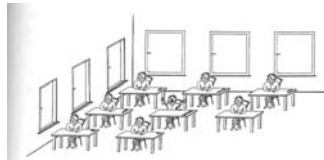
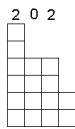
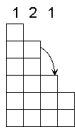
(c) 2003 K. Weron

Huragany i ... wiele innych



(c) 2003 K. Weron

Per Bak, Chao Tang i Kurt Wiesenfeld, 1988



z P. Bak, How Nature Works

(c) 2003 K. Weron

Sandpile models

P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A 38, 364 (1988)

stability condition

$$h_i < h_c$$

toppling rule for unstable site i

$$h_i \rightarrow h_i - \sum_{\langle i,j \rangle} 1$$

$$h_j \rightarrow h_j + 1$$

for all neighboring pairs $\langle i, j \rangle$.

driving rule: randomly choose k ,

$$h_k \rightarrow h_k + 1$$

(c) 2003 K. Weron

Illustration of one avalanche

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	3	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	4	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	3	0
1	3	0	4	2
3	1	4	2	1
0	2	2	1	2

1	2	0	2	3
2	3	3	4	0
1	3	2	0	3
3	2	0	4	1
0	2	3	1	2

1	2	0	3	3
2	3	4	0	1
1	3	2	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	2	1	3	3
2	4	0	1	1
1	3	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	0	1	1	1
1	4	3	2	3
3	2	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	1	1	1	1
2	0	4	2	3
3	3	1	0	2
0	2	3	2	2

1	3	1	3	3
3	1	2	1	1
2	1	0	3	3
3	3	2	0	2
0	2	3	2	2

(c) 2003 K. Weron

Zastanówcie się!



- Prawa potęgowe wokół nas
- Niezależność od skali
- Krytyczność – małe zaburzenie może spowodować katastrofę
- Dlaczego Fizycy kochają prawa potęgowe?

(c) 2003 K. Weron