Stokastisk modellering prosjekt 2

Jo Andersson Stokke og Ole Kristian Skogly

November 2020

1a) For å forklare at $\{ X(t) : t \geq 0\}$ er en kontinuerlig-tid markov kjede så må vi argumentere utifra følgende kriterierer som $P_{ij}(t)$ må tilfredsstille:

$$P_{ij}(t) \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{N} P_{ij}(t) = 1 \ , i, j = 0, 1, ..., N, \tag{2}$$

og

$$P_{ik}(s+t) = \sum_{j=0}^{N} P_{ij}(s) P_{jk}(t) \tag{3}$$

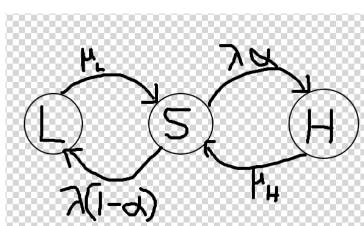
for $t, s \geq 0$ (Chapman-Kolomororov relasjon).
Vi postulerer itillegg at

$$\lim_{t \to 0^+} P_{ij}(t) = 1, i = j \tag{4}$$

og $= 0, i \neq j$.

Første betingelse kan forklares ved at at man for hver substans har du med en viss sansylighet sjanse for å forbli i samme state eller endre state, og disse sannsynlighetene avhenger kun av hvilke state du er i. Dette ser vi igjen ved at vi har fått oppgitt at soujurn time i hver state er exponensialfordelt, som nettop har denne egenskapen at den er memoryless. Disse sannsynlighetene er altså stasjonære i tid. Alt dette må summeres til sannsynlighet 1, dermed er også betingelse (2) oppfylt. Må også ha at betingelse (3) og (4) er oppfylt.

Nedenfor er "the transition diagram" tegnet:



I "the transition diagram" over betegner tilstanden L "lightly infected", tilstanden S "susceptible" og H "heavily infected".

Hoppsannsynlighetene mellom hver tilstand trenger ikke å beregnes ettersom de kan leses av oppgaveteksten. Av det får man at sannsynlighetene mellom hver tilstand er følgende: $P_{SL} = 1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.9$, $P_{SH} = \alpha = 0.1$, $P_{LS} = 1$ og $P_{HS} = 1$. Her er hoppsannsynlighetene null hvis man går fra og til samme tilstand siden man på et tidspunkt må forlate tilstanden man befinner seg i. Årsaken til at sannsynligheten er 1 ved å gå fra tilstand L eller H til S er at man før eller siden må bli frisk igjen.

I oppgaveteksten er det oppgitt at $\frac{1}{\alpha} = 100$ dager, $\frac{1}{\mu_L} = 7$ dager og $\frac{1}{\mu_H} = 20$ dager. Ved å få hver parameter alene får man at "the transition rates" mellom hvert par av tilstander blir følgende: $\lambda = \frac{1}{100} = 0.01$, $\mu_L = \frac{1}{7}$ og $\mu_H = \frac{1}{20}$. I figuren over er "The jump probabilities" og "the transition rates" mellom hver states tegnet opp.

1b)
I denne deloppgaven brukes det "balance equations" for å regne ut den langsiktige gjennomsnittlige tiden man vil bruke i hver tilstand. Vi starter med å se på tilstand L, der vi får en ligning ved å se på "state out" = "state in":

$$\mu_L \cdot \pi_L = (1 - \alpha) \cdot \lambda \pi_s \tag{5}$$

Vi gjør det samme for tilstand H, der vi setter opp en ligning basert på "state out" = "state in".

$$\mu_H \cdot \pi_H = \lambda \alpha \pi_s \tag{6}$$

Vet at sannsynlighetene for å være i hver tilstand må summeres opp til 1, dermed vil vi også få ligningen:

$$\pi_S + pi_L + \pi_H = 1 \tag{7}$$

Dermed vil man få et ligningssett som inkluderer ligning (5)-(7) som må løses med hensyn på sannsynlighetene π_S, π_L og π_H for å være i hver enkelt tilstand over en lengre tidsperiode. Starter først med å omformulere uttrykket i ligning (5), slik at man får et utrykk for sannsynligheten π_L:

$$\pi_L = \frac{(1 - \alpha) \cdot \lambda \pi_S}{\mu_L} \tag{8}$$

Skriver videre om ligning(6) også for å få et uttrykk for sannsynligheten π_H:

$$\pi_H = \frac{\lambda \alpha \pi_S}{\mu_H} \tag{9}$$

Setter dermed inn uttrykkene (8) og (9) inn i ligning (5):

$$1 = \pi_S + \frac{(1 - \alpha) \cdot \lambda \pi_S}{\mu_L} + \frac{\lambda \alpha \pi_S}{\mu_H} \tag{10}$$

Omformulerer videre om på denne ligningen slik at man ender opp med et uttrykk for sannsynligheten π_S

$$\pi_s = \frac{1}{1 + \frac{(1-\alpha)\cdot\lambda}{\mu_L} + \frac{\lambda\alpha}{\mu_H}} \tag{11}$$

Ved å sette inn verdier i utrykket for π_S, der de ulike verdiene er gitt fra oppgave a, får man at $\pi_S \approx 0,9234$.
Kan videre sette verdien som ble utregnet for π_S inn i uttrykkene (8) og (9) for henholdsvis π_L og π_H. Gjøres det får man at $\pi_L \approx 0.0582$ og $\pi_H \approx 0.0185$. Verdiene som nå ble regnet ut er sannsynligheten for å befinne seg i hver enkelt tilstand på en tid t etter lang tid. For å finne ut hvor lenge et individ i løpet av et år befinner seg i hver enkelt tilstand så multipliserer man hver enkelt sannsynlighet med antall dager i året. Får dermed at man befinner seg i tilstanden H i $\pi_H \cdot 365$ dager ≈ 6.74 dager og i tilstanden L i $\pi_L \cdot 365$ dager ≈ 21.23 dager.

1c)

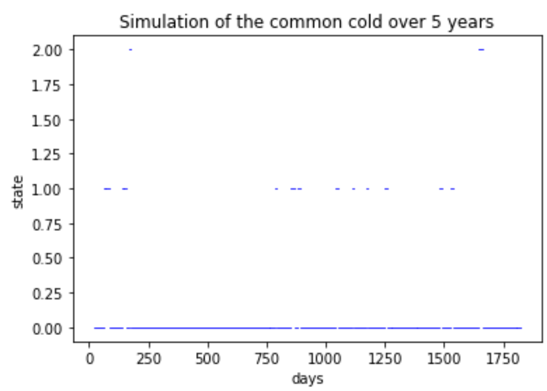


Figure 1: En realisering av simulering over 5 år

1d)
Se table 1

Table 1: Tid i hver state etter 1000 år

State	S	L	H
Simulation estimate	0.93	0.05	0.02
Balance equations	0.92	0.06	0.02

Ser at simulasjonen stemmer godt overens med beregningene og at man i meste parten av tiden befinner seg i tilstand S, altså at man er frisk.

1e)

Tar utgangspunkt i følgende "transition matrix" når "the jump probabilities" benyttes for å bruke "the first step analysis": $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (1-\alpha) & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrisen tar utgangspunkt i "the jump probabilities" uten "rates" fra "the transition diagram". For "first step analysis" når man har kontinuerlig tid Markov kjede så tar man utgangspunkt i:

$$v_i = E[S_i] + \sum_{j=1}^{3} V_j \cdot P_{ij} \tag{12}$$

, hvor $1, 2$ og 3 som inngår i summen står for henholdsvis tilstand L,S og H.$E[S_i]$ er "the sojourn time". Starter med å sette $V_H = 0$, siden vi ønsker å avslutte i denne tilstanden. Ender dermed opp med følgende to ligninger for henholdsvis V_L og V_S:

$$V_L = E[S_L] + V_L \cdot P_{LL} + V_S \cdot P_{LS} + V_H \cdot P_{LH} = E[S_L] + V_S \cdot P_{LS} = \frac{1}{\mu_L} + V_S \tag{13}$$

$$V_S = E[S_S] + V_L \cdot P_{SL} + V_S \cdot P_{SS} + V_H \cdot P_{SH} = E[S_S] + V_L \cdot P_{SL} = \frac{1}{\mu_L} + V_L \cdot (1-\alpha) \tag{14}$$

Ved å løse dette ligningssystemet for V_S og innsatt verdier så ender vi opp med at $V_S = 1063$ dager. Altså kan man forvente det er 1063 dager mellom hver "heavy infections".

Estimert forventet tid mellom to større forskjølelser fra:
Simulasjon på 10000 dager: 1067.67 dager

1f)

Y(t) = infected i tidspunkt t$\geq$ 0.
Vi har i dette tilfellet et diskret og endelig state space = [0,n]. Her er n = populasjonsstørrelsen og state i er antall smittede. Vi har fått oppgitt at "the durations of susceptible and infected periods are independant exponential distributed" med forventning λ og μ henholdshvis. I et intervall [0,h] medfører dette derfor sannsynligheten for å få fra state i til i+1

$$P_{i,i+1}(h) = P(S_i < 1 - \exp(\lambda_i h)) = 1 - 1 + \lambda_i h + o(h). = \lambda_i h + o(h) \tag{15}$$

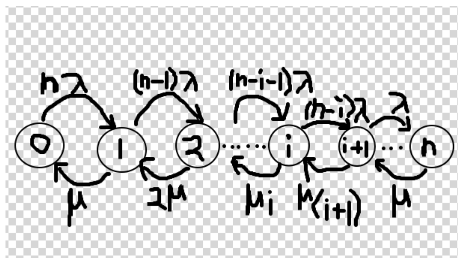
Helt likt kan vi formulere sannsynligheten for hoppet i til i - 1 i tidsintervallet [0,h].

$$P_{i,i-1}(h) = P(S_i < 1 - \exp(\mu_i h)) = 1 - 1 + \mu_i h + o(h). = \mu_i h + o(h) \tag{16}$$

Hvis de eneste alternativene er å gå fra i til i+1, i til i-1 eller bli i i på et intervall [0,h] når h går mot null så må derfor

$$P_{i,i}(h) = P(S_i < 1 - 1 + \exp(\lambda_i + \mu_i h)) = 1 - 1 + 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h). = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \tag{17}$$

Korrektheten ved denne antagelsen kommer av at alle kvadratiske termer av h er forsvinnede små når h er liten. Dette bevises ikke grundigere her. Setter vi h = 0 får vi da $P_{i,j}(0)$=δ_{ij} Kun syke kan bli friske, og kun friske kan bli syke. Også oppgis det at individer blir syke og friske uavhengig av hverandre. Av dette så kan vi se at fødselsraten må vokse lineært med antall personer som er friske, og dødsraten lineært med antall personer som er syke. Altså: λ_i = nλ, μ_i = iμ Legg da merke til at $\mu_i = 0$, da ingen kan bli friske om ingen først er syke. Vi tilfredstiller da alle kriteriene for at prosessen er en Birth Death process. Transitiondiagrammet blir da:



1g) Bruker "little´s law" til å finne gjennomsnittstiden av behandling krevd så gjennomsnittsantallet av individer på sjukehuset ikke overstrider kapasiteten. Har at n = befolkningen = $5.26 \cdot 10^6$ personer og i = antall syke = $5.26 \cdot 10^6 \cdot \frac{7}{107}$ (der 7 betegner antall dager syk og 107 er antall dager syk og frisk). Bruker nå "little´s law":

$$L = W \cdot \lambda^* \tag{18}$$

Her betegner L gjennomsnittsantall individer på sykehus, $\lambda*$ "the rate" av individer som ankommer sykehuset og W er den gjennomsnittstiden som vi ønsker å finne som er forklart over.

Vi har at $L = 2000$ siden vi tenker oss at kapasiteten alltid er nådd. Vi har at $\lambda^* = \lambda \cdot (n-1) \cdot 0.01$, der vi har multiplisert med 0.01 siden vi antar at sannsynligheten for at hver "infection" resulterer i innleggelse er 1 prosent. Raten λ har vi er $\frac{1}{100}$. Ved å sette inn verdier for λ^* får vi at $\lambda^* \approx 491.6$. Oppgaven etterspør W, dermed må får man ved å omforme utrykket for "little's law" at:

$$W = \frac{L}{\lambda^*} = \frac{2000}{491.6} dager \approx 4 dager. \tag{19}$$

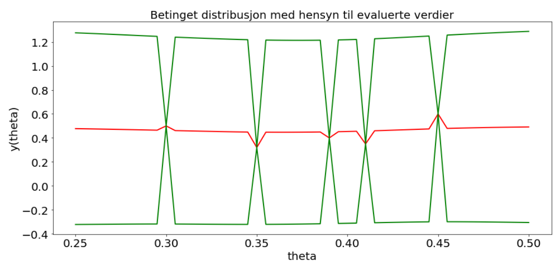
Altså må det i gjennomsnitt maksimalt ta omtrent 4 dager å bli behandlet på sjukehuset krevd at gjennomsnittsantallet av indevider på behandling ikke overstrider kapasiteten.

2a) Vi ønsker å beregne betinget forventning og kovariansmatrise for prosessen ved 51 "grid points" betinget på fem evalueringspunkter. Bruker da følgende sammenhenger:

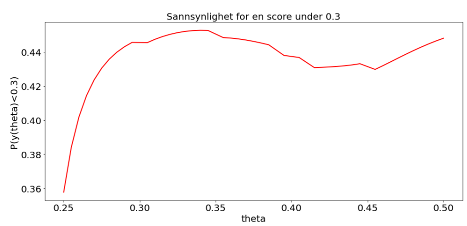
$$Y \sim (Y_a, Y_b) \sim N_{n_a+n_b}(\begin{bmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{aa} & \sum_{ab} \\ \sum_{ba} & \sum_{bb} \end{bmatrix}) \tag{20}$$

$\mu_c = \mu_a + \sum_{ab} \sum_{bb}^{-1} (Y_b - \mu_b)$ (21)

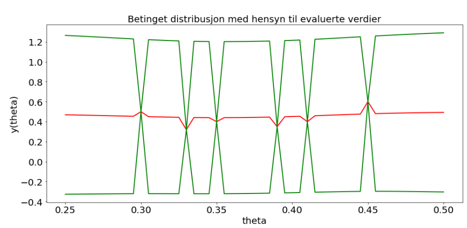
$\sum_c = \sum_{aa} - \sum_{ab} \sum_{bb}^{-1} \sum_{ba}$ (22)

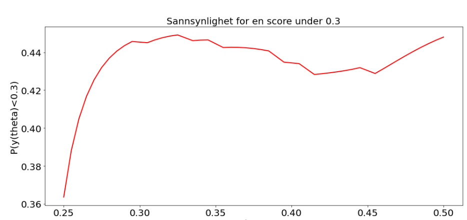


2b) Bruker følgende sammenheng for å beregne sannsynligheten Y(θ) <0.3, $derLercholeskyfactorentilkovar$
$P(Z < z) = P(L^{-1}(x - \mu) < L^{-1}(0.3 - \mu))$(23)



2c)





Vi vil anbefale forskerne å velge theta lik 0.325 . 6 sider begrenser mer utdypelse i denne oppgaven. Se kode.