Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Московский институт электроники и математики

Компьютерная безопасность

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Домашнее задание №2

Фомин Д.Б. Чухно А.Б.

2024

Содержание

1 Формулировка задания

Для выполнения домашней работы каждому студенту будет выдано одно дискретное распределение ка номер строки из таблицы 1, обозначим его $\mathscr{L}_d$ и одно абсолютно непрерывное как номер строки из таблицы 2, обозначим его $\mathscr{L}_c$. Для каждого полученного распределения необходимо необходимо будет выполнить все нижеперечисленные блоки заданий (кроме блока с определениями).

Ниже приведены разделы, каждый из которых будет оцениваться по десятибалльной шкале.

1.1 Основные понятия и определения. Оценка O_1

Дать определения следующих понятий

1. Функцию распределения случайной величины ξ $F_\xi(x)$;
2. медиана распределения;
3. квантиль распределения уровня γ;
4. математическое ожидание;
5. дисперсия;
6. k-й момент случайной величины;
7. k-й центральный момент случайной величины;
8. k-й факториальный момент случайной величины;
9. мода распределения;
10. производящая функция для дискретных неотрицательных целочисленных случайных величин;
11. характеристическая функция.

1.2 Примеры событий и взаимосвязи для распределений $\mathscr{L}_d$ и $\mathscr{L}_c$. Оценка O_2

Обозначим через $\mathscr{L}_d$ – закон распределения дискретной случайной величины, выданный студенту, $\mathscr{L}_c$ – закон распределения абсолютно непрерывной величины, выданный студенту. Для каждого из распределений $\mathscr{L}_d$ и $\mathscr{L}_c$ необходимо

1. привести пример интерпретации распределения – описать эксперимент, в котором результаты наблюдений подчиняются выбранному распределению (возможна не один);
2. выписать соотношения, связывающие распределения $\mathscr{L}_d$ и $\mathscr{L}_c$ с другими распределениями

Замечание 1: *Описание эксперимента для интерпретации события должна идти с обоснованием.*

Замечание 2: *Взаимосвязи распределений должны приводиться с теоретическими выкладками.*

1.3 Исследование вероятностного распределения. Оценка O_3

Обозначим через $\mathscr{L}_d$ – закон распределения дискретной случайной величины, выданный студенту, $\mathscr{L}_c$ – закон распределения абсолютно непрерывной величины, выданный студенту. Для каждого из распределений $\mathscr{L}_d$ и $\mathscr{L}_c$ необходимо

1. найти функцию распределения $F(x)$.
2. проверить основные свойства функции распределения:
   - непрерывность справа (слева) функции $F(x)$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. Вычислить квантили следующих уровней: $\gamma = 0.1, 0.5, 0.9$.

1.4 Характеристики распределений. Оценка O_4

Обозначим через $\mathscr{L}_d$ – закон распределения дискретной случайной величины, выданный студенту, $\mathscr{L}_c$ – закон распределения абсолютно непрерывной величины, выданный студенту. Для каждого из распределений $\mathscr{L}_d$ и $\mathscr{L}_c$ необходимо вычислить:

1. математическое ожидание;
2. дисперсию;
3. 3-й момент случайной величины;
4. 3-й факториальный момент случайной величины;
5. производящую функцию (для дискретных неотрицательных целочисленных случайных величин); С помощью производящей функции случайной величины (если она представима в элементарных функциях) вычислить:
   - первые три факториальных момента случайной величины;
   - второй центральный момент случайной величины;
   - вероятности: $\mathsf{P}(\xi = 0)$, $\mathsf{P}(\xi = 3)$, $\mathsf{P}(\xi \geq 3)$.
6. характеристическую функцию. С помощью характеристической функции случайной величины вычислить 1, 2 и 3 моменты случайной величины (если они существуют).

1.5 Свёртка распределений. Оценка O_5

Обозначим через $\mathscr{L}_d$ – закон распределения дискретной случайной величины, выданный студенту, $\mathscr{L}_c$ – закон распределения абсолютно непрерывной величины, выданный студенту.

Найти распределение следующих сумм случайных величин (если это возможно)

Сумма	Распределение слагаемых
$\xi_1 + \xi_2$	$\xi_1, \xi_2 \sim \mathscr{L}_d$
$\xi_1 + \xi_2$	$\xi_1, \xi_2 \sim \mathscr{L}_c$
$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \sim \mathscr{L}_d$
$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$	$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \sim \mathscr{L}_c$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$	$\xi_i \sim \mathscr{L}_d$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$	$\xi_i \sim \mathscr{L}_c$
$\xi_1 + \xi_2$	$\xi_1 \sim \mathscr{L}_d$, $\xi_2 \sim \mathscr{L}_c$

2 Правила оформления отчёта о выполнении задания

Итоговые материалы предоставляются в формате PDF. Все части домашнего задания предоставлять в одном файле.

Сам текст необходимо готовить с помощью одного из предложенных редакторов:

- система компьютерной верстки TeX (LaTeX, XeLaTex и т.п.);
- Jupyter Notebook (можно одновременно писать код и текст с использованием команд LaTeX);
- система компьютерной алгебры Mathematica (см. пример `https://www.wolfram.com/broadcast/video.php?c=274&disp=list&v=545`);
- текстовый процессор MS Word, Page, Libreoffice Writer **с использованием редакторов формул**.

В текст необходимо включать рассуждения достаточные для установления правильности решения и всех выводов. Если в рассуждениях вы ссылаетесь на утверждение, то его необходимо привести полностью, чтобы была возможность проверить формулировку, а также необходимо привести ссылку, где можно найти приведённую формулировку утверждения.

Все исходники отчетов, по просьбе преподавателя, необходимо заархивировать и прислать архив при сдаче домашней контрольной работы. Можно также залить итоговый отчет на GitHub, Bitbucket и т.п. и просто прислать ссылку.

3 Правила оценивания и сроки сдачи

Готовый отчёт о проделанной работе в формате .pdf сдаётся преподавателю, ведущему семинарские занятия. Срок сдачи устанавливается для всех групп единый.

За каждый раздел студент получает оценки $O_1, \ldots, O_5$. Итоговая оценка за домашнюю работу будет вычисляться по формуле

$$O_{\text{итог}} = \frac{\mathbf{I}\{O_1 > 0\} + \mathbf{I}\{O_2 > 0\} + \mathbf{I}\{O_3 > 0\} + \mathbf{I}\{O_4 > 0\} + \mathbf{I}\{O_5 > 0\}}{25} \cdot (O_1 + \ldots + O_5)$$

где $\mathbf{I}\{O_j > 0\}$ – индикатор события, он равен единице, если $O_j > 0$ и нулю в иных случаях.

4 Таблицы распределений

Для выполнения домашней работы каждому студенту будет выдано одно дискретное распределение $\mathscr{L}_d$ из таблицы 1, одно абсолютно непрерывное $\mathscr{L}_c$ из таблицы 2.

Таблица 1: Дискретные распределения $\mathscr{L}_d$

№	Распределение	Закон распределения
1	Бернулли	$P(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$, $0 < \theta < 1$
2	Биномиальное	$P(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$, $x \in \{0,1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$
3	Дискретное равномерное I	$P(x) = \theta^{-1}$, $x \in \{1,\ldots,\theta\}$
4	Дискретное равномерное II	$P(x) = \theta^{-1}$, $x \in \{a,\ldots,a+\theta-1\}$
5	Геометрическое	$P(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$
6	Отрицательное биномиальное	$P(x) = \binom{x+m-1}{x}\theta^m(1-\theta)^x$, $x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$
7	Пуассона	$P(x) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$, $x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\theta > 0$
8	Гипергеометрическое распределение	$P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{\theta-M}{n-x}}{\binom{\theta}{n}}$, $\theta, M, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $M \le \theta, n \le \theta$, $x \in \{\max(0, M+n-\theta), \min(M,n)\}$
9	Логарифмическое распределение	$P(x) = -\ln(1-\theta)^{-1}\cdot\theta^x\cdot x^{-1}$, $x \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$
10	Ципфа	$P(x) = \frac{x^{-s}}{H_{N,s}}$, $x \in \{1,2,\ldots,N\}$, где $H_{N,s} = \sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}$, $s \geqslant 0$
11	Бореля-Таннера	$P(x) = \frac{r}{(x-r)!}\cdot x^{x-r-1}e^{-\alpha x}\alpha^{x-r}$, $x \in \mathbb{N}$, $x \ge r$
12	Дзета	$P(x) = \frac{1}{\zeta(a)x^a}$, $x \in \mathbb{N}$, где $\zeta(a) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, $a \in (1,\infty)$
13	Пойа	$P(x) = \frac{b(b+c)(b+2c)\ldots[b+(x-1)c]}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)\ldots[b+r+(x-1)c]}$, $x, b, r \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$, $b+r+c(x-1) > 0$.

Таблица 2: Непрерывные распределения $\mathscr{L}_c$

№	Распределение	Плотность
1	Нормальное	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\dfrac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x, \theta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
2	Логнормальное	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in (0, \infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
3	Равномерное I	$f(x) = \theta^{-1}$, $x \in [0, \theta]$, $\theta \in \mathbb{R}^+$
4	Равномерное II	$f(x) = \theta^{-1}$, $x \in [a, a+\theta]$, $\theta \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$
5	Треугольное	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta}, & \text{если } x \in [0, \theta] \\ \dfrac{2(1-x)}{1-\theta}, & \text{если } x \in (\theta, 1], \theta \in (0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
6	Лапласа	$f(x) = \dfrac{\theta}{2} \exp\{-\theta\,\lvert x-\mu\rvert\}$, $x, \mu, \theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$
7	Коши	$f(x) = \dfrac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + (x-\mu)^2\right)}$, $x, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$
8	Экспоненциальное	$f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\theta > 0$
9	Гамма	$f(x) = \dfrac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x}$, $x, \theta, \alpha \in \mathbb{R}^+$
10	Эрланга	$f(x) = \dfrac{\theta^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\theta x}$, $x, \theta \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$
11	Рэлея	$f(x) = \dfrac{x}{\theta^2} \cdot e^{-\dfrac{x^2}{2\theta^2}}$, $x, \theta \in \mathbb{R}^+$
12	Максвелла	$f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{x^2}{\theta^3} e^{-\dfrac{x^2}{2\theta^2}}$, $x, \theta \in \mathbb{R}^+$
13	Парето	$f(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)}, \quad x \in [1, +\infty), \quad \theta > 0.$
14	χ^2	$f(x) = \dfrac{2^{-k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$