Домашнее задание №2

Выполнил: Сорочайкин Александр Ярославович, СКБ223

Импорт необходимых библиотек

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy.stats import binom, gamma, norm, poisson, expon, chi2
```

Условия

Дискретное распределение - **Биномиальное распределение**, далее - L_d

$$f(x)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, x \in 0,1,\ldots,n, n \in N, 0<p<1, 1-p=q$$

Непрерывное распределение - **Гамма распределение**, далее - L_c

$$f(x)=\frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)}, x, \theta, \alpha \in R^{+¿¿}$$

Второй вариант записи, используемый в работе:

$$f(x)=\frac{x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha+1}}$$

Основные понятия и определения

- **Функция распределения случайной величины** ξ $F_\xi(x)$ - это функция, определенная для любого действительного x и выражающая вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x:
- **Медиана распределения** (медиана случайной величины ξ) - это такое число x_{med}, такое, что $P(\xi<x_{med})=P(\xi>x_{med})=\frac{1}{2}$
- **Квантилью** распределения уровня γ или γ-квантилью непрерывной случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ называется такое возможное значение x_γ этой случайной величины, для которого вероятность события $\xi<x_\gamma$ равна заданной величине γ: $P(\xi<x_\gamma)=\gamma, 0<\gamma<1$.
- **Математическое ожидание:**

a. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

b. В случае, если множество значений случайной величины ξ бесконечно, т.е. счетно, то математическое ожидание определяется как бесконечный ряд:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

c. Математическое ожидание для непрерывно распределенных случайных величин определяется по формуле:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_\xi(x)\, dx$$

- **Дисперсией** случайной величины ξ называется число $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$
- **k-й момент случайной величины** ξ - это математическое ожидание k-ой степени случайной величины, т.е. $M\xi^k$
- **k-й центральный момент случайной величины** ξ - это математическое ожидание случайной величины $(\xi-M\xi)^k$ т.е. $M(\xi-M\xi)^k$
- **k-й факториальный момент случайной величины** ξ - это математическое ожидание случайной величины $\xi^{[k]}$, т.е $M\xi(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k+1)$
- **Мода распределения** - модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.
- **Производящая функция для дискретных неотрицательных целочисленных случайных величин -** это ряд следующего вида:

$$f_\xi(s)=Ms^\xi=\sum_{r=0}^{\infty} P(\xi=r)s^r$$

- **Характеристическая функция** - это функция вида: $f(t)=M(e^{it\xi}),t\in R$

Примеры событий и взаимосвязи для распределений L_d и L_c

Примеры интерпретаций распределений

Биномиальное распределение L_d

Эксперимент 1

Бросание монеты: вероятность получения орла k раз из n бросков. Пусть монета симметричная, тогда $\theta=1-\theta=\frac{1}{2}$. Тогда: $P(x=k)=C_n^k*\theta^k*(1-\theta)^{n-k}=C_n^k*\frac{1}{2}^n$.

Продемонстрируем это на практике:

Зададим параметры для нашего распределения:

```
n = 10
p = 0.5
```

Также укажем количество повторений нашего эксперимента

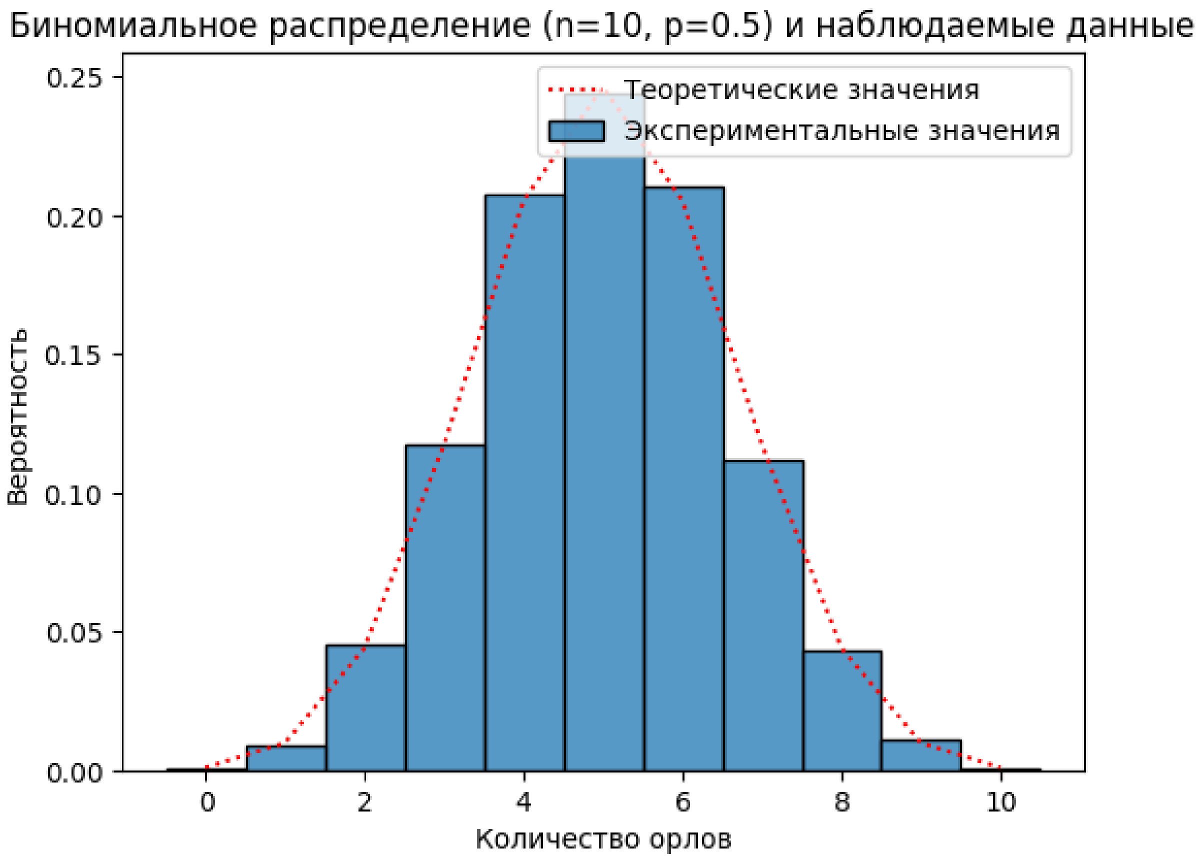
```
num_experiments = 10000
```

Проведем нашу серию экспериментов. В массиве samples будет храниться количество выпавших орлов в каждом из экспериментов

```
samples = np.random.binomial(n, p, num_experiments)

samples[120:134]

array([6, 6, 2, 4, 5, 5, 3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 4])
```

Построим гистограмму для полученых нами результатов, А также добавим на этот график теоретически вычесленные значения вероятностей для каждого возможного исхода

```
sns.histplot(samples, bins=np.arange(n+2)-0.5, kde=False,
stat='probability', label='Экспериментальные значения')

# Теоретические биномиальные вероятности
x = np.arange(0, n+1)
pmf = binom.pmf(x, n, p)

# Построение теоретических значений
plt.plot(x, pmf, ':', color='red', label='Теоретические значения')

# Добавление подписей и легенды
plt.xlabel('Количество орлов')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.legend()
plt.title(f'Биномиальное распределение (n={n}, p={p}) и наблюдаемые
данные')
plt.show()
```



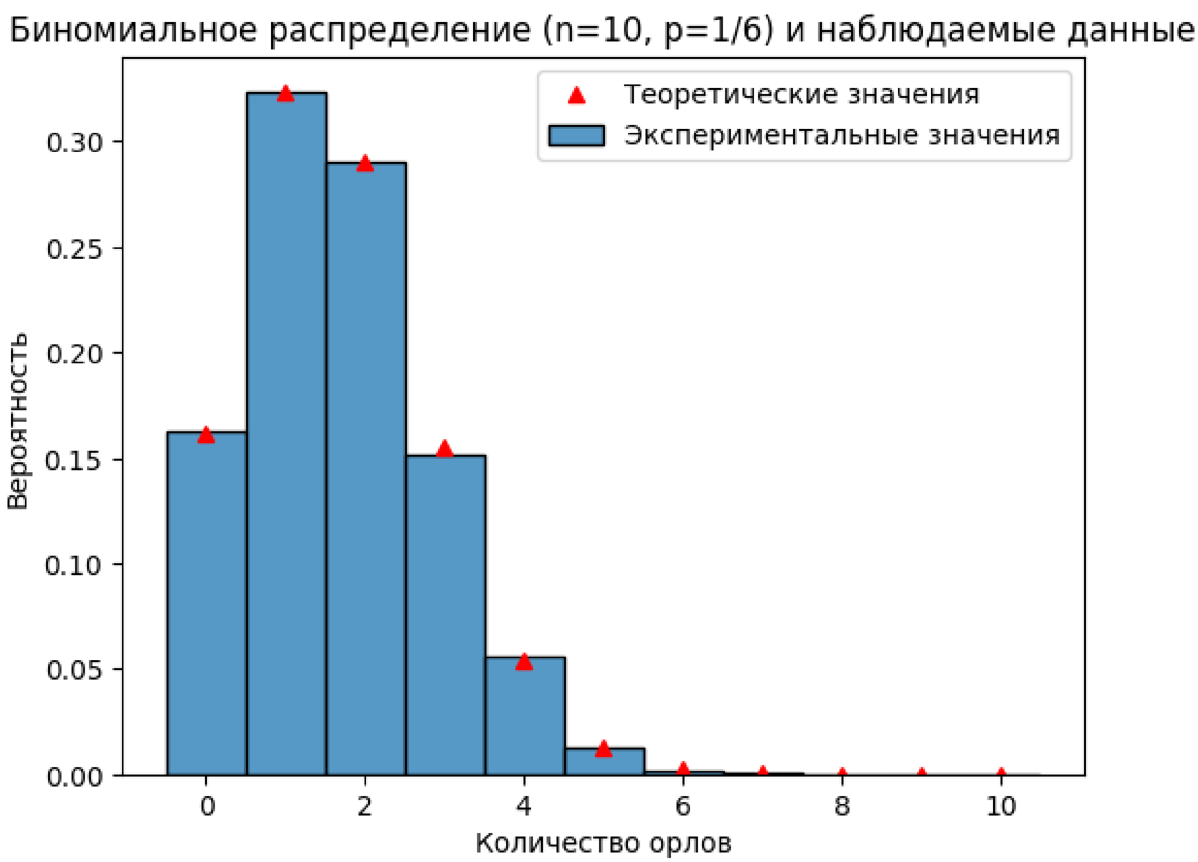
Эксперимент 2

Подбрасывание кубика: вероятность получения k раз значения 5 из n бросков. Вероятность выпадения значения 5 равна: $\theta=\frac{1}{6}$, тогда: $C_n^k * \theta^k * (1-\theta)^{n-k} = C_n^k * \frac{1}{6}^k * \frac{5}{6}^{n-k}$

Продемонстрируем это на практике:

```
n = 10
p = 1/6
num_experiments = 10000

samples = np.random.binomial(n, p, num_experiments)

samples[120:134]

array([3, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 2, 2])

sns.histplot(samples, bins=np.arange(n+2)-0.5, kde=False,
stat='probability', label='Экспериментальные значения')

# Теоретические биномиальные вероятности
x = np.arange(0, n+1)
pmf = binom.pmf(x, n, p)
```

```
# Построение теоретических значений
plt.plot(x, pmf, '^', color='red', label='Теоретические значения')

# Добавление подписей и легенды
plt.xlabel('Количество орлов')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.legend()
plt.title(f'Биномиальное распределение (n={n}, p=1/6) и наблюдаемые данные')
plt.show()
```



Гамма распределение L_c

Предположим, что норма прибыли от инвестиций за некоторый период времени соответствует гамма-распределению. Это может быть обосновано тем, что совокупная прибыль от нескольких независимых небольших инвестиций, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение прибыли, будет соответствовать гамма-распределению. Покажем это на практике:

Зададим параметры, а также количество экспериментов, где

- α - количество независимых инвестиций
- θ - средняя прибыль от одной инвестиции

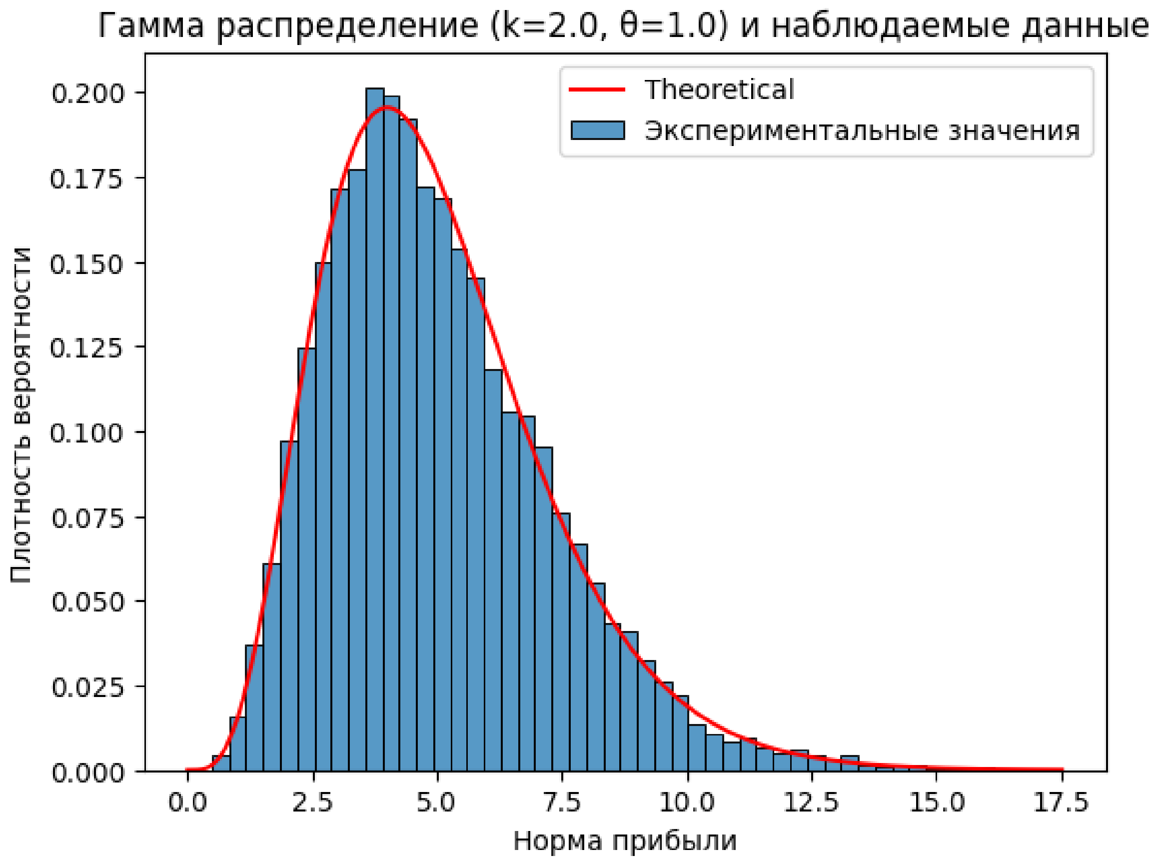
```
alpha = 5.0
theta = 1.0
num_samples = 10000
```

Проведем нашу серию экспериментов. В массиве samples будет храниться значение нормы прибыли в каждом из экспериментов

```
samples = np.random.gamma(alpha, theta, num_samples)
samples[1231:1240]
```

```
array([3.20172447, 4.67146872, 7.38927   , 2.83963777, 7.26377739,
       2.18279925, 4.82373922, 7.03587174, 4.59868135])
```

```
sns.histplot(samples, bins=50, kde=False, stat='density',
label='Экспериментальные значения')

x = np.linspace(0, np.max(samples), 1000)

pdf = gamma.pdf(x, alpha, scale=theta)
plt.plot(x, pdf, 'r-', label='Theoretical')

plt.xlabel('Норма прибыли')
plt.ylabel('Плотность вероятности')
plt.legend()
plt.title(f'Гамма распределение (k={k}, θ={theta}) и наблюдаемые
данные')
plt.show()
```



Соотношения с другими распределениями

Биномиальное распределение

Аппроксимация нормальным распределением

Биномиальное распределение с параметрами n и p может быть аппроксимировано нормальным распределением со средним np и стандартным отклонением $\frac{np(1-p)}{2}$, если только выполняются условия $np(1-p)>5$ и $0,1 \le p \le 0,9$. При условии $np(1-p)>25$ эту аппроксимацию можно применять независимо от значения p.

Зададим параметры обоих распределений, а также количество повторений эксперимента

```
n = 1000
p = 0.5

num_samples = 100000

mu = n * p
sigma = np.sqrt(n * p * (1 - p))
```

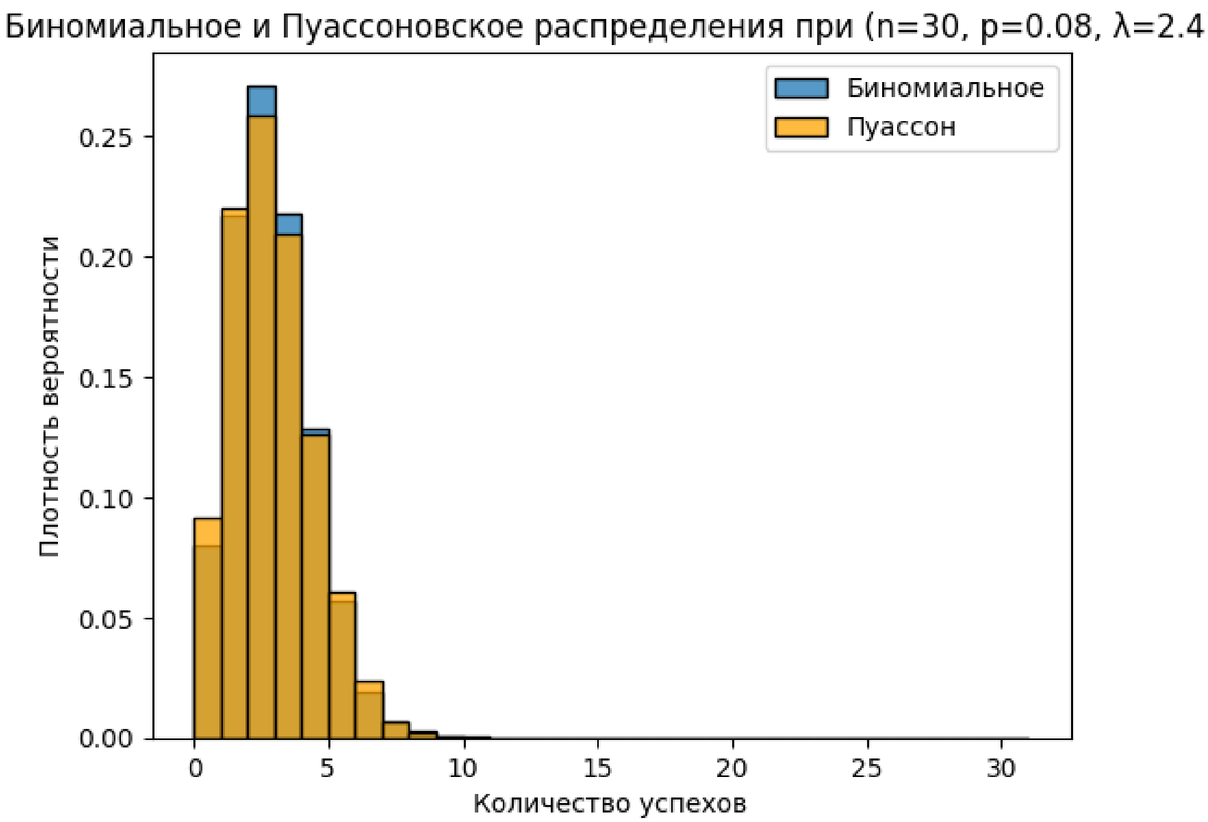
```
samples = np.random.binomial(n, p, num_samples)
sns.histplot(samples, bins=30, kde=False, stat='density',
label='Экспериментальные значения')

x = np.linspace(np.min(samples), np.max(samples), 1000)
pdf = norm.pdf(x, mu, sigma)

plt.plot(x, pdf, 'r-', label='Нормальное распределение')

plt.xlabel('Количество успехов')
plt.ylabel('Плотность вероятности')
plt.legend()
plt.title(f'Биномиальное распределение (n={n}, p={p}) и его
аппроксимация Нормальным распределением')
plt.show()
```

Аппроксимация распределением Пуассона

Биномиальное распределение с параметрами n и p может быть аппроксимировано распределением Пуассона со средним $n\,p$ при условии, что $p<0{,}1$ и n достаточно велико.

```
n = 30
p = 0.08

num_samples = 10000

binomial_samples = np.random.binomial(n, p, num_samples)

lambda_ = n * p
poisson_samples = np.random.poisson(lambda_, num_samples)
```

```
sns.histplot(binomial_samples, bins=range(n+2), kde=False,
stat='density', label='Биномиальное')

sns.histplot(poisson_samples, bins=range(n+2), kde=False,
stat='density', color='orange', label='Пуассон')

plt.xlabel('Количество успехов')
plt.ylabel('Плотность вероятности')
plt.legend()
plt.title(f'Биномиальное и Пуассоновское распределения при (n={n},
p={p}, λ={lambda_})')
plt.show()
```



Связь Биномиального распределения и Бернулли

Случайная величина X имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно.
Таким образом, биномиальное распределение при количестве испытаний n = 1 является распределением Бернулли.
И наоборот, любое биномиальное распределение, $B(n, p)$, является распределением суммы n независимых испытаний Бернулли, Бернулли(p), каждое с одинаковой вероятностью p.

```
##### Мб что-то про Муавра-Лапласа, предельную теорему Пуассона, связь
с бета-распределением?
```

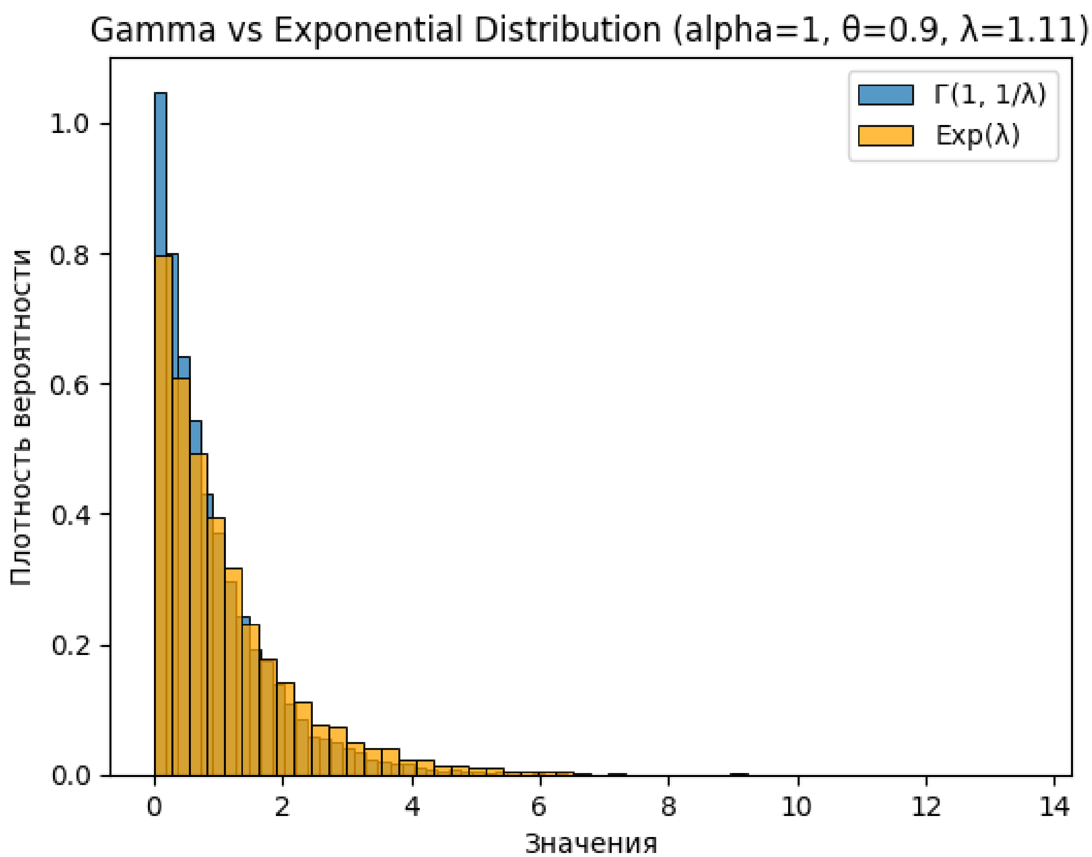
Гамма распределение

Связь с экспоненциальным распределением

Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения:
$\Gamma\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) \sim Exp(\lambda)$

Продемонстрируем на практике:

```
alpha = 1
theta = 0.9
lambda_ = 1 / theta
num_samples = 10000

gamma_samples = np.random.gamma(alpha, theta, num_samples)

expon_samples = np.random.exponential(lambda_, num_samples)

sns.histplot(gamma_samples, bins=50, kde=False, stat='density',
label='Γ(1, 1/λ)')

sns.histplot(expon_samples, bins=50, kde=False, stat='density',
color='orange', label='Exp(λ)')

plt.xlabel('Значения')
plt.ylabel('Плотность вероятности')
plt.legend()
plt.title(f'Gamma vs Exponential Distribution (alpha={alpha},
θ={theta}, λ={round(lambda_, 2)})')
plt.show()
```

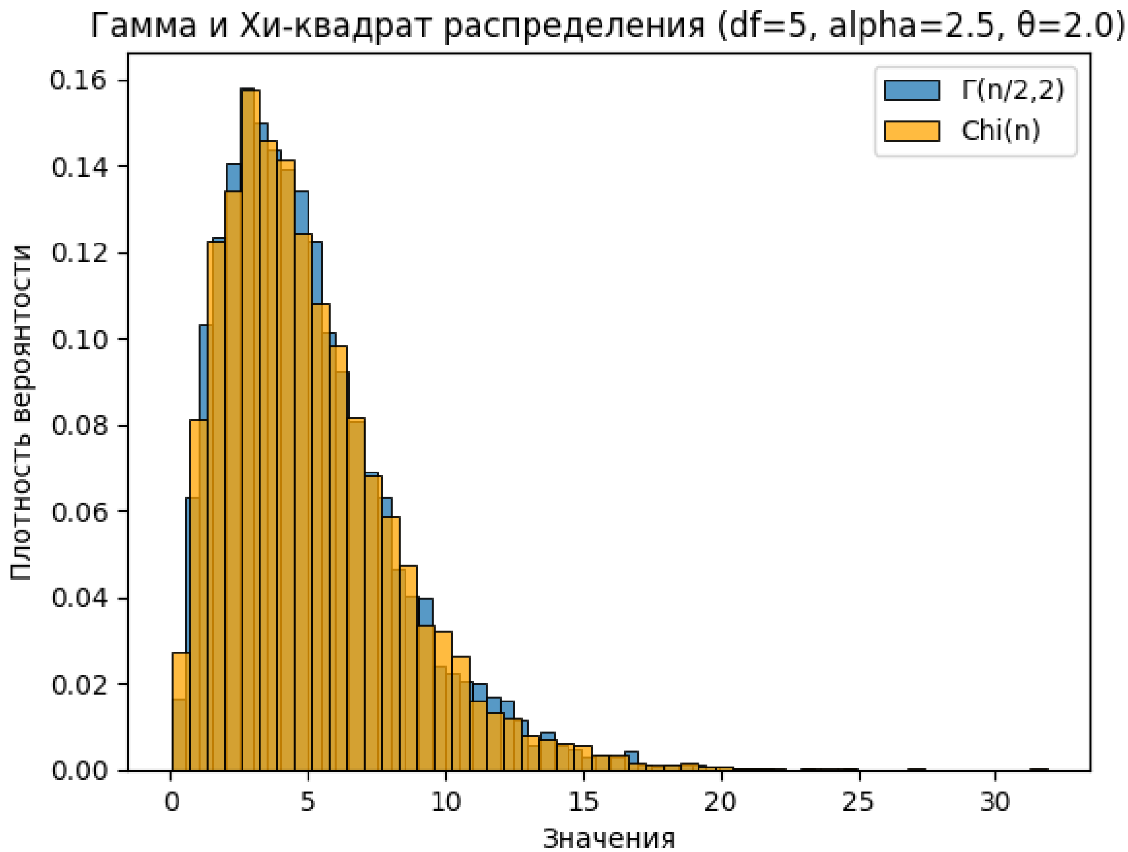


Связь с распределением Хи-квадрат

Распределение Хи-квадрат является частным случаем гамма распределения:
$\Gamma\left(\frac{n}{2},2\right)\sim\chi^2(n)$

```
df = 5
alpha = df / 2
theta = 2.0

num_samples = 10000

gamma_samples = np.random.gamma(alpha, theta, num_samples)

chi2_samples = np.random.chisquare(df, num_samples)

sns.histplot(gamma_samples, bins=50, kde=False, stat='density',
label='Γ(n/2,2)')

sns.histplot(chi2_samples, bins=50, kde=False, stat='density',
color='orange', label='Chi(n)')

plt.xlabel('Значения')
```

```
plt.ylabel('Плотность вероянтости')
plt.legend()
plt.title(f'Гамма и Хи-квадрат распределения (df={df}, alpha={alpha}, θ={theta})')
plt.show()
```

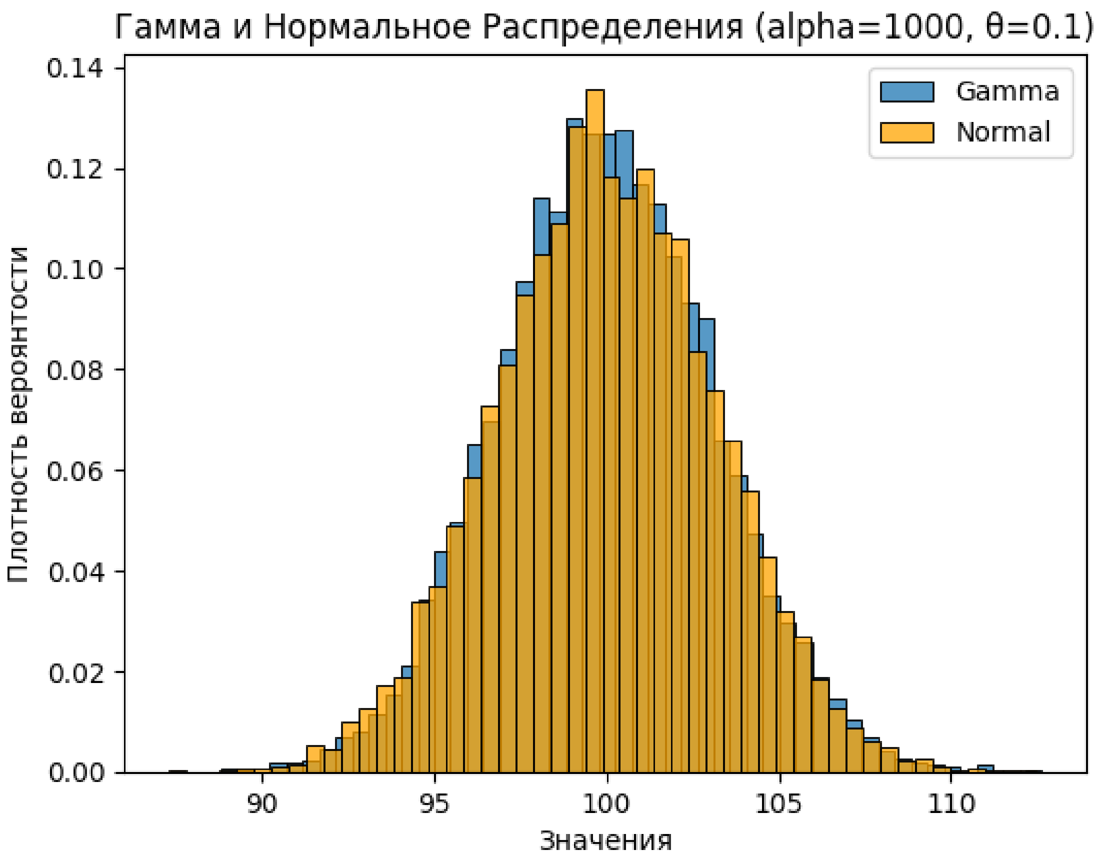


Приближение гамма - распределения с помощью нормального распределения

$\Gamma(\alpha,\theta) \sim N(\alpha\theta, \alpha\theta^2), npu\, \alpha \to \infty$

```
alpha = 1000
theta = 0.1
num_samples = 10000

gamma_samples = np.random.gamma(alpha, theta, num_samples)

mu = alpha * theta
sigma = np.sqrt(alpha * theta**2)

normal_samples = np.random.normal(mu, sigma, num_samples)

sns.histplot(gamma_samples, bins=50, kde=False, stat='density', label='Gamma')
```

```
sns.histplot(normal_samples, bins=50, kde=False, stat='density',
color='orange', label='Normal')

plt.xlabel('Значения')
plt.ylabel('Плотность вероянтости')
plt.legend()
plt.title(f'Гамма и Нормальное Распределения (alpha={alpha},
θ={theta})')
plt.show()
```

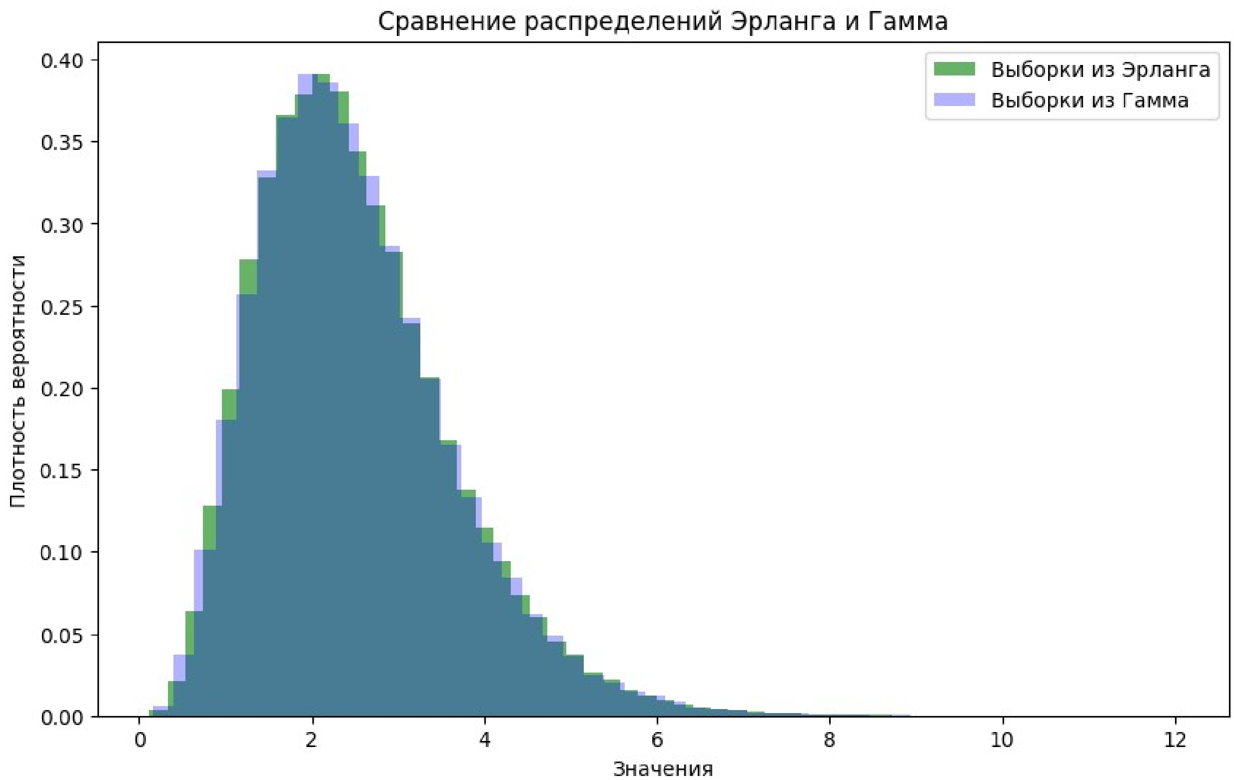


Связь с распределением Эрланга

При натуральных θ, $\Gamma(\alpha,\theta)$ - называется распределением Эрланга порядка θ. Это распределение суммы θ независимых случайных величин с с одинаковым показательным распределением $\Gamma(\alpha,1)$

```
k = 5
lambda_erlang = 2
n_samples = 100000

samples_erlang = np.random.gamma(k, 1/lambda_erlang, n_samples)
```

```
alpha = k
beta = lambda_erlang

samples_gamma = np.random.gamma(alpha, 1/beta, n_samples)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(samples_erlang, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='g',
label='Выборки из Эрланга')
plt.hist(samples_gamma, bins=50, density=True, alpha=0.3, color='b',
label='Выборки из Гамма')
plt.xlabel('Значения')
plt.ylabel('Плотность вероятности')
plt.legend()
plt.title('Сравнение распределений Эрланга и Гамма')
plt.show()
```



Исследование вероятностного распределения

Биномиальное распределение

$$F(k, n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^k p^i (1-p)^{n-i}$$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ - очевидно, т.к. функция принимает неотрицательные значения

- $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{x} C_n^x p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^x p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1$
- Очевидно, что функция разрывна слева при целых положительных значениях, так как она дискретна, однако, функция непрерывна справа

Подсчитаем квантили:

- $\gamma = 0.1$: $F(x) = 0.1$, $\sum_{i=0}^{x} C_n^x p^i (1-p)^{n-i}$
- $\gamma = 0.5$: $F(x) = 0.5$, $\sum_{i=0}^{x} C_n^x p^i (1-p)^{n-i}$
- $\gamma = 0.9$: $F(x) = 0.9$, $\sum_{i=0}^{x} C_n^x p^i (1-p)^{n-i}$

А как считать?(

Зададим параметры нашего распределения

```
n = 10
p = 0.5
```

Зададим значения к, для которых будем вычислять функцию распределения

```
k_values = np.arange(0, n+1)

cdf_values = binom.cdf(k_values, n, p)
```

Проверим свойства функции распределения

```
is_non_decreasing = np.all(np.diff(cdf_values) >= 0)
print("Функция неубывающая:", is_non_decreasing)

Функция неубывающая: True
```

Границы функции распределения:

```
cdf_min = cdf_values[0]
cdf_max = cdf_values[-1]
print("F(k) при k → -∞:", cdf_min)
print("F(k) при k → ∞:", cdf_max)

F(k) при k → -∞: 0.0009765625
F(k) при k → ∞: 1.0
```

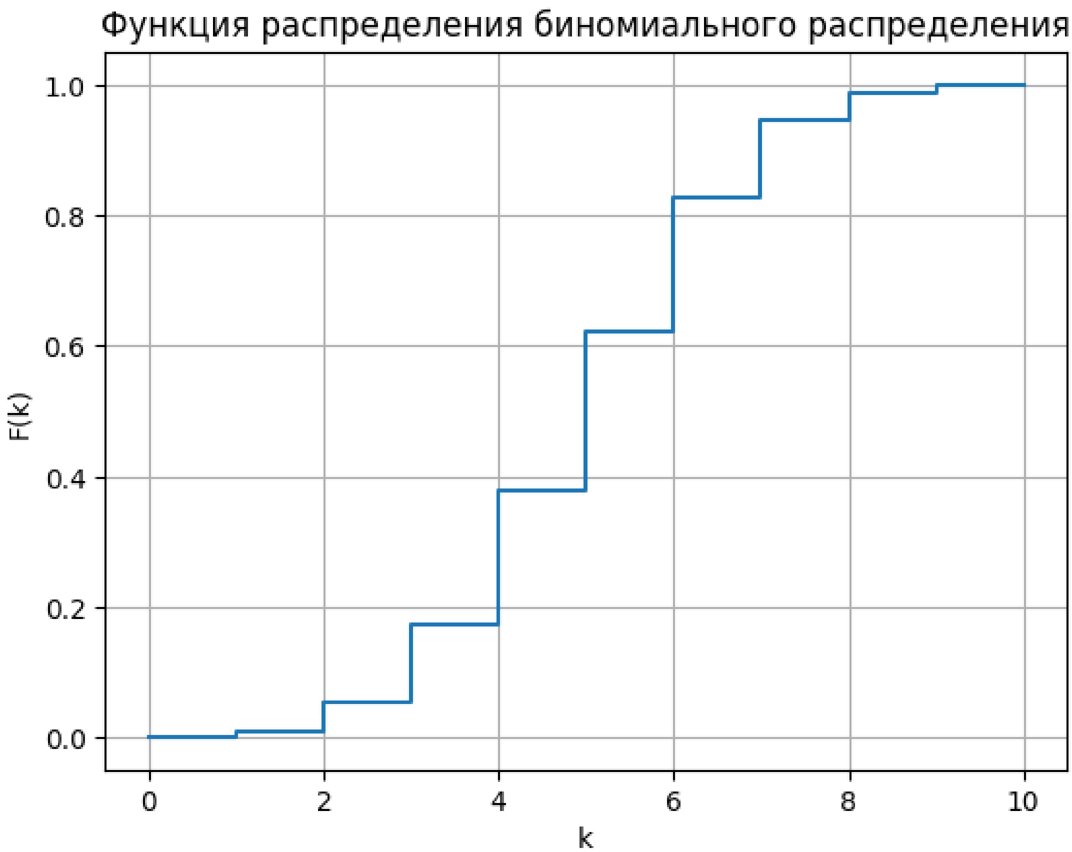
Вычисление квантилей

```
gamma_values = [0.1, 0.5, 0.9]
quantiles = binom.ppf(gamma_values, n, p)
print(f"Квантили при γ = {gamma_values}: {quantiles}")
```

```
Квантили при γ = [0.1, 0.5, 0.9]: [3. 5. 7.]
```

Визуализируем наше распределение

```
plt.step(k_values, cdf_values, where='post')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('F(k)')
plt.title('Функция распределения биномиального распределения')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Гамма распределение

$$f(x)=\frac{\theta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \frac{\theta^{\alpha}t^{\alpha-1}e^{-\theta t}}{\Gamma(\alpha)}\,dt=\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\theta t}\,dt$$

$\int\limits_{0}^{x}t^{\alpha-1}e^{-\theta t}dt = \Big{|}u = \frac{t}{\theta}, du = \frac{1}{\theta}dt\Big{|} = \int\limits_{0}^{\frac{x}{\theta}}u^{\alpha - 1}e^{-u}du = \gamma(\alpha, \frac{\theta}{x})$

$$F(x)=\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}t^{\alpha-1}e^{-\theta t}dt=\frac{\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

- $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ - очевидно, т.к. функция принимает неотрицательные значения
- $\lim_{x\to\infty}F(x)=\frac{\lim_{x\to\infty}\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=1$, т.к. при $x\to\infty$: $\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)=\Gamma(\alpha)$
- $\frac{\lim_{x\to x+0}\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\lim_{x\to x-0}\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=F(x)$ - непрерывна при x > 0

Посчитаем квантили:

- $\gamma=0.1$: $F(x)=0.1$, $\frac{\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=0.1$
- $\gamma=0.5$: $F(x)=0.5$, $\frac{\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=0.5$
- $\gamma=0.9$: $F(x)=0.9$, $\frac{\gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}=0.9$

А как считать?(((

Зададим параметры нашего распределения

```
alpha = 2
theta = 2

x_values = np.linspace(0, 20, 1000)
cdf_values = gamma.cdf(x_values, alpha, scale=theta)
```

Проверим свойства функции распределения

```
is_non_decreasing = np.all(np.diff(cdf_values) >= 0)
print("Функция неубывающая:", is_non_decreasing)

Функция неубывающая: True
```

Границы Функции распределения

```
cdf_min = cdf_values[0]
cdf_max = cdf_values[-1]
print("F(x) при x → -∞:", cdf_min)
print("F(x) при x → ∞:", cdf_max)
```

```
F(x) при x → -∞: 0.0
F(x) при x → ∞: 0.9995006007726127
```

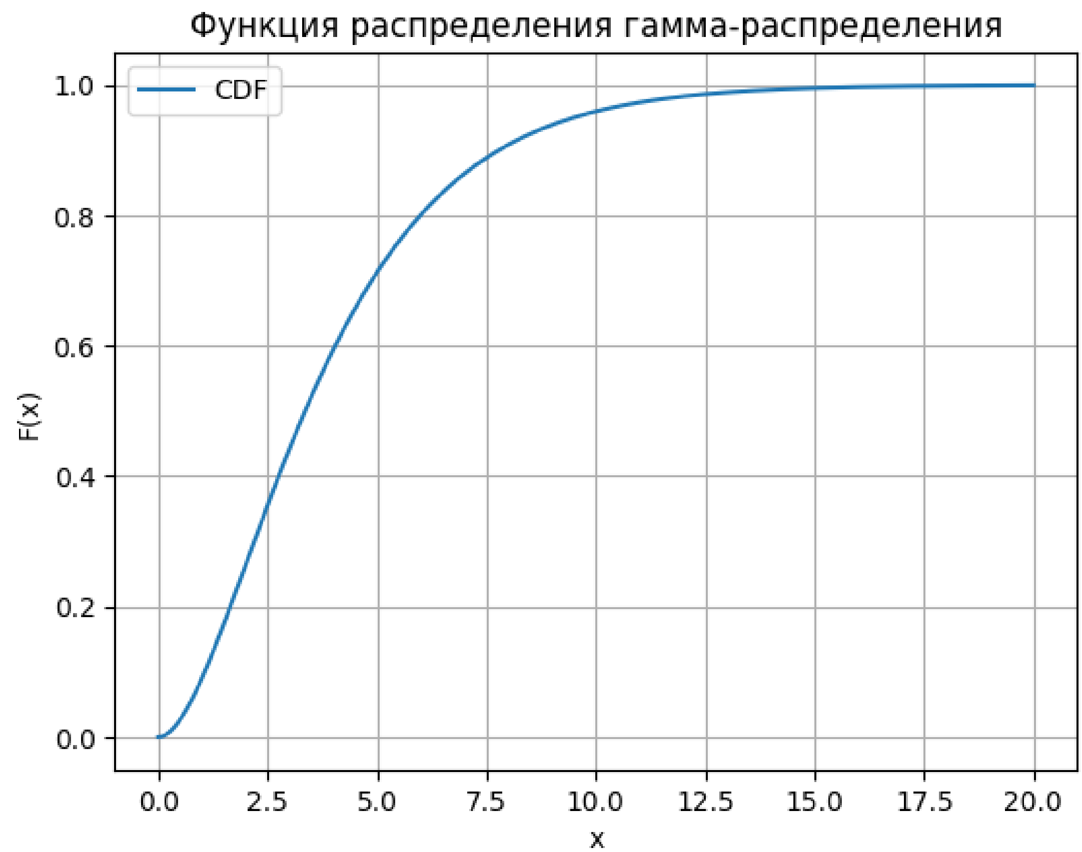
Рассчитаем значение квантилей:

```
gamma_values = [0.1, 0.5, 0.9]
quantiles = gamma.ppf(gamma_values, alpha, scale=theta)
print(f"Квантили при γ = {gamma_values}: {quantiles}")
```

```
Квантили при γ = [0.1, 0.5, 0.9]: [1.06362322 3.35669398 7.77944034]
```

Визуализируем наше распределение:

```
plt.plot(x_values, cdf_values, label='CDF')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('F(x)')
plt.title('Функция распределения гамма-распределения')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Характеристики распределений

Биномиальное распределение

Математическое ожидание

$MX = \sum\limits_{x = 0}^{n}xC_{n}^{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\ \Big{|}xC_{n}^{x} = x\frac{n!}{x!(n-x!)} = nC_{n-1}^{x-1}\Big{|}$

$MX = n\sum\limits_{x = 1}^{n}C_{n-1}^{x-1}p^{x}(1-p)^{n-x}\ \Big{|}x' = x - 1 \rightarrow x = x' + 1\Big{|}$

$$MX = n\sum_{x=0}^{n-1} C_{n-1}^{x} p^{x+1}(1-p)^{n-1-x} = np\sum_{x=0}^{n-1} C_{n-1}^{x} p^{x}(1-p)^{n-1-x} = np\left(p+(1-p)\right)^{n-1} = np$$

Дисперсия

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = MX^2 - n^2p^2$$

$MX^2 = \sum\limits_{x = 0}^{n}x^{2}C_{n}^{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\Big{|}xC_{n}^{x}=nC_{n-1}^{x-1}$

$$M X^2 = n\sum_{x=1}^{n} x\, C_{n-1}^{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = n\sum_{x=0}^{n-1} (x+1)\, C_{n-1}^{x} p^{x+1} (1-p)^{n-1-x} = n\,p\sum_{x=0}^{n-1} x\, C_{n-1}^{x} p^{x} (1-p)^{n-1-x} + n\,p\sum_{x=0}^{n-1} C_{n-1}^{x} p^{x} (1-$$

$$M X^2 = n\,p * M X(n-1, p) + n\,p = n\,p(n-1)\,p + n\,p = n(n-1)\,p^2 + n\,p$$

$$D X = n(n-1)\,p^2 + n\,p - n^2 p^2 = -n\,p^2 + n\,p = n\,p(1-p)$$

3-й момент

$$M X^3 = \sum_{x=0}^{n} x^3 C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = n\,p\sum_{x=0}^{n-1} (x+1)^2 C_{n-1}^x p^x (1-p)^{n-1-x}$$

$$M X^3 = n\,p\left(\sum_{x=0}^{n-1} x^2 C_{n-1}^x p^x (1-p)^{n-1-x} + 2\sum_{x=0}^{n-1} x\, C_{n-1}^x p^x (1-p)^{n-1-x} + \sum_{x=0}^{n-1} C_{n-1}^x p^x (1-p)^{n-1-x}\right)$$

$$M X^3 = n\,p\left(M X(n-1, p)^2 + 2\, M X(n-1, p) + 1\right) = n\,p + 3n(n-1)\,p^2 + n(n-1)(n-2)\,p^3$$

3-й факториальный момент

$$M X(X-1)(X-2) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$MX(X-1)(X-2) = n(n-1)(n-2)\sum\limits_{k = 3}^{n}C_{n-3}^{k - 3}p^{k}(1-p)^{n-k}\Big{|}k = k - 3\Big{|}$

$$M X(X-1)(X-2) = n(n-1)(n-2)\,p^3 \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k p^k (1-p)^{n-k-3} = n(n-1)(n-2)\,p^3$$

Производящая функция

Вычисляем производящую функцию

$$g_{B_{np}}(z) = \sum_{m=0}^{n} p_m z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (p\,z)^m q^{n-m} = (q + p\,z)^n$$

Первые три факториальных момента

$$M X = g'(1) = n(q + p\,z)^{n-1} p = n\,p$$
$$M X(X-1) = g''(1) = n(n-1)(q + p\,z)^{n-2} p^2 = n(n-1)\,p^2$$
$$M X(X-1)(X-2) = g'''(1) = n(n-1)(n-2)(q + p\,z)^{n-3} p^3 = n(n-1)(n-2)\,p^3$$

Второй центральный момент

$$D X = g''(1) + g'(1) - [g'(1)]^2$$

$$D X = n(n-1)\,p^2 + n\,p - n^2 p^2 = n\,p - n\,p^2 = n\,p(1-p)$$

Вероятности $P(\xi=0), P(\xi=3), P(\xi\geq 3)$

$P(\xi=0)=0$ - из определения распределения

$$P(\xi=3)=\frac{G^3(0)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)p^3q^{n-3}}{3!}=C_n^3p^3q^{n-3}$$

$$P(\xi\geq 3)=1-P(\xi<3)=1-P(\xi=2)-P(\xi=1)=1-\frac{g''(1)}{2!}-\frac{g'(1)}{1!}=1-\frac{n(n-1)q^{n-2}p^2}{2}-\frac{npq^{n-1}}{1}=1-C_n^2p^2q^{n-2}-C$$

Характеристическая функция

$$\phi(t)=\sum_{j=1}^{\infty}e^{itx_j}p_j$$

$$\phi(t)=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=(e^{it}p+(1-p))^n=(e^{it}p+q)^n$$

Подсчет моментов

$$\phi_\xi^{(k)}(0)=i^kMX^k$$

1-ый момент

$\phi_{\xi}^{(1)}(0) = n(e^{it}p+q)^{n - 1}pe^{it}i\Big{|}^{0}$

MX = np

2-ой момент

$\phi_{\xi}^{(2)}(0) = n(e^{it}p+q)^{n - 1}pe^{it}i^{2} + n(n - 1)(e^{it}p+q)^{n - 2}(pe^{it}i)^{2}\Big{|}^{0}$

$$MX^2=np+n(n-1)p^2$$

3-ий момент

$$\phi_\xi^{(3)}(0)=n(n-1)(e^{it}p+q)^{n-1}(pe^{it})^2i^3+n(e^{it}p+q)^{n-1}pe^{it}i^3+n(n-1)(n-2)(e^{it}p+q)^{n-2}(pe^{it}i)^3+2n(n-1)(e^{it}p+q)^{n-}$$

$$MX^3=n(n-1)p^2+np+n(n-1)(n-2)p^3+2n(n-1)p^2=np+3n(n-1)p\,2+n(n-1)(n-2)p^3$$

Гамма распределение

Математическое ожидание

Используем формулировку гамма распределения с параметрами α,β

$$MX=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\beta}}t^\alpha dt$$

Вспомним, что $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$

$$M\,X=\alpha\,\beta\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta}}t^{\alpha}\,d\,t$$

Заметим, что $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta}}t^{\alpha}\,d\,t=\int\Gamma(\alpha+1,\beta)=1$

$M\,X=\alpha\,\beta$ или $\frac{\alpha}{\theta}$

Дисперсия

DX = MX^2 - (MX)^2

$$M\,X^2=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\beta}}t^{\alpha+1}\,d\,t$$

$$M\,X^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t+1}{\beta}}t^{\alpha+1}\,d\,t=\alpha(\alpha+1)\beta^2$$

$$D\,X=\alpha(\alpha+1)\beta^2-(\alpha\,\beta)^2=\alpha\,\beta^2$$

3-й момент

$$M\,X^3=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t+2}{\beta}}t^{\alpha+2}\,d\,t$$

$$M\,X^3=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t+2}{\beta}}t^{\alpha+2}\,d\,t=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3$$

3-й Факториальный момент

$$M\,X(X-1)(X-2)=M\left(X^3-3\,X^2+2\,X\right)=M\,X^3-3M\,X^2+2\,M\,X$$

$$M\,X(X-1)(X-2)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3-3\,\alpha(\alpha+1)\beta^2+2\,\alpha\,\beta$$

Характеристическая функция

$$\phi_{\xi}(t)=\int_0^{\infty} e^{i\,t\,x}f_{\xi}(x)\,d\,x=\int_0^{\infty} e^{i\,t\,x}\frac{\theta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\theta\,x}}{\Gamma(\alpha)}\,d\,x$$

$$\phi_{\xi}(t)=\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-x(\theta-i\,t)}x^{\alpha-1}\,d\,x$$

Заметим, что:

$$\int_0^{\infty} e^{-x(\theta-i\,t)}x^{\alpha-1}\,d\,x=\frac{1}{(\theta-i\,t)^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-y}\,y^{\alpha-1}\,d\,y=\frac{\Gamma(\alpha)}{(\theta-i\,t)^{\alpha}}$$

Тогда:
$$\phi_{\xi}(t)=\left(\frac{\theta}{\theta-it}\right)^{-\alpha}=\left(1-\frac{it}{\theta}\right)^{-\alpha}$$

Подсчет моментов

$$\phi_{\xi}^{(k)}(0)=i^k M X^k$$

1-ый момент

$\phi_{\xi}^{(1)}(0) = -\alpha{(1-\frac{it}{\theta})^{-\alpha-1}}*-\frac{i}{\theta}\Big{|}^{0}$

$$M X=\frac{\alpha}{\theta}$$

2-ой момент

$\phi_{\xi}^{(2)}(0) = -\alpha(-\alpha - 1){(1-\frac{it}{\theta})^{-\alpha-2}}*(-\frac{i}{\theta})^{2}\Big{|}^{0}$

$$M X^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2}$$

3-ий момент

$\phi_{\xi}^{(3)}(0) = -\alpha(-\alpha - 1)(-\alpha - 2){(1-\frac{it}{\theta})^{-\alpha-3}}*(-\frac{i}{\theta})^{3}\Big{|}^{0}$

$$M X^3=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\theta^3}$$

Свертка распределений

Биномиальное распределение

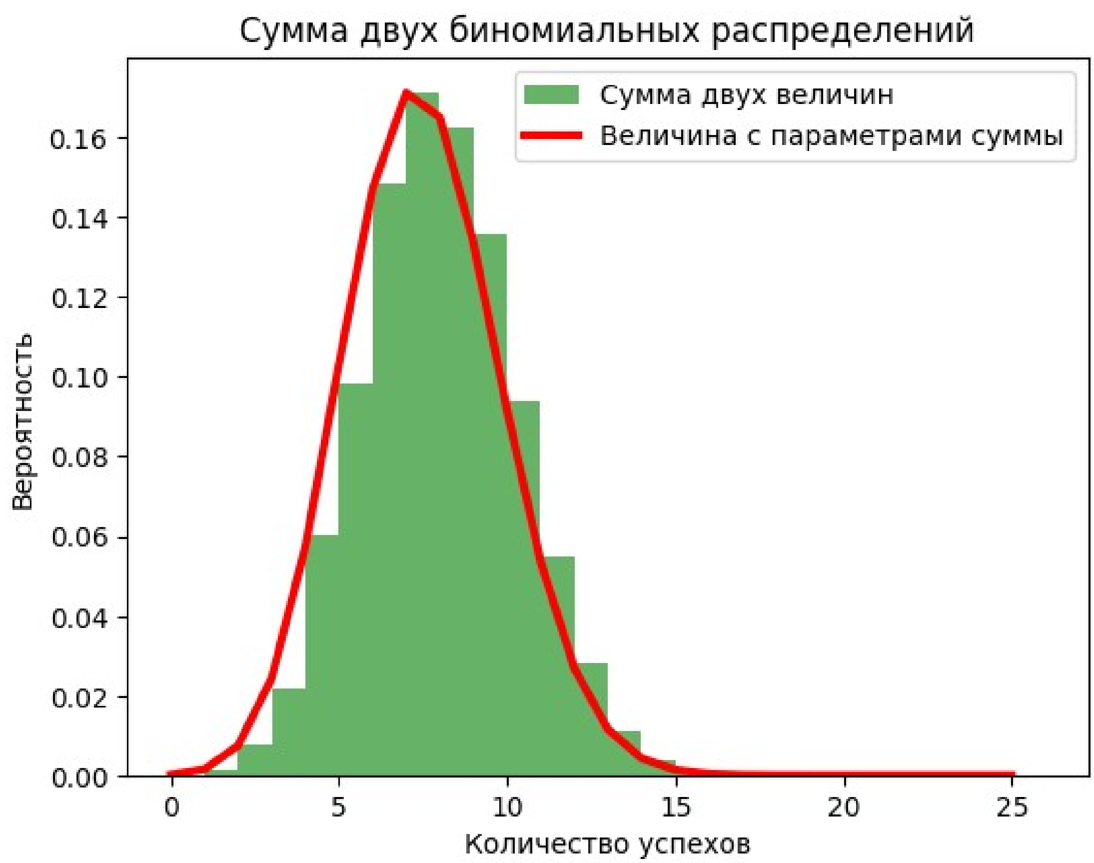
Сумма двух биномиальных распределений

Если $X_1 u X_2$ - независимые случайные величины, подчиняющиеся биномиальному распределению с параметрами n_1, p и n_2, p соответственно, то производящая функция случайной величины X_1+X_2 имеет вид $(q+pz)^{n_1}(q+pz)^{n_2}=(q+pz)^{n_1+n_2}$. Следовательно, случайная величина X_1+X_2 имеет биномиальное распределение с параметрами n_1+n_2, p. Это свойство становится очевидным, если в качестве интерпретации случайной величины использовать наблюдаемое число исходов E с постоянной вероятностью p в последовательность из n_1+n_2 независимых испытаний

Продемострируем справедливость данного рассуждения на практике

```
n1, n2 = 10, 15
p = 0.3
```

```python
X1 = np.random.binomial(n1, p, 10000)
X2 = np.random.binomial(n2, p, 10000)

X_sum = X1 + X2

n_sum = n1 + n2
theoretical_probs = binom.pmf(range(n_sum + 1), n_sum, p)


plt.hist(X_sum, bins=range(n_sum + 2), density=True, alpha=0.6,
color='g', label='Сумма двух величин')

plt.plot(range(n_sum + 1), theoretical_probs, 'r-', lw=3,
label='Величина с параметрами суммы')

plt.xlabel('Количество успехов')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.legend()
plt.title('Сумма двух биномиальных распределений')
plt.show()
```



Сумма n (в том числе и 3) биномиальных величин

Заметим, что аналогично второму пункту, сумму нескольких биномиальных распределений с различными значениями параметра n, но единым значением параметра p можно представить как биномиальную случайную величину, у которой мы наблюдаем число исходов E с постоянной вероятностью p и количеством исходов $n_1 + n_2 + \ldots n_n$

Продемонстрируем на практике:

```
n_values = [5, 10, 15, 20]

samples = [np.random.binomial(n, p, 10000) for n in n_values]

sum_samples = np.sum(samples, axis=0)

N = np.sum(n_values)
theoretical_probs = binom.pmf(range(N + 1), N, p)

plt.hist(sum_samples, bins=range(N + 2), density=True, alpha=0.6,
color='g', label='Сумма биномиальных распределений')

plt.plot(range(N + 1), theoretical_probs, 'r-', lw=3,
label='Теоретическая сумма биномиальных распределений')

plt.xlabel('Количество успехов')
plt.ylabel('Вероятность')
plt.legend()
plt.title('Сумма биномиальных распределений')
plt.show()
```

Гамма распределение

Сумма любого числа независимых гамма-распределенных случайных величин с одинаковым параметром масштаба θ и параметрами формы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ также подчиняются гамма-распределению с параметрами $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \theta$

Доказательство:

Рассмотрим, когда $\xi \, u \, \eta$ являются однопараметрическими гамма-распределенными случайными величинами с параметрами $\alpha \, u \, \beta$ соответственно ($\alpha > 0, \beta > 0$), т.е. $\theta = 1$. Покажем, что если $\xi \, u \, \eta$ независимые случайные величины, то случайная величина $\tau = \xi + \eta$ подчиняется гамма распределению с параметром $\alpha + \beta$

Пусть $\xi \in \gamma(\alpha, 1), \beta \in gamma(\beta, 1)$. Их функции плотностей распределения соответственно равны:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, p_\eta(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-x}, x > 0$$

Поскольку ξ и η независимы, совместная плотность распределения равна произведению функций плотностей сомножителей: $p(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y)$ и функция плотности суммы вычисляется с помощью свертки:

$$p_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)\,p_{\eta}(z-x)\,dx\,.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для плотностей составляющих, получим:

$$p_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)} I_{(0,\infty)}(z-x)\,dx\,,$$

где $I_{(0,\infty)}$ — индикаторная функция множества $D \subseteq R^1$ определяемая соотношением:
$I_D(x)=\begin{cases}1, & x\in D,\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$

Отсюда следует, что $I_{(0,\infty)}(z-x)=\begin{cases}1, & 0\le z-x<+\infty\,,\\ 0, & z-x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\le z\,,\\ 0, & x>z.\end{cases}$

Таким образом, получаем:

$$p_{\xi+\eta}(z)=\int_{0}^{z} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)}\,dx=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{z} x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1}e^{-z}\,dx=\left|x=zu\,,dx=z\,du\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{1}(zu)^{\alpha-1}(z-zu)^{\beta-1}e^{-z}z\,du=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{z^{\alpha+\beta-1}e^{-z}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{0}^{1}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du=\frac{z^{\alpha+\beta-1}e^{-z}\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Поэтому, функция плотности распределения суммы $\eta+\xi$ равная

$$p_{\xi+\eta}(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}z^{(\alpha+\beta)-1}e^{-z}$$

соответствует гамма распределению с параметром $\alpha+\beta$ т.е. $\xi+\eta\in\Gamma(\alpha+\beta,1)$

Из свойства:

- Если случайная величина имеет гамма-распределение $\xi\in\Gamma(\alpha,\theta), moc\,\xi\in\Gamma\left(\alpha,\frac{\theta}{c}\right)$, в частности $\theta\xi\in\Gamma(\alpha,1)$

Следует, что $\xi_1=\frac{1}{\theta}\xi\in\Gamma(\alpha,\theta)\,u\,\eta_1=\frac{1}{\theta}\eta\in\Gamma(\beta,\theta)$ Тогда случайная величина $\eta_1+\xi_1=\frac{1}{\theta}(\eta+\xi)\in\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$

По индукции можем доказать, что сумма любого числа независимых гамма-распределенных случайных величин с одинаковым параметром масштаба θ и параметрами формы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ также подчиняются гамма-распределению с параметрами $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \theta$

P.s. Пусть верно для n, тогда на n + 1 шаге представим нашу сумму в 2 случайных величины (из n штук и 1 штуки, и ручками покажем аналогично верхнему доказательству)

Продемонстрируем работоспособность данного правила на примере:

Зададим параметры наших распределений и количество экспериментов:

```
alpha1, alpha2, alpha3 = 2, 3, 4
beta = 2

n_samples = 100000

samples1 = np.random.gamma(alpha1, 1/beta, n_samples)
samples2 = np.random.gamma(alpha2, 1/beta, n_samples)
samples3 = np.random.gamma(alpha3, 1/beta, n_samples)

samples_sum = samples1 + samples2 + samples3
```

Зададим распределение суммы

```
alpha_sum = alpha1 + alpha2 + alpha3

x = np.linspace(0, np.max(samples_sum), 1000)
gamma_pdf = gamma.pdf(x, alpha_sum, scale=1/beta)
```

Построим график

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(samples_sum, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='g',
label='Сумма выборок')
plt.plot(x, gamma_pdf, 'r-', lw=2, label=f'Теоретический рассчет
Gamma({alpha_sum}, {beta})')
plt.xlabel('Value')
plt.ylabel('Density')
plt.legend()
plt.title('Сумма гамма-распределений и теоретическая плотность гамма-
распределения')
plt.show()
```

Сумма биномиального и Гамма распределений

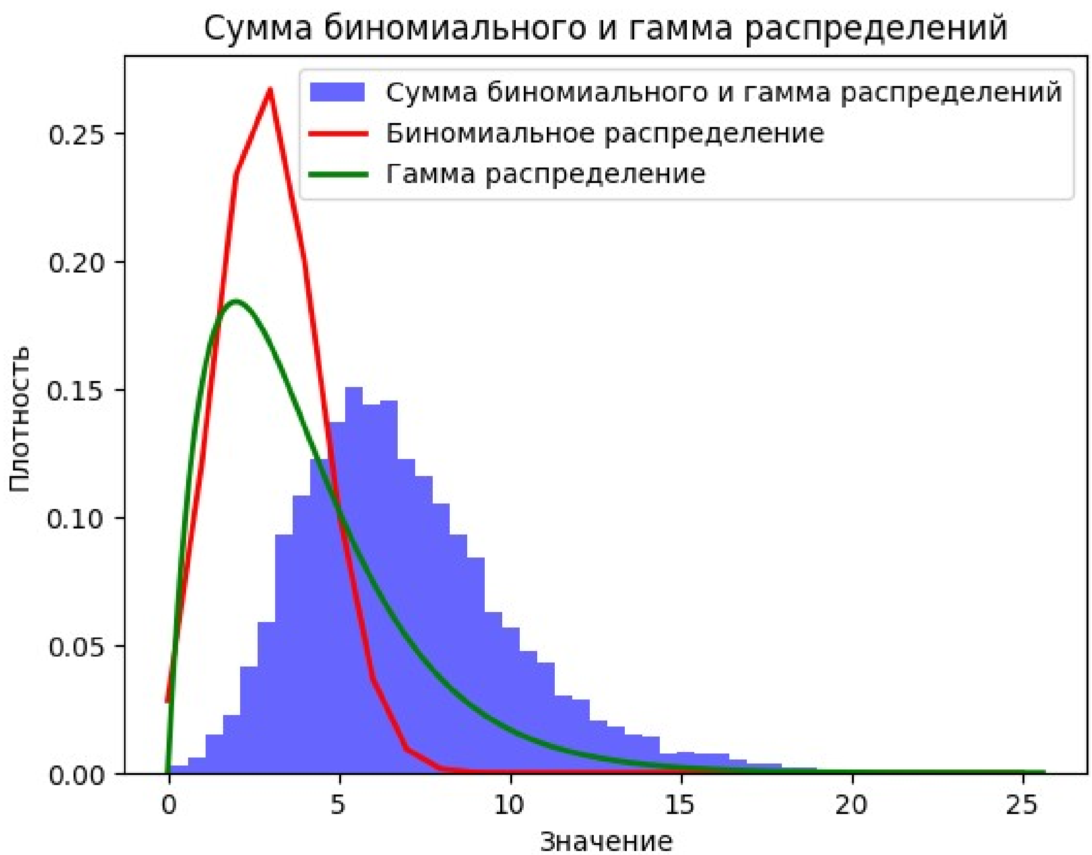
Рассмотрим сумму дискретной и непрерывной независимых случайных величин $L_d + L_c$. Выразим функцию распределения суммы случайных величин $L_d + L_c$ через функцию распределения случайной величины L_c, пользуясь независимостью случайных величин L_d и L_c, и законом распределения L_d:

$$F_{L_d+L_c}(x) = P(L_d + L_c < x) = \sum_{k=0}^{n} P(L_c \le x - k, L_d = k) = \sum_{k=0}^{n} P(L_c \le x - k) P(L_d = k)$$

Продемонстрируем на практике:

```
n = 10
p = 0.3
k = 2.0
theta = 2.0

X = np.random.binomial(n, p, 10000)
Y = np.random.gamma(k, theta, 10000)

Z = X + Y

x_range = np.linspace(0, np.max(Z), 1000)
binom_pmf = binom.pmf(np.arange(0, np.max(Z)), n, p)
gamma_pdf = gamma.pdf(x_range, k, scale=theta)
```

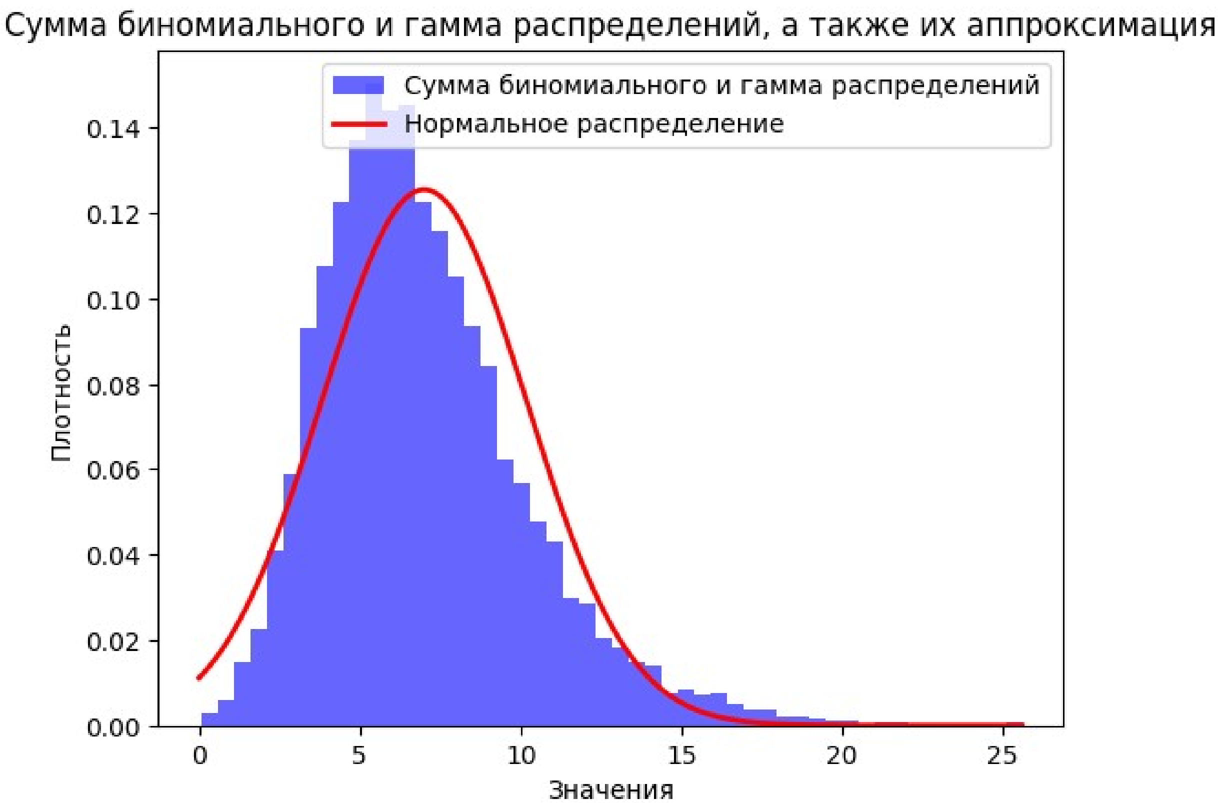
```
plt.hist(Z, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='b', label='Сумма биномиального и гамма распределений')

plt.plot(np.arange(0, np.max(Z)), binom_pmf, 'r-', lw=2, label='Биномиальное распределение')
plt.plot(x_range, gamma_pdf, 'g-', lw=2, label='Гамма распределение')

plt.xlabel('Значение')
plt.ylabel('Плотность')
plt.legend()
plt.title('Сумма биномиального и гамма распределений')
plt.show()
```



Аппроксимируем нормальным распределением

```
mu = n*p + k*theta
sigma = np.sqrt(n*p*(1-p) + k*theta**2)

x_range = np.linspace(0, np.max(Z), 1000)
normal_pdf = norm.pdf(x_range, mu, sigma)

plt.hist(Z, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='b', label='Сумма биномиального и гамма распределений')
```

```
plt.plot(x_range, normal_pdf, 'r-', lw=2, label='Нормальное распределение')

plt.xlabel('Значения')
plt.ylabel('Плотность')
plt.legend()
plt.title('Сумма биномиального и гамма распределений, а также их аппроксимация')
plt.show()
```



Использованные материалы

С гугл диска из беседы ТВиМС:

1. Ивченко, Медведев "Введение в математическую статистику"
2. Norman L. Johnson, Samuel Kotz, N. Balakrishnan - Continuous Univariate Distributions, Vol. 1 (Wiley Series in Probability and Statistics)-Wiley-Interscience (1994)
3. Norman L. Johnson, etc - Univariate Discrete Distributions, Third Edition-Wiley-Interscience (2005)

А также:

1. www.youtube.com/@GetSomeMath

2. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0-%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
3. https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.8d076b8b-66656230-8a6654f7-74722d776562/https/en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution
4. https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.24ebc951-66657415-933f6875-74722d776562/https/psychology.fandom.com/wiki/Binomial_distribution#Cumulative_distribution_function
5. https://www.resolventa.ru/data/mfti/theorver/joint_distributions.pdf

И много чего еще