第三章

基础: 位姿描述和坐标系描述

位置描述

位置矢量$^{A}p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

> 描述了点p在坐标系{A}中的位置

> 左上标:代表了参考坐标系

姿态描述

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} ^{A}X_B & ^{A}Y_B & ^{A}Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(X_B, X_A) & \cos(Y_B, X_A) & cos(Y_B, X_A) \\ \cos(X_B, Y_A) & \cos(Y_B, Y_A) & cos(Y_B, Y_A) \\ \cos(X_B, Z_A) & \cos(Y_B, Z_A) & cos(Y_B, Z_A) \end{bmatrix}$$

> $^{A}_{B}R$表示{B}相对于{A}的姿态
>
> 下标B:表示是坐标系{B}的姿态
>
> 上标A: 表示参考坐标系是{A}

> $^{A}X_B$是{B}轴的x方向单位向量在{A}的各单位方向向量上的投影
>
> > 其可以描述出该单位方向向量的姿态

> $^{A}_{B}R =^{A}_{B} R^{-1} = ^{A}_{B}R^{T}$

> 若{B}和{A}的姿态相同，则旋转矩阵为: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

由上可描述任意刚体的位置和姿态:

> 位置:${}^{O_i}_{O_j}P$:是刚体j原点与参考系{i}原点间的位置矢量
> 姿态:${}^{O_i}_{O_j}R$: 用上述方式表示

坐标系描述

坐标系的矩阵表达式:$T = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \end{bmatrix}$

点的坐标变换

> 背景:点在不同坐标系中的描述不同

平移变换

特点: {A},{B}姿态相同，原点不重合(即改变了位置)

> 不会受旋转变换的影响，因为平移变换的对象是点(坐标系的原点)

目的: 知点p在{B}中的位置${}^{B}p$,求点p在{A}中的位置矢量${}^{A}p$
公式: ${}^{A}p ={}^{B} p +{}^{A} p_{O_B}$

> ${}^{A}p_{O_B}$:是{B}原点在{A}中的位置矢量

解题步骤:

1. 通过平移变换可算出${}^{A}p_{O_B}$
2. 利用公式即可得结果

旋转变换

特点: {A},{B}原点重合,姿态不同
目的: 知点p在{B}中的位置${}^{B}p$,求点p在{A}中的位置矢量${}^{A}p$
公式: ${}^{A}p = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}p$

解题步骤:

1. 求旋转矩阵${}^{A}_{B}R$
2. 利用公式即可

饶x,y,z轴的旋转矩阵

推导过程:可用书P70例3-2的解答过程来理解

1. 将旋转轴(如z轴)作为垂直与纸面的垂线，然后在纸面画出其他两轴(如x,y轴)
2. 假设旋转角度为θ可计算出x_B在{A}中的投影结果为$\vec{X}_B = \vec{n} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\end{bmatrix}^T$
3. 可计算出y_B在{A}中的投影结果为$\vec{y}_B = \vec{o} = \begin{bmatrix}\cos(\theta+90) & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T$
4. 可计算出z_B在{A}中的投影结果为$\vec{z}_B = \vec{a} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

结果:

$$Rot(x/y/z,\theta) = \begin{bmatrix}\vec{n} & \vec{o} & \vec{a}\end{bmatrix}$$

$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}$$

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

重点:绕多个`固定`轴旋转的旋转矩阵

绕固定坐标轴一次转动时，每个旋转矩阵要根据旋转次序从右往左乘

原理:

> 因为绕固定轴旋转一次得到的新坐标系是原来的坐标系基础上左乘R(Z或X或Y)
> 若继续饶固定轴旋转，即又在之前旋转的基础上左乘R(Z或X或Y)
> 所以每个旋转矩阵要根据旋转次序从右往左乘

例子 {B}先绕x轴旋转30,再绕z轴旋转40,求旋转矩阵${}^A_BR$?

$${}^A_BR = Rot(z,40)Rot(x,30)$$

重点:绕多个`运动`轴旋转的旋转矩阵

绕动坐标轴一次转动时，每个旋转矩阵要从左往右乘

原理:

> 每一次旋转都是在新的坐标系的轴上旋转，然后是一个逆的过程，具体不太好描述，可以通过旋转变换的公式来具体理解
> 下面通过一个例子来详细展现原理

例子:先绕{i}的x_i轴旋转θ_1得到{B1},再绕{B1}的y_1轴旋转θ_2得到{B2}，最后绕{B2}的z_2轴旋转θ_3得到{j},求旋转矩阵^i_jR?

$$\begin{aligned} {}^ip &= Rot(x_i,\theta_1)^{B1}p \\ {}^{B1}p &= Rot(y_1,\theta_2)^{B2}p \\ {}^{B2}p &= Rot(z_2,\theta_3)^{j}p \end{aligned}$$

最终可得:

$${}^ip = Rot(x_i,\theta_1)Rot(y_1,\theta_2)Rot(z_2,\theta_3)^jp$$

即旋转矩阵是按照旋转次序从左往右乘

复合变换

特点: 姿态不同，也不共原点

注意: 向量相加,需两向量所处坐标系的方位相同

公式:$^Ap = ^C p + ^A p_{O_{AB}} = ^A_BR^B p + ^A p_{O_{AB}}$

> 中间坐标系{C}: 与{A}姿态相同,原点与{B}原点重合

齐次坐标和齐次变换

齐次坐标表示

点的齐次坐标表示

直角坐标:$p = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$

齐次坐标通式:$p = \begin{bmatrix} a & b & c & k \end{bmatrix}^T, k \neq 0$

> $a = kx, b = ky, c = kz$
> 坐标原点:$[0,0,0,1]^T$

坐标轴的齐次坐标表示

通式:$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \end{bmatrix}^T$

> x轴:$[1\ 0\ 0\ 0]^T$
> y轴:$[0\ 1\ 0\ 0]^T$
> z轴:$[0\ 0\ 1\ 0]^T$

齐次变换

齐次变换矩阵:

$$ {}^A_BT = \begin{bmatrix} & {}^A_BR & & {}^Ap_{BO} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4X4} $$

> 表示了坐标系{B}相对于{A}的位姿(位置和姿态)

纯平移的齐次变换

特点: 旋转变换矩阵${}^A_BR == I_{3\times3}$

表述:$Trans(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

> a,b,c分别代表了沿x,y,z轴平移的距离

纯旋转的齐次变换

$$ Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$Rot(z,\theta)=\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齐次变换矩阵的其他表现形式

$^A_BT = Trans(a,b,c)^A_BR_{4\times 4}$

> 其中^A_BR可以用纯旋转的齐次变换表示
>
> > 例子: 先绕{A}的x轴旋转30度，再绕{A}的y轴旋转40度,则旋转矩阵为$^A_BR = Rot(y,40)Rot(x,30)$

齐次变换的相对性

变换是想对于固定坐标系中的各坐标轴旋转或平移,则齐次坐标变换矩阵依次左乘
变换是想对于自身坐标系中的各坐标轴旋转或平移,则齐次坐标变换矩阵依次右乘

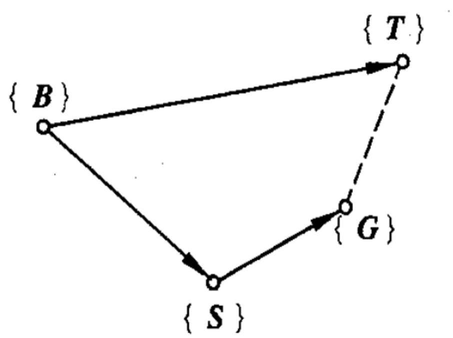
例题:见书P75例3-7

齐次变换矩阵的逆矩阵

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{p}\vec{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{p}\vec{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{p}\vec{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $\vec{n},\vec{o},\vec{a}$即为$^Ax_B,^Ay_B,^Az_B$的简写

刚体变换



$^B_TT = {}^B_ST{}^S_GT{}^G_TT$

物体变换的表述:

1. 求出物体的齐次变换矩阵
2. 物体各点位置矢量左乘上^A_BT即可