第五章 机器人动力学

转动惯量

绕定轴旋转的转动惯量:$I=\int_m r^2dm$

> r:dm离定轴的距离

惯性张量

1�相对于固定在刚体上的坐标系{C}的惯性张量为:

$${}^CI=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

- 转动惯量:I_{xx},I_{yy},I_{zz}
  - $I_{xx}=\iiint_V(y^2+z^2)\rho\,dv$
  - $I_{yy}=\iiint_V(x^2+z^2)\rho\,dv$
  - $I_{zz}=\iiint_V(x^2+y^2)\rho\,dv$
- 惯性积:I_{xy},I_{xz},I_{yz}
  - $I_{xy}=\iiint_V xy\rho\,dv$
  - $I_{xz}=\iiint_V xz\rho\,dv$
  - $I_{yz}=\iiint_V yz\rho\,dv$

2�原点位于质心处的坐标系{C}的惯性张量在另一个参考坐标系{A}中的惯性张量之间的关系:

- 转动惯量:
  - ${}^AI_{xx}={}^CI_{xx}+m(y_c^2+z_c^2)$
  - ${}^AI_{yy}={}^CI_{yy}+m(x_c^2+z_c^2)$
  - ${}^AI_{zz}={}^CI_{zz}+m(x_c^2+y_c^2)$
- 惯性积:
  - ${}^AI_{xy}={}^CI_{xy}+mx_cy_c$
  - ${}^AI_{xz}={}^CI_{xz}+mx_cz_c$
  - ${}^AI_{yz}={}^CI_{yz}+my_cz_c$

> x_c, y_c, z_c是{C}原点在{A}的位置矢量
> 如果知道${}^{A}I$,要求物体相对于质心处的惯性张量${}^{C}I$,将公式反过来就可以了

拉格朗日力学

1. **刚体定轴转动的动能定理**:
    - 对于整个刚体，定轴转动动能为:$E_k = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$
2. **刚体的动能和位能(即势能)**:
    - `物体动能`: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
    - `物体势能`: $E_p = mgh$
        - h: 物体想对于`位能零点`的高度
    - `弹簧势能`: $E_p = \frac{1}{2} k x^2$
        - x: 弹簧长度
3. **拉格朗日函数**:系统总动能与总位能之差
    - $L = E_k - E_p$

⭐机器人动力学方程

一般形式: $\tau_i = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

> q_i: 表示系统中线位移或角位移(如d_i, θ_i)
> ⭐τ_i是关于时间的函数

1. 当关节是转动关节，则q_i为转动变量θ,τ_i是力矩τ_θ
    - $\tau_\theta = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$
    - 力矩可用T表示
2. 当关节是移动关节，则q_i为移动变量r,τ_i是力τ_r
    - $\tau_r = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}) - \frac{\partial L}{\partial r_i}$

解体步骤

1. 求各结构动能,位能
    - 对于二维平面上运动的物体:速度为$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$
2. 得系统总动能和总位能
3. 得$L = E_k - E_p$

4. 利用公式τ_i求各个关节的力矩或力