第四章 机器人运动学

研究的是机器人工作空间与关节空间之间的影射关系

> 正运动学: 给定机器人各关节变量，计算机器人末端的位置姿态
>
> > 即 关节变量 => 位置姿态

> 逆运动学: 已知机器人末端的位置姿态，计算机器人对应位置的全部关节变量

连杆

连杆坐标系

1. 称基座为连杆0,不包含在n个连杆内
2. `关节1`处于基座与`连杆1`之间
3. ⭐`连杆i`距基座近的一端的关节为`关节i`，据基座远的一端的关节为关节`i+1`
4. 固连于基座上的坐标系为坐标系{0},建立在关节1上
    - 若用改进DH,则坐标系{0},{1}是重合的

连杆参数

连杆参数: 连杆长度a_i,连杆扭角α_i, 连杆偏距d_i, 关节角θ_i

> 只有d_i,θ_i是关节变量

⭐⭐各连杆参数的含义:

- `连杆尺寸参数`:由连杆两端关节轴的相对关系决定
    - `连杆长度`: 两关节的轴线的公垂线的长度
    - `连杆扭角`:两关节轴线的夹角
- `连杆之间的连接关系`:用连接两个连杆的关节轴的特性来表示
    - `连杆偏距`:描述了两连杆之间的一个距离关系
        - > 关节i上的两条公垂线(a_i, a_{i-1})之间的距离,沿关节轴线

> 测量

- `关节角`: 描述了连杆i想对于连杆i-1绕关节i轴线的旋转角度

不同关节类型对关节变量的影响:

- 关节i是转动关节: θ_i是关节变量，其他三个参数固定不变
- 关节i是移动关节: d_i是关节变量，其他三个参数固定不变

特殊情况下连杆参数的值

关节i,关节i-1轴线平行时$\alpha_{i-1} = 0$
关节i,关节i-1轴线相交时$a_{i-1} = 0$,指向任意

D-H建模

标准D-H建模: 将坐标系{i}建立在`i+1`关节的轴线上
改进D-H建模(重要):将坐标系{i}建立在`i`关节的轴线上

D-H关节坐标系建立(标准)

建立原则:先中间，后两边

> tip: 画图时,y轴可以不用话，也没必要画

1. **关节i坐标系{i-1}的建立:**
    - 原点O_{i-1}: `关节i`轴线与`关节i-1,i`的公垂线的交点
    - z_{i-1}轴:与`关节i`轴线重合,指向任意
    - x_{i-1}轴: 与`关节i`和`关节i-1`轴线的公垂线重合，指向从`i`到`i+1`
        - 轴线相交时，则取两轴线所在平面的法线为x_{i-1}轴
    - y_{i-1}轴: 由右手螺旋法则得到
2. **{0}的建立:**
    - z_0轴: 与关节1轴线一致
    - 关节1变量为0时，坐标系{0},{1}重合
3. **{n+1}的建立:**
    - z_{n+1}轴: 沿关节n轴线方向
    - 关节n变量为0时，坐标系{n},{n+1}重合

利用连杆坐标系确定D-H参数(即连杆参数)

- a_i: 从Z_{i-1}到Z_i沿X_i测量的距离
  - 若Z_{i-1},Z_i相交，则$a_i = 0$
- α_i: 从Z_{i-1}到Z_i绕X_i旋转的角度
- d_i: 从X_{i-1}到X_i沿Z_{i-1}测量的距离
  - ⭐关节1是旋转关节时,$d_i = 0$
- θ_i: 从X_{i-1}到X_i绕Z_{i-1}旋转的角度
  - ⭐关节1是移动关节时,$\theta_i = 0$

> tip: 顺时针绕是负值，逆时针转是正值

个人理解

1. `连杆i` 所在的那条直线(关节i，关节i+1轴线不相交)是x_{i-1}轴
   - 若关节i,关节i+1轴线相交，则啥也不是
2. ⭐a_i, α_i:由连杆前后两关节(关节i，关节i+1)决定
3. ⭐d_i, θ_i:由关节i前后两连杆决定
4. z_{i-1}轴:一般是关节i的轴线
5. 当关节是旋转关节时，x_i, x_{i-1}是不可能重合的，即使平移

连杆变换

连杆变换定义: 连杆坐标系{i}相对于{i-1}的变换

- 相关的四个参数:$a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$
- 有四个基本子变换(均是动坐标系变换):经过后可从{i-1}变换到{i}
  1. 系{i-1}绕z_{i-1}轴旋转θi,是x_{i-1}, x_i平行，算子为$Rot(z, \theta_i)$
  2. 沿z_{i-1}轴平移d_i，使x_{i-1}, x_i重合,算子为$Trans(0, 0, d_i)$
  3. 沿x_i轴平移a_i，使两坐标系原点重合,算子为$Trans(a_i, 0, 0)$
  4. 绕x_i轴旋转α_i，使z_{i-1}, z_i重合,即{i},{i+1}重合，算子为$Rot(x, \alpha_i)$

{i-1}到{i}变换矩阵A_i:

> $A_i = Rot(z, \theta_i)Trans(0, 0, d_i)Trans(a_i, 0, 0)Rot(x, \alpha_i)$

> ⭐$A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & \alpha_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & \alpha_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T_i:{i}连杆坐标系想对于固定坐标系{0}的变换

$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$T_1 = A_1T_0 = A_1$
$T_2 = A_1A_2$(应右乘)
$T_n = A_1A_2A_3...A_n$

机器人正运动学

知:连杆变换矩阵T,各关节变量
求:机器人末端的位置姿态

> tip: $c_i = \cos\theta_i, s_i = \sin\theta_i$

机器人雅可比矩阵

J_i:雅可比矩阵第i列
$J_i = \begin{bmatrix} J_{li} \\ J_{mi} \end{bmatrix}$

知连杆变换T_6^i,即可根据相应的n,o,a,p求J_i(以6节机器人为例)
$T_6^i = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$T_6^2 = A_3A_4A_5A_6$
$T_2^0 = A_1A_2$

转动关节i:

$$J_{li} = \begin{bmatrix} (\vec{p} \times \vec{n})_z \\ (\vec{p} \times \vec{o})_z \\ (\vec{p} \times \vec{z})_z \end{bmatrix}$$
$$J_{mi} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix}$$

移动关节**i**: $J_{li} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix}$
$$J_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

基础知识

$$\vec{p} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix}$$
$(\vec{p} \times \vec{n})_z$: 即取$\vec{p} \times \vec{n}$与$\vec{k}$有关的项，即如z轴的分量

$$c_1 = \cos(\theta_1)$$
$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$