**Раздел 1. Элементы теории множеств**

**Лекция 1. Множества, подмножество. Конечные множества. Бесконечные множества. Операции над множествами.**

Понятие «множество» является одним из основных понятий математики и не имеет явного определения в математической теории, т.е. является неопределяемым в современной математике.

В математике часто приходится рассматривать те или другие объекты как одно целое. Все эти разные совокупности называют множествами. Например, можно говорить о множестве букв в некотором слове, о множестве натуральных чисел, о множестве студентов факультета педагогики и психологии детства, о множестве треугольников и т.д.

В обыденной жизни вместо слова «множество» употребляются слова «набор», «совокупность», «собрание», «коллекция» и другие.

*Определение.* Объекты, из которых образовано множество, называются ***элементами.***

Множества принято обозначать *прописными* буквами латинского алфавита:   
*А*, *В*, *С*, …

Элементы множества принято обозначать *строчными* буквами латинского алфавита: *a, b, c,…* или какой-нибудь одной буквой с индексом: *а*1, *а*2, *а3,*…

Часто приходится выяснять, принадлежит или нет некоторый объект данному множеству, это значит, является или нет его элементом. Например, мы говорим: «Октябрь — осенний месяц». Тем самым, мы утверждаем, что объект «октябрь» принадлежит множеству осенних месяцев. Или, например, «Число  не является натуральным». Это значит, что число  не принадлежит множеству натуральных чисел.

Предложение «Предмет *а* принадлежит множеству *А*» можно записать, используя символы: *а* ∈ *А.*

Прочитать эту запись можно по-разному:

«Предмет *а* принадлежит множеству *А*».

«Предмет *а* является элементоммножества *А*».

«Множество *А* содержит элемент *а*».

Предложение «Предмет *а* не принадлежит множеству *А*» записывают так:

*а* ∉ *А*.

**Виды множеств**

Слово «множество» в обычном смысле всегда связывается с большим числом предметов. В математике это необязательно. В зависимости от***количества элементов***выделяют пустые, конечные и бесконечные множества.

*Определение.*Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством.

Обозначение: ∅.

*Например*, множество решений уравнения: *х*2 + 1 = 0.

*Определение:****Универсальное множество****— это такое множество, которое состоит из всех элементов, а также подмножеств множества объектов исследуемой области.*

*Определение.* Множество, содержащее конечное число элементов называется ***конечным*** множеством.

В частности, множество с одним элементом, называется ***единичным****.*

Если же множество содержит бесконечное число элементов, его называют ***бесконечным.***

*Например*:

* конечные множества: множество сторон треугольника, множество студентов в аудитории;
* единичные множества: множество решений уравнения *х* + 1 = 0, множество естественных спутников Земли;
* бесконечные множества: множество точек плоскости, множество четных чисел.

Элементами множества могут быть объекты любой природы: буквы, слова, точки, числа, люди и др. Поэтому мы можем классифицировать множества и по другому основанию —в зависимости *от характера (природы) элементов.* Для математики большую роль играют множества, элементами которых являются математические объекты: точечные и числовые множества.

*Определение.* Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми*** множествами.

Для некоторых числовых множеств есть специальное обозначение:

***N*** — множество натуральных чисел;

***Z*** — множество целых чисел;

***Q*** — множество рациональных чисел;

***R*** — множество действительных чисел.

*Например,* – 5 ∈ ***Z***; ** ∈ ***R***; 0 ∉ ***N****.*

*Определение.*Множество, элементами которого являются точки, называется ***точечным*** множеством.

Любая геометрическая фигура является точечным множеством, в том числе и точка (единичное множество).

**Способы задания множеств**

Понятие множества является неопределяемым. Но как в таком случае узнать, является ли та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, т.е. *множество* ***задано,*** *если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.*

Рассмотрим два способа задания множества:

1. перечисление всех его элементов;
2. указание характеристического свойства элементов множества.

1. Первый способ: названия всех элементов множества записывают в строчку, отделяют между собой запятыми и заключают в фигурные скобки.

*Пример*. *А* = {1, 3, 5, 7, 9}; *В* = {*м, а, т, е, и, к*}.

Порядок элементов при перечислении не важен. Последнее множество можно записать иначе: *В* = { *т, е, к, м, а, и*}.

2. Если множество бесконечное, то его элементы нельзя перечислить. Трудно задать перечислением элементов и конечное множество с большим количеством элементов. В таких случаях пользуются другим способом задания множества: *указывают характеристическое свойство его элементов.*

*Определение.* ***Характеристическое свойство*** — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Множество, которое задано некоторым характеристическим свойством *Р*, записывается следующим образом: {*х* | *Р* (*х*)}.

Эта запись читается: «Множество всех элементов *х* таких, что они обладают свойством *Р*».

*Пример*. Рассмотрим множество *С* рациональных чисел, меньших 5. Характеристическое свойство: «быть рациональным числом, меньшим 5».

В символичной форме это множество можно записать так:

*С =* {*х* | *x* ∈ *Q* и *x* < 5}.

Таким образом, конечное множество с небольшим числом элементов можно задать двумя способами.

*Пример*. 1) *А* = {1, 3, 5, 7, 9};

*А —* множество нечётных однозначных чисел;

2) *В* = {*м, а, т, е, и, к*};

*В —* множество различных букв в слове «математика»;

3) *D* = {1, 2, 3, 4};

*D —* множество натуральных чисел, меньших 5;

*D =* {*х* | *x* ∈ *N* и *x* < 5};

*D =* {*х* | *x* ∈ *Z* и 1 ≤ *x* ≤ 4}.

**Отношения между множествами**

**I.** *Пример*.Пусть даны множества *А* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, *В* = {2, 4, 6, 7}.

Очевидно, что каждый элемент множества *В* является и элементом множества *А*. В таком случае говорят, что *множество В включается в множество А (*или *В* является подмножеством множества *А*, или множество *А* включает в себя множество *В*).

*Определение.*Множество *В* ***включается*** в множество *А* (является его подмножеством), тогда и только тогда, когда каждый элемент множества *В* является также элементом множества *А*.

Обозначают: *В* ⊂ *А*

*А*

*В*

Пустое множество считают подмножеством любого множества.

Любое множество является подмножеством самого себя.

*Множества могут содержать как конечное, так и бесконечное число элементов.*

*Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются* ***конечными множествами****. Все элементы этих множеств можно перебрать (пересчитать). Конечные множества, содержащие* ***n*** *элементов, называются* ***n-элементными множествами****. Например: множество, содержащее один элемент - одноэлементное множество, множество, содержащее пять элементов - пятиэлементное множество и т.д. Утверждение: «Число элементов множества* ***А*** *равняется* ***к»*** *символически записывается так: n(A) = к.*

*Замечание.* Различают 2 вида включения: строгое (*В* ⊂ *А*)и нестрогое  
(*В* ⊆ *А*)*.* (Здесь можно проследить аналогию с отношениями строгого неравенства  
(*b* < *а*) и нестрогого неравенства(*b* ≤ *а*)).

*Пример.*Пусть *А* = {1, 2, 3}. Запишите все подмножества этого множества.

Решение. Множество всех подмножеств множества *А* обозначим *Р* (*М*) *Р* (*М*) *=*{{1},{2},{3},{1, 2},{2, 3},{1, 3}, ∅, *А*}*.* Таким образом, данное трехэлементное множество *А* имеет 8 подмножеств.

*А* и ∅ называют ***несобственными подмножествами****,* а все остальные — ***собственными****.* Любое собственное подмножество *В* множества *А* **строго включается** в множество *А* (*В* ⊂ *А*).

**II.** *Пример*. Даны множества*А =* {*а, b, с*} и *В =* {*с, а, b*}.

*А* ⊆ *В*? — да. *В* ⊆ *А*? — да. В этом случае говорят, что множества *А* и *В* равны и пишут *А = В.*

*Определение.*Множества *А* и *В* находятся в отношении ***равенства*** тогда и только тогда, когда *А* ⊆ *В* и *В* ⊆ *А*.

В этом случае множества *А* и *В* называются *равными.*

*В*

*А*

Из определения равенства множеств следует, что равные множества содержат одни и те же элементы и порядок записи элементов множества не является существенным.

**III.** *Пример.**А* = {1, 2, 3, 4} и *В =* {3, 4, 5, 6}.

*А* ⊆ *В*? — Нет.

*В* ⊆ *А*? — Нет. Но множества *А* и *В* имеют общие элементы. Отношение — ***пересечение****.*

*Определение.*Множества *А* и *В* ***пересекаются*** тогда и только тогда, когда они имеют общие элементы и ни одно из них не является подмножеством другого.

Символа для обозначения этого отношения нет.

*А*

*В*

**IV.** *Пример*.*А* = {1, 2, 3} и *В =* {5, 6}. У этих множеств нет общих элементов. Отношение — ***непересечение****.*

*Определение.*Множества *А* и *В* ***не пересекаются*** тогда и только тогда, когда они не имеют ни одного общего элемента.

*А*

*В*

*Замечание.* Если все рассматриваемые в ходе какого-нибудь рассуждения множества являются подмножествами одного некоторого множества *I*, то это множество *I* называют ***универсальным.***

*Пример*. Множества:

*А —* множество студентов 1 курса университета;

*В —* множество спортсменов университета;

*С —* множество студентов факультета педагогики и психологии детства являются подмножествами множества студентов университета, которое и является в этом случае универсальным.

На диаграмме *I* обычно показывают в виде прямоугольника. Для нашего примера:

*A*

*B*

*C*

*I* J

**Операции над множествами**

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Эти новые множества получаются как результат выполнения операций над множествами.

**І.** *Определение.* ***Пересечением*** множеств *А* и *В* называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству *А* имножеству *В*.

*Обозначение:* *А* ∩ *В*.

Символическая запись определения: *А* ∩ *В* = {*х* | *x* ∈ *А* и *x* ∈ *В*}.

Операцию, при помощи которой находят пересечение множеств, называют ***пересечением.***

На диаграмме пересечение показывается так:

*A*

*B*

*A*

*B*

*B*

*A*

*A*

*B*

*A*

*B*

*А* ∩ *В* *А* ∩ *В* = *В* *А* ∩ *В* = *А* *А* ∩ *В* = *В = А*

*А* ∩ *В =* ∅

*Нахождение пересечения множеств*

*при различных способах задания множеств*

а) Множества заданы перечислением всех элементов.

Для задания *А* ∩ *В* достаточно перечислить общие элементы множеств *А* и *В.*

*Пример.**А* = {2, 6, 4, 8} и *В =* {3, 4, 5, 6}. *А* ∩ *В* = {4, 6}.

б) Множества *А* и *В* заданы при помощи указания характеристических свойств.

Характеристическое свойство пересечения множеств составляется из характеристических свойств множеств *А* и *В* с помощью союза **«и»**.

*Пример*. *А —* множество учеников 4 класса, *В —* множество отличников.

*А* ∩ *В* — множество учеников 4 класса и отличников (множество отличников 4 класса или множество учеников — отличников 4 класса).

*Свойства операции пересечения множеств*

1) ∀*А, В* (*А* ∩ *В* = *В* ∩ *А* ) — коммутативность пересечения или переместительный закон;

2) ∀*А, В, С* ((*А* ∩ *В*) ∩ *С* = *А* ∩ (*В* ∩ *С*) — ассоциативность пересечения или сочетательный закон;

3) ∀*А* (*А* ∩ *А* = *А*);

4) ∀*А* (*А* ∩ *I* = *А*);

5) ∀*А* (*А* ∩∅ = ∅).

Скобки в приведенных выше равенствах играют ту же роль, что и при выполнении операций над числами (указывают на порядок выполнения операций).

**ІІ.** *Определение.* ***Объединением*** множеств *А* и *В* называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному множеству *А* или *В*.

*Обозначение: А*  *В.*

Символическая запись определения: *А*  *В* = {*х* | *x* ∈ *А* или *x* ∈ *В*}.

Операцию, при помощи которой находят объединение множеств, называют ***объединением.***

На диаграмме:

*A*

*B*

*B*

*A*

*B*

*A*

*B*

*А*

*А*  *В* *А*  *В* = *А* *А*  *В* = *В* *А*  *В* = *В = А*

*A*

*B*

*А*  *В*

*Нахождение объединения множеств*

*при различных способах задания множеств*

а) Множества *А* и *В* заданы перечислением всех элементов.

В множество *А*  *В* вписывают все элементы множества *А* и дописывают из множества *В* элементы, которых не хватает.

*Пример. А* = {1, 2, 3} и *В =* {2, 4, 5, 6}. *А*  *В* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

б) Множества *А* и *В* заданы указанием характеристических свойств.

Характеристическое свойство *А*  *В* составляется из характеристических свойств множеств *А* и *В* при помощи союза **«или»**.

*Пример.* *А —* множество прямоугольных треугольников;

*В —* множество остроугольных треугольников.

*А*  *В —* множество прямоугольных или остроугольных треугольников.

*Свойства операции объединения множеств*

1) ∀*А, В* (*А*  *В* = *В*  *А* ) — коммутативность пересечения или переместительный закон;

2) ∀*А, В, С* ((*А*  *В*)  *С* = *А*  (*В*  *С*) — ассоциативность пересечения или сочетательный закон;

3) ∀*А* (*А*  *А* = *А*);

4) ∀*А* (*А*  *I* = *I*);

5) ∀*А* (*А* ∅ = *А*).

**ІІІ.** *Определение.* ***Разностью*** множеств *А* и *В* называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству *А* и не принадлежат множеству *В.*

*Обозначение: А* \ *В.*

Символическая запись: *А* \ *В* = {*х* | *x* ∈ *А* и *x* ∈ *В*}.

Операция, при помощи которой находят разность множеств, называется ***вычитанием.***

На диаграмме:

*A* AS

*A* AS

*A* AS

*В* AS

*В* AS

*В* AS

*В* AS

*A* AS

*В* AS

*A* AS

*В* AS

*А* \ *В В* \ *А*

*А* \ *В =* ∅ *А* \ *В* *А* \ *В =* ∅

*Нахождение разности множеств*

*при различных способах задания множеств*

а) Множества *А* и *В* заданы перечислением всех элементов.

В множестве *А* \ *В* записываются только те элементы множества *А*, которые не принадлежат множеству *В.*

*Пример: А* = {1, 2, 3, 4} и *В =* {3, 4, 5, 6}. *А* \ *В* = {1, 2}, *В* \ *А* = {5, 6}.

б*)* Множества *А* и *В* заданы указанием характеристических свойств.

Характеристическое свойство множества *А* \ *В* составляется из характеристического свойства множества *А* и отрицания характеристического свойства множества *В,* которые соединены при помощи союза **«и».**

*Пример. А —* множество равнобедренных треугольников;

*В —* множество прямоугольных треугольников;

*А* \ *В —* множество равнобедренных инепрямоугольных треугольников;

*В* \ *А —* множество прямоугольных и неравнобедренных треугольников.

Рассмотрим отдельно вычитание множеств, если *одно из них является подмножеством (частью) другого.*

Пусть *В* ⊂ *А.* На диаграмме покажем разность множеств *А \ В*:

*А* AS

*В* AS

Тогда разность *А \ В* называется ***дополнением*** множества*В* до множества *А.*

Обозначение: *В′А* ().

Дополнение множества рассматривается особо в связи с универсальным множеством *I.*

Дополнение множества *В* до универсального множества *I* обозначается  и называется просто ***дополнением множества В****.*

*I* AS

*B*

AS



*Определение.* ***Дополнением*** множества *В* называют множество, которое содержит только такие элементы универсального множества *I,* которые не принадлежат множеству *В.*

Символически:  = {*х* | *x* ∉ *В*}.

*Замечание.* 1.Операции над множествами выполняются в следующем порядке: .

2. Скобки играют ту же роль, что и в записях операций над числами, т.е. определяют порядок выполнения операций над множествами.

**Декартово произведение множеств**

Из двух объектов *а* и *b* можно составить двухэлементное множество {*а*, *b*} (порядок не важен) и объект, для которого важен порядок элементов и который называется ***упорядоченной парой.*** Упорядоченная пара обозначается (*а, b*), (*b, а*),  
(*а, а*), (*b, b*).

*Определение.* ***Упорядоченная пара*** — это два объекта, которые расположены в соответствующем порядке.

Объект *а* пары (*а, b*), занимающий первое место в паре, называется *первой компонентой (координатой)* пары, *b —* *второй компонентой (координатой)* пары.

*Пример.* Из чисел 1 и 2 можно составить *четыре* пары:

(1, 2), (2, 1), (1, 1), (1, 1), но *одно* множество {1, 2}.

Если компоненты пары равны, то не имеет смысла говорить, какая из них первая, какая вторая.

*Определение.*Две пары (*а, b*) и (*c, d*) считаются ***равными*** тогда и только тогда, когда *а = с* и *b = d.*

В нашем примере мы брали компоненты пар из одного множества.

Но можно составить пары и так:

* первая компонента выбирается из одного множества;
* вторая — из другого множества.

*Пример. А =* {1, 2}, *В =* {*а*, *b, с*}.

Составим всевозможные пары: {(1, *а*), (1, *b*), (1, *с*), (2, *а*), (2, *b*), (2, *с*)}*.*

Мы составили декартово произведение множеств *А* × *В.*

*Определение.* ***Декартовым произведением*** множеств *А* и *В* называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству *А,* а вторая — множеству *В.*

Обозначение: *А* × *В =* {(*х*, *у*)| *x* ∈ *А*, *у* ∈ *В*}.

Операция называется ***декартовым умножением.***

**Понятие соответствия**

*Пример.* Рассмотрим два конечных множества:

*М =* {5, 10, 15, 20} и *K =* {0, 5}.

Образуем декартовое произведение этих множеств *М* × *К.*

*М* × *К =* {(5, 0), (5, 5), (10, 0), (10, 5), (15, 0), (15, 5), (20, 0), (20, 5)} — это соответствие.

Рассмотрим одно из подмножеств *М* × *К.* Например, *R* = {(5, 0), (5, 5)} — это тоже одно из соответствий между множествами *М* и *К.*

*Определение.* **Соответствием между множествами** *Х* и *Y* называется любое подмножество декартового произведения этих множеств*.*

Обозначение соответствий: *R, S, T,…*

Если *R* — соответствие между множествами *X* и *Y*,то согласно определению,  
*R* ⊂ *X* × *Y*.

Записи *хRу*, (*х*, *у*) ∈ *R* читаются следующим образом: «элементы *х* и *у* находятся в соответствии *R*», «элементу *х* соответствует элемент *у*».

**Способы задания соответствий**

Поскольку соответствие — это подмножество, то его можно задать как любое множество.

1) ***Перечислением всех пар элементов***, которые находятся в данном соответствии, задается соответствие между *конечными* множествами.

2) Множество *R* можно задать ***указанием характеристического свойства:***

*R =* {(*x,y*)⏐ *x* ∈ *M*, *y* ∈ *K* и «число *х* оканчивается цифрой *у*»} или

*P =* {(*x,y*)⏐(*x,y*)∈ *X* × *Y* и «число *х* оканчивается цифрой *у*»}.

Характеристическое свойство формулируется в виде предложения с двумя переменными, хотя обозначение переменных иногда опускается.

Например, соответствие *S*: «число *х* больше числа *у*» (или «больше») между множествами *N* и *Z.*

В математике предложения с двумя переменными записывают, применяя символы: *х  у, х  у.* В частности, характеристическое свойство может быть записано уравнениями или неравенствами:

*U =* {(*x,y*)⏐ *x* ∈ *R*, *y* ∈ *R* и *х =* *у*}, *Т =* {(*x,y*)⏐ *x* ∈ *R*, *y* ∈ *R* и *х ≥* *у*}.

3) Соответствие между элементами двух числовых множеств можно задать при помощи ***графика*** на координатной плоскости.

В нашем примере график соответствия *Р = М* × *К.*:

0 5 10 15 20 *х* (*М*)

*у* (*К*)

5

Если соответствие содержит бесконечное множество пар элементов, то его графиком является не множество изолированных точек, а некоторые линии или часть координатной плоскости.

0 *x*

*y*

*U*

*y*

*T*

*x*

Построим график соответствия *S*: «*х = у*» между множествами *R* и *R*.

0 *x*

*y*

*S*

4) Соответствие между конечными множествами наглядно задается при помощи ***графа.***

Граф — это чертеж, который состоит из двух овалов с точками внутри них и стрелок. Овалы изображают множества, точки — элементы множеств, стрелки — соответствие между ними (из точки *х* в точку *у).*

5

10

15

20

0

5

*Х*

*Y*

2

3

5

1

4

*Х*

*Y*

Граф соответствия *Р*, где Граф соответствия *R*, где

*Р =* {(5, 5), (10, 0), (15,5), (20, 0)} *R =* {(*x, y*)⏐(*x* ∈ {2, 3, 5}, *y* ∈ {1, 4} и *x* > у}

**Виды соответствий**

1. Рассмотрим соответствия между элементами множеств: *X* = {1, 2, 3, 4} и *Y* = {*a, b, c*}

1

2

3

4

*a*

*b*

*c*

*Х*

*Y*

1

2

3

4

*a*

*b*

c

*Х*

*Y*

*R1* *R2*

*Определение.*Соответствие между элементами множеств *Х* и *Y* называется**функцией**,тогда и только тогда когда каждому элементу *x* ∈ *X* соответствует *не более одного* элемента *y* ∈ *Y.*

*R1*— функция, *R2* — не функция.

Рассмотрим подробно функцию *R1*.

Во множестве *X* выделим подмножество, содержащее те элементы *x*, для которых есть соответствующие элементы во множестве *Y,* — это область определения функции.

*D =* {1, 2, 3}.

Пишут: 1 → *а,* 2 → *b,* 3 → *c* или *f*(1) = *а* и т.д.

Элемент *x* ∈ *X,* которому есть соответствующий *y* ∈ *Y,* называется *прообразом* элемента *у.*

Элемент *y* ∈ *Y,* который соответствует элементу *x* ∈ *D*, называется *образом* элемента *х* или значением функции *f* в точке *х* и записывается *у = f*(*х*).

{*a, b, c*} — множество значений функции.

1. Примеры функций, заданных при помощи графов:

*X*

*Y*

*X*

*Y*

*R*3  *R*4

*Определение.*Соответствие между элементами множеств *Х и Y* называется**отображением**, если каждому элементу *x* ∈ *X* соответствует *один и только один* элемент *y* ∈ *Y* (например*,* *R4*).

*R3* — функция, но не отображение.

1. Примерыотображений, заданных при помощи графов.

*Определение.*Отображение множества *Х* во множество *Y*, при котором каждый элемент *y* ∈ *Y* является образом *не более одного* элемента *x* ∈ *X,* называется **инъекцией**.

*X*

*Y*

*R5 —*инъекция

*Определение.*Отображение множества *Х* во множество *Y*, при котором каждый элемент *y* ∈ *Y* является образом *хотя бы одного* элемента *x* ∈ *X,* называется **сюръекцией***.*

*X*

*Y*

*R6* — сюръекция

*X*

*Y*

*X*

*Y*

*R7  R8*

Рассмотрим *R7*  — выполняются условия и инъекции (не более одного), и сюръекции (хотя бы одного) — это **биекция**.

*Определение.* Отображение множества *Х* во множество *Y*, при котором каждый элемент *y* ∈ *Y* является образом *одного и только одного* элемента *x* ∈ *X,* называется**биекцией или взаимно однозначным соответствием***.*

Пример: *R7*.

Биекцию можно определить иначе:

*Определение.* **Биекцией**называется соответствие между элементами множеств *Х и Y*, при котором каждому элементу *x* ∈ *X* соответствует *точно один элемент y* ∈ *Y* и каждый элемент *y* ∈ *Y* является образом *точно одного* элемента *x* ∈ *X.*

Это определение через соответствие удобно для выявления биекции.

Отображения, для которых не выполняются ни условия инъекции, ни условия сюръекции, будем называть **отображением общего вида**(*R8*).

**Равномощные множества**

Мы знаем, что два множества могут находиться в различных отношениях: пересечении, непересечении, включения, равенства. Понятие взаимно однозначного соответствия (биекции) позволяет ввести еще одно отношение между множествами — отношение равномощности.

*Определение.*Два множества называются**равномощными***,* если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначение:*А* ~ *В.*

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества.

Если множества *А* и *В* конечные и равномощные, то эти множества равночисленные (содержат одинаковое количество элементов).

*А* ~ *В* ≡ *m*(*A*) = *m*(*B*)

С бесконечными равномощными множествами связано, на первый взгляд, парадоксальное явление: подмножество может быть равномощно самому множеству.

Пример. *N —* множество натуральных чисели *A —* множество натуральных четных чисел.Очевидно, что *A* ⊂ *N*.

Между элементами множеств *N* и *A* можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом:

*N* = {1, 2, 3, 4, 5,… *n*, …}

*A =* {2, 4, 6, 8, 10,… 2*n*, …} — каждому натуральному числу *х* соответствует точно одно чётное число *у*, в 2 раза большее его, т.е. *у* = 2*х.*

Таким образом, *N* ~ *A.*

(Для конечных множеств это невозможно: Если *A* ⊂ *B* и *A*, *B —* конечные,то *m*(*A*) < *m*(*B*), т.е. множества *А* и *В* не равномощны).

*Определение.*Множество, равномощное множеству натуральных чисел,называется**счётным.**

В нашем примере *A* — *счётное* множество.

Не следует думать, что все бесконечные множества равномощны между собой. Например, не равномощны множество *N* и множество точек прямой.