**Раздел 1. Элементы теории множеств**

**Лекция 2. Отношение эквивалентности: определение и свойства. Классы эквивалентности.**

**ОТНОШЕНИЯ**

Мы рассмотрели соответствие между элементами двух различных множеств. Если множества совпадают, то соответствие между элементами двух совпадающих множеств или элементами одного множества называют бинарным отношением между элементами множеств или отношением на множестве (бинарное — потому что отношение между двумя объектами).

*Определение.* **Отношением на множестве** *Х* называется всякое подмножество декартового произведения *Х × Х* (*Х* 2).

Обозначение то же: *P, R, S, T, ... P* ⊆ *X* 2

*Способы задания отношений на множестве* такие же, что и способы задания соответствий между элементами двух множеств.

Рассмотрим их на примере.

1. На множестве *А =* {1, 2, 4} задано отношение: *Р*: « *х* делится на *у*» или

*P =* {(*x ,y*)⏐(*x ,y*)∈ *А*2 и *х  у*}

Способ задания — *указанием характеристического свойства.*

2. *Перечислением всех пар элементов,* которые находятся в данном отношении (отношение на конечном множестве).

*P =* {(1,1), (2, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 4), (4, 2)}

3. *При помощи графика* (отношение на числовом множестве).

*у* (*А*)

4

3

2

1

0 1234 *х*(*А*)

4. *При помощи графа* (отношение на конечном множестве).

Граф отношения отличается от графа соответствия тем, что обозначается только одно множество.

1

4

2

Точки обозначают элементы данного множества, стрелки связывают все пары точек, которые обозначают элементы множества (в данном случае числа), находящиеся в данном отношении.

Так как каждое число делится само на себя, поэтому граф данного отношения будет иметь стрелки, начало и конец которых совпадут. Такие стрелки на графе называют *петлями.*

**Свойства отношений**

Свойства отношений между элементами одного множества выявим на примерах.

**І.**Пример 1. На множестве *В* ={1, 2, 4} зададим два отношения:

*Р*1: «*х* делит *у*», *Р*2: «*х* < *у*»

4

1

2

2

1

4

*Р*1 *Р*2

*Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется **рефлексивным**, если о *любом элементе* множества *Х* можно сказать, что он находится в отношении *R* с самим собой.

*Р1*—рефлексивное отношение.

*Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется антирефлексивным*,* если о *любом элементе* множества *Х* можно сказать, что он **не** находится в отношении *R* с самим собой*.*

*Р2*—антирефлексивное отношение.

Из примеров графов отношений видно: если отношение *R* рефлексивно, то в каждой вершине графа имеется петля. Верно и обратное: граф, каждая вершина которого имеет петлю, представляет собой граф некоторого рефлексивного отношения.

Существуют отношения, которые не являются ни рефлексивными, ни антирефлексивными.

Пример 2. На множестве точек *X =* {*A, B, C, D*} задано отношение

*P3*:«точки *x* и *у* симметричныотносительно прямой *l*»

Граф этого отношения

A

B

C

D

A

B

C

D

**ІІ.** Пример 3. На множестве *A* отрезков *A=*{*a, b, c*} заданы отношения: *Р4* :«*х* параллелен *у*», *Р5:* «*х* короче *у*».

Графы этих отношений

*c*

*a*

*b*

*c*

*c*

*a*

*b*

c

*a*

*b*

*Р4  Р5*

*Определение.*Отношение *R* на множествеX называется **симметричным**, если для *любых двух* различных элементов *х, у* из множества *Х* из того, что элемент *х* находится в отношении *R* с элементом *у,* следует, что элемент *у* находится в отношении *R* с элементом *х.*

*Р4 —* симметричное отношение*.*

*Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется **антисимметричным**, если для двух различных элементов *х, у* из множества *Х* из того, что элемент *х* *находится* в отношении *R* с элементом *у*, следует, что элемент *у не находится* в отношении *R* с элементом *х.*

*Р5 —* антисимметричное отношение*.*

Существуют отношения, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными.

Пример 4. На множестве детей одной семьи *С =*{Коля,Таня,Миша} задано отношение *S*: «*х* брат *у*».

*M*

*K*

*T*

c

**ІІІ.** Обратим внимание еще на одну особенность графов отношений *Р4*: «*х* параллельно *у*» и *Р5*: «*х* короче *у*»: если стрелка идет от первого элемента ко второму и от второго — к третьему, то обязательно есть стрелка, идущая от первого элемента к третьему.

Эта особенность отношений называется **транзитивностью**.

*Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется **транзитивным**, если для любых трёх элементов *х, у, z* из множества *Х* из того, что элемент *х находится* в отношении *R* с элементом *у* и элемент *у находится* в отношении *R* с элементом *z,* следует, что элемент *х находится* в отношении *R* с элементом *z.*

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают.

Пример.На множестве *D* прямых *D =* {*a, b, c*} задано отношение

*Р7:* «*х* ⊥ *у*». Граф этого отношения

*c*

*b*

c

*а*

c

*a*

*c*

*b*

c

**Виды отношений на множестве**

**І.** *Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется отношением **эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Например, отношения «*х = у*» на *R,* «*х* и *у* заканчиваются одной и той же цифрой» на множестве *N* и т.д.

Сформулируем и примем без доказательства теорему.

*Теорема*. Если на множестве *X* задано отношение эквивалентности, то оно разбивает это множество на подмножества, которые попарно не пересекаются (классы эквивалентности), Верно и обратное: Если какое-либо отношение на множестве *Х,* определило разбиение этого множества на классы, то это отношение является отношениемэквивалентности.

Эта теорема выражает связь между отношением эквивалентности и разбиением множества на классы.

*Пример:* На множестведетей *D* *=* {А,Т,П, К, М, О} задано отношение   
*Р*: « *х* ровесник *у*».

A

T

П

O

K

М

Это отношение эквивалентности. Получили 3 класса: *К*1 = {А, Т, П}, *К*2 = {М},

*К*3 = {К, О}.

Элементы одного класса находятся в данном отношении, а элементы разных классов — нет.

**ІІ.** *Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется **отношением строгого порядка**, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

*Например,* отношения «*x* > *y*» на *R,* «*x* длиннее *y*» на множестве отрезков.

*Определение.*Отношение *R* на множестве *X* называется отношением **нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

*Например,* отношения «*x* > *y*» на *R,* «*х* делится на *у*» на *N*.

*Определение.*Множество *X* с заданным на нем отношением называется **упорядоченным множеством**.

*Пример.* На множестве *Х* = {2, 8, 12, 32} заданы отношения:

*R*1: «*х* < *у*»,  *R*2: «*х* делится на *у*».

2

32

12

8

2

32

12

8

Являясь отношениями порядка, *R*1 и *R*2 упорядочивают множество *Х* по-разному. Отношение *R1*: «*х* < *у*», позволяет сравнивать два любых различных числа их множества *Х* (любые две вершины соединены стрелкой), а отношение *R*2:   
«*х* делится на *у*» таким свойством не обладает.

Например, стрелки не связывают пары чисел 12 и 8, 32 и 12 (нельзя сказать, что «12 кратно 8» или «32 кратно 12»). Говорят, что отношение «*х* < *у*» обладает свойством линейности, а «*х* делится на *у*» не обладает.

*Определение.*Отношение порядка *R* на множестве *Х* называется отношением **линейного порядка**, если для любых двух различных элементов *х* и *у* из множества *Х* можно сказать, что или *х* находится в отношении *R* с *у* или *у* находится в отношении *R* с *х.*

*Определение.*Множество *Х* с заданным на нем отношением линейного порядка называется **линейно упорядоченным.**

Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует большое количество отношений, которые не являются ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

**ІІІ.** *Определение.*Отношение R на множестве X называется отношением толерантности (толерантностью), если оно рефлексивно и симметрично. Примером отношения толерантности может служить отношение «быть знакомым» на множестве людей.

**Определение.**Бинарное отношение, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется ***Отношением эквивалентности***.

Если *R* является отношением эквивалентности, то часто вместо *ARb* пишут *A~Rb*, или просто *A ~ b*, если ясно, о каком отношении эквивалентности *R* идет речь.

**Примеры**Отношений эквивалентности.

1. Отношения подобия треугольников.

2. Отношение тождества на множестве алгебраических выражений.

3. Отношение параллельности на множестве прямых.

4. Отношение учиться в одной группе на множестве студентов.

5. Отношение получить одну и ту же оценку по математике на экзамене.

6. Отношение иметь одинаковый остаток при делении на 7 на множестве

целых чисел **Z**.

7. На множестве комплексных чисел **С** отношение иметь одинаковый модуль: z1~z2, если | z1 | = | z2 |.

**Контрпримеры**(отношения, не являющиеся отношениями эквивалентности).

1. http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image384.png на множестве чисел (не выполняется свойство симметричности).

2. http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image385.png на множестве прямых (нерефлексивно и нетранзитивно).

3. Отношение http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image386.png на **Z**(несимметрично).

**Определение.** Пусть на множестве *А* задано отношение эквивалентности ~ и *Ahttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.pngA*. Множество всех элементов http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image387.png таких, что *X*~*A*, называется ***Смежным классом*** множества *А*, или ***Классом эквивалентности***, и обозначается [*A*]*.*

**Свойства** классов смежности.

**1.**http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image388.png ( очевидно, так как *A ~ a*, ввиду рефлективности).

**2.**Если *A~b*, то [*a* ]*=* [*b* ].

**Доказательство.** Проверим, что [*A*]*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image348.png* [*B*]*.* Пусть *Xhttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png*[*A*]*.*Тогда *X ~ a*. Но так как *A~b*, то по свойству транзитивности *X~b*И, следовательно, *Xhttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png*[*B*]*.*В силу симметричности, имеем: *B~a*. Далее, поменяв местами *A* и *B* и все повторив, получим [*B*]*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image348.png*[*A*]*.*

**Замечание.** Свойство **2** означает, что любой класс смежности однозначно определяется любым своим представителем. Тем самым, все представители класса равноправны при определении этого класса.

**3.**Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

**Доказательство.** Пусть *Chttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png A*, *Chttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png*[*A*]*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image389.png*[*B*]*.*Так как *Chttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png*[*A*]*,*То [*C*]*=*[*A*]*.* А так как

[*C*]*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image352.png b*, то [*C*]*=*[*B*]. Поэтому [*A*]*=*[*B*].

**Определение.**Совокупность всех различных смежных классов множества *А* по отношению эквивалентности ~ называется ***Фактор -- множеством***Множества *А* и обозначается *A/~.*

**Замечание.** Свойство **3** показывает, что такая совокупность всех различных смежных классов (фактор—множество) представляет собой некоторое разбиение множества *А*.

Обратно, всякое разбиение множества *А=А*1*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image390.pngА*2*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image390.png…http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image390.png Аn* ( где *Аihttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image389.pngAj =* Ø*http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image391.png*) определяет соответствующее отношение эквивалентности на множестве *А*.

Действительно, если задано разбиение множества *A* (такое, как выше), то положим *A~b*, если a и *B* принадлежат одному и тому же подмножеству *Ai* (рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность легко следует из того, что *Aihttp://matica.org.ua/images/stories/LDM/image389.pngAj =*Ø *http://matica.org.ua/images/stories/LDM/image391.png*)*.*