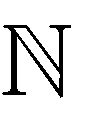
**Раздел 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей**

**Лекция 3. Метод математической индукции. Разные формы метода математической индукции. Применение метода математической индукции для доказательства равенств и неравенств.**

Для доказательств часто применяется метод математической индукции, который состоит в следующем:

***Первая формулировка ММИ***. Если про предикат *P* на множестве  (свойство *P(n)* относительно натуральных *n*) известно, что:

1. (*база индукции*) при *n=n0* он истинен (*P(n0)* – истинное утверждение);
2. (*индуктивный переход*) для любого натурального *k≥ n0 из истинности P(k)* (*посылка индукции*) следует истинность *P(k+1)*,тогда предикат *P(n)* истинен при всех натуральных *n≥ n0 .*

**Пример.** При всех натуральных *n* найдите сумму:

S(n)=.

При n=1 S(1)=.

При n=2 S(2)=.

При n=3 S(3)=

После этих вычислений появляется гипотеза, что при всех натуральных n S(n)=. Докажем это. Предикат P(n), истинность которого на множестве натуральных чисел мы будем доказывать, состоит в том, что S(n)=.. Базой индукции будет служить рассмотренное выше значение n=1.

Пусть утверждение верно при n=k, то есть S(k)=.. Требуется доказать его истинность при n=k+1, то есть что S(k+1)=.

S(k+1)=..

**Вторая формулировка метода математической индукции**: Если про предикат P на множестве натуральных чисел (свойство P(n) относительно натуральных n) известно, что

(База индукции) При n=n0 он истинен (P(n0) - истинное)

(Индуктивный переход) Для любого натурального k ≥ n0 из истинности P(n) для всех таких, что n0 ≤ n ≤ k (посылка индукции), следует истинность P(k+1), тогда предикат истинен для всех натуральных n ≥ n0.

Наличие «базы индукции» и «индуктивного перехода» обязательно в доказательстве методам математической индукции. Покажем это на двух примерах.

**Пример.** Докажем, что все натуральные числа равны.

«Доказательство».

Если мы докажем, что любое натуральное число n равно числу n+1, то из этого будет следовать утверждение примера.

Посылка индукции. Пусть для натурального числа k равенство k=k+1 выполняется.

Требуется доказать, что равенство n=n+1 выполняется для n=k+1, то есть, что k+1=k+2.

Так как k=k+1, то прибавив к обеим частям этого верного равенства 1, получим k+1=k+2, что и требовалось доказать.

Отсутствие в этом «доказательстве» базы индукции привело к очевидно неверному результату.

**Пример.** В квадратный трехчлен n2 +n+41 будем подставлять натуральные значения n. При n равных 0; 1; 2; 3 будем, как легко убедиться, получать простые числа. Если это вас не убедило, то можем продолжать. Вплоть до n=39 будем получать простые числа. После такого большого числа проверок можем ли мы сделать вывод, что при всех натуральных значениях n число n2 +n+41 - простое? Отсутствие индуктивного перехода не позволяет это сделать. И, действительно, как легко увидеть, при n=40 значение трехчлена равно 412 - составное число.

**Контрольные вопросы**

1. Обоснуйте метод математической индукции.

2. Можно ли применять метод математической индукции для целых чисел? Почему?

3. Можно ли применять метод математической индукции для натуральных чисел, больших 16? Почему?

4. Является ли метод математической индукции индуктивным методом рассуждений?