**Исторические сведения**

Понятие "вероятность", "случайность" существовали с незапамятных времен и употреблялись как в философских трактатах, так и в повседневной бытовой лексике.

Первая попытка вероятностных исчислений отмечена в трудах Г. Галилея (1564-1642), который использовал вероятность в расчетах измерений физических величин. Однако дату рождения теории вероятностей чаще всего относят к 1654 г. и связывают это с одним курьезным случаем, происшедшим с Шевалье де Море. Азартный француз выиграл большую сумму денег на пари, поспорив, что при четырехкратном броске игральной кости появится хоть одна "шестерка", и тут же проиграл его, поставив на появлении двух "шестерок" подряд в серии из 24 бросков.

Обескураженный Шевалье обратился к знаменитому математику Б. Паскалю (1623-1662). В результате творческой переписки великих французских математиков появилось не только решение поставленной де Море задачи, но и ряд теорий, заложивших основу исчисления вероятностей.

Становление теории вероятностей связано с трудами Б. Паскаля, П.Ферма, Я. Бернулли в XVII в. и их попытками проведения расчетов в азартных играх, поэтому игровые модели чрезвычайно популярны при изложении теории. Дальнейшее развитие теория вероятностей получила в XVIII века в трудах К. Гаусса, П. Лапласа, С. Пуассона в связи с широким применением математических методов анализа. В XIX веке русские математики П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов провели обоснование вероятностного метода, доказав ряд предельных теорем. В дальнейшем теория вероятностей получила развитие в работах Н. Винера, Р. Фишера, А.Н. Колмогорова и ряда других ученых XX века.

Итак, вероятностью измеряется неопределенность. Вероятность находится в центре статистической теории и измеряет возможность того или иного события.

**Совместные и несовместные события.**

**Противоположные события.**

**Полная группа событий**

Рассмотрим основные понятия теории вероятностей.

**Опыт** (**эксперимент, испытание**) – всякое действие в результате которого может что-то произойти (исчезнуть, измениться,…).

**Событие** – любой исход эксперимента.

**Случайное событие** – событие, которое в результате данного эксперимента может произойти либо не произойти.

События обозначают большими латинскими буквами *A, B, C,…* , иногда с индексами , , , ….

**Теория вероятностей** – наука, которая занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным событиям.

**Достоверное событие** – событие, которое обязательно произойдет в результате данного эксперимента.

**Невозможное событие** – событие, которое никогда не произойдет в результате данного эксперимента.

**Противоположное событие** – событие «не » () наступает всякий раз, когда событие *A* не наступает. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху.

События делятся на элементарные (ЭС) и сложные (СС). События называются **элементарными**, если их наступление нельзя связать с наступлением других событий в этом опыте (элементарное событие «нельзя разложить на другие события»). **Сложные** события состоят из нескольких элементарных.

**Примеры.**

1. Падение монеты при подбрасывании вверх – элементарное событие.

2. Вытягивание из колоды 2 королей – составное событие.

События *A* и *B* называются **равными**, если наступление события *A*ведет за собой наступление события *B* и наоборот. Равные события обозначают *A = B.*

**Пример.**

*A –* «Выпадение при падении кубика 6 очков».

*B –* «Выпадение при падении кубика количества очков, кратного 2 и 3».

В данном случае *A = B.*

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара противоположных событий. Два события называют **совместными**, если в результате эксперимента они могут одновременно произойти.

Множество несовместных событий образуют **полную группу событий**, если в результате отдельно взятого испытания обязательно появится одно из этих событий. Очевидно, что любая пара противоположных событий образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события.

**Пример**

При подбрасывании игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора событий:

– в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;  
 – … 2 очка;  
 – … 3 очка;  
 – … 4 очка;  
 – … 5 очков;  
 – … 6 очков.

События*, , , , ,* **несовместны** (поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других) **образуют полную группу** (так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий).

**Совместные** события менее значимы с точки зрения решения практических задач. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает появление другого.

**Пример:**

– из колоды карт будет извлечена пиковая карта;

– из колоды карт будет извлечена семёрка.

**Определение вероятности**

Существуют различные подходы к определению вероятности.

* **Субъективная вероятность** – индивидуальная степень уверенности, что данное событие; произойдет (например, что «конец света» случится в 2050 г.).
* **Априорная вероятность** – требует знания теоретической модели, называемой распределением вероятности, которая отображает вероятности всех возможных результатов эксперимента. Например, генетическая теория позволяет нам отобразить вероятность цвета глаз у ребенка, если у матери голубые глаза, а у отца карие, первоначально определяя весь возможный генотип цвета глаз у ребенка и его вероятности.
* **Частотная (статистическая) вероятность** – соотношение числа событий, которые, могли бы произойти, если бы мы повторяли эксперимент огромное число раз (например, сколько раз выпал бы «орел», если бросать монету 1000 раз).
* **Классическое определение вероятности**.
* **Геометрическая вероятность.**

Рассмотрим подробнее два последних определения.

Вероятность некоторого события *A* обозначается большой латинской буквой *P*, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента.

**Пример:**

1. *P*(*A*)– вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл».

2. – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква *p*. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий и их вероятностей *P*(*A*), *P*(*B*) – в пользу следующей стилистики:

* – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
* – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков

**Классическое определение вероятности**

Вероятностью наступления события *A* в некотором испытании называют отношение  , где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, **благоприятствующих** событию *A*.

При подбрасывании монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов *n=*2; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен. Событию *A* благоприятствует *m*=1 исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: P(*A*)  .

Аналогично – в результате броска кубика может появиться *n=*6 элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию благоприятствует единственный *m*=1 исход (выпадение пятёрки). Поэтому:  .

Вероятность часто выражают в процентах. Количество всевозможных исходов принимают за 100%. Так вероятность события из последнего примера равна 50%.

***Выводы из классического определения вероятности:***

1. Вероятность наступления события не может превышать 1. ().

2. Вероятность события не может быть отрицательной.

3. Из п.1 и п.2 следует, что .

4. Вероятность наступления *достоверного* события равна 1. ().

5. Вероятность наступления невозможного события равна 0. ().

6. Пусть событие *A* наступает в *m* исходах эксперимента. Тогда событие «не *A*» () наступает в *n – m* исходах. Тогда

,

значит .

Вероятность наступления одного из двух противоположных событий равна  1.

7. Классическое определение вероятности используют только, если *m* и *n* принимают натуральные значения.

**Статистическое определение вероятности**

Пусть было проведено ***N*** испытаний, в каждом из которых могло появиться некоторое событие *А.* Появление события *А* было зафиксировано *М*раз. Вероятность события *А* оценивается ***относительной частотой*** (частостью) появления события *А,* которая представляет собой отношение числа событий, в которых появилось событие *А,* к общему числу событий.

Многочисленные эксперименты такого рода показывают, что при больших *N*отношение *M/N,* называемое частостью, остается примерно постоянным.

В статистическом определении *вероятностью* события *А* называется постоянная величина, которая является предельным значенем частостей при неограниченном возрастании числа *N:*

*Р*(*А*)=const.

Английский ученый Пирсон произвел 23 000 бросаний монеты. При этом герб появился 11 512 раз. Значит, относительная частота появления герба равна: *Р*(*А*)= 0,5005 0,5. Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

**Геометрические вероятности**

Это понятие касается следующего класса задач. Представим себе, что на плоскости расположены две области *M* и *m* , причем область *m* целиком распложена в области *M* . Их площади, соответственно, равны *Sm* и *SM* . В область *M* наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что точка попадёт также и в область *m* ?

Если предположить, что точка может попасть в любую часть области *M*, а вероятность попадания в область *m* пропорциональна лишь её площади и не зависит ни от расположения *m* , ни от её формы, то искомая вероятность:

*p = .*

Это и есть *«правило нахождения геометрической вероятности».*

Аналогично могут быть определены вероятности попадания точки:

1) в объёмную область *v* величиной *Vv* , содержащуюся в объёмной области *V* величиной *VV* , если точка брошена наугад в объём *V* :

*p =* ;

2) на отрезок *l* величиной *Ll*, расположенный на отрезке *L* величиной *LL*, если точка брошена наугад на отрезок *L*:

*p =*

**Теоремы сложения и умножения вероятностей.**

**Зависимые и независимые события**

**Теорема 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий или *B (без разницы какого)*,  равна сумме вероятностей этих событий:

*P*(*A + B*) = *P* +*P*(*B*).

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для *n* несовместных событий 

Следует отметить, что для совместных событий равенство будет **неверным.**

**Теорема 2. Теорема сложения вероятностей совместных событий**

Вероятность суммы совместных событий *А* и *В* равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

*Р(А* ***+*** *В)* ***=*** *Р(А) + Р(В)* ***–*** *Р(А В).*

**Теорема 3.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

Событие *А* называется ***зависимым*** от события *В,* если вероятность события *А* меняется в зависимости от того, произошло событие *В* или нет. Вероятность события *А,* вычисленная при условии, что произошло событие *В,* называется ***условной вероятностью*** события *А* и обозначается *(А)* (или *Р(А/В)),* говорят: «вероятность события *А* при условии *В».*

Условная вероятность *РВ(А)* определяется формулой (при *Р(В)>0)*

На основании рассмотренной формулы условной вероятности можно доказать теоремы умножения вероятностей:

**Теорема 4. Теорема умножения зависимых событий.**

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

*Р(АВ) = Р(А)•РА(В),* при *Р(А) > 0*

или *Р(АВ) = Р(В)•РВ(А),* при *Р(В) > 0*

Событие *А* называется ***не***з***ависимым*** от события *В,* если вероятность события *А* не меняется в зависимости от того, произошло событие *В* или нет.

**Теорема 5.** **Теорема умножения независимых событий.**

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

*Р(АВ) = Р(А) • Р(В).*

Часто последнее соотношение используют как определение независимых событий: события называют ***независимыми,*** если вероятность их произведения равна произведению вероятностей.

**Формула полной вероятности и формула Байеса**

Рассмотрим *п* попарно несовместных событий *B*1 *B*2*,*…, *Bп.* Они образуют ***полную группу событий,*** если они попарно несовместны, а их сумма является достоверным событием, а событие *A* может осуществляться только при выполнении одного из этих событий, то

*P(A)= P(B*1*)PB1(A) + P(B*2*)PB2(A) + … + P(B*n*)PBn(A) = .*

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Рассмотрим случай, когда событие *A* произошло, а нужно оценить вероятность *РА(Вi),* если события *B1*, *B2*, …, *Bn* образуют полную группу событий (т.е. какое-то из них непременно происходит) несовместных (т.е. два разных события одновременно произойти не могут). В этом случае воспользуемся формулой Байеса: